有限差分法和有限体积法在计算流体中的应用

非结构化网格

汪洋

武汉理工大学交通学院

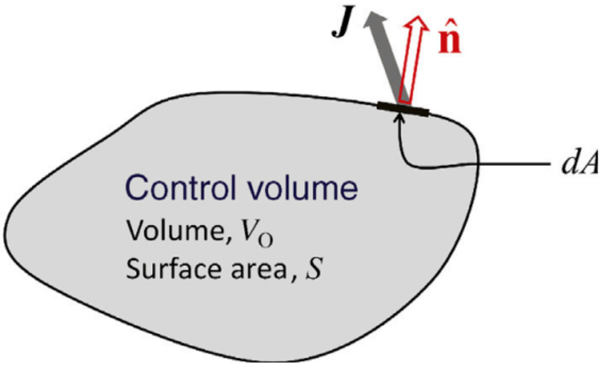
2021 年 2 月

一点点网格历史

- 结构化网格
  - 帖体网格
  - 分块网格技术 (ADI)
- 非结构化网格
  - 模拟非常复杂的几何形式
  - 可以使用自适应网格技术

散度定理

将体积分变成面积分



$$\int_{V_o} \nabla \cdot \mathbf{J} dV = \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA$$

同理，可以将面积分变成线积分。

散度定理意义

- 如果大于零
- 如果小于零

进一步解释

$$\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\\ \text{comes into }V_O\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\text{ is}\\ \text{generated within }V_O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\\ \text{goes out of }V_O\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\\ \text{goes out of }V_O\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\\ \text{comes into }V_O\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\text{Rate at which }\phi\text{ is}\\ \text{generated within }V_O\end{bmatrix}.$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{V_o} \nabla\cdot\mathbf{J}\,dV=\int_{V_o} S_\phi\,dV$$

$$\int_{V_o}\left[\nabla\cdot\mathbf{J}-S_\phi\right]dV$$

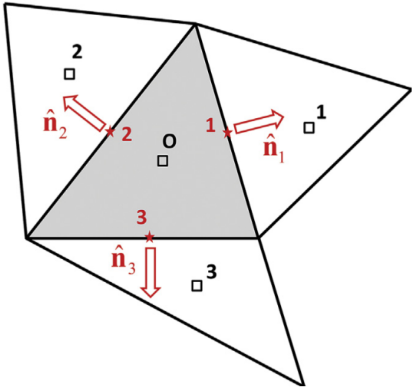
$$\Downarrow$$

$$\nabla\cdot\mathbf{J}=S_\phi$$

通常会注意到一个单词叫divergence free

泊松方程

$$\nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = S_\phi$$



公式推导

对单元 O 积分:

$$\int_{V_o} \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) dV = \int_{V_o} S_\phi dV$$

注意 $\nabla \phi$ 的意义

$$\int_S (\Gamma \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA = \int_{V_o} S_\phi dV$$

处理上面方程右边，有两种方法。

公式推导

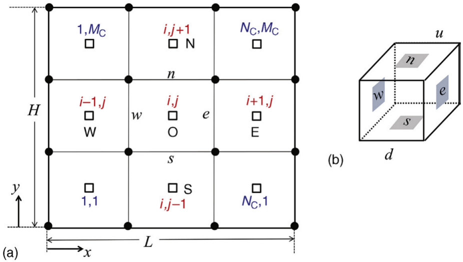
$$\int_S (\Gamma\nabla\phi)\cdot\hat{\mathbf{n}}dV = \sum_{f=1}^{N_{f,O}} \int_{S_f} (\Gamma\nabla\phi)\cdot\hat{\mathbf{n}}dA$$

$$\sum_{f=1}^{N_{f,O}} \int_{S_f} (\Gamma\nabla\phi)\cdot\hat{\mathbf{n}}dA = \sum_{f=1}^{N_{f,O}} \left[(\Gamma\nabla\phi)_f\cdot\hat{\mathbf{n}}_f\right] A_f = \sum_{f=1}^{N_{f,O}} \Gamma_f \left[(\nabla\phi)_f\cdot\hat{\mathbf{n}}_f\right] A_f$$

$$= S_{\phi,O} V_O$$

例题

- 二维结构化网格



引言

非结构化网格之间的连接信息并不已知。基于有限体积法的非结构求解器必须知道上述信息。处理方法有若干。

- API，MSC Nastran
- 用户自定义函数，Fluent
- 使用开源软件，Gmsh

网格生成 MATLAB 环境

- PDE tool
- CFDTool
- MESH2D
- DistMesh(A simple Mesh Generator in MATLAB)

内容展开

- 处理几何连接信息
- 插值
- 计算体积
- 计算面积和面方向量

几何信息

意义	变量名	备注
几何类型	geom_type	2D 3D
单元总数	ncells	
面总数	nfaces	
边界面	nbfaces	
节点数	nnodes	
体心坐标	xc, yc, zc	3D 有 zc
面心坐标	xf, yf, zf	3D 有 zf
节点坐标	xv, yv, zv	3D 有 zv
面法向	sn(nfaces, 2), sn(nfaces, 3)	
单元体积	vol(ncells)	
单元面积	areaf(nfaces)	

表 1: 几何信息

连接信息

意义	变量名	备注
给定单元的面数量	nface(ncells)	
给定面的节点数量	nfnode(nfaces)	
给定体的节点数量	ncnode(ncells)	
单元到面	link_cell_to_face(ncells, nfaces)	
面到单元	link_face_to_cell(nfaces, 2)	
面到节点	link_face_to_node(nfaces, nfnode)	
体到节点	link_cell_to_node(ncells, ncnode)	
面到边界面	link_face_to_bface(nfaces)	
边界面到面	link_bface_to_face(nbfaces)	

表 2: 连接信息

OpenFOAM