

PAR->WPAR

\implies

由划分问题的一个实例 A ,构造广义划分问题的一个实例 B

$$B = A \cup \{b_1\} \cup \{b_2\}$$

$$\text{记 } S_A = \sum_{a_i \in A} S(a_i)$$

我们令

$$\begin{aligned} S(b_1) &= [ck + (c-1)0.5]S_A \\ S(b_2) &= kS_A \end{aligned} \quad (k \geq 1)$$

$$\text{显然 } S(b_1) + S(b_2) > cS_A$$

所以 b_1, b_2 必在广义划分的两侧

设 $A'' \subset A$ 其中的元素与 b_1 在广义划分的同侧

则广义划分两侧的权重之和分别为 $S(b_1) + \sum_{a_i \in A} S(a_i)$ 和 $S(b_2) + \sum_{a_i \in A - A''} S(a_i)$

$$\text{设 } x = \sum_{a_i \in A} S(a_i)$$

对于等式 $S(b_1) + x = c(S(b_2) + S_A - x)$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow [ck + (c-1)0.5]S_A + x = ckS_A + cS_A - cx \\ &\Leftrightarrow (1+c)x = \frac{1+c}{2}S_A \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}S_A \end{aligned} \tag{1}$$

所以原划分问题的实例回答yes,则构造的广义划分实例回答yes

反之构造的广义划分实例回答no

\Leftarrow

对于广义划分的这个实例 $B = A \cup \{b_1\} \cup \{b_2\}$

相应的划分实例为 A

根据前面推导，若存在广义划分，则 b_1 和 b_2 必然位于不同划分

由(1)知，若广义划分回答yes,则满足 $\exists A'' \subset A$

$$\sum_{a_i \in A''} S(a_i) = \frac{1}{2} \sum_{a_i \in A} S(a_i)$$

所以划分问题回答yes,反之原划分问题回答no

综上 规约的时间复杂度是多项式的，所以PAR归约WPAR成立。