

# 有限差分法和有限体积法在计算流体中的应用

## 多重网格法 Multi Grid Method

汪洋

武汉理工大学交通学院

2021 年 1 月



- ① 特征值和条件数
- ② 稳定性分析
- ③ 误差傅里叶分解
- ④ 误差收敛的谱半径
- ⑤ 惯性阻尼系数

## ① 特征值和条件数

## ② 稳定性分析

## ③ 误差傅里叶分解

## ④ 误差收敛的谱半径

## ⑤ 惯性阻尼系数

# 特征值和条件数

特征方程：

$$[A][x] = \lambda[x]$$

特征根计算：

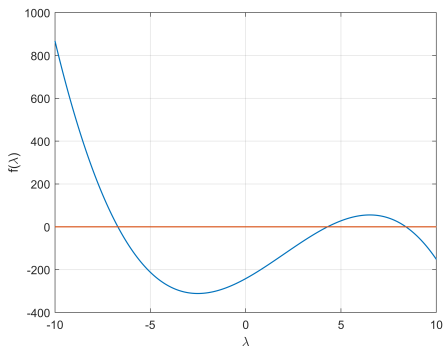
$$\det([A] - \lambda[I]) = 0$$

条件数：

$$\kappa(A) = \left| \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} \right|$$

# 例题 1

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



① 特征值和条件数

② 稳定性分析

③ 误差傅里叶分解

④ 误差收敛的谱半径

⑤ 惯性阻尼系数

# 稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 = b_1$$

$$a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 = b_2$$

$$a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 = b_3$$

$$a_{11}\phi_1^{(n+1)} = b_1 - a_{12}\phi_2^{(n)} - a_{13}\phi_3^{(n)}$$

$$a_{22}\phi_2^{(n+1)} = b_2 - a_{21}\phi_1^{(n+1)} - a_{23}\phi_3^{(n)}$$

$$a_{33}\phi_3^{(n+1)} = b_3 - a_{31}\phi_1^{(n+1)} - a_{32}\phi_2^{(n+1)}$$

# 稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 = b_1$$

$$a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 = b_2$$

$$a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 = b_3$$

$$a_{11}\phi_1^{(n+1)} = b_1 - a_{12}\phi_2^{(n)} - a_{13}\phi_3^{(n)}$$

$$a_{21}\phi_1^{(n+1)} + a_{22}\phi_2^{(n+1)} = b_2 - a_{23}\phi_3^{(n)}$$

$$a_{31}\phi_1^{(n+1)} + a_{32}\phi_2^{(n+1)} + a_{33}\phi_3^{(n+1)} = b_3$$



# 稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 = b_1$$

$$a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 = b_2$$

$$a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 = b_3$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \\ \phi_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \phi_3^n \end{bmatrix}$$

# 稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \\ \phi_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \phi_3^n \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{a}_{ij} = a_{ij}/a_{ii}, \bar{b}_i = b_i/a_{ii}$$

$$\mathbf{L} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U} = - \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \\ \phi_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \phi_3^n \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - \mathbf{L}) \phi^{n+1} = \mathbf{b} + \mathbf{U} \phi^n$$

$$\phi^{n+1} = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \phi^n + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{B} \phi^n + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}$$

其中令  $\mathbf{B}$  为迭代矩阵，与矩阵  $\mathbf{A}$  有关系。假设  $\phi^E$  为精确值，则通过上式可得：

$$\phi^E = (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \phi^E + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{B} \phi^E + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}$$

# 稳定性分析

$$\begin{aligned}\phi^{n+1} &= (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \phi^n + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{B} \phi^n + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} \\ \phi^E &= (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{U} \phi^E + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{B} \phi^E + (\mathbf{I} - \mathbf{L})^{-1} \mathbf{b}\end{aligned}$$



n 次迭代后的误差：

$$\begin{aligned}\phi^E - \phi^{n+1} &= \mathbf{B} (\phi^E - \phi^n) \\ \epsilon^{n+1} &= \mathbf{B} \epsilon^n\end{aligned}$$

误差谱半径：

$$\lambda_{SR} = \max(|\lambda_i(\mathbf{B})|) < 1$$

- ① 特征值和条件数
- ② 稳定性分析
- ③ 误差傅里叶分解
- ④ 误差收敛的谱半径
- ⑤ 惯性阻尼系数

# 傅立叶分解

▶ Steve Brunton

▶ course web site

# 傅里叶分解

使用傅里叶级数讲第  $n$  次迭代的误差分解为下面形式:

$$\epsilon^n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n \cos(m\pi \frac{x}{L}) + B_m^n \sin(m\pi \frac{x}{L})$$

使用欧拉公式可将上式描述为指数形式:

$$\epsilon^n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^n \exp(im\pi \frac{x}{L})$$

其离散形式如下:

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(im\pi \frac{x_j}{L})$$

# 傅里叶分解

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(im\pi \frac{x_j}{L})$$

其中:  $x_j = j\Delta x$ , 节点编号分别为  $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$ ,  $\epsilon_j^n$  为  $j$  号节点在第  $n$  次迭代时的误差。由于  $M$  个节点等间距, 则  $\Delta x = L/(M-1)$ , 因此  $x_j/L = j/(M-1)$ 。所以上式简化为:

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(im\pi \frac{j}{M-1}) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(ij\theta_m)$$

其中相位角为:

$$\theta_m = \frac{m\pi}{M-1}$$



# 傅里叶分解

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(im\pi \frac{j}{M-1}) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp(ij\theta_m)$$

其中相位角为:

$$\theta_m = \frac{m\pi}{M-1}$$

如果为第一类边界条件, 6 个点,  $M=6$ ,  $j=3$  的第三次迭代的表达式如下:

$$\epsilon^n(x_3) = \sum_{m=0}^{6-1} C_m^n \exp(i3\theta_m)$$

$$\theta_m = \frac{m\pi}{5}$$

- ① 特征值和条件数
- ② 稳定性分析
- ③ 误差傅里叶分解
- ④ 误差收敛的谱半径
- ⑤ 惯性阻尼系数

# 一维泊松方程

一维泊松方程, Dirichlet 边界条件, 有限差分内节点, 均匀网格:

$$\phi_j - \frac{1}{2}\phi_{j+1} - \frac{1}{2}\phi_{j-1} = -S_j \frac{(\Delta x)^2}{2}$$

使用 Gauss-Seidel 迭代方法, 迭代 n 次后方程为:

$$\phi_j^{n+1} - \frac{1}{2}\phi_{j-1}^{n+1} = -S_j \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{1}{2}\phi_{j+1}^n$$

假设精确解为:

$$\phi_j^E - \frac{1}{2}\phi_{j-1}^E = -S_j \frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{1}{2}\phi_{j+1}^E$$

两式相减可得:

$$\epsilon_j^{n+1} - \frac{1}{2}\epsilon_{j-1}^{n+1} = \frac{1}{2}\epsilon_{j+1}^n$$

# 一维泊松方程

一维泊松方程，Dirichlet 边界条件，有限差分内节点，均匀网格：

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^{n+1} \exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^{n+1} \exp[i(j-1)\theta_m] \\ = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n \exp[i(j+1)\theta_m] \end{aligned}$$

因为傅里叶级数的分量线性无关，所以对于每个分量都满足以下公式：

$$\begin{aligned} C_m^{n+1} \exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2} C_m^{n+1} \exp[i(j-1)\theta_m] \\ = \frac{1}{2} C_m^n \exp[i(j+1)\theta_m] \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

# 一维泊松方程

$$\begin{aligned} C_m^{n+1} \exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2} C_m^{n+1} \exp[i(j-1)\theta_m] \\ = \frac{1}{2} C_m^n \exp[i(j+1)\theta_m] \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

上式化简后:

$$C_m^{n+1} - \frac{1}{2} C_m^{n+1} \exp(-i\theta_m) = \frac{1}{2} C_m^n \exp(i\theta_m) \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1$$

重新整理后:

$$\begin{aligned} \lambda_m = \frac{C_m^{n+1}}{C_m^n} = \frac{\frac{1}{2} \exp(i\theta_m)}{1 - \frac{1}{2} \exp(-i\theta_m)} = \frac{\exp(i\theta_m)}{2 - \exp(-i\theta_m)} \\ \forall m = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

# 一维泊松方程

$$|\lambda_m| = \sqrt{\lambda_m \lambda_m^*} = \sqrt{\frac{\exp(i\theta_m)}{2 - \exp(-i\theta_m)} \frac{\exp(-i\theta_m)}{2 - \exp(i\theta_m)}} \\ = \sqrt{\frac{1}{5 - 4\cos(\theta_m)}} \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1$$

其中  $\lambda_m^*$  是  $\lambda_m$  的复共轭

节点个数 M	角度 $\theta$	谱半径 $\lambda_{SR}$
6	$\pi/5$	0.752
11	$\pi/10$	0.914
21	$\pi/20$	0.976
41	$\pi/40$	0.994
81	$\pi/80$	0.998

表 1: 误差收敛谱半径

## 例题 2

考虑一维对流扩散方程，边界条件为 Dirichlet 边界。使用中央差分法对对流项和扩散项离散，同时使用 Gauss-Seidel 方法求解离散后的方程。

$$u \frac{d\phi}{dx} - \Gamma \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

离散格式如下：

$$u \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} - \Gamma \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = 0$$

## 例题 2

$$u \frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} - \Gamma \frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = 0$$

方程整理如下:

$$\left(\frac{1}{2} - P\right) \phi_{j+1} - \left(\frac{1}{2} + P\right) \phi_{j-1} + 2P\phi_j = 0$$

其中:  $P = \Gamma/(u\Delta x)$  那么通过前面推导可以得到误差方程如下:

$$\left(\frac{1}{2} - P\right) \epsilon_{j+1}^n - \left(\frac{1}{2} + P\right) \epsilon_{j-1}^{n+1} + 2P\epsilon_j^{n+1} = 0$$

傅里叶级数使用后:

$$2PC_m^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + P\right) C_m^{n+1} \exp(-i\theta_m) = -\left(\frac{1}{2} - P\right) C_m^n \exp(i\theta_m)$$
$$\forall m = 0, 1, \dots, M-1$$



## 例题 2

$$2PC_m^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + P\right) C_m^{n+1} \exp(-i\theta_m) = -\left(\frac{1}{2} - P\right) C_m^n \exp(i\theta_m)$$

$$\forall m = 0, 1, \dots, M-1$$

收敛误差的特征值为：

$$\lambda_m = \frac{C_m^{n+1}}{C_m^n} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - p\right) \exp(i\theta_m)}{2P - \left(\frac{1}{2} + P\right) \exp(-i\theta_m)} \quad \forall m = 0, 1, \dots, M-1$$

## 例题 2

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(\frac{1}{2} - p) \exp(i\theta_1)}{2P - (\frac{1}{2} + P) \exp(-i\theta_1)} = \frac{-(\frac{1}{2} - p) \cos\theta_1 - i(\frac{1}{2} - p) \sin\theta_1}{2P - (\frac{1}{2} + p) \cos\theta_1 + i(\frac{1}{2} + p) \sin\theta_1} \\ &= \frac{a + bi}{c + di}\end{aligned}$$

收敛误差的谱半径计算如下：

$$\lambda_{SR} = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_1^*} = \frac{\sqrt{(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2}}{c^2 + d^2}$$

## 例题 2

不同扩散情况下，不同节点数情况下的谱半径计算。

收敛误差的谱半径			
P	M = 11	M = 51	M = 101
-0.6	0.995181	0.999804	0.999951
-0.5	1.000000	1.000000	1.000000
-0.4	1.004869	1.000195	1.000049
-0.3	1.009305	1.000370	1.000093
-0.2	1.012206	1.000484	1.000121
-0.1	1.011057	1.000439	1.000110
0	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.965197	0.998523	0.999630
0.2	0.875531	0.993917	0.998468
0.3	0.678119	0.977130	0.994131
0.4	0.352501	0.882454	0.966260
0.5	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	0.268018	0.810855	0.940609

- ① 特征值和条件数
- ② 稳定性分析
- ③ 误差傅里叶分解
- ④ 误差收敛的谱半径
- ⑤ 惯性阻尼系数

# 惯性阻尼系数

二维五点格式:

$$a_O \phi_{p,q}^{n+1} + a_W \phi_{p-1,q}^{n+1} + a_S \phi_{p,q-1}^{n+1} + a_E \phi_{p+1,q}^n = -S_{i,j} - a_N \phi_{p,q+1}^n$$

修正一下, 目的是为加速收敛, 但是有增加稳定性的作用:

$$\begin{aligned} \alpha a_O \phi_{p,q}^{n+1} + a_O \phi_{p,q}^{n+1} + a_W \phi_{p-1,q}^{n+1} + a_S \phi_{p,q-1}^{n+1} + a_E \phi_{p+1,q}^n \\ = -S_{i,j} - a_N \phi_{p,q+1}^n + \alpha a_O \phi_{p,q}^n \end{aligned}$$

## 例题 3

不同扩散情况下，不同节点数情况下的谱半径计算。对于例题 2，加入惯性阻尼系数则误差收敛谱半径变为：

$$\lambda_1 = \frac{-\left(\frac{1}{2} - p\right) \exp(i\theta_m) + 2P\alpha}{(1 + \alpha)2P - \left(\frac{1}{2} + P\right) \exp(-i\theta_m)}$$

*Thanks!*