

# 作业 3

汪洋

2021 年 2 月 1 日

题目 1: 考虑如下二阶偏微分方程:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = S_\phi \quad (1)$$

$$S_\phi = 50000 \cdot \exp[-50\{(1-x)^2 + y^2\}] \cdot [100\{(1-x)^2 + y^2\} - 2]$$

作用域为  $[0, 1] \cup [0, 1]$

考虑如下边界条件:

$$\phi(0, y) = 100(1 - y) + 500\exp(-50y^2)$$

$$\phi(1, y) = 500\exp(-50\{1 + y^2\})$$

$$\phi(x, 0) = 100x + 500\exp(-50(1 - x)^2)$$

$$\phi(x, 1) = 500\exp(-50\{(1 - x)^2 + 1\})$$

解析解为:

$$\phi(x, y) = 500\exp(-50\{(1 - x)^2 + y^2\}) + 100x(1 - y)$$

使用二阶中央差分格式, 编程求解上述问题, 使用 **GMG**(几何多重网格) 方法。仅使用两套网格  $81 \times 81$  和  $41 \times 41$ 。在细网格使用 **One-sweep Gauss-Seidel**。对于粗网格光滑, 使用两种不同方法:(a)**Gauss-Seidel** 光滑, 扫略从 1 一次增加到 5 次。(b) 使用直接求解器 (高斯消元)。画出残差图。

题目 2: 使用带 ILU(0) 预条件 CG 方法求解作业题 1。并使用不同网格  $21 \times 21$  到  $161 \times 161$ 。评论下你的计算结果。

题目 3: 对题目 2, 使用 CGS 方法, 且  $x, y$  方向都使用非均匀网格。计算公式参考作业 1 中第 2 题, 拉升系数  $s$  为 1.001。画出残差曲线, 并分析。