

作业 2

汪洋

2021 年 1 月 20 日

题目 1: 考虑如下常微分方程和边界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 50000 \cdot \exp[-50\{(1-x)^2 + y^2\}] \cdot [100\{(1-x)^2 + y^2\} - 2] \quad (1)$$

边界条件:

$$\phi(1, y) = 100(1 - y) + 500(\exp(-50y^2))$$

$$\phi(0, y) = 500\exp(-50(1 + y^2))$$

$$\phi(x, 0) = 100x + 500\exp(-50(1 - x)^2)$$

$$\phi(x, 1) = 500\exp(-50\{(1 - x)^2 + 1\})$$

其精确解: $\phi(x, y) = 500\exp(-50\{(1 - x)^2 + y^2\}) + 100x(1 - y)$

作业 1 中第 3 题, 应该已经推导出其有限差分方程。现在用如下方法求解该方程组:

- a. 使用 Jacobi
- b. 使用 Gauss-Seidel
- c. 使用 ADI
- d. 使用 Stone's 方法
- e. 使用最速下降, steepest method
- f. 使用共轭梯度, conjugate method

网格划分为: 41×41 , 81×81 , 161×161 . 对于每种网格, 画出所有六种方法的残差曲线, 分析你的结果。同时, 使用表格工具, 分析不同网格和方法收敛情况和时间, 并分析你的结果。

题目 2: 对**题目 1**, 使用 CGS 方法, 且 x, y 方向都使用非均匀网格。计算公式参考**作业 1 中第 2 题**, 拉升系数 s 为 1.001。画出残差曲线, 并分析。

题目 3: 考虑如下二阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 1 \quad (2)$$

考虑如下边界条件:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, y) = 1$$

$$\phi(0, y) = 1$$

$$\phi(x, 0) = 0$$

$$\phi(x, 1) = 0$$

内节点使用中央差分格式, 右边界使用一阶格式。划分网格 81×81 。使用云图画结果, 使用折线图

画残差，分析结果。如果使用二阶中央差分格式处理右边界会有什么困难。

a. 使用 Stone's 方法

b. 使用 CGS 方法