Równanie:
$-u'' + u' + 2u = x^3 + x, u'(0) = 1, u'(1) + u(1) = 0$

Znajdowanie rozwiązania dokładnego -metoda przewidywań
rozwiązanie dokładne to suma rozwiązania przewidywanego i rozwiązania równania jednorodnego
$u = u_j + u_p$
Równanie jednorodne, będące lewą stroną powyższego równania:
$-u'' + u' + 2u = 0$
Równanie charakterystyczne mu odpowiadające:
$-r^2 + r + 2 = 0$
$(r-2)(r+1) = 0$
$r_1 = 2, r_2 = -1 \Rightarrow \Delta > 0$
Zatem rozwiązanie równania jednorodnego ma postać:
$u_j = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$
Rozwiązanie przewidywane:
$u_p = ax^3 + bx^2 + cx + d(1)$
$u_p{}' = 3ax^2 + 2bx + c(2)$
$u_p{}'' = 6ax + 2b(3)$
wstawiając (1) ,(2) i (3) do wejściowego równania uzyskujemy:
$-6ax - 2b + 3ax^2 + 2bx + c + 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d = x^3 + x$
$2ax^3 + (3a + 2b)x^2 + (2b + 2c - 6a)x + (-2b + c + 2d) = x^3 + x$
obliczone na podstawie równości wielomianów współczynniki wynoszą:
$a = \frac{1}{2}, b = \frac{-3}{4}, c = \frac{11}{4}, d = \frac{-17}{8}$
stąd:
$u_p = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{17}{8}$
czyli:
$u = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{17}{8}$
$u' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{11}{4}$
Znajdowanie współczynników C:
$u'(0) = 2C_1 e^0 - C_2 e^0 + \frac{11}{4} = 2C_1 - C_2 + \frac{11}{4} = 1$
$u'(1) = 2C_1 e^2 - C_2 e^{-1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{11}{4} = 2C_1 e^2 - C_2 e^{-1} + \frac{11}{4}$

$u(1) = C_1 e^2 + C_2 e^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{11}{4} = C_1 e^2 + C_2 e^{-1} + \frac{3}{8}$

$u(1) + u'(1) = 3C_1 e^2 + \frac{25}{8} = 0$

Wyznaczamy C1:

$C_1 = -\frac{25}{24e^2}$

Wyznaczamy C2:

$C_2 = 2C_1 + \frac{11}{4} - 1 = 2C_1 + \frac{7}{4}$

$C_2 = -\frac{25}{12e^2} + \frac{7}{4}$

Rozwiązanie dokładne:

$u = \left(-\frac{25}{24e^2}\right) e^{2x} + \left(-\frac{25}{12e^2} + \frac{7}{4}\right) e^{-x} + \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{11}{4}x - \frac{17}{8}$

Znajdowanie rozwiązania przybliżonego – metoda różnic skończonych

Dzielę przedział [0;1] na n przedziałów [xi-1,xi], takich, że:

$x_i - x_{i-1} = h = \frac{1}{n}$, zatem $x_i = ih + x_0 = ih$

wykorzystuję przybliżenia pierwszej i drugiej pochodnej:

$u'(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h}$

$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$

wstawiam je do równania $-u'' + u' + 2u = f(x), gdzie f(x) = x^3 + x$

$-\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} + 2u(x_i) = f(x_i)$

(*) $u(x_{i-1})\left[\frac{-1}{h^2} - \frac{1}{2h}\right] + u(x_i)\left[\frac{2}{h^2} + 2\right] + u(x_{i+1})\left[\frac{-1}{h^2} + \frac{1}{2h}\right] = f(x_i)$

Zauważmy, że wzoru (*) nie możemy zastosować dla x0 i dla xn, ponieważ, nie istnieje x-1, ani xn+1, zatem musimy wprowadzić ich zastępcze wartości i korzystając z warunków brzegowych znaleźć równania dla x0 i xn.

dla xn:

$u'(x_n) = \frac{u(x_{n+1}) - u(x_{n-1})}{2h} = -u(x_n)$, zatem

$u(x_{n+1}) = -u(x_n) \cdot 2h + u(x_{n-1})$

Po wstawieniu tej zależności do równania (*) otrzymujemy:

$$u(x_{n-1})\left[\frac{2}{h^2}\right]+u(x_n)\left[\frac{2}{h^2}+\frac{2}{h}+1\right]=f(x_n)$$

dla x0:

$$u'(x_0)=\frac{u(x_1)-u(x_{-1})}{2h}=1$$

$$u(x_1)=2h+u(x_{-1})\Rightarrow u(x_{-1})=u(x_1)-2h$$

Po wstawieniu tej zależności do równania (*) otrzymujemy:

$$u(x_0)\left[\frac{2}{h^2}+2\right]+u(x_1)\left[-\frac{2}{h^2}\right]+\left[\frac{2}{h^2}+1\right]=f(x_0)$$

$$u(x_0)\left[\frac{2}{h^2}+2\right]+u(x_1)\left[-\frac{2}{h^2}\right]=f(x_0)-\frac{2}{h^2}-1$$

Teraz możemy utworzyć macierz A lewej strony równania

$\frac{2}{h^2}+2$	$-\frac{2}{h^2}$					
$\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{2h}$	$\frac{2}{h^2}+2$	$\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{2h}$				
	$\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{2h}$	$\frac{2}{h^2}+2$	$\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{2h}$			
		$\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{2h}$	$\frac{2}{h^2}+2$	$\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{2h}$		
			*	*	*	
				$\frac{-1}{h^2}-\frac{1}{2h}$	$\frac{2}{h^2}+2$	$\frac{-1}{h^2}+\frac{1}{2h}$
					$\frac{2}{h^2}$	$\frac{2}{h^2}+\frac{2}{h}+1$

Macierz f prawej strony równania ma następujący wygląd:

$f(x_0)-\frac{2}{h^2}-1$
$f(x_1)$
$f(x_2)$
$f(x_3)$

*
*
*
$f(x_{n-1})$
$f(x_n)$

Zatem rozwiązanie przybliżone problemu sprowadza się do znalezienia takiego wektora u , że $A \cdot u^T = f \Rightarrow u^T = A^{-1} \cdot f$

Informacje o projekcie:
Wymagania: Zainstalowana wersja Javy 11 lub nowsza

Aby uruchomić projekt należy wejść w terminalu do katalogu głównego projektu i w przypadku systemu Linux wpisać w terminalu polecenie ./gradlew run , a w przypadku systemu Windows wpisać w wierszu poleceń polecenie gradlew.bat run.

Na ekranie powinno pojawić okienko wyświetlające pole tekstowe do wprowadzenia liczby kroków rozwiązania przybliżonego i przycisk pozwalający na wprowadzenie tej liczby kroków.
Po wciśnięciu przycisku okienko znika, a pojawia się wykres przedstawiający funkcje będące rozwiązaniem dokładnym i przybliżonym dla danej liczby kroków, a także małe okno pokazujące błąd globalny przybliżenia.
W moim projekcie, do znalezienia macierz odwrotnej do A wykorzystałem funkcję invert() z biblioteki EJML. Z biblioteki tej korzystałem również podczas mnożenia macierzy. W moim projekcie za wygląd interfejsu użytkownika odpowiada klasa App, za konstrukcję wykresu klasa Plot, za znajdowanie rozwiązania i jego błędu klasa Solution, a za uruchomienie projektu klasa Main.