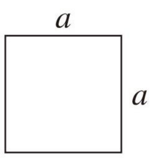
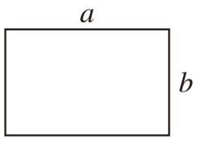
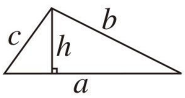
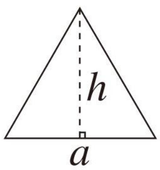
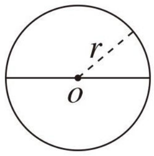
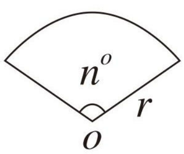
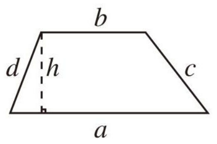
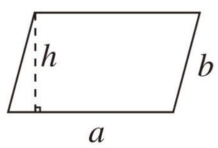
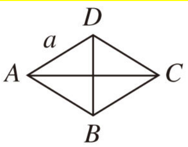
第十一讲　平面几何问题

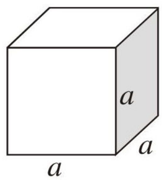
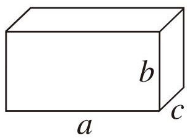
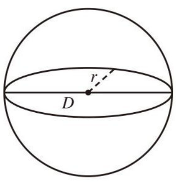
几何问题常见公式

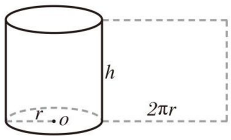
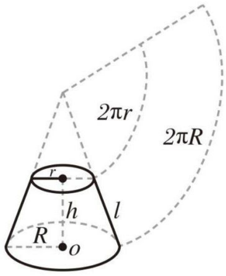
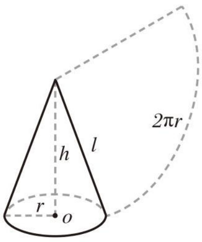
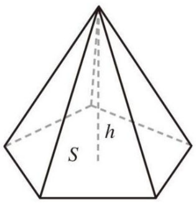
1、平面图形

平面图形	图示	周长	面积
正方形		$4a$	$S_{正方形}=a^2$
长方形		$2(a+b)$	$S_{长方形}=ab$
三角形		$a+b+c$	$S_{三角形}=\frac{1}{2}a\times h$
正三角形		$3a$	$S_{正三角形}=\frac{\sqrt{3}}{4}边长\times边长$
圆形		$2\pi r$	$S_{圆形}=\pi r^2$
扇形		$弧长=\frac{n}{360^o}\times圆周长=\frac{n\pi r}{180^o}$ n 为圆心角	$S_{扇形}=\frac{n}{360^o}\times圆面积=\frac{n\pi r^2}{360^o}=\frac{lr}{2}$ l 为弧长

梯形		$a+b+c+d$	$S_{梯形}=\frac{（上底+下底）\times 高}{2}$
平行四边形		$2a+2b$	$S_{平行四边形}=ah$
菱形		$4a$	$S_{菱形}=\frac{对角线\times 对角线}{2}$

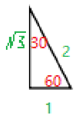
2、立体图形

立体图形	图示	表面积	体积
正方体		$6a^2$	a^3
长方体		$2(ab+ac+bc)$	abc
球体		$4\pi r^2=\pi D^2$ （D 是直径）	$\frac{4}{3}\pi r^3$

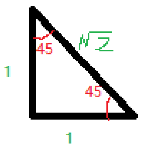
圆柱体		$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
圆台		$\pi r^2 + \pi R^2 + \pi rl + \pi Rl =$ $\pi(r^2 + R^2 + rl + Rl)$ l 为母线 $l = \sqrt{(R - r)^2 + h^2}$ h 为圆台高	$\frac{1}{3}\pi h(r^2 + Rr + R^2)$ r 是小圆半径，R 是大圆半径
圆锥		$\pi r^2 + \pi rl$	$\frac{1}{3}Sh$ S 为底面积
棱锥		侧面积＋底面积	$\frac{1}{3}Sh$ S 为底面积

✎平面几何之三角形：特殊直角三角形、勾股定理、特殊勾股数、相似三角形、等底等高等

特殊直角三角形：



30 度角所对的直角边是斜边的一半。



批注[constantine1]: 特殊勾股数：

3 4 5

6 8 10

5 12 13

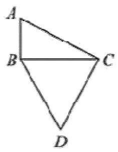
8 15 17

7 24 25

9 40 41

例题 1

某公园内的道路如下图所示，其中 AB，BC 分别为正南北向和正东西向道路，AB，AC 分别长 100 米和 200 米。且 BCD 为正三角形，如要用直线道路连接 AD，则该道路的长度为多少米？

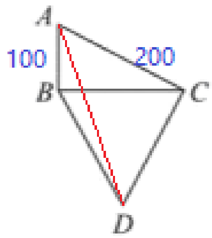


A．$150\sqrt{3}$　　　　B．$50(\sqrt{3}+1)$

C．$100\sqrt{7}$　　　　D．$200\sqrt{2}$

【参考答案】C

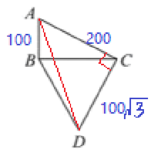
【实战解析】标注数据如下图所示：



由 AC：AB=2:1，∠ABC 为直角，可确定∠ACB 为 30°；

则 BC=$100\sqrt{3}$；

又由△BCD 是正三角形，则∠BCD=60°，CD=BC=BC=$100\sqrt{3}$，且∠ACD=30+60=90°；

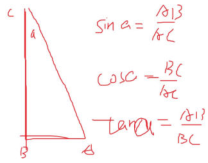


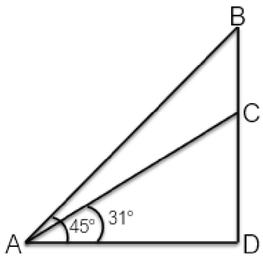
对于直角三角形 ACD，根据勾股定理，AD=$\sqrt{40000+30000}=100\sqrt{7}$，定位到 C。

例题 2

厦门鼓浪屿海滨覆鼎岩上屹立着一尊郑成功雕像。为了测量石像的高度，某测量小组选取的测量点 A 与覆鼎岩底部 D 在同一水平线上，如下图所示。已知覆鼎岩高 CD 为 24 米，在 A 处测得石像头顶部 B 的仰角为 45°，石像底部 C 的仰角为 31°（参考数据：sin31°≈0.52，cos31°≈0.86，tan31°≈0.60），则石像 BC 的高度约为多少？

批注[constantine2]:



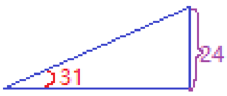


A. 20 米　　B. 18 米

C. 16 米　　D. 14 米

【参考答案】 C

【实战解析】直接看△ACD：



已知 tan31° $=\frac{对边}{邻边}=\mathbf{0.6}$，则 **AD** =40；

由于△ABD 是等腰直角三角形，故 BD=40；

则 BC=40-24=16，选 C

例题 3（2024 山东省考）

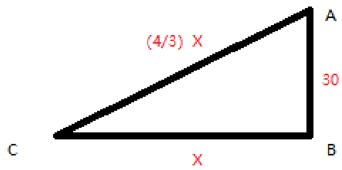
某巡逻艇在海域 A 点发现正南方 30 千米处的 B 点有一艘可疑船只正匀速向正西方行驶，巡逻艇以比该可疑船只快 1/3 的速度沿某一方向直线追击，两船恰好在 C 点相遇。问 B、C 两点之间的距离约多少千米？

A．26　　B．28

C．30　　D．34

【参考答案】D

【实战解析】根据已知条件，设可疑船只速度为 X，则巡逻艇速度为$\frac{4}{3}$X；作图如下：



根据勾股定理列式：

$\frac{16}{9}X^2$=900+X^2;

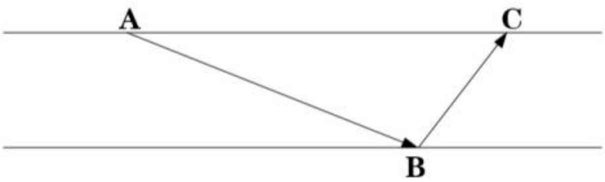
$\frac{7}{9}X^2 = 900$；

X=$\frac{90}{\sqrt{7}}$

批注[constantine3]: 90÷3=30；$\sqrt{7}$ 显然不到 3，故答案要比 30 大，选 D

例题 4（2024 事业编联考）

一条东西向的河流宽 50 米，如下图所示，甲划船从北岸的 A 点出发，直线航行 130 米后到达南岸的 B 点，然后向左转向 90 度继续直线行驶，到达河流北岸的 C 点，问 A、C 两点的距离在以下哪个范围内？

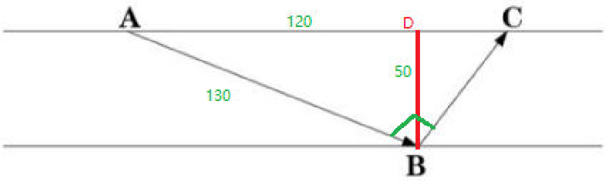


A．不到 150 米　　B．150～160 米之间

C. 160～170 米之间　　　　　　　　　D. 超过 170 米

【参考答案】A

【实战解析】本题利用相似三角形，如下图所示：



过点 B 作 BD⊥AC，由题干 AB=130，BD=50，∠ADB=90°，则可求得 AD=120；

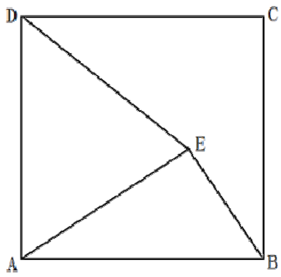
由∠ABD+∠BAD=90°，∠ABD+∠DBC=90°，故∠BAD=∠CBD；

故 tan∠BAD=$\frac{BD}{AD}$=$\frac{5}{12}$=$\frac{CD}{BD}$=$\frac{CD}{50}$，解得 CD=$\frac{250}{12}=21^{-}$；

故 AC=120+21^{-}=141^{-}，故选 A。

例题 5（2023 福建）

边长为 10 厘米的正方形 ABCD 如下图所示，E 为正方形中的某一点，已知 AE 长 8 厘米，BE 长 6 厘米，问三角形 ADE 的面积为多少平方厘米？

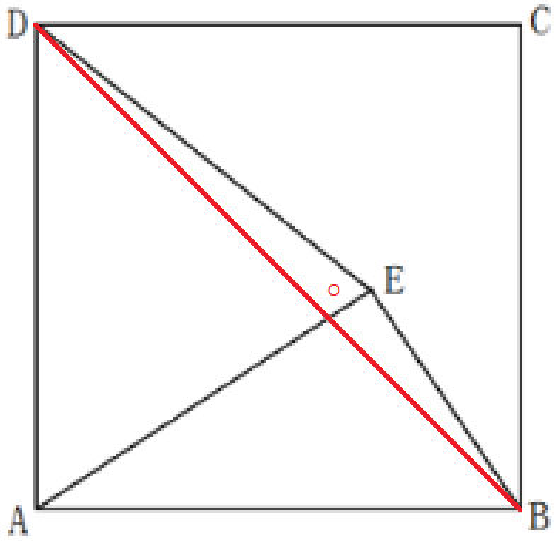


A. 24　　　　　　　　　　　　　　B. 32

C. 44　　　　　　　　　　　　　　D. 48

【参考答案】B

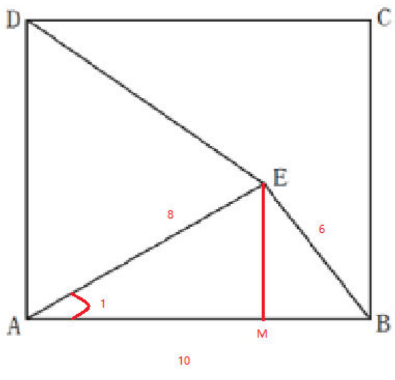
【实战解析】秒杀方法：



△DAB 是正方形面积的一半，50；多了△DBE，但是少了下面△AOB 这一大块面积，所以比一半小很多，排除 CD；另外明显要大于四分之一正方形面积，排除 A；

综上，B 选项正确。

正常算：



Cos∠1=$\frac{AM}{8}=\frac{8}{10}$，求得 AM=6.4；

则 S△ADE=（6.4*10）/2=32

选 B

例题 6（2022 国考）

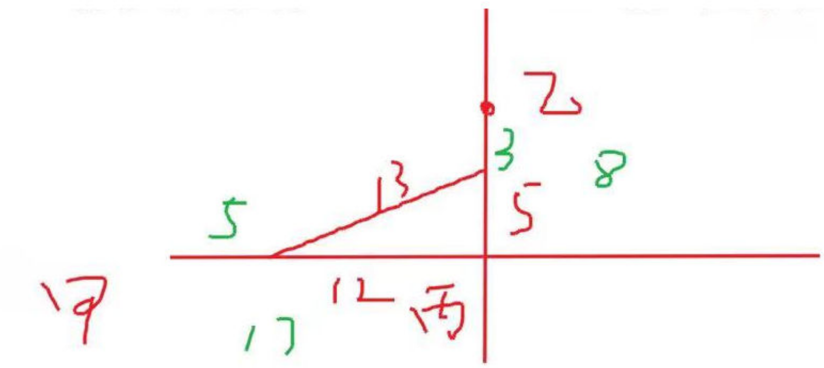
甲地在丙地正西 17 千米，乙地在丙地正北 8 千米。张从甲地、李从乙地同时出发，分别向正东和正南方向匀速行走。两人速度均为整数千米/小时，且 1 小时后两人的直线距离为 13 千米，又经过 3 小时后两人均经过了丙地且直线距离为 5 千米。已知李的速度是张的 60%，则张经过丙地的时间比李？

A．早不到 10 分钟　　　　B．早 10 分钟以上

C．晚不到 10 分钟　　　　D．晚 10 分钟以上

【参考答案】D

【实战解析】根据题干作图如下：



如图，一小时后，张走了 5 公里，李走了 3 公里；

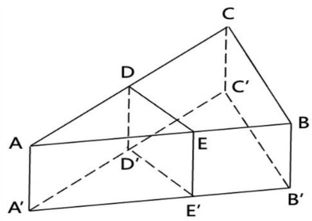
则张从甲到丙用时为 12/5=2 小时多；

李从乙到丙地用时为 5/3=1 小时 40 分钟；

所以张晚了 20 分钟以上，D 选项当选。

例题 7（2022 江苏）

如图所示，小王买了一块直三棱柱形状的蛋糕 ABC − A'B'C'，其中∠ABC = 90°，∠BAC = 30°。为与两位室友分享，他切出一小块和原蛋糕形状相同的蛋糕？ADE − A'D'E'其体积与原蛋糕的体积之比为 1∶3。若∠ADE = 90°，则线段 AE 与 EB 的长度之比为多少？



A. 2∶1　　B. 3∶2

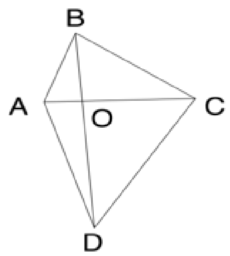
C. $\sqrt{3}$∶1　　D. 2∶$\sqrt{3}$

【参考答案】A

【实战解析】根据长度比是 1：N，面积比是 1：N^2，体积比是 1：N^3，又因为三棱柱 $ADE-A'D'E'$ 高相同，故 S_{ADE}与S_{ABC} 面积比为 1:3，每条边之比为 1：$\sqrt{3}$。设 DE 为 1，可得出 AE=2，BC=$\sqrt{3}$，从而得出 AB=3，EB=1，故 AE:EB=2:1，A 选项当选。

例题 8（2023 国考执法）

公园里有一片四边形草坪，沿对角线修建的小道相交于 O 点，O 到四个顶点 A、B、C、D 的距离之比正好为 1∶2∶3∶4，一名工人花费 1 天正好完成 AOB 区域的修剪，问第二天至少需要额外增加多少名效率相同的工人一起工作，才能在当天内完成剩余草坪的修剪？



A. 8　　B. 10

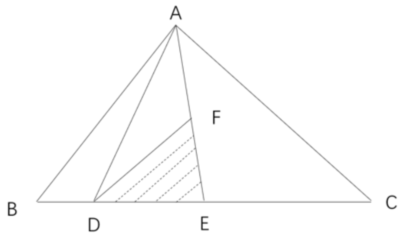
C. 11　　D. 12

【参考答案】B

【实战解析】三角形 AOB 与三角形 BOC 同底等高，故其面积比就等于底之比，可得出 $S_{BOC}=3$；同理，$S_{AOD}=2$，$S_{COD}=6$，所以当前剩余草坪修剪面积为 11，又已知一个工人每天可以打扫 1，所以还需要增加 10 名工人即可完成剩余草坪的修剪，B 选项当选。

例题 9（2023 吉林）

为推动产业园和产业集聚区加快转型，某地计划在三角形 ABC 区域内建设新能源产业园区（如下图所示），三角形 DEF 是中央工厂区，已知 BD∶DE∶EC=1∶2∶3，F 为 AE 的中点，则新能源产业园区总面积是中央工厂区面积的多少倍？



A. 7 倍　　　　B. 6 倍

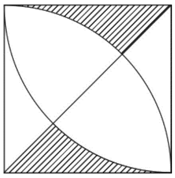
C. 5 倍　　　　D. 4 倍

【参考答案】B

【实战解析】在三角形 ADE 中，因为 F 是 AE 中点，且三角形 ADF 与三角形 DEF 高相等，故 $S_{ADF}=S_{DEF}$，设 $S_{ADF}=S_{DEF}=1$，则 S_{ADE}=2，三角形 ABD、ADE、AEC 高相等，故其面积比就等于底边长度之比=1：2：3，可得出 $S_{ABC}=6$，是中央工厂区面积的 6 倍，B 选项当选。

✎平面几何之其他：圆形、扇形、正方形长方形等

例题 10（2019 广东）



某小区规划建设一块边长为 10 米的正方形绿地。如图所示，以绿地的 2 个顶点为圆心，边长为半径分别作扇形，把绿地划分为不同的区域。小区现准备在图中阴影部分种植杜鹃，则杜鹃种植面积为多少平方米？

A. 100-25π　　B. 200-35π

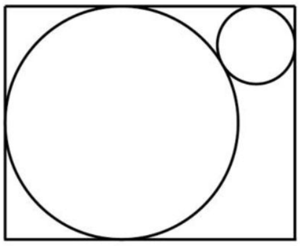
C. 200-50π　　D. 100π-100

【参考答案】A

【实战解析】如图所示，两块阴影部分面积相同并且可以合并到一侧，故阴影部分面积就等于正方形面积减去$\frac{1}{4}$圆面积=100-$\frac{1}{4}\times\pi\times10^2$，A 选项当选。

例题 11（2023 浙江）

某地打算在绿地上建两个圆形花坛，如下图所示，大圆的直径为 6 米，小圆的直径为 2 米，修建期间暂时在外围设置围栏。已知围栏呈矩形，大圆与围栏的三条边相切，小圆与围栏的两条边相切，且两圆相切，那么矩形围栏的面积是多少平方米？

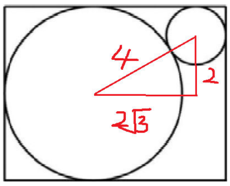


A. $12(2+\sqrt{3})$　　B. $12(1+2\sqrt{3})$

C. $12\sqrt{13}$　　D. $6(3+\sqrt{13})$

【参考答案】A

【实战解析】连接两个圆心做直角三角形，三角形斜边为两个圆的半径和=4，右侧垂边为大圆半径减去小圆半径=2，故可得出底边长度为$2\sqrt{3}$，此时可求得矩形长度为 3+1+$2\sqrt{3}$，宽为大圆直径，故面积为



6×（4+$2\sqrt{3}$）=12（2+$\sqrt{3}$），A 选项当选。

例题 12（2024 湖北）

某单面圆形交通禁停标志牌如图所示，标志牌直径为 60cm，牌中各处红色区域宽度均为 5cm，某工厂承接 30 个该种标志牌的喷绘业务，已知每个标志牌的蓝色区域喷绘价格是 112.5 元，红蓝区域喷绘单价相同（价格仅按面积计算），那么 30 个标志牌喷绘共需多少元？

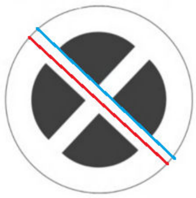
A. 3375 元　　B. 6000 元

C. 6750 元　　D. 8437.5 元

【参考答案】B

【实战解析】此题出题不严谨，正常的直径是红线，但此题只能把蓝线当做直径来计算才有答案。

将四个扇形合并成小圆，小圆的直径为 60-5-5-5=45，大圆与小圆的直径比为 60:45=4:3，面积比为 16:9，又已知小圆所需费用为 112.5，所以大圆所需费用为 $\frac{112.5}{9}\times 16=200$，故 30 个的总费用为 30×200=6000，B 选项当选。



例题 13（2019 广东）

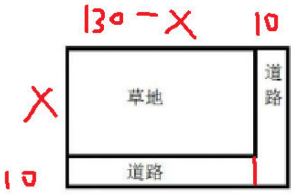
如图所示，市政部门在一块周长为 260 米的长方形草地旁边铺设宽为 10 米的 L 形道路。已知铺好道路后，道路和草地面积之和为草地面积的 1.5 倍，则草地的面积为多少平方米？

A. 4200　　　　B. 4000

C. 3000　　　　D. 2800

【参考答案】D

【实战解析】设草地宽为 X，长度为 130-X，根据倍数关系可知，草地面积为道路面积的 2 倍，故可根据倍速关系列方程：X（130-X）=2{10（X+10）+10（130-X）}=2800，D 选项当选。



例题 14（2023 浙江）

一只闹钟的秒针顶点距离表盘圆心 4 厘米，分针顶点距离表盘圆心 3 厘米。小王烧开一壶水的时间内，秒针顶点累计移动了 40π厘米。那么这一时间段内，分针顶点与表盘圆心的连线扫过的扇形面积为多少平方厘米？

A. 0.5π　　　　B. 0.75π

C. π　　　　D. 1.5π

【参考答案】B

【实战解析】如图所示，秒针走一圈的周长是 2πr=8π，40π 说明走了 5 圈，也就是 5 分钟，分针走一圈为 60 分钟，5 分钟相当于 $\frac{1}{12}$ 圈，故面积为 $\frac{1}{12}\pi r^2=\frac{1}{12}\times 9\pi$=0.75π，B 选项当选。