

作业 2

汪洋

2021 年 1 月 23 日

题目 1: 考虑如下二阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S_\phi \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S_\phi &= 2\sinh[10(x-0.5)] + 40(x-0.5)\cosh[10(x-0.5)] + 100(x-0.5)^2\sinh[10(x-0.5)] + \\ &= 2\sinh[10(y-0.5)] + 40(y-0.5)\cosh[10(y-0.5)] + 100(y-0.5)^2\sinh[10(y-0.5)] + \\ &= 4(x^2 + y^2)\exp(2xy) \end{aligned}$$

作用域为 $[0, 1] \cup [0, 1]$

考虑如下边界条件:

$$\begin{aligned} \phi(0, y) &= 0.25\sinh(-5) + (y-0.5)^2\sinh[10(y-0.5)] + 1 + \\ \phi(1, y) &= 0.25\sinh(5) + (y-0.5)^2\sinh[10(y-0.5)] + \exp(2y) \\ \phi(x, 0) &= 0.25\sinh(-5) + (x-0.5)^2\sinh[10(x-0.5)] + 1 \\ \phi(x, 1) &= 0.25\sinh(5) + (x-0.5)^2\sinh[10(x-0.5)] + \exp(2x) \end{aligned}$$

解析解为:

$$\phi(x, y) = (x-0.5)^2\sinh[10(x-0.5)] + (y-0.5)^2\sinh[10(y-0.5)] + \exp(2xy)$$

使用二阶中央差分格式, 网格划分为: 81×81 。使用 Gauss-Seidel 方法迭代。但是迭代格式适当调整为:

$$\phi_{i,j}^{(n+1)} = \omega \left[\frac{S_{i,j} - a_E \phi_{i+1,j}^{(n)} - a_W \phi_{i-1,j}^{(n+1)} - a_S \phi_{i,j-1}^{(n+1)} - a_N \phi_{i,j+1}^{(n)}}{a_O} \right] + (1-\omega)\phi_{i,j}^{(n)}$$

其中: **线性松弛因子**。在同一个图中画出松弛因子分别为 0.5, 1 和 1.5 的收敛曲线。

题目 2: 考虑如下常微分方程和边界条件

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 50000 \cdot \exp[-50\{(1-x)^2 + y^2\}] \cdot [100\{(1-x)^2 + y^2\} - 2] \quad (2)$$

边界条件:

$$\begin{aligned} \phi(1, y) &= 100(1-y) + 500(\exp(-50y^2)) \\ \phi(0, y) &= 500\exp(-50\{1+y^2\}) \\ \phi(x, 0) &= 100x + 500\exp(-50(1-x)^2) \end{aligned}$$

$$\phi(x, 1) = 500 \exp(-50\{(1-x)^2 + 1\})$$

$$\text{其精确解: } \phi(x, y) = 500 \exp(-50\{(1-x)^2 + y^2\}) + 100x(1-y)$$

作业 1 中第 3 题，应该已经推导出其有限差分方程。现在用如下方法求解该方程组：

- a. 使用 Jacobi
- b. 使用 Gauss-Seidel
- c. 使用 ADI
- d. 使用 Stone's 方法
- e. 使用最速下降，steepest method
- f. 使用共轭梯度，conjugate method

网格划分为: 41×41 , 81×81 , 161×161 . 对于每种网格，画出所有六种方法的残差曲线，分析你的结果。同时，使用表格工具，分析不同网格和方法收敛情况和时间，并分析你的结果。

题目 3: 对**题目 2**，使用 CGS 方法，且 x, y 方向都使用非均匀网格。计算公式参考**作业 1 中第 2 题**，拉升系数 s 为 1.001。画出残差曲线，并分析。

题目 4: 考虑如下二阶偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 1 \quad (3)$$

考虑如下边界条件：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(1, y) = 1$$

$$\phi(0, y) = 1$$

$$\phi(x, 0) = 0$$

$$\phi(x, 1) = 0$$

内节点使用中央差分格式，右边界使用一阶格式。划分网格 81×81 。使用云图画出结果，使用折线图画残差，分析结果。如果使用二阶中央差分格式处理右边界会有什么困难。

- a. 使用 Stone's 方法
- b. 使用 CGS 方法