facultad de
economía
y **empresa**

VNiVERSiDAD
D SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Universidad de Salamanca

Facultad de Economía y Empresa

Grado en Economía

Curso 2020 / 2021

TEORÍA DE EMPAREJAMIENTOS: EL PROBLEMA DE LOS COMPAÑEROS DE HABITACIÓN

MATCHING THEORY: THE ROOMMATES PROBLEM

Realizado por la estudiante: Paula Fonseca García

Tutelado por los Profesores: Emma Moreno García

José Manuel Cascón Barbero

Salamanca, 16 de julio de 2021

facultad de
economía
y **empresa**

VNiVERSiDAD
Ð SALAMANCA
CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Universidad de Salamanca

Facultad de Economía y Empresa

Grado en Economía

Curso 2020 / 2021

TEORÍA DE EMPAREJAMIENTOS: EL PROBLEMA DE LOS COMPAÑEROS DE HABITACIÓN

MATCHING THEORY: THE ROOMMATES PROBLEM

Realizado por el estudiante: Paula Fonseca García

Tutelado por los Profesores: Emma Moreno García

José Manuel Cascón Barbero

Firmado por FONSECA GARCIA PAULA - ***1769** el día 16/07/2021	Firmado por CASCON BARBERO JOSE MANUEL - 70863100P el día 16/07/2021 con un certificado emitido por AC FNMT Usuarios	MORENO GARCIA MARIA EMMA DE LA LUZ - 11765909Y Firmado digitalmente por MORENO GARCIA MARIA EMMA DE LA LUZ - 11765909Y Fecha: 2021.07.15 23:48:58 +02'00'

Salamanca, 16 de julio de 2021

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

El problema de los compañeros de cuarto (*roommates problem*) se incluye en la teoría de matching y persigue la formación estable de parejas en un grupo determinado.

Este trabajo de fin de grado se centra en el estudio de dicho problema en comparación con el de emparejamiento bilateral uno a uno. Además, se analiza el conocido como algoritmo de Irving, que conduce a una solución estable, siempre que exista.

1. INTRODUCCIÓN

En muchas ocasiones, los mercados se regulan mediante un mecanismo de ajuste de precios entre oferta y demanda. Sin embargo, hay circunstancias en las que este ajuste no satisface a ambos lados del sistema o no se produce un intercambio monetario. La teoría de matching o teoría de emparejamientos mejora el funcionamiento de varios mercados, generando multitud de estudios que buscan asignaciones estables.

En 2012, Lloyd Shapley y Alvin. E. Roth recibieron el premio Nobel de Economía por sus contribuciones a la teoría de asignaciones estables y el diseño de mercados; que combinan teoría e investigaciones empíricas y aplicadas. Algunas de las situaciones cuyo estudio se incluye en la teoría del matching son, por ejemplo, la asignación de estudiantes a universidades; en el mercado de trabajo, las interacciones entre trabajadores y empresas; o el sistema de trasplantes de órganos, entre donantes y pacientes. Cada uno de estos casos, ejemplifica un tipo de problema de emparejamiento diferente.[1]

En este trabajo, el foco está en el problema de los compañeros de habitación o roommates problem. Los problemas de matching bilateral comunes tienen dos grupos que se emparejan entre sí; sin embargo, la peculiaridad del problema del roommate es el hecho de la existencia de un único conjunto, en el que se pretende la formación de parejas entre los individuos. El ejemplo clásico para ilustrar este problema es la distribución por parejas en cuartos dobles, en residencias de estudiantes; sin embargo también se puede aplicar a la distribución de grupos de trabajo en clases o en empresas, o la asignación de parejas de pilotos, ..., entre otros muchos problemas de división de un grupo en subgrupos que

[1] Para una introducción a la teoría del emparejamiento puede leerse, entre otros, el artículo de Herrero (2013).

podrían ser planteados siguiendo la estructura del roommates problem.

Este documento tiene la siguiente estructura. En la sección 2 se presentan conceptos básicos de matching bilateral y se describe el algoritmo de aceptación diferida. En la sección 3, se define el roommmates problem y se ilustra con un ejemplo las diferencias con el emparejamiento bilateral uno a uno. A continuación, en la sección 4, se expone y analiza el algoritmo de Irving que proporciona, en caso de que exista, una solución estable al problema. Esta sección esta dividida en dos partes que se corresponden con las dos fases de las que consta el algoritmo. En la sección 5, se presenta un cuadro comparativo entre los dos problemas de matching considerados, así como un organigrama del algoritmo de Irving, donde se refleja que el roommate problem no siempre tiene una solución estable; ambos de elaboración propia. En la sección 6, se presentan posibles extensiones del problema, que proporcionen soluciones satisfactorias. El trabajo concluye con la recopilación de las ideas fundamentales del trabajo y líneas futuras de investigación.

2. SOBRE LA TEORÍA DE MATCHING

La teoría de emparejamientos o *matching theory* busca mecanismos de formación de parejas entre dos grupos de miembros indivisibles que solo se pueden emparejar con miembros del grupo contrario. Esta teoría permite analizar varias situaciones entre las que se incluyen diferentes emparejamientos entre individuos, empresas con trabajadores, casas con arrendatarios, universidades o colegios con estudiantes, donantes de órganos con pacientes, entre otras.

Se pueden distinguir dos tipos de emparejamientos: los bilaterales y los unilaterales. En los emparejamientos bilaterales los miembros de ambos grupos tienen sus correspondientes preferencias, mientras que en los emparejamientos unilaterales solamente los participantes de uno de los conjuntos muestra sus preferencias.

El conocido como problema del matrimonio o *marriage problem* es uno de los casos más referenciados y estudiados de emparejamientos bilaterales uno-a-uno. Existen dos grupos de individuos, hombres (M) y mujeres (W). Cada uno tiene sus preferencias, completas, transitivas y estrictas sobre los miembros del otro grupo, aunque también puede optar por permanecer solo. De este modo, cada individuo $m \in M$ es caracterizado por un ranking

$R(m)$ de $W \cup \{m\}$. De la misma forma, las preferencias de cada $w \in W$ son modelizadas por un ranking $R(w)$ de $M \cup \{w\}$. El objetivo es organizarlos en parejas de una forma satisfactoria para todos los miembros de ambos grupos. Para ello, definimos a continuación algunos conceptos básicos de *matching*.

Definición. (Matching). Un emparejamiento bilateral uno a uno, entre los conjuntos M y W es una función μ: $M \cup W \to M \cup W$, tal que, para cada par $(m, w) \in M \times W$, se cumplen las siguientes propiedades:

(i) $(\mu(m), \mu(w)) \in (W \cup \{m\}) \times (M \cup \{w\})$;

(ii) $m = \mu(w)$ si y solo si $w = \mu(m)$.

Decimos que un emparejamiento μ es bloqueado por un individuo $z \in M \times W$ si prefiere estar solo a estar emparejado con $\mu(z)$. Un emparejamiento μ es bloqueado por un par de individuos si existe $(m, w) \in M \times W$ tal que m y w prefieren estar juntos a seguir emparejados, respectivamente, con $\mu(m)$ y $\mu(w)$.

Definición. (Estabilidad). Un emparejamiento bilateral es estable si no puede ser bloqueado ni por un individuo ni por ningún par de individuos. En otro caso, diremos que el emparejamiento es inestable.

El objetivo es hallar una emparejamiento estable, es decir, un matching tal que que ningún participante individual, ni ninguna pareja tenga incentivos a desviarse de la asignación establecida. Gale y Shapley (1962) probaron un resultado de existencia de matching estables, proponiendo un algoritmo de implementación, que se llama algoritmo de aceptación diferida.

Teorema (Gale y Shapley, 1962). *Siempre existe un matching estable.*

La prueba de este resultado es constructiva. En concreto, se prueba que se llega a un emparejamiento estable mediante un mecanismo de aceptación diferida, que consta de las etapas que describimos a continuación.

En una primera fase, cada hombre se declara a su mujer favorita. Las mujeres que reciban varias propuestas, rechazan todas las recibidas salvo su preferida. Aunque no acepta la proposición de matrimonio todavía, la mantiene dentro de sus opciones permitiendo que otra proposición mejor llegue. Esto supone el fin de la primera fase.

En una segunda fase, los hombres rechazados se declaran a su segunda opción, y las chicas que han recibido propuesta escogen su favorita entre la que tenía en la reserva y las nuevas propuestas.

Se procederá de la misma manera hasta que no haya más propuestas por hacer, en cuyo caso se ha llegado a un emparejamiento estable.

Un emparejamiento estable es M-óptimo si ningún hombre prefiere otro emparejamiento estable, es decir, cada hombre está por lo menos igual de bien que en cualquier otro emparejamiento estable. De manera análoga, un emparejamiento estable es W-óptimo si ninguna mujer prefiere otro emparejamiento estable .

Gale y Shapley (1962) prueban también que, utilizando el algoritmo de aceptación diferida, se tiene que si los individuos en M hacen las propuestas, el matching que se obtiene es M-óptimo. Análogamente, cuando los individuos en W hacen las propuestas, el matching que se obtiene es W-óptimo.

3. EL PROBLEMA DE COMPAÑEROS DE CUARTO

Después de introducir el problema de emparejamientos bilaterales uno a uno y el concepto de estabilidad, Gale y Shapley (1962) proponen el llamado *roommates problem*, que es una versión del primero (véase también Knuth, 1976). En este caso solo tenemos un grupo de individuos y cada uno puede ser emparejado con cualquier otro. Cada miembro del grupo tiene su lista de preferencias de todos los demás individuos. El objetivo del problema es encontrar un emparejamiento estable, en el que el grupo se dividida en parejas de compañeros de habitación, de forma que no haya dos personas que se prefieran entre ellas a su compañero actual.

Formalmente, el roommates problem se define de la siguiente manera. Existe un conjunto S con un número par, $2n$, de individuos. Cada individuo $x \in S$ tiene una orden de preferencias sobre el conjunto $S_x = S \setminus \{x\}$ de los restantes participantes. Estas preferencias vienen representadas por una lista ordenada, que denotamos por P_x, que establece un ranking de los potenciales compañeros en S_x, y que puede englobar solo un subconjunto de S_x con los que x está dispuesto a ser emparejado. Un emparejamiento completo es una partición de S en n parejas separadas, de modo que para todo par de compañeros $\{x, y\}$,

x está en P_y e y está en P_x. Cuando dos individuos que no están juntos se prefieren entre sí a sus respectivos compañeros, decimos que bloquean el emparejamiento. Un emparejamiento es estable cuando no está bloqueado por ningún par de individuos. En otro caso, es inestable.

En este problema de compañeros de cuarto, a diferencia del *marriage problem*, no está garantizada la existencia de un emparejamiento estable. Para ilustrar las diferencias entre ambos planteamientos, presentamos algunos ejemplos.

Ejemplo. Matching *vs.* **roommates problem.**

Comparemos los dos problemas; el primero de matrimonios y el segundo de roommate.

Consideremos las siguientes preferencias para 3 hombres m y 3 mujeres w.

$$
\begin{array}{llll}
w_1: & m_2 & m_3 & m_1 \\
w_2: & m_3 & m_1 & m_2 \\
w_3: & m_1 & m_2 & m_3
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
m_1: & w_3 & w_2 & w_1 \\
m_2: & w_1 & w_2 & w_3 \\
m_3: & w_3 & w_2 & w_1
\end{array}
$$

En primer lugar, aplicamos el algoritmo de aceptación diferida atendiendo a las preferencias de los hombres, así cada hombre se propone reiteradamente a las mujeres de su lista de preferencias por orden, hasta que una decida aceptar su propuesta. El resultado es el emparejamiento M-óptimo:

$$
\begin{array}{c}
m_1 \leftrightarrow w_3 \\
m_2 \leftrightarrow w_1 \\
m_3 \leftrightarrow w_2
\end{array}
$$

Si en lugar de realizar los hombres sus propuestas, son las mujeres las que revelan sus preferencias y los hombres los que aceptan y rechazan, se llega al mismo emparejamiento, siendo por tanto también W-óptimo. En este caso particular, se obtiene así un emparejamiento estable, que además es óptimo tanto para los hombres como para las mujeres.

Para comparar con el problema del roommate, estudiemos el siguiente ejemplo ligeramente modificado del original de Irving (1991). Tenemos una lista de preferencias para 4 individuos, que quieren formar dos parejas entre ellos.

1:	2	3	4
2:	3	1	4
3:	1	2	4
4:	1	2	3

En este caso, no hay un emparejamiento estable. Para comprobarlo, basta observar que el individuo que sea emparejado con el 4, junto con alguno de los dos restantes formará una pareja de bloqueo . Por ejemplo, imaginemos el emparejamiento $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$. En este caso los individuos 2 y 3 son una pareja de bloqueo, dado que ambos tienen incentivos a estar juntos en lugar de estar con la pareja asignada. La misma situación se daría con el resto de combinaciones de individuos.

4. EL ALGORITMO DE IRVING

A pesar de que no siempre podemos encontrar un emparejamiento estable para el problema de roommates, Irving (1985) desarrolló un algoritmo para poder generar al menos una solución estable en caso de que exista. En esta seción, describimos el algoritmo de Irving, que consta de dos fases fundamentates:

4.1. Primera fase del algoritmo de Irving

La primera fase es similar a la del algoritmo de aceptación diferida: se da una secuencia de proposiciones de unas personas a otras en la que cuando x recibe una proposición de y, tiene la opción de rechazarla si recibe una propuesta mejor o tenerla en consideración, rechazando así alternativas peores de su lista de preferencias.

Cada individuo hace sus propuestas en orden, siguiendo su lista de preferencias, parando cuando recibe una propuesta de consideración. Cuando uno es rechazado, continúa con su secuencia de propuestas. Es decir, los individuos comienzan con sus propuestas una a una, dando lugar a una secuencia de propuestas y rechazos.

Esta primera fase del algoritmo puede terminar de dos maneras: con todo el mundo teniendo al menos una propuesta o con una persona siendo rechazada por el resto. En el segundo caso, es fácil observar que todos los individuos, salvo el que ha sido rechazado, tienen una propuesta y que por lo tanto todos han hecho su propuesta.

Este mecanismo descrito, permite obtener el siguiente lema.

Lema 1. (Fase 1). *Si y rechaza a x en la secuencia de propuestas de esta fase, entonces x e y no pueden ser compañeros en un emparejamiento estable.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, supongamos que la primera propuesta de la fase 1, es la que x dirige a y e y rechaza a x. Supongamos que M es el emparejamiento estable en el que x e y son compañeros. Si y rechaza a x es porque ha recibido una mejor propuesta de z. Como M es estable, z debe preferir su pareja, w a y. Antes de que z se le propusiese a y, debería de haber sido rechazado por w y este rechazo debería de haber sido anterior al de x por y, lo que contradice nuestra hipótesis inicial. ∎

De este lema, se pueden derivar las siguientes conclusiones:

- Si en algún momento de la secuencia de propuestas, x se propone a y en un emparejamiento estable, x no puede tener un compañero mejor que y e y no puede tener un compañero peor que x.
- Si la primera fase del algoritmo termina con una persona sin pareja, no hay ningún emparejamiento estable.

Si la primera fase termina con todos los individuos teniendo una propuesta, la lista de preferencias de posibles candidatos de y que tienen una propuesta de x se puede reducir, eliminando de ella:

- Todos aquellos que son menos preferidos que x.

- Todos aquellos que reciben una propuesta que prefieren a y.

De los argumentos que hemos presentado se deduce que la fase 1 produce uno de los tres siguientes resultados:

1.a) La lista de preferencias de al menos uno de los individuos se vacía. En este caso no existe un emparejamiento estable. El algoritmo terminaría aquí.

1.b) La lista de preferencias reducida de todos los individuos está formada por un único individuo, en cuyo caso, es un emparejamiento estable. El algoritmo terminaría aquí.

1.c) La lista de preferencias de todos los individuos consta de al menos un individuo, y por lo menos una de las listas tiene más de uno. En este caso, se pasaría a la segunda fase del algoritmo.

Para ilustrar cada uno de estos resultados, presentamos a continuación varios ejemplos. Para facilitar la presentación y compresión de los mismos utilizaremos la siguiente leyenda:

$\boxed{}$	x propone a $\boxed{y}$
$\boxed{}$	y conserva la propuesta de $\boxed{x}$
$\cancel{}$	z elimina a $\cancel{x}$ de su lista de preferencias.

El siguiente ejemplo, muestra el caso de un problema sin solución estable (caso 1.a).

Ejemplo. (No existe solución estable). Estudiemos la lista de preferencias para 4 individuos propuesta anteriormente.

1:	2	3	4
2:	3	1	4
3:	1	2	4
4:	1	2	3

El individuo 1 le realiza una propuesta al 2, que es el primero en su lista de preferencias. El individuo 2 mantiene la propuesta, rechazando así a los individuos que están detrás suyo en la lista de preferencias; en este caso el individuo 4. De la misma forma, el individuo 4 elimina al 2 de su lista.

1:	$\boxed{2}$	3	4
2:	3	$\boxed{1}$	$\cancel{4}$
3:	1	2	4
4:	1	$\cancel{2}$	3

De modo análogo al paso anterior, 2 le hace una propuesta a 3 y 3 la mantiene, rechazando a 4, que está por detrás, y éste se ve obligado a eliminar a 2 de su lista de preferencias.

1:	$\boxed{2}$	3	4
2:	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\cancel{4}$
3:	1	$\boxed{2}$	$\cancel{4}$
4:	1	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$

El individuo 3 hace su propuesta al 1, su primera opción. Este la mantiene, eliminando de su lista al 4. El individuo 4 se ve obligado a eliminar de su lista al 1.

1:	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\cancel{4}$
2:	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\cancel{4}$
3:	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\cancel{4}$
4:	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$

Vemos que la lista de preferencias del individuo 4 está vacía, por lo tanto no existiría un emparejamiento estable.

Si la fase 1 termina con una lista formada por un único individuo (caso 1.b), el emparejamiento resultante es estable. Este resultado es demostrado a continuación.

Lema 2. *Si en la lista de preferencias reducida las listas de todos los individuos contienen solo a una persona, entonces esas listas representan un emparejamiento estable.*

Demostración. Sea y preferido a la única persona en la lista reducida de x. Entonces, x ha sido rechazado por y, dado que ha recibido una propuesta mejor. La propuesta final que mantiene y es la de la única persona que tiene en su lista reducida, y, por lo tanto, y prefiere a ese individuo a x. Por lo tanto, no puede haber inestabilidad en el emparejamiento establecido por las listas reducidas de preferencias. ∎

Por último, presentamos un ejemplo que ilustra el caso 1.c, y que conduce a la fase 2 del algoritmo que será el objetivo de la siguiente sección.

Ejemplo. (Lista de preferencias reducida con más de un individuo). En este ejemplo aplicamos la primera fase del algoritmo. Tenemos 6 individuos que se tienen que emparejar, cuyas preferencias se describen en la tabla de la izquierda.

1	2	6	3	5	4
2	3	4	5	6	1
3	4	5	6	2	1
4	1	2	3	5	6
5	6	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1

1	$\boxed{2}$	$\cancel{6}$	$\cancel{3}$	$\cancel{5}$	$\boxed{4}$
2	$\boxed{3}$	4	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{1}$
3	$\boxed{4}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$	$\boxed{2}$	$\cancel{1}$
4	$\boxed{1}$	2	$\boxed{3}$	$\cancel{5}$	$\cancel{6}$
5	$\boxed{6}$	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$
6	$\boxed{5}$	$\cancel{4}$	$\cancel{3}$	$\cancel{2}$	$\cancel{1}$

Para elaborar la lista de preferencias reducida de los individuos, se sigue el sistema de "propuesta y rechazo", donde un individuo se declara a su candidato preferido y esta persona elimina de su lista a todos los individuos que estén por debajo de esta propuesta en su lista de preferencias. De la misma forma, estos que han sido eliminados, excluyen de su lista al individuo que les ha eliminado. Siguiendo este sistema hasta que los 6 individuos tienen una propuesta o hasta que uno de ellos acaba su lista, conseguiríamos la lista de preferencias reducidas, que en este caso, es la siguiente:

1	2	4	
2	3	4	1
3	4	2	
4	1	2	3
5	6		
6	5		

Una vez que se finaliza la primera fase y se obtiene una lista de preferencias reducida, en este caso (1.c), es necesario aplicar la segunda fase del algoritmo, que presentamos a continuación.

4.2. Segunda fase del algoritmo de Irving

La fase dos del algoritmo actúa cuando las listas de preferencias reducidas contienen más de un individuo. En esta fase, las listas de preferencias se reducirán aún más, en un proceso que puede ser repetido varias veces hasta que se den una de las dos condiciones de cierre:

2.a) Una persona se queda sin individuos a los que proponerse (lista vacía).

2.b) Las listas reducidas contienen un único candidato.

En el primer caso, se concluye que no existe emparejamiento estable. En el segundo, las listas reducidas a un único elemento definen un emparejamiento y es estable.

Para poder explicar con precisión esta segunda fase, se requiere la introducción del concepto de rotación.

Definición. (Rotación). Sea una tabla con listas de preferencias. Una rotación $R = (a_1, a_2, ..., a_r)|(b_1, b_2, ..., b_r)$ es una secuencia cíclica de $a_1, a_2, ..., a_r$, donde para cada $i = 1, \ldots, r-1$, se tiene que b_{i+1} es la primera persona en la lista de a_{i+1} y la segunda en la lista de a_i, y b_1 es la segunda para a_r y la primera para a_1.

Ejemplo. (Identificación de una rotación). En el ejemplo anterior, se puede observar la rotación $R = (1,3)|(2,4)$, donde siendo $b_1 = 2$, ocupa el primer puesto en la lista de preferencias del individuo 1 y el segundo en la lista del individuo 3 y siendo $b_2 = 4$ ocupa el primer puesto en la lista de preferencias de 3 y el segundo en la lista de preferencias de 1, viéndose así el carácter cíclico.

Cuando hay más de una persona en alguna de las listas de una tabla de preferencias reducida, obtenida en la primera fase, se puede demostrar que existe una rotación en dicha tabla. Concretamente, para encontrar una rotación fijamos un p_1 aleatorio dentro de los individuos que contengan más de una persona en su lista de preferencias reducidas y generamos una secuencia tal que q_i es la segunda persona en la lista reducida de p_i y p_{i+1} es la última persona de la lista de q_i hasta que se obtenga un ciclo en la secuencia de de p. Denotando por p_s el primer miembro en la secuencia de p en ser repetido, nos referimos a $p_1, p_2, ..., p_{s-1}$ como la cola del ciclo. La rotación, viene definida por la secuencia cíclica $a_i = p_{s+i-1}$ con $i = 1, 2, \ldots$.

Ejemplo. (Proceso de búsqueda de rotaciones). Para obtener una rotación en el ejemplo anterior, siguiendo el procedimiento explicado, identificamos $p_1 = 1$ y seguimos la secuencia:

$$q_1 = 4 \quad p_2 = 3$$
$$q_2 = 2 \quad p_3 = 1,$$

donde $q_1 = 4$ es el segundo individuo en la lista de preferencias de 1, $p_2 = 3$ es el último individuo en la lista de preferencias de 4, $q_2 = 2$ es el segundo elemento en la lista de preferencias de 3 y $p_3 = 1$ es el último elemento en la lista de preferencias de 2; cerrando así el ciclo. Por lo tanto; la rotación obtenida sería $R = (1,3)|(2,4)$. En este caso se observa que la rotación no tiene cola.

Una vez que en la fase 2 del algoritmo se identifica una rotación $R = (a_1, ..., a_r)|(b_1, ..., b_r)$ en una lista de preferencias reducida, cada b_i se ve obligado a rechazar la propuesta de

a_i, por lo que a_i tiene que hacer una segunda propuesta a su segunda opción, b_{i+1}. Como consecuencia, al igual que ya se hizo previamente, todos los individuos después de a_i en la lista de preferencias reducidas de b_{i+1} pueden ser eliminados; y, a su vez, simétricamente éstos pueden eliminar b_{i+1} de sus respectivas listas. Dado que a_i no puede conseguir una mejor pareja que b_{i+1}, entonces b_{i+1} no puede emparejarse con un peor compañero que a_i. Esto implica una condición de estabilidad.

Ejemplo. (Proceso de eliminación de rotaciones). Siguiendo el procedimiento de eliminación de la rotación identificada anteriormente, la lista de preferencias reducida de fase 2 quedaría de la siguiente manera:

1	~~2~~	4	
2	3	~~4~~	~~1~~
3	~~4~~	2	
4	1	~~2~~	~~3~~
5	6		
6	5		

Persona	Lista de preferencias
1	4
2	3
3	2
4	1
5	6
6	5

Podemos observar que en la nueva lista de preferencias reducidas todas las listas tienen únicamente un individuo, por lo tanto hemos llegado a un emparejamiento estable, que está representado por $\{\{1,4\},\{2,3\},\{5,6\}\}$.

En este caso particular, la eliminación de una única rotación es suficiente para encontrar una solución estable; esto no siempre es así.

La justificación teórica que avala este procedimiento se presenta a continuación.

Lema 3. (Fase 2). *Sea $R = (a_1, ..., a_r)|(b_1, ..., b_r)$ una rotación en una lista de preferencias reducidas, entonces se verifica lo que sigue:*

(i) En cualquier emparejamiento estable contenido en esa lista de preferencias, o a_i y b_i son pareja para todos los valores de i o para ninguno.

(ii) Si hay un emparejamiento estable en el que a_i y b_i son pareja, entonces existe otro en el que no lo son.

Demostración. (i) Asumamos que a_i y b_i están juntos en un emparejamiento estable contenido en la lista de preferencias reducidas. Por construcción, a_i es la última opción en la lista de preferencias de b_i y b_i ocupa la segunda posición en la lista reducida de a_{i-1}, y por lo tanto a_{i-1} está en la lista de preferencias de b_i en una posición superior a a_i. Para que se de estabilidad, a_{i-1} tiene que estar emparejado con alguien que prefiera a b_i, es decir, su primera opción, b_{i-1}. Repitiendo este argumento con todos los individuos, a_i y b_i tienen que ser compañeros en todos los valores de i.

Para probar (ii), sea $A = \{a_1, ..., a_r\}$ y $B = \{b_1, ..., b_r\}$. Sea $A \cap B$ un conjunto no vacío, si $a_j = b_k$, entonces es imposible para cualquier a_i obtener su primera opción de las restantes, dado que b_k tiene su última opción cuando a_k tiene su primera. Por lo tanto, basándose en (i), $A \cap B \neq \varnothing$ implica que ningún a_i y b_i pueden ser pareja, por lo que podemos asumir $A \cap B = \varnothing$.

Supongamos que M es un emparejamiento estable, contenido en las listas reducidas, donde a_i y b_i son compañeros para todo i. Denotemos como M' al emparejamiento en el que a_i está emparejado con b_{i+1} y cualquier individuo fuera de $A \cup B$ tiene el mismo compañero que en M. A continuación se demuestra que M' es estable.

Se puede observar que cada individuo de B obtiene mejor compañero en M', desde su perspectiva, que en M, mientras que son los individuos de A los que empeoran su situación. Por lo tanto, si existe inestabilidad en M', vendría de algún a_i.

Sea x preferido a b_{i+1} por a_i, hay tres situaciones posibles:

(a) a_i y x son compañeros en M ($x = b_i$), pero en M' x prefiere a su nuevo compañero a a_i por lo que el emparejamiento no puede ser inestable;

(b) a_i también prefiere x a b_i. Notar que x no está en su lista de preferencias reducida de a_i, donde debería de ir por delante de b_i, la primera preferencia conocida de a_i de las restantes. De la misma forma, a_i no está en la lista de preferencias de x, bien por haber rechazado a a_i o por haberse visto forzado a rechazar a a_i. En el primer caso, x debería haber recibido una propuesta de un individuo preferido a a_i; en el segundo, el rechazo forzoso se debería a que a_i habría rechazado la propuesta de x por una mejor. En ambos casos, x preferiría a su última opción de las restantes, y con toda certeza a su compañero en M' antes que a a_i.

(c) a_i prefiere b_i a x. En este caso, x se encuentra entre b_i y b_{i+1} en la lista de preferencias original de a_i pero, al igual que en el caso anterior, está fuera de su lista de preferencias reducida. Por lo tanto, la eliminación de x de la lista de a_i se procedería de que x haya obtenido una propuesta de alguien preferido a a_i, por lo que x, al igual que en (b), debe preferir a su compañero en M' a a_i. Tampoco en este caso M' puede presentar inestabilidad.

Concluimos por tanto que M' es estable. ∎

De este lema, se pueden derivar la siguientes conclusiones:

- Si el problema original admite un emparejamiento estable, entonces hay un emparejamiento estable en cualquier lista de preferencias reducida.
- Si la lista de uno de los individuos queda vacía al final de una reducción de lista de preferencias, entonces el problema original no admite un emparejamiento estable.

5. UNA RECAPITULACIÓN

Esta sección consta de dos contribuciones originales, pensadas y realizadas para este TFG, con el objetivo de hacer una recapitulación de los contenidos fundamentales de las secciones anteriores.

En primer lugar, se ha realizado una tabla que resume y compara los problemas de emparejamiento bilateral y roommates, incluyendo los aspectos teóricos fundamentales así como las características de los correspondientes algoritmos asociados.

En segundo lugar, se presenta un organigrama, cuya estructura y diseño ilustra el funcionamiento del algoritmo de Irving. De este modo, se da claridad no solo a las diferentes fases, etapas sino a las conclusiones que se obtienen en relación a la existencia de una solución estable.

	Matching bilateral uno a uno	**Roommates Problem**
Elementos	• 2 grupos de individuos M y W con cardinalidad n y m. • $m \in M$ revela preferencias sobre $W \cup \{m\}$. • $w \in W$ revela preferencias sobre $M \cup \{w\}$.	• 1 grupo de individuos X con cardinalidad $2n$. • $x \in X$ revela sus preferencias sobre $X/\{x\}$.
Objetivo	Emparejamiento bilateral	Partición en n parejas
Estabilidad	Ningún participante individual, ni ninguna pareja tiene incentivos a desviarse de la asignación establecida.	No existen dos personas que se prefieran entre ellas a su compañero actual.
Solución estable	Siempre existe. (Gale & Shapley, 1962)	No siempre existe.
Algoritmo	Aceptación diferida (Gale & Shapley, 1962)	Irving (Irving, 1985)
Características	• Proceso propuesta - rechazo. • Proporciona solución estable. • Resultado óptimo para el grupo que propone.	• Dos fases 1ª fase. Proceso propuesta - rechazo. 2ª fase. Eliminación de rotaciones. • Proporciona solución estable, si existe.
Complejidad	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$

Tabla 5.1: Cuadro comparativo matching bilateral vs. roommates problem

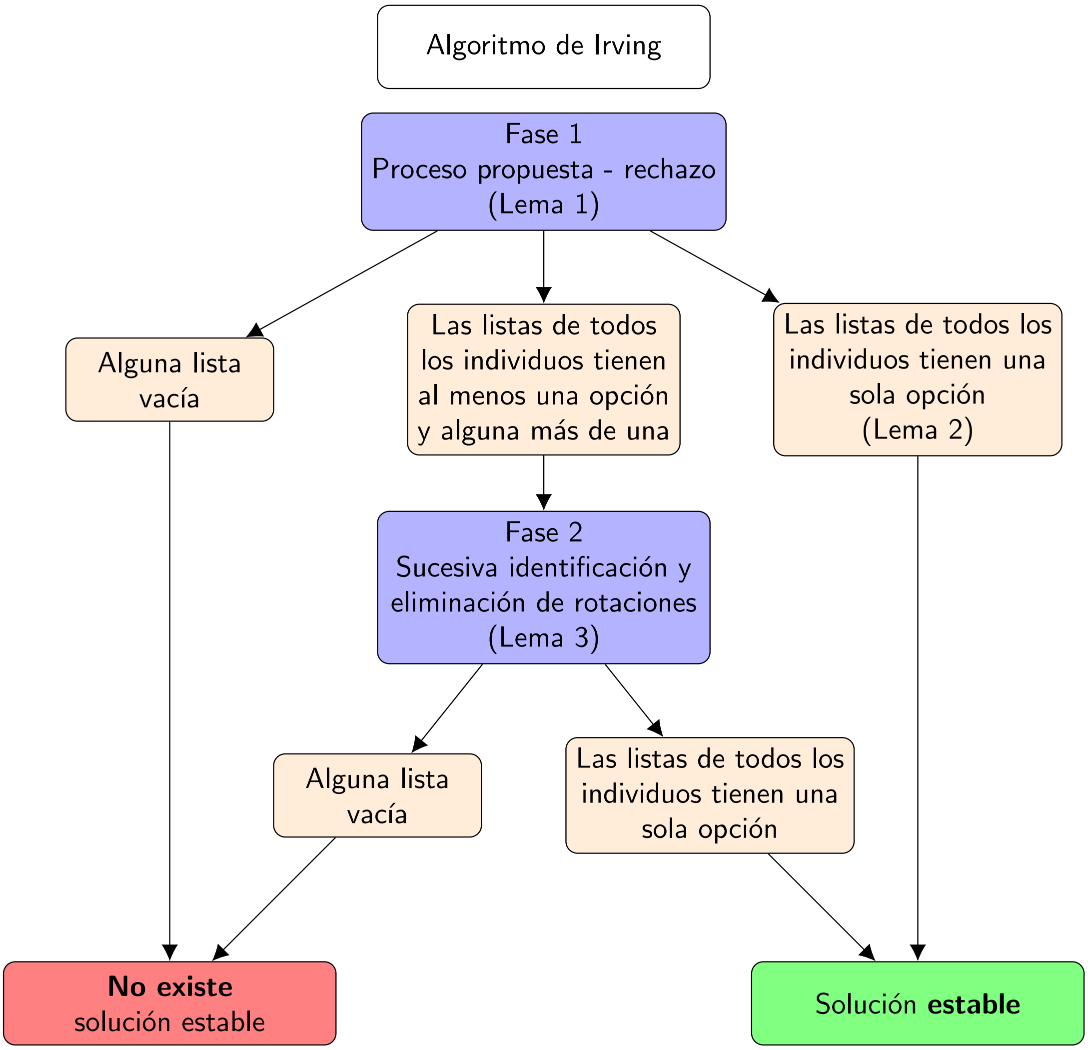

Figura 5.1: Algoritmo de Irving

6. EXTENSIONES DEL PROBLEMA DE ROOMMATES Y ALGORITMOS

El algoritmo de Irving permite encontrar emparejamientos estables en los problemas de *roommates*, en el caso que los haya. También cabe la posibilidad de que el algoritmo concluya con la no existencia de matching que tenga la propiedad de estabilidad. Para solucionar la posible inexistencia de matching estables, Tan (1990) propone como solución alternativa un emparejamiento estable máximo para el problema y una modificación del algoritmo con el objetivo de lograr este tipo de emparejamiento. Un emparejamiento estable máximo es aquella asignación en la que están emparejados el mayor número de individuos posible del conjunto cumpliendo las condiciones de estabilidad definidas anteriormente.

En el algoritmo de Tan se eliminan las listas de preferencias de la tabla que no son necesarias para, finalmente, encontrar una solución estable con el máximo número de individuos posibles. La principal diferencia respecto al algoritmo de Irving es que en éste, cuando la lista de uno de los individuos se vacía en alguna fase, se concluye que no existe un emparejamiento estable mientras que en la propuesta de Tan, el algoritmo sigue hasta encontrar el emparejamiento con las propiedades deseadas. En el algoritmo de emparejamientos máximos estables, que también consta de dos fases, se trabaja con las partes activas de la tabla de preferencias; es decir, con las listas de los participantes que tienen más de un individuo en las mismas. De esta forma, el resultado final del algoritmo es un equilibrio estable, el cual no tiene que estar formado por todos los individuos del conjunto inicial sino solamente por un subgrupo de ellos, donde exista la condición de estabilidad y no haya otro estable con un mayor número de parejas.

Otra alternativa, que generaliza la propuesta inicial del problema de *roommates*, son las particiones estables, introducidas también por Tan (1991). Las particiones estables son divisiones de los individuos en grupos que no tienen que ser necesariamente de dos individuos; sino que pueden estar compuestos por varios. Los grupos pueden ser tanto pares como impares y en ellos se dan las condiciones de estabilidad, explicadas con detalle en el artículo de Tan (1991), necesarias para que ningún individuo tenga incentivos a desviarse del grupo del que forma parte. A diferencia del emparejamiento estable completo, cuya existencia no se puede garantizar en todos los problemas, sí existe una partición estable en cualquier problema de *roommates*. Asimismo, el equilibrio estable completo podría ser considerado una partición estable en la que todos los grupos están formados por dos personas.

7. CONCLUSIONES

La teoría de *matching* es un amplio campo de investigación. Enmarcado en esta teoría, en este TFG, se ha analizado el denominado, *roommates problem*, quedando patentes sus diferencias con el emparejamiento bilateral uno a uno. Entre ellas, en el primer caso se parte de un único conjunto, y la construcción de la partición requiere de una algoritmo más complejo, que además no garantiza la solución estable, a priori.

Tal y como se indica en la última sección del trabajo, existen varias extensiones que permiten determinar otro tipo de soluciones, como son las particiones estables o los emparejamientos máximos estables. Futuros trabajos podrían enfocar un análisis más exhaustivo de estas extensiones.

Finalmente, es de destacar que la teoría de emparejamientos tiene numerosas y diversas aplicaciones prácticas. Los problemas presentados en este trabajo, representando una ínfima parte de su campo de estudio, permiten dar visibilidad a su potencial, siendo esperable que en los próximos años evolucione de forma significativa.

BIBLIOGRAFÍA

Gale, D., & Shapley, L. (1962). College admissions and the stability of marriage. American Mathematical Monthly 69, 9-15.

Herrero, C. (2013). Alvin E. Roth y Lloyd Shapley, Premios Nobel de Economía 2012. La Gaceta de la RSME 16 (3), 465–478.

Irving, R. (1985). An efficient algorithm for the "stable roommates"problem. Journal of Algorithms 6, 577-595.

Knuth, D. (1976). Mariages Stables. Presses University de Montreal, 106.

Tan, J. (1990). A maximum stable matching for the roommates problem. BIT 29, 631-640.

Tan, J. (1991). Stable matching and stable partitions. Intern J. Computer Math 39, 11-20.