有限差分法和有限体积法在计算流体中的应用

迭代算法稳定性和收敛性分析

汪洋

武汉理工大学交通学院

2021 年 1 月

特征值和条件数

特征方程：

$$[A][x] = \lambda[x]$$

特征根计算：

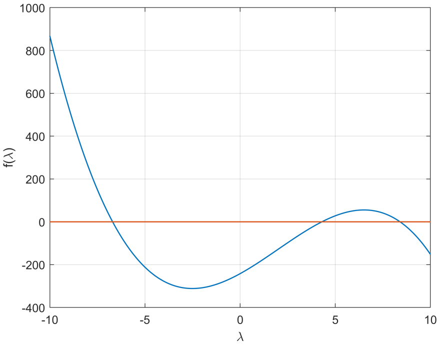
$$det\left([A] - \lambda[I]\right) = 0$$

条件数：

$$\kappa\left(A\right) = \left|\frac{\lambda_{max}\left(A\right)}{\lambda_{min}\left(A\right)}\right|$$

例题 1

$$[A] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$
\begin{aligned}
a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 &= b_1 \\
a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 &= b_2 \\
a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}\phi_1^{(n+1)} &= b_1 - a_{12}\phi_2^{(n)} - a_{13}\phi_3^{(n)} \\
a_{22}\phi_2^{(n+1)} &= b_2 - a_{21}\phi_1^{(n+1)} - a_{23}\phi_3^{(n)} \\
a_{33}\phi_3^{(n+1)} &= b_3 - a_{31}\phi_1^{(n+1)} - a_{32}\phi_2^{(n+1)}
\end{aligned}
$$

稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$
\begin{aligned}
a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 &= b_1 \\
a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 &= b_2 \\
a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}\phi_1^{(n+1)} &= b_1 - a_{12}\phi_2^{(n)} - a_{13}\phi_3^{(n)} \\
a_{21}\phi_1^{(n+1)} + a_{22}\phi_2^{(n+1)} &= b_2 - a_{23}\phi_3^{(n)} \\
a_{31}\phi_1^{(n+1)} + a_{32}\phi_2^{(n+1)} + a_{33}\phi_3^{(n+1)} &= b_3
\end{aligned}
$$

稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$
\begin{aligned}
a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 + a_{13}\phi_3 &= b_1 \\
a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 &= b_2 \\
a_{31}\phi_1 + a_{32}\phi_2 + a_{33}\phi_3 &= b_3
\end{aligned}
$$

$$
\left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \bar{a}_{21} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \\ \phi_3^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ 0 & 0 & \bar{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^{n} \\ \phi_2^{n} \\ \phi_3^{n} \end{bmatrix}
$$

稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$\left[\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\\bar{a}_{21}&0&0\\\bar{a}_{31}&\bar{a}_{32}&0\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\phi_1^{n+1}\\\phi_2^{n+1}\\\phi_3^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\bar{a}_{12}&\bar{a}_{13}\\0&0&\bar{a}_{23}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^{n}\\\phi_2^{n}\\\phi_3^{n}\end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{a}_{ij}=a_{ij}/a_{ii},\bar{b}_i=b_i/a_{ii}$$

$$\mathbf{L}=-\begin{bmatrix}0&0&0\\\bar{a}_{21}&0&0\\\bar{a}_{31}&\bar{a}_{32}&0\end{bmatrix}\mathbf{U}=-\begin{bmatrix}0&\bar{a}_{12}&\bar{a}_{13}\\0&0&\bar{a}_{23}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

稳定性分析

使用 Gauss-Seidel 来分析

$$\left[\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\\bar{a}_{21}&0&0\\\bar{a}_{31}&\bar{a}_{32}&0\end{bmatrix}\right]\begin{bmatrix}\phi_1^{n+1}\\\phi_2^{n+1}\\\phi_3^{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&\bar{a}_{12}&\bar{a}_{13}\\0&0&\bar{a}_{23}\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1^{n}\\\phi_2^{n}\\\phi_3^{n}\end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{L})\,\phi^{n+1}=b+\mathbf{U}\phi^n$$

$$\phi^{n+1}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\phi^n+(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,b=\mathbf{B}\phi^n+(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{b}$$

其中令 B 为迭代矩阵，与矩阵 A 有关系。假设 ϕ^E 为精确值，则通过上式可得：

$$\phi^{E}=(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{U}\phi^E+(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,b=\mathbf{B}\phi^E+(\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\,\mathbf{b}$$

稳定性分析

$$\phi^{n+1} = (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\phi^{n} + (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1} b = \mathbf{B}\phi^{n} + (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$
$$\phi^{E} = (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}\phi^{E} + (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1} b = \mathbf{B}\phi^{E} + (\mathbf{I}-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Downarrow$$

n 次迭代后的误差：

$$\phi^{E} - \phi^{n+1} = \mathbf{B}\left(\phi^{E} - \phi^{n}\right)$$
$$\epsilon^{n+1} = \mathbf{B}\epsilon^{n}$$

误差谱半径：

$$\lambda_{SR} = max(|\lambda_i(B)|) < 1$$

1. 特征值和条件数
2. 稳定性分析
3. 误差傅里叶分解
4. 误差收敛的谱半径
5. 惯性阻尼系数

傅立叶分解

- Steve Brunton
- course web site

傅里叶分解

使用傅里叶级数讲第 n 次迭代的误差分解为下面形式:

$$\epsilon^n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n cos(m\pi\frac{x}{L}) + B_m^n sin(m\pi\frac{x}{L})$$

使用欧拉公式可将上式描述为指数形式:

$$\epsilon^n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^n exp(im\pi\frac{x}{L})$$

其离散形式如下:

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(im\pi\frac{x_j}{L})$$

傅里叶分解

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(im\pi \frac{x_j}{L})$$

其中: $x_j = j\Delta x$，节点编号分别为 $j = 0, 1, 2, \cdots, M-1$, ϵ_j^n 为 j 号节点在第 n 次迭代时的误差。由于 M 个节点等间距，则 $\Delta x = L/(M-1)$，因此 $x_j/L = j/(M-1)$。所以上式简化为：

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(im\pi \frac{j}{M-1}) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(ij\theta_m)$$

其中相位角为:

$$\theta_m = \frac{m\pi}{M-1}$$

傅里叶分解

$$\epsilon^n(x_j) = \epsilon_j^n = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(im\pi \frac{j}{M-1}) = \sum_{m=0}^{M-1} C_m^n exp(ij\theta_m)$$

其中相位角为:

$$\theta_m = \frac{m\pi}{M-1}$$

如果为第一类边界条件，6 个点，M=6，$j = 3$ 的第三次迭代的表达式如下:

$$\epsilon^n(x_3) = \sum_{m=0}^{6-1} C_m^n exp(i3\theta_m)$$

$$\theta_m = \frac{m\pi}{5}$$

一维泊松方程

一维泊松方程，Dirichlet 边界条件，有限差分内节点，均匀网格:

$$\phi_j - \frac{1}{2}\phi_{j+1} - \frac{1}{2}\phi_{j-1} = -S_j\frac{(\Delta x)^2}{2}$$

使用 Gauss-Seidel 迭代方法，迭代 n 次后方程为:

$$\phi_j^{n+1} - \frac{1}{2}\phi_{j-1}^{n+1} = -S_j\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{1}{2}\phi_{j+1}^{n}$$

假设精确解为:

$$\phi_j^{E} - \frac{1}{2}\phi_{j-1}^{E} = -S_j\frac{(\Delta x)^2}{2} + \frac{1}{2}\phi_{j+1}^{E}$$

两式相减可得:

$$\epsilon_j^{n+1} - \frac{1}{2}\epsilon_{j-1}^{n+1} = \frac{1}{2}\epsilon_{j+1}^{n}$$

一维泊松方程

一维泊松方程，Dirichlet 边界条件，有限差分内节点，均匀网格:

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{M-1} C_m^{n+1} exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1} C_m^{n+1} exp[i(j-1)\theta_m] \\
= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{M-1} C_m^{n} exp[i(j+1)\theta_m]
\end{aligned}
$$

因为傅里叶级数的分量线性无关，所以对于每个分量都满足以下公式:

$$
\begin{aligned}
C_m^{n+1} exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2} C_m^{n+1} exp[i(j-1)\theta_m] \\
= \frac{1}{2} C_m^{n} exp[i(j+1)\theta_m] \ \forall m = 0, 1, \cdots, M-1
\end{aligned}
$$

一维泊松方程

$$C_m^{n+1} exp(ij\theta_m) - \frac{1}{2} C_m^{n+1} exp[i(j-1)\theta_m]$$
$$= \frac{1}{2} C_m^{n} exp[i(j+1)\theta_m] \ \forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

上式化简后:

$$C_m^{n+1} - \frac{1}{2} C_m^{n+1} exp(-i\theta_m) = \frac{1}{2} C_m^{n} exp(i\theta_m) \ \forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

重新整理后:

$$\lambda_m = \frac{C_m^{n+1}}{C_m^{n}} = \frac{\frac{1}{2} exp(i\theta_m)}{1 - \frac{1}{2} exp(-i\theta_m)} = \frac{exp(i\theta m)}{2 - exp(-i\theta_m)}$$

$$\forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

一维泊松方程

$$|\lambda_m| = \sqrt{\lambda_m \lambda_m^*} = \sqrt{\frac{exp(i\theta m)}{2 - exp(-i\theta_m)} \frac{exp(-i\theta m)}{2 - exp(i\theta_m)}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{5 - 4cos(\theta_m)}} \quad \forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

其中 λ_m^* 是 λ_m 的复共轭

节点个数 M	角度 θ	谱半径 λ_{SR}
6	$\pi/5$	0.752
11	$\pi/10$	0.914
21	$\pi/20$	0.976
41	$\pi/40$	0.994
81	$\pi/80$	0.998

表 1: 误差收敛谱半径

例题 2

考虑一维对流扩散方程，边界条件为 Dirichlet 边界。使用中央差分法对对流项和扩散项离散，同时使用 Gauss-Seidel 方法求解离散后的方程。

$$u\frac{\phi}{dx} - \Gamma\frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

离散格式如下：

$$u\frac{\phi_{j+1} - \phi_{j-1}}{2\Delta x} - \Gamma\frac{\phi_{j+1} - 2\phi_j + \phi_{j-1}}{\Delta x^2} = 0$$

例题 2

$$u\frac{\phi_{j+1}-\phi_{j-1}}{2\Delta x}-\Gamma\frac{\phi_{j+1}-2\phi_j+\phi_{j-1}}{\Delta x^2}=0$$

方程整理如下：

$$\left(\frac{1}{2}-P\right)\phi_{j+1}-\left(\frac{1}{2}+P\right)\phi_{j-1}+2P\phi_j=0$$

其中: $P=\Gamma/(u\Delta x)$ 那么通过前面推导可以得到误差方程如下：

$$\left(\frac{1}{2}-P\right)\epsilon_{j+1}^{n}-\left(\frac{1}{2}+P\right)\epsilon_{j-1}^{n+1}+2P\epsilon_j^{n+1}=0$$

傅里叶级数使用后:

$$2PC_m^{n+1}-\left(\frac{1}{2}+P\right)C_m^{n+1}exp(-i\theta_m)=-\left(\frac{1}{2}-P\right)C_m^{n}exp(i\theta_m)$$

$$\forall m=0,1,\cdots,M-1$$

例题 2

$$2PC_m^{n+1} - \left(\frac{1}{2} + P\right) C_m^{n+1} exp(-i\theta_m) = -\left(\frac{1}{2} - P\right) C_m^n exp(i\theta_m)$$
$$\forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

收敛误差的特征值为：

$$\lambda_m = \frac{C_m^{n+1}}{C_m^n} = \frac{-\left(\frac{1}{2} - p\right) exp(i\theta_m)}{2P - \left(\frac{1}{2} + P\right) exp(-i\theta_m)} \quad \forall m = 0, 1, \cdots, M-1$$

例题 2

$$\lambda_1 = \frac{(\frac{1}{2}-p)exp(i\theta_1)}{2P-(\frac{1}{2}+P)exp(-i\theta_1)} = \frac{-(\frac{1}{2}-p)cos\theta_1 - i(\frac{1}{2}-p)sin\theta_1}{2P-(\frac{1}{2}+p)cos\theta_1 + i(\frac{1}{2}+p)sin\theta_1}$$

$$= \frac{a+bi}{c+di}$$

收敛误差的谱半径计算如下:

$$\lambda_{SR} = \sqrt{\lambda_1 \cdot \lambda_1^*} = \frac{\sqrt{(ac+bd)^2+(bc-ad)^2}}{c^2+d^2}$$

例题 2

不同扩散情况下，不同节点数情况下的谱半径计算。

收敛误差的谱半径			
P	M = 11	M = 51	M = 101
-0.6	0.995181	0.999804	0.999951
-0.5	1.000000	1.000000	1.000000
-0.4	1.004869	1.000195	1.000049
-0.3	1.009305	1.000370	1.000093
-0.2	1.012206	1.000484	1.000121
-0.1	1.011057	1.000439	1.000110
0	1.000000	1.000000	1.000000
0.1	0.965197	0.998523	0.999630
0.2	0.875531	0.993917	0.998468
0.3	0.678119	0.977130	0.994131
0.4	0.352501	0.882454	0.966260
0.5	0.000000	0.000000	0.000000
0.6	0.268018	0.810855	0.940609

惯性阻尼系数

二维五点格式：

$$a_O\phi_{p,q}^{n+1}+a_W\phi_{p-1,q}^{n+1}+a_S\phi_{p,q-1}^{n+1}+a_E\phi_{p+1,q}^{n}=-S_{i,j}-a_N\phi_{p,q+1}^{n}$$

修正一下，目的是为加速收敛，但是有增加稳定性的作用：

$$\alpha a_O\phi_{p,q}^{n+1}+a_O\phi_{p,q}^{n+1}+a_W\phi_{p-1,q}^{n+1}+a_S\phi_{p,q-1}^{n+1}+a_E\phi_{p+1,q}^{n}$$

$$=-S_{i,j}-a_N\phi_{p,q+1}^{n}+\alpha a_O\phi_{p,q}^{n}$$

例题 3

不同扩散情况下，不同节点数情况下的谱半径计算。对于例题 2，加入惯性阻尼系数则误差收敛谱半径变为：

$$\lambda_1 = \frac{-(\frac{1}{2} - p)exp(i\theta_m) + 2P\alpha}{(1+\alpha)2P - (\frac{1}{2} + P)\exp(-i\theta_m)}$$

Thanks!