

规避障碍物的 G^2 连续有理二次 Bézier 样条曲线

陈 军^{1,2)}, 王国瑾^{1)*}

¹⁾(浙江大学数学系计算机图形图像研究所 杭州 310027)

²⁾(宁波工程学院理学院 宁波 315211)

(gjwang@hzcnc.com)

摘 要: 为便于运动机器人快速平滑地移动,对由线段构成的、能够规避障碍物的引导多边形进行光顺,得到 G^2 连续的有理二次样条曲线. 首先对引导多边形进行改进,插入部分中点作为新的控制顶点;然后求解每一段曲线的形状因子,并对所有的形状因子进行比较,取其中最大的形状因子来构造整条曲线,使之能够规避所有障碍物的凸包,同时能够保持 G^2 连续. 与已有方法相比,文中构造的曲线次数虽然较低,但仍能够保证曲线整体 G^2 连续,且保形性良好;曲线与引导多边形的拐点数目相同,无需解高次方程,直接计算就可得到结果;控制多边形直观可见,便于对曲线形状进行控制. 最后列举了 2 个数值实例,以验证文中算法是简单、有效的.

关键词: CAGD; 有理 2 次 Bézier 曲线; G^2 连续; 路径规划; 障碍物规避

中图法分类号: TP391

An Obstacle-Avoiding Rational Quadratic Bézier Spline Curve with G^2 Continuity

Chen Jun^{1,2)} and Wang Guojin^{1)*}

¹⁾(Institute of Computer Graphic and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

²⁾(Faculty of Science, Ningbo University of Technology, Ningbo 315211)

Abstract: Given a set of obstacles in a plane, an algorithm for finding a G^2 continuous, obstacle-avoiding curve in the plane is presented in this paper. First, we partition the guiding polyline into control polygon sections by inserting several midpoints of polyline. Then, we find respectively shape parameter of each curve section to avoid the vertices of the convex hull of an obstacle. Finally, we choose the maximal shape parameter to avoid all the obstacles. Comparing with previous methods, the curves constructed by our approach have the following advantages: 1) it is G^2 continuous but with low degree; 2) it is shape-preserving, and the number of inflection point is the same as the one of the guiding polyline path; 3) it is obtained directly, and we need not to solve the fourth order equations; 4) the control polygon is visual, and we can adjust the curve easily. Finally, two examples are presented to demonstrate the effectiveness and validity of the proposed algorithm.

Key words: CAGD; degree 2 rational Bézier curve; G^2 continuity; path planning; obstacle-avoiding

路径规划是指根据全局地图数据信息,规划出从起始点到目标点的一条无碰撞、可通过的路径,是移动机器人或车辆导航与控制的基础. 国内外的专家学者在路径规划方面已经进行了大量的研究工

作,并提出了很多有效算法,如基于或然率^[1]、虚拟现实^[2]、遗传算法^[3]等. 特别地,有些算法得到的路径由简单的直线段所构成^[1-3],本文称之为引导多边形. 鉴于机器人或车辆快速运动的特点,为便于其沿

收稿日期:2010-02-23;修回日期:2010-12-24. 基金项目:国家自然科学基金(61070065);国家自然科学基金重点项目(60933007).

陈 军(1982—),男,博士,讲师,主要研究方向为 CAGD&CG、数字几何处理(chenjun88455579@163.com);王国瑾(1944—),男,教授,博士生导师,论文通讯作者,主要研究方向为 CAGD&CG、数字几何处理.

着路径平滑移动,文献[4]首次提出了一种光顺引导多边形的算法,并得到了能够有效规避障碍物的光滑曲线.由于引导多边形本身已经规避了障碍物,因此这类算法构造的曲线只需尽可能地贴近引导多边形,就可以有效规避障碍物.

文献[4]预先将引导多边形在拐点处进行分割,将其分解为若干个C形状的凸多边形,然后对每个凸多边形分别构造足够贴近引导多边形且保持 G^2 连续的三次Bézier样条曲线.这样,在引导多边形的各个拐点处,样条曲线只能保持 G^1 连续.此外,文献[5]构造了一类 G^1 连续的可理二次Bézier样条曲线;文献[6]构造了一类 G^2 连续的可理三次Bézier样条曲线作为规避障碍物的光滑曲线,但其需要用数值求解一个四次方程,并要从初始曲线开始不断迭代,比较烦琐.

在机器人或车辆的运动过程中,为使前进方向的变化能够连续,需要路径曲线保持切方向连续;为使转动半径的变化也能够连续,需要路径曲线保持曲率连续.也就是说,此时需要路径曲线整体保持 G^2 连续.一般认为,要想使整条曲线达到整体的 G^2 连续,三次样条是必不可少的.然而次数较高的代价是计算费时.那么,二次参数曲线是否能保持三次参数曲线的优点,诸如曲率连续、形状控制呢?回答是肯定的,只要把可理二次Bézier曲线改为可理二次Bézier样条曲线即可.本文从文献[5,7]得到启发,构造出一类保持 G^2 连续的可理二次Bézier样条曲线.与文献[4-5]相比,本文算法连续阶更高;与文献[4,6]相比,本文算法次数更低,而且引导多边形就是控制多边形,有利于对曲线形状的直观调控.更应强调的是,本文算法无需解方程,计算简单、直接.

1 可理二次Bézier曲线的构造

1.1 可理二次Bézier曲线的 G^2 连续拼接

一条控制顶点为 $P_0P_1P_2$ 的可理二次Bézier曲线可表示为标准型

$$R(t) = \frac{B_0^2(t)P_0 + B_1^2(t)\omega P_1 + B_2^2(t)P_2}{B_0^2(t) + B_1^2(t)\omega + B_2^2(t)}, \quad \omega > 0,$$

$$B_i^2(t) = \binom{2}{i} (1-t)^{2-i} t^i; i=0,1,2.$$

那么,依次给定平面的5个点 $\{P_i(x_i, y_i)\}_{i=0}^4$,可以产生2条可理二次Bézier曲线 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$,其控制顶点分别为 P_0, P_1, P_2 和 P_2, P_3, P_4 ,权因子分别为 ω_1 和 ω_2 .为使 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 之间保持 G^2 连

续,只需满足^[7]: P_1, P_2, P_3 三点共线和

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{\|(P_3 - P_2) \times (P_1 - P_2)\| \cdot \|P_2 - P_1\|^3}{\|(P_0 - P_2) \times (P_1 - P_2)\| \cdot \|P_3 - P_2\|^3}} \quad (1)$$

1.2 可理二次Bézier曲线的障碍物规避

引理1^[5].对于 $\triangle P_0P_1P_2$ 内部的任意一点 P ,都存在如图1所示的唯一一条以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、以

$$\bar{\omega} = \frac{B_0^2(t)(P_0 - P) \cdot (P - P_1) + B_2^2(t)(P_2 - P) \cdot (P - P_1)}{B_1^2(t)(P - P_1) \cdot (P - P_1)}$$

为权因子的可理二次Bézier曲线 $\tilde{R}(t)$ 经过 P ;其中,

$$t = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r} + \sqrt{1-r}}, \quad r = \frac{\|(P_1 - P) \times (P_1 - P_0)\|}{\|(P_1 - P) \times (P_2 - P_0)\|}.$$

相应地,对于以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、以任意实数 $\omega(\omega > \bar{\omega})$ 为权因子的可理二次Bézier曲线 $R(t)$,点 P 必在由曲线 $R(t)$,直线段 P_0P_1, P_1P_2 所围成的区域内.

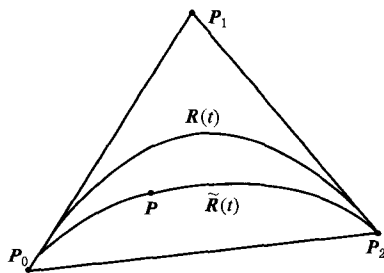


图1 可理二次Bézier曲线插值点的情况

注1^[5].由于 $\triangle P_0P_1P_2$ 内任意一点 P 都唯一确定一个权因子 $\bar{\omega}$,使得控制顶点为 P_0, P_1, P_2 ,且权因子为 $\bar{\omega}$ 的可理二次Bézier曲线经过点 P .那么不同的权因子所对应的可理二次Bézier曲线除2个端点外没有其他交点.当 $\omega > \bar{\omega}$ 时, $R(t)$ 一定在 P 点和控制多边形 $P_0P_1P_2$ 之间,并且随着权因子 ω 的增大, $R(t)$ 越来越远离 P 点,越来越靠近控制多边形 $P_0P_1P_2$.

为方便起见,对于一般形状的障碍物,可以用一个能够覆盖它的凸多边形来代替^[8].这样,障碍物的规避求解就转化为对一系列线段的规避,使得产生的可理二次Bézier曲线在线段和控制多边形之间.文献[5]同样讨论了规避线段 D_1D_2 的可理二次Bézier曲线,但是如图2所示,生成的曲线与线段 D_1D_2 相切于 P 点,更靠近 P_0P_2 ,而不是靠近控制多边形 $P_0P_1P_2$.要使解曲线在线段 D_1D_2 和控制多边形 $P_0P_1P_2$ 之间,显然只需计算与线段 D_1D_2 相交的所有可理二次Bézier曲线所对应的权因子的值,然后用大于这些值的权因子构造可理二次Bézier曲线

即可. 通过观察, 当点 P 沿着直线从端点 D_1 移动到端点 D_2 时, 经过点 P 的有理二次 Bézier 曲线的权因子应该是连续变动. 那么, 点 P 在 2 个端点处时所对应的权因子之一有可能是与线段 D_1D_2 相交的所有曲线的权因子中的最大者. 这个猜想定理 1 中得到了证明.

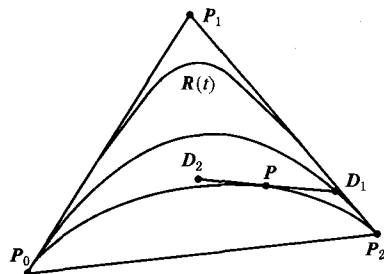


图 2 有理二次 Bézier 曲线与线段相交的情况

定理 1. 对于 $\triangle P_0P_1P_2$ 内部的线段 D_1D_2 , 若以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、通过点 D_1 和 D_2 的 2 条有理二次 Bézier 曲线的权因子分别为 $\omega_1, \omega_2, \omega_1 \geq \omega_2$; 则对于以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、以任意实数 $\omega (\omega > \omega_1)$ 为权因子的有理二次 Bézier 曲线 $R(t)$, 线段 D_1D_2 必不在由曲线 $R(t)$ 和直线段 P_0P_1, P_1P_2 所围成的区域内, 如图 2 所示.

证明. 由于 $\omega > \omega_1 \geq \omega_2$, 根据引理 1, 端点 D_1 和 D_2 都在曲线 $R(t)$ 和线段 P_0P_2 围成的区域 Ω 内. 假设线段 D_1D_2 中有部分线段 $D'_1D'_2$ 不在区域 Ω 内, 其中 D'_1, D'_2 分别为线段 D_1D_2 与区域 Ω 边界的交点. 那么, 显然线段 D_1D_2 所在直线与区域 Ω 至少有 4 个交点, 其中 2 个为 D'_1 和 D'_2 , 另外 2 个在 D_1D_2 的延长线上. 而根据有理 Bézier 曲线的变差缩减性, $R(t)$ 是凸曲线, 所以区域 Ω 的边界是凸的, 不可能与任何直线交于 4 个交点, 故假设不成立. 所以线段 D_1D_2 都在区域 Ω 内, 不在由 $R(t), P_0P_1, P_1P_2$ 所围成的区域内. 证毕.

推论 1. 假设点 D_1 和 D_2 分别在 $\triangle P_0P_1P_2$ 的内部与外部, 且 2 条线段 D_1D_2 和 P_0P_2 相交, 交点为 D_3 . 若以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、通过点 D_1 的有理二次 Bézier 曲线的权因子为 ω_1 , 则对于以 P_0, P_1, P_2 为控制顶点、以任意实数 $\omega (\omega > \omega_1)$ 为权因子的有理二次 Bézier 曲线 $R(t)$, 线段 D_1D_2 必不在由曲线 $R(t)$, 直线段 P_0P_1 和 P_1P_2 所围成的区域内, 如图 3 所示.

证明. 只需要证明线段 D_1D_3 不在由 $R(t), P_0P_1, P_1P_2$ 所围成的区域内即可. 因为以 P_0, P_1, P_2 为控

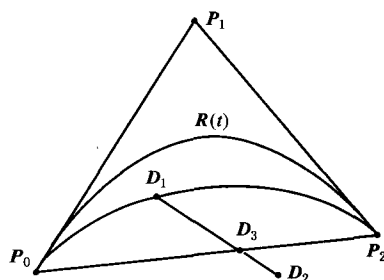


图 3 线段在控制多边形的凸包外的情况

制顶点、经过点 D_3 的有理二次 Bézier 曲线其权因子为 0^[5], 那么根据定理 1, 本推论成立. 证毕.

注 2. 根据定理 1 和推论 1, 已知控制多边形, 要求解能够规避具有多边形轮廓的障碍物的有理二次 Bézier 曲线, 只需对此障碍物的位于控制多边形内部的每一个顶点 P , 依据引理 1 直接计算出相应的权因子, 然后取这些权因子中最大值所对应的有理二次 Bézier 曲线, 就可以规避整个障碍物. 但是对于三次或有理三次 Bézier 曲线而言, 求相应的曲线需要解一系列一元四次方程^[6]. 文献[4]为了快速计算, 不直接求通过障碍物顶点的曲线, 而是调整控制顶点, 使得障碍物在控制多边形的凸包外, 从而得到的曲线一定在障碍物和控制顶点之间. 这样处理固然可以加快计算速度, 却使所得曲线不能贴近障碍物^[4].

2 整体 G^2 连续的可理二次 Bézier 样条曲线

现在来构造多段首尾相连的可理二次 Bézier 曲线, 使之成为在整体上保持 G^2 连续的可理二次 Bézier 样条曲线. 任意 2 段相邻的可理二次 Bézier 曲线若保持 G^2 连续, 必须满足式(1). 那么对多段首尾相连的情形, 当其中某一段可理二次 Bézier 曲线确定以后, 则其余各段曲线的权因子也被依次确定, 从而整条曲线形状被确定. 不妨设首段曲线的权因子 ω^* 为整条曲线的形状因子. 这样, 对于每一个障碍物, 都存在一个相应的 ω^* , 使得整条曲线刚好经过障碍物的一个角点. 显然, 随着 ω^* 的增大, 每一段曲线的权因子也增大, 于是曲线也越来越趋向于引导多边形. 所以, 只要在所有的 ω^* 里选择最大值, 其所对应的曲线才能最接近引导多边形, 并且能够规避所有障碍物.

算法 1. 规避算法

Step1. 对障碍物进行预处理, 用一个凸多边形的包围盒代替障碍物本身. 进一步, 用多边形障碍物在控制多边形

内部的线段代替整个多边形障碍物. 鉴于引导多边形已经规避了障碍物,所以凸多边形本身不应与引导多边形相交.

Step2. 除了引导多边形的首末 2 条线段外,在其他控制边的中点插入新的控制顶点,则所有控制顶点一起形成一个新的控制多边形. 如图 4 所示,首先在引导多边形 $P_0P_1\cdots P_5$ 中插入新的控制顶点 Q_1, Q_2, Q_3 , 其中 Q_1, Q_2 是引导多边形的拐点, 这样, 整个引导多边形分为 $P_0P_1Q_1, Q_1P_2Q_2, Q_2P_3Q_3$ 和 $Q_3P_4P_5$ 4 段, 它们分别为新生成的有理二次 Bézier 曲线的 4 个控制多边形. 此时, 每 2 个相邻的控制多边形的相邻控制边都是共线的, 保证了生成的相邻曲线之间保持 G^1 连续. 由于每一段有理二次 Bézier 曲线都是凸曲线, 所以最终生成的整条曲线只在 Q_1, Q_2 上存在拐点. 显然, 该构造方法不增加引导多边形的拐点数, 具有良好的保凸性.

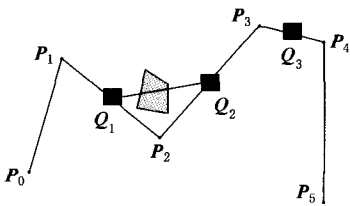


图 4 对引导多边形的部分边插入中点

Step3. 以图 4 中的障碍物为例, 需要考虑控制顶点为 $Q_1P_2Q_2$ 的一段有理二次 Bézier 曲线, 使得它能够规避障碍物. 这只要对每个在 $\triangle Q_1P_2Q_2$ 内的顶点计算相应的权因子 ω , 再取最大值即可. 然后, 可得到由 $Q_1P_2Q_2$ 决定的整条曲线的形状因子 ω^* . 最后, 对于由各个控制多边形确定的形状因子 ω^* 取最大值, 就可以得到能够规避所有障碍物的有理二次 Bézier 样条曲线.

由算法 1 可知, 本文生成的有理二次 Bézier 样条曲线其拐点数目与引导多边形拐点数目一致, 具有良好的保凸性. 这个结果与文献[4-6]相同. 但文献[4]为了使计算简便, 调整控制顶点令所有障碍物都被排除在控制多边形的凸包外, 以得到整条曲线的形状参数, 这会使所得曲线与障碍物距离较远. 而本文算法却能使所得曲线经过部分障碍物的角点, 从而相对贴近障碍物. 同时, 本文算法计算非常简单, 不像文献[4, 6]那样, 为使曲线恰好经过障碍物的某个顶点, 需要用牛顿迭代法解多个一元四次方程; 至于文献[5], 虽然计算简单、直接, 却达不到本文所提出的 G^2 连续.

3 数值实例

图 5 展示了对已知的已经规避障碍物的引导多边形进行光顺, 得到相应的能够对障碍物进行规避的有理二次 Bézier 样条曲线, 且曲线保持整体 G^2

连续. 其中图 5 b 所示的障碍物与引导多边形来自文献[9]中的图 6. 显然, 所得曲线的拐点与引导多边形的拐点数一致(图 5 a, 5 b 中, 拐点数分别是 1 个和 3 个), 具有良好的保凸性.

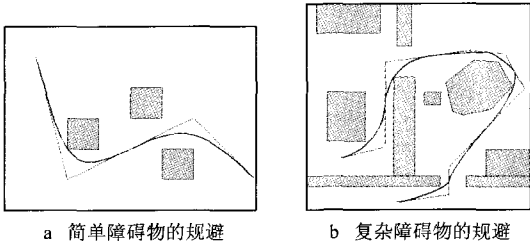


图 5 障碍物的规避

4 总 结

本文基于能够规避障碍物的引导多边形, 得到相应的 G^2 连续的可理二次 Bézier 样条曲线. 与文献[4]相比, 本文算法具有如下优点:

- 1) 所得有理二次 Bézier 样条曲线的连续阶提高至整体 G^2 , 但是次数更低, 这使得计算简化; 而文献[4]构造的曲线次数较高, 在拐点处却只达到 G^1 连续.
- 2) 保凸性良好, 所得有理二次 Bézier 样条曲线与引导多边形的拐点数目相同.
- 3) 计算简单, 无需解方程, 所得有理二次 Bézier 样条曲线相对贴近障碍物; 而文献[4]生成的曲线离障碍物较远, 若要达到同样效果必须解多个一元四次方程.
- 4) 所得有理二次 Bézier 样条曲线的控制顶点即为引导多边形的顶点及其部分边的中点, 这使得引导多边形与所得曲线关系直观, 便于操作.

但是, 由于本文得到的参数曲线是有理形式的, 在某些求导求积的场合里可能导致计算费时, 这需要在具体应用时有所选择.

参考文献 (References):

[1] Sánchez G, Latombe J C. A single-query bi-directional probabilistic roadmap planner with lazy collision checking [M] //Jarvis R A, Zelinsky A. Springer Tracts in Advanced Robotics, Vol 6. Heidelberg: Springer, 2003; 403-417

[2] Yang Z Y, Chen Y H. Inspection path generation in haptic virtual CMM [J]. Computer-Aided Design & Applications, 2005, 2(1/4): 273-282

3) 采用等价段编码的时序匹配来度量人体运动的逻辑相似性,实现了基于编码匹配的相似运动检索算法,有效地提高了检索性能。

今后,我们将进一步研究运动的高层语义描述与底层特征表示之间的映射关系,为实现基于语义的运动数据检索打下基础。

参考文献(References):

- [1] Lee J, Chai J, Reitsmap P S A, *et al.* Interactive control of avatars animated with human motion data [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2002, 21(3): 491-500
- [2] Kovar L, Gleicher M. Automated extraction and parameterization of motions in large data sets [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2004, 23(3): 559-568
- [3] Pan Hong, Xiao Jun, Wu Fei, *et al.* 3D Human motion retrieval based on key-frames[J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2009, 21(2): 214-222 (in Chinese)
(潘红,肖俊,吴飞,等.基于关键帧的三维人体运动检索[J].*计算机辅助设计与图形学学报*, 2009, 21(2): 214-222)
- [4] Forbes K, Fiume E. An efficient search algorithm for motion data using weighted PCA [C] // *Proceedings of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. New York: ACM Press, 2005: 67-76
- [5] Li C J, Prabhakaran B. Indexing of motion capture data for efficient and fast similarity search [J]. *Journal of Computers*, 2006, 1(3): 35-42
- [6] Müller M, Röder T, Clausen M. Efficient content-based retrieval of motion capture data [J]. *ACM Transactions on Graphics*, 2005, 24(3): 677-685
- [7] Liang X B, Zhang S, Li Q L, *et al.* Intuitive motion retrieval with motion sensors [C] // *Proceedings of Computer Graphics International*. New York: Springer, 2008: 64-71
- [8] Liu F, Zhuang Y T, Wu F, *et al.* 3D motion retrieval with motion index tree [J]. *Computer Vision and Image Understanding*, 2003, 92(2/3): 265-284
- [9] Chiu C Y, Chao S P, Wu M Y, *et al.* Content-based retrieval for human motion data [J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2004, 15(3): 446-466
- [10] Deng Z G, Gu Q, Li Q. Perceptually consistent example-based human motion retrieval [C] // *Proceedings of Symposium on Interactive 3D Graphics and Games*. New York: ACM Press, 2009: 191-198
- [11] Pradhan G N, Li C J, Prabhakaran B. Hierarchical indexing structure for 3D human motions [C] // *Proceedings of the 13th International Multimedia Modeling Conference*. Berlin: Springer, 2007: 386-396
- [3] AL-Taharwa I, Sheta A, AL-Weshah M. A mobile robot path planning using genetic algorithm in static environment [J]. *Journal of Computer Science*, 2008, 4(4): 341-344
- [4] Li Z, Meek D S, Walton D J. A smooth, obstacle-avoiding curve [J]. *Computers & Graphics*, 2006, 30(4): 581-587
- [5] Meek D S, Ong B H, Walton D J. A constrained guided G^1 continuous spline curve [J]. *Computer-Aided Design*, 2003, 35(6): 591-599
- [6] Meek D S, Ong B H, Walton D J. Constrained interpolation with rational cubics [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 2003, 20(5): 253-275
- [7] Zhang Sanyuan, Wang Guozhao. An optimal method for interpolating curvature continuity curves with rational quadratic splines [J]. *Journal of Software*, 2001, 12(8): 1190-1196 (in Chinese)
(张三元,汪国昭.曲率连续的有理二次样条插值的一种优化方法[J].*软件学报*, 2001, 12(8): 1190-1196)
- [8] Schäffer A A, van Wyk C J. Convex hulls of piecewise-smooth Jordan curves [J]. *Journal of Algorithms*, 1987, 8(1): 66-94
- [9] Bourhis G, Horn O, Habert O, *et al.* An autonomous vehicle for people with motor disabilities [J]. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, 2001, 8(1): 20-28

(上接第585页)