第三讲 余数、平方数与等差数列

❷数列基础知识:

数列常考公式:

	通项公式	求和公式
等差数列	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$
等比数列	$a_n = a_1 \times q^{n-1}$	$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$

数列常见性质:

	性质		
等差数列	一、若是奇数项等差数列,则平均数=等差中项,S _n =n×等差中项;		
	等差数列的平均数= $\frac{a_1+a_n}{2}$;		
	二、若 $\mathbf{m}+\mathbf{n}=\mathbf{k}+\mathbf{i}$,则 $a_m+a_n=a_k+a_i$ 。		
等比数列	一、若 a_{n-1} , a_n , a_{n+1} 成等比数列,则 $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$;		
	二、若 $m+n=k+i$,则 $a_ma_n=a_ka_i$ 。		

例题1 (2022 青海)

某市对下辖9个文艺表演团体去年新创节目的数量进行统计分析,发现9个团体新创节目的数量恰好成等差数列,其中前5个团体的新创节目总数是60,前7个团体的新创节目总数是70。那么这9个文艺表演团体去年新创节目的总数是多少?

A. 72

B. 76

C. 78

D. 80

【参考答案】A

【参考解析】

5 个团体的中间项是 a3, 所以 a3=60/5=12; 7 个团体的中间项的中间项是 a4, 所以 a4=70/7=10, d=-2, 9 个团体中间项是 a5=8, 一共 9 项, 所以答案: 8*9=72, 选 A;

秒杀技巧: 已知是 9 个项数的和,就是 9 倍的 a5,所以答案一定是 9 的倍数,只有 A 是 9 的倍数,只能选 A。

例题 2 (2022 江苏 B)

某金融机构向 9 家"专精特新"企业共发放了 4500 万元贷款, 若这 9 家企业获得的贷款额从少到多排列,恰好为一个等差数列,且排第 3 的企业获得 420 万元贷款,排第 8 的企业获得的贷款额为多少?

A. 620 万元

B. 660 万元

C. 720 万元

D. 760 万元

【参考答案】A

【参考解析】

9 的中间项为 5, a5 = 4500/9=500, 已知 a3 = 4200, d=(500-420)/2=40, a8=500+40*3=620, 所以答案为 A 选项。

例题 3 (2022 四川)

某共享汽车公司年初购入一批二手电动汽车,每台 16200 元。第一年每台电动汽车的维护费用为 1100 元,以后每年增加 400 元,每台电动汽车每年可产生收益 9100 元。问在第几年时,单台汽车扣除购置和维护成本后产生的利润将超过 2 万元?

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

【参考答案】B

【参考解析】

收入=成本+利润; 想要利润超过 2 万元, 收入就得超过 36200 (16200+20000) 元即可;

第一年纯收入: 9100-1100=8000 元;

第二年纯收入: 8000-400=7600 元

第三年纯收入: 7600-400=7200 元

假设第 5 年的时候,收入超过 36200,第 3 年是 5 年的中间项,5 项之和为:5×7200=36000;第五年未超过 36200,但是 36000 与36200 就相差 200,第 6 年的时候一定可以超过,所以,定位B选项。

例题 4 (2024 山东)

若干职员参加某次强国知识竞赛,每个人的得分均不相同且为整数,分数排名相邻的2人分差均为5分。已知有3人成绩低于70分,且超过70分的职员平均分为82分。问所有职员中竞赛成绩超过70分的人数占比在下列哪个范围内?

A. 低于 50%

B. 50%~60%之间

C. 60%~70%之间

D. 高于 70%

【参考答案】C

【参考解析】

超过 70 分的职员平均分为 82 分,如果是奇数项那么 82 为中间项,分差均为 5;可以试写成: 72、77、82、87、92;低于 70 分的有三人,分别为 67、62、57;一共 8 项,超过 70 分的有 5 个,占比 5/8, 定位 C 选项。

能不能为偶数项? 如果为偶数项,82是中间两项的平均数,两个数差 5,那么只能是 79.5 和 84.5,题干说每个人的得分均不相同且为整数,所以,不能为偶数项。

例题 5 (2022 下四川)

商场 6月 6日开始销售某种电器,从 6月 7日起,每天这种电器的销量都比前一天 8 1台。已知 6月 16日卖了 22台这种电器,问其 6月共卖了多少台这种电器?

A. 555

В. 600

C. 645

D. 690

【参考答案】B

【参考解析】

30-5=25; 25 天的中间项是第 13 天, 6+12=18, 所以 6 月 18 日就是中间项, 6 月 16 是 22 台, 6 月 18 日就是 22+2=24, 一共是 25 天, 24*25=600, 所以答案是 B。

秒杀:一共 25 天,总数应该是 25 的中间项×25,所以答案一定是 25 的倍数,只能选 B 选项。

例题 6 (2022 安徽)

某市举行庆典活动,将依次升空105架无人机,升空方式如下:每架无人机间距均相等,

批注 [1]: 从 6 月 6 日到 6 月 30 日一共卖了几天,一 共 30 天,前 5 天不卖,所以是 25 天

第一次升空 n 架,第二次升空 n-1 架,以此类推,最终在夜空中组成一个近似等边三角形背景的灯光秀,那么第 10 次升空的无人机数量是多少?

A. 3架

B. 5 架

C. 8架

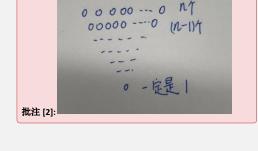
D. 10架

【参考答案】B

【参考解析】

根据题干得知:第一项为n,最后一项为1;

根据等差数列求和公式可得: $\frac{1+n}{2}$ ×n=105; ,化简得: (1+n) n=210=14*15,所以 n=14; a10=14+(10-1)×-1=5,定位 B 选项。



批注 [3]: 将 210 化成两个近似数相乘的样子,210 能想到 15×15=225,那么就是15×14

例题 7 (2022 下四川)

某企业在"十二五"期间第一年的营业额比上一年增长了 1.5 亿元,且往后每年的营业额增量都保持 1.5 亿元不变。已知该企业在"十四五"期间的营业额将是"十二五"和"十三五"期间营业额之和的 80%。问该企业在"十二五"到"十四五"期间的总营业额在以下哪个范围内?

A. 不到 300 亿元

B. 300~330 亿元

C. 330~360 亿元

D. 超过 360 亿元

【参考答案】C

【参考解析】

十二五是(2011、2012、2013、2014、2015)

十三五是(2016、2017、2018、2019、2020)

十四五是(2021、2022、2023、2024、2025)

一共为 15 项

批注 [4]: 第一项为 2011 年、第二项 2012 年……第十五项 为 2025 年 十二五的和: $5 \times a3$ 十三五的和: $5 \times a8$

十四五的和: $5 \times a13 = 0.8 \times (5 \times a3 + 5 \times a8)$

题干问的是十二五、十三五、十四五的总和,也就是 15 项之和,那么我们找到 15 的中间项 a8, a8×15 就是 15 项之和;那么都用 a8代替:

十四五的和: (a8+7.5) = (a8-7.5+a8)

a8=22.5, 15 项之和=22.5×15=337.5, 定位到 C 选项。

例题 8 (2024 浙江)

有一组算式 1+1、2+3、3+5、4+7、1+9、2+11、3+13、4+15、1+17、2+19、3+21、4+23、1+25、2+27、……和为 2021 的是第几个算式?

A. 507

В. 1010

C. 1012

D. 1014

【参考答案】B

【参考解析】

每组式子的左边为 1、2、3、4,4 项一组,周期循环,右边为奇数数列,选项 C为 4 的倍数,代入 C选项,1012 项的和为:4+a1020; a1020=1+2×1011=2023,1012 项的和为:4+2023,往前推,1011 项之和:3+2021;1010 项之和:2+2019,符合题干和为 2021,定位 B选项。

批注 [5]: 公差=1.5 ,5×1.5=7.5

批注 [6]: 最后一位能被 2 整除,为偶数;后两位能被 4 整除,为 4 的倍数,后三位能被 8 整除为 8 的倍数;后四位能被 16 整除,为 16 的倍数。

◎平方数问题:

记住几个平方数:

$$1^2=1$$
 $2^2=4$ $3^2=9$ $4^2=16$ $5^2=25$

$$6^2 = 36$$
 $7^2 = 49$ $8^2 = 64$ $9^2 = 81$ $10^2 = 100$

$$11^2 = 121$$
 $12^2 = 144$ $13^2 = 169$ $14^2 = 196$ $15^2 = 225$

$$16^2 = 256 \quad 17^2 = 289 \quad 18^2 = 324 \quad 19^2 = 361 \quad 20^2 = 400$$

例题 9 (2017 吉林)

已知张先生的童年占去了他年龄的 1/14,再过了 1/7 他进入成年,又过了 1/6 他结婚了,婚后 3 年他的儿子出生了,儿子 7 岁时,他们的年龄和为某个素数的平方,则张先生结婚时的年龄是多少岁?

A. 38 岁

B. 32 岁

C. 28岁

D. 42 岁

【参考答案】B

【参考解析】

方法一:根据常识 18 岁成年,设张先生的人生为 X 年。

$$(\frac{1}{14} + \frac{1}{7}) = 18; = 84$$

又过了 1/6 他结婚: 84×1/6=14

结婚时的年龄: 18+14=32; 定位 B 选项。

方法二: 结婚时的年龄: $\frac{1}{14}x + \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}x$

将 1/14、1/7、1/6 通分为: 16/42; 结婚时年龄应为 16的倍数,定位 B 选项。

方法三: 从张先生结婚到儿子出生,经过了10年。

张先生年龄+儿子年龄=某个素数的平方;

代入A选项,张先生年龄+儿子年龄=38+10+7=55;

代入B选项,张先生年龄+儿子年龄=32+10+7=49;

代入 C 选项, 张先生年龄+儿子年龄=28+10+7=45;

代入D选项,张先生年龄+儿子年龄=42+10+7=59;

7 的平方为 49,符合张先生年龄+儿子年龄=某个素数的平方,定位 B 选项。

例题 10 (2022 天津)

有一个 20 世纪八九十年代出生的人,在 21 世纪,恰好有一年,他年龄的平方数等于那一年的年份。这个人是哪年出生的?

A. 1995

В. 1990

C. 1985

D. 1980

【参考答案】D

【参考解析】

40²=1600,50²=2500,正好45²=2025,是在21世纪内的,所以正好在2025年45岁,所以,2025-45=1980,定位D选项。

例题 11(2022 甘肃)

甲、乙两家大型医疗公司的负责人各带一名助手参加展会订购医疗器械。最终订单显示:每人各自订购了不同种类医疗器械,且其订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数。每人订购的医疗器械种类数都未超过15类,并且两位负责人所订购的医疗器械台数不同,但都比自己的助手多购45台。问甲、乙两公司一共订购了多少台医疗器械?

A. 150

B. 170

C. 210

D. 240

【参考答案】 B

【参考解析】

订购数量=订购种类×每种台数;

订购的每种医疗器械台数恰巧等于他所订医疗器械的种类数, 所以,订购数量是某一个数的平方。

两位负责人所订购的医疗器械台数不同,但都比自己的助手 多购 45 台; 那么就是,两组差为 45 的平方数。

1、4、9、16、25、36、49、64、81、100 中 4 和 49 差 45、36 和 81 差 45;

甲、乙两公司一共订购: 4+49+36+81=170, 定位 B 选项。

●余数问题:

特征	余同 余数相同	和同 除数与余数的和相同	差同 除数与余数的差相同
口诀	余同取余	和同加和	差同减差
被除数	最小公倍数 +余数	最小公倍数+和	最小公倍数 一差
实例	"一个数 除 3 余 1, 除 5 余 1, 除 6 余 1" 则被除数为 30n+1	"一个数 除 7 余 1, 除 6 余 2, 除 5 余 3" 则被除数为 210n+8	"一个数 除 7 余 5, 除 6 余 4, 除 3 余 1" 则被除数为 42n-2

例题 12 (2023 广东县级)

某社区计划组建多支社工团队,为此<mark>招募</mark>了一批社工。如果每支团队由3名社工组成,则剩余2名社工;如果每支团队由4名社工组成,同样剩余2名社工,则该社区可能招募了多少名社工?

A. 32 B. 34 C. 36 D. 38

【参考答案】 D

【参考解析】

符合余数相同,可以表示成 12n+2,因为都是 30 多,所以 n 取 3,所以 12n+2=38,定位 D 选项。

例题 13 (2019 江苏事业编)

N 为自然数,被 9 除余数是 8,被 7 除余数是 6,被 5 除余数是 4。已知 100 < N < 1000,

则这样的数有多少个?

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【参考答案】 C

【参考解析】

3、5 与 9 的最小公倍数=315,100<N=315n-1<1000,所以 n 可以取 1、2、3,定位 C 选项。

例题 14 (2018 山东)

某市场调查公司 3 个调查组共 40 余人,每组都有 10 余人且人数各不相同。2017 年重新调整分组时发现,若想分为 4 个人数相同的小组,至少需要新招 1 人;若想分为 5 个人数相同的小组,至少还需要新招 2 人。问原来 3 个组中人数最多的组比人数最少的组至少多几

人?

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【参考答案】 B

【参考解析】

符合余数相同,可以表示成 20n+3,所以调查组为 43 人;

将43平均分为3份,14、14、15,不符合题目要求,所以为,13、14、16,最多比最少多3人,定位到B选项。

批注[7]:除4余3除5余3

