作业 1

汪洋

2021 年 1 月 21 日

题目 1: 考虑如下常微分方程和边界条件

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = exp(-x) \tag{1}$$
$$\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$$

a. 给出函数 $\phi(x)$ 的解析解 (精确解), 并画图。
b. 使用二阶中央差分格式将方程离散，空间离散等间距。使用标准矩阵求解器求解离散后的代数方程组。分析节点数 N 分别为 6,11,21 和 41 四种情况。对于每种网格，求解出误差并绘图。公式如下:

$$E(x) = \frac{\phi_{analytical}(x) - \phi_{numerical}(x)}{\phi_{analytical}(x)}$$

不考虑边界点
c. 从这个作业你获得什么?

题目 2: 考虑如下常微分方程和边界条件

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = 2x - 1 \tag{2}$$
$$\phi(0) = 0, \phi(1) = 1$$

a. 给出函数 $\phi(x)$ 的解析解 (精确解), 并画图。给出左右两端的通量，计算通量公式为

$$J_\phi = -\frac{d\phi}{dx}$$

b. 使用三点中央差分格式对方程进行离散。采用非均匀网格，使用指数函数关系。解释如下，如果沿 x 方向长度为 L，那么 $\sum_{i=1}^{N} \Delta x_i = L$ 其中 N 是节点数，Δx_i 是 i 号节点和 i+1 号节点间距。现假设 $\Delta x_{i+1} = s\Delta x_i$，其中 s 是拉伸系数大于 1，那么可获得函数关系如下

$$\frac{s - s^N}{1 - s} = \frac{L}{\Delta x_0}$$

因此，如果 s 和 N 给定，那么每一个 Δx_i 都确定了。现假设 $s = 1.02$。求解 N 分别为 11,21,41,81 的离散方程。画出四种网格的误差 (理论值和精确值之差)。

题目 3: 考虑如下常微分方程和边界条件

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=50000\cdot exp[-50\{(1-x)^2+y^2\}]\cdot[100\{(1-x)^2+y^2\}-2] \tag{3}$$

边界条件:

$\phi(1,y)=100(1-y)+500(exp(-50y^2))$

$\phi(0,y)=500exp(-50\{1+y^2\})$

$\phi(x,0)=100x+500exp(-50(1-x)^2)$

$\phi(x,1)=500exp(-50\{(1-x)^2+1\}$

注意这是个线性方程，它有精确解: $\phi(x,y)=500exp(-50\{(1-x)^2+y^2\})+100x(1-y)$

a. 使用有限差分方法，x,y 方向应用等间距网格，离散方程，然后用现有的矩阵求解器求解。每个方向考虑使用 21 个格点。

b. 画出数值解的云图，以及数值解和解析解间的误差云图。

c. 使用 41 个格点重复问题 a,b。