초월함수를 다항함수로 !

여러번 미분 가능한 f(x)라는 함수가 있을 때
어떤 다항함수 g(x)와 함숫값도 같으며 미분 계수도 같으면 두 함수
f(x)와 g(x)는 같다고 볼 수 있을까요???
모르는 함수 f(x)를 다항함수 꼴로 나타내기 위해서 연구를 시작하였고
그 연구의 결과물이 테일러 전개라고 합니다.

매클로린 전개를 통해 초월함수 e^x의 다항함수 꼴 알아내기!

여러 번 미분 가능하며 미분을 하여도 형태가 그대로인 즉
도함수와 원시함수가 같은 초월함수 $y=e^x$ x = 0에서
다항함수로 표현을 하자면 $e^x = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 ....$로 표현 할 수 있습니다
x에 0을 대입하면 $e^0 = 1 = a_0$가 됩니다
$e^x = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 ....$
함수를 미분 하면
$e^{x\prime} = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...$ 이 되는데
x에 0을 대입하면 $e^0 = 1 = a_1$이 됩니다.
$e^{x\prime} = e^x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + ...$이 식을 한번 더 미분을 하면
$e^{x\prime} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ...$ 이 됩니다.
x = 0을 대입하면 $2a_2 = 1$이므로 $a_2 = \frac{1}{2}$이 됩니다.
$e^{x\prime} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + ...$이 식을 한번 더더 미분을 하면
$e^{x\prime} = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + 120a_6x^3 + ...$ 이 됩니다.
x = 0을 대입하면 $6a_3 = 1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{6}$이 됩니다.
즉 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{6}$라는 정보를 여태 얻었는데 이 정보를 통해
$a_0 = \frac{1}{0!}, a_1 = \frac{1}{1!}, a_2 = \frac{1}{2!}, a_3 = \frac{1}{3!}$라는 규칙성을 찾을 수 있습니다 이 규칙성을 통해
$a_5 = \frac{1}{5!}, a_n = \frac{1}{n!}$ 즉 x^n의 계수는 $a_n = \frac{1}{n!}$라는 규칙성을 찾을 수 있었습니다
이로써 $y=e^x$라는 함수를 일반화 하여 표현하자면
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times x^n$로 x=0에서 $y=e^x$ 라는 함수를 다항함수로 표현할 수 있습니다.

(x = a에서의 다항함수 꼴을 구하기 위해선 $e^x = a_0(x-a)^0 + a_1(x-a)^1 + a_2(x-a)^2 + ...$
을 통해서 이와 같은 과정을 거치면 되는데 이는 테일러 전개라고 합니다.)