

第十二讲 立体几何与特殊几何问题

🔗 立体几何之表面积：

例题 1 (2022 国考)

一个圆柱体零件的高为 1，其圆形底面上的内接正方形边长正好也为 1。现将圆柱体零件切割 4 次，得到棱长为 1 的正方体，则切去部分的总表面积为多少？

- A. $\sqrt{2}(\pi + 2)$ B. $2\sqrt{2}(\pi - 2)$
C. $(\sqrt{2} + 1)\pi + 2$ D. $2\sqrt{2}\pi - 2$

【参考答案】C

【解析】

考场思维，只有 C 选项是 +2

例题1 (2022国考 55%)

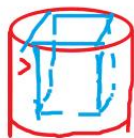
一个圆柱体零件的高为1，其圆形底面上的内接正方形边长正好也为1。现将圆柱体零件切割4次，得到棱长为1的正方体，则切去部分的总表面积为多少？

A. $\sqrt{2}(\pi + 2)$

B. $2\sqrt{2}(\pi - 2)$

C. $(\sqrt{2} + 1)\pi + 2$

D. $2\sqrt{2}\pi - 2$



原来表面积 —— 两个正方形 + 四个正方形

解题思维

正方形边长是 1，圆的直径是 $\sqrt{2}$ ，半径是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

例题1 (2022国考 55%) 80%
 一个圆柱体零件的高为1，其圆形底面上的内接正方形边长正好也为1。现将圆柱体零件切割4次，得到棱长为1的正方体，则切去部分的总表面积为多少？


A. $\sqrt{2}(\pi+2)$ $\sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}(\pi-2)$ $2\sqrt{2}\pi - 4\sqrt{2}$
 C. $(\sqrt{2}+1)\pi+2$ $2\sqrt{2}\pi - 2$ D. $2\sqrt{2}\pi-2$

原来表面积 —— 两个正方形 + 四个正方形

$r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

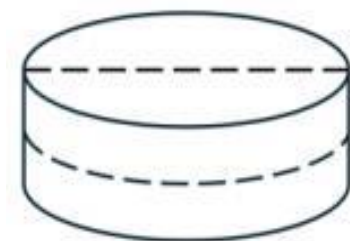
$\pi r^2 + \sqrt{2} \cdot 1 + 2$

$\pi \cdot \frac{2}{4} \cdot 2 + \sqrt{2} \cdot 1 + 2$



例题 2 (2024 福建)

一个白色圆柱体零件的底面半径是高的 1.5 倍，现将其表面涂上黑漆之后，沿下图所示虚线方向切割为 4 个完全相同的部分。问单个部分的黑色面积是白色面积的多少倍？($\pi \approx 3.14$)



- A. 不到 1.1 倍 B. 1.1~1.2 倍之间
 C. 1.2~1.3 倍之间 D. 1.3 倍以上

【参考答案】B

【解析】

将零件的半径设为 3，圆柱体的高就是 2

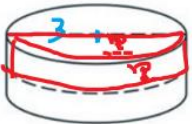
黑色面积：白色面积=半圆+半个侧面：半圆+矩形（此处注意不能直接约去半圆）

$$\frac{9\pi}{2} + 3\pi : \frac{9\pi}{2} + 6 = 7.5\pi : 4.5\pi + 6 = 5\pi : 3\pi + 4 = 15.7 : 13.4 = 1.2$$

427

例题2 (2024福建 54%)

一个白色圆柱体零件的底面半径是高的1.5倍，现将其表面涂上黑漆之后，沿下图所示虚线方向切割为4个完全相同的部分。问单个部分的黑色面积是白色面积的多少倍? ($\pi \approx 3.14$)



半圆+半个侧面：半圆+矩形!

$$\frac{\frac{9\pi}{2} + 3\pi}{2} : \frac{\frac{9\pi}{2} + 6}{2}$$

A. 不到1.1倍
C. 1.2~1.3倍之间
B. 1.1~1.2倍之间
D. 1.3倍以上

Handwritten calculations:

$$7.57 = 134.23$$

$$1.57 = 12.42$$

立体几何之体积:

球的体积公式: $\frac{4}{3}\pi R^3$

柱体的体积公式都是底面积×高

锥体的体积是对应柱体体积的 $\frac{1}{3}$

例题3 (2021 辽宁)

如下图1所示，在一个金字塔造型（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的铸造件内部挖空一个圆柱。现沿铸造件顶点A且垂直底面的方向切开，切开后的截面如下图2所示，已知DE、GF为圆柱的高， $BC=4\sqrt{2}$ 分米， $DE=2$ 分米， $AO=4$ 分米，那么挖后铸造件的体积是多少？

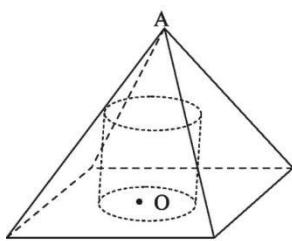


图1

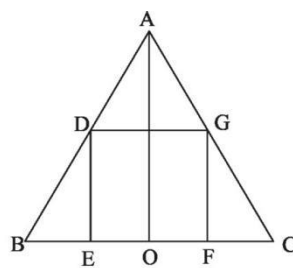


图2

A. $128 - 4\pi$ 立方分米

B. $\frac{128}{3} - 4\pi$ 立方分米

C. $\frac{64}{3} - 4\pi$ 立方分米

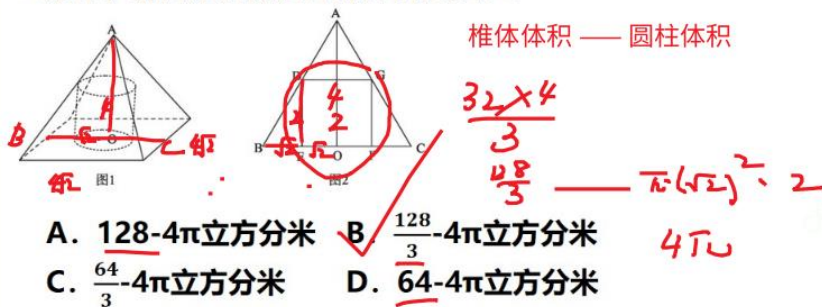
D. $64 - 4\pi$ 立方分米

【参考答案】B

【解析】

例题3 (2021辽宁 60%)

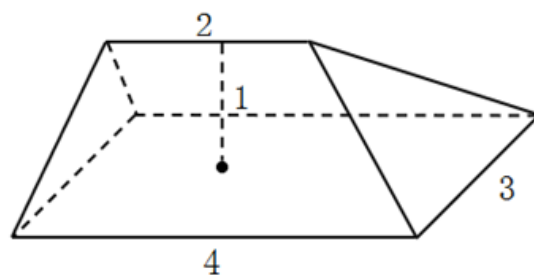
如下图1所示，在一个金字塔造型（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的铸造件内部挖空一个圆柱。现沿铸造件顶点A且垂直底面的方向切开，切开后的截面如下图2所示，已知DE、GF为圆柱的高， $BC = 4\sqrt{2}$ 分米， $DE = 2$ 分米， $AO = 4$ 分米，那么挖后铸造件的体积是多少？



注：锥体的体积是对应柱体体积的 $\frac{1}{3}$

例题4 (2023 湖北)

下图所示是一种帐篷屋顶的示意图，底面是一个长4米宽3米的长方形，屋顶高1米，上棱长2米且平行于底面，那么该帐篷屋顶的体积是多少？



- A. 5 立方米
- B. 11 立方米
- C. 12 立方米
- D. 24 立方米

【参考答案】A

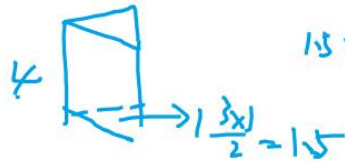
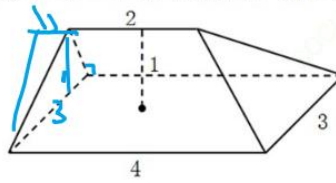
【解析】

解法一：将屋顶补全后立起来，完整的三棱柱体积是6，现在题干中是挖去两块，所以 < 6，A 项当选。

例题4 (2023湖北 36%) 64%

下图所示是一种帐篷屋顶的示意图，底面是一个长4米宽3米的长方形，屋顶高1米，上棱长2米且平行于底面，那么该帐篷屋顶的体积是多少？

- A. 5立方米
- B. 11立方米
- C. 12立方米
- D. 24立方米

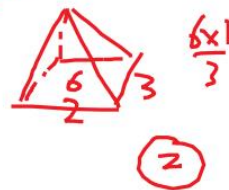
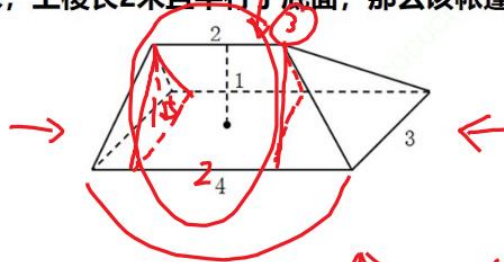


解法二：

例题4 (2023湖北 36%)

下图所示是一种帐篷屋顶的示意图，底面是一个长4米宽3米的长方形，屋顶高1米，上棱长2米且平行于底面，那么该帐篷屋顶的体积是多少？

- A. 5立方米
- B. 11立方米
- C. 12立方米
- D. 24立方米



☞等比放缩：

长度比=1: n

面积比=1: n^2

体积比=1: n^3

例题 5 (2020 新疆)

某演播大厅的地面形状是边长为 100 米的正三角形，现要用边长为 2 米的正三角形砖铺满（如图所示）。问，需要用多少块砖？



【解析】

长度比=1: 50, 面积比=1: 2500, 故需要 2500 块砖。

某餐馆承诺 25 分钟内上齐一桌菜，若超时则未上的菜品买单。每张餐桌上都有一个装满后正好 25 分钟漏完的圆锥形沙漏（如下图所示）。某位顾客在等待的过程中发现沙漏内上方沙子的高度为原先的一半，此时还差一道菜未上，则再过多久还未上菜，这位顾客将享受买单服务？

- A. 不到 3 分钟 B. 3~4 分钟之间
C. 4~5 分钟之间 D. 超过 6 分钟

【解析】

商家门口摆放了一把正四棱锥形（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的遮阳伞，第一次伞撑开到图 1 所示的位置，伞柄与伞骨成角 $\angle CPQ$ 为 30° ，继续撑开到如图 2

所示的位置，伞柄与伞骨成角 $\angle C'PQ'$ 变为 60° ，那么第二次伞撑开后形成的正方形 $A'B'C'D'$ 是第一次撑开后正方形 $ABCD$ 面积的多少倍？

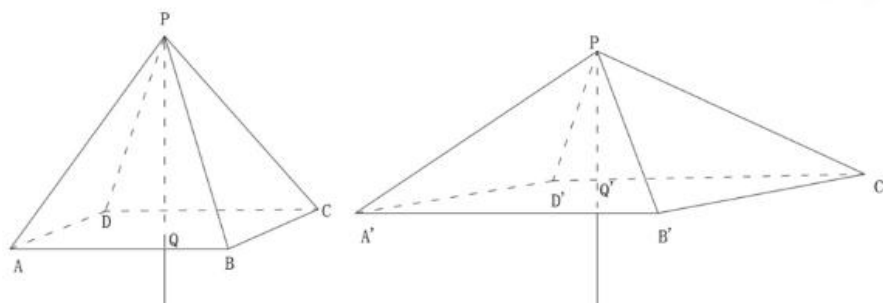


图1

图2

- A. $3\sqrt{2}$ 倍
B. $\sqrt{3}$ 倍
C. 2 倍
D. 3 倍

【参考答案】D

【解析】

例题7 (2022安徽 31%) **66%**

商家门口摆放了一把正四棱锥形（底面为正方形，侧面为四个全等的等腰三角形）的遮阳伞，第一次伞撑开到图1所示的位置，伞柄与伞骨成角为 $\angle CPQ 30^\circ$ ，继续撑开到如图2所示的位置，伞柄与伞骨成角变为 $\angle C'P'Q' 60^\circ$ ，那么第二次伞撑开后形成的正方形 $A'B'C'D'$ 是第一次撑开后正方形 $ABCD$ 面积的多少倍？

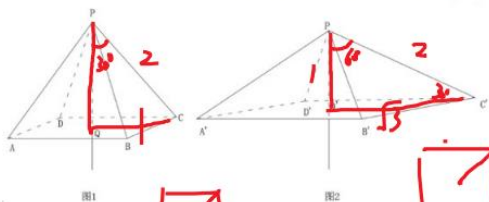


图1

图2

- A. $3\sqrt{2}$ 倍
C. 2 倍

- B. $\sqrt{3}$ 倍
D. 3 倍

Handwritten notes:
1:√3
5 1:3



例题 8 (2021 国考)

一个人工湖的湖面上有一个露出水面 3 米的圆锥体人工景观（底面朝下）。如人工湖水深减少 20%，则该景观露出水面部分的体积将增加 $61/64$ 。问原来的人工湖水深为多少米？

- A. 3.5
B. 3.75
C. 4.25
D. 4.5

【参考答案】B

【解析】

例题8 (2021国考 48%) 641-
 一个人工湖的湖面上有一个露出水面3米的圆锥体人工景观
 (底面朝下)。如人工湖水深减少20%，则该景观露出水面部分
 的体积将增加 $\frac{61}{64}$ 。问原来的人工湖水深为多少米？

- A. 3.5
 C. 4.25

- B. 3.75
 D. 4.5

增加 $\frac{61}{64}$

之后应该是之前的 $\frac{125}{64}$

$V_{\text{原来}} : V_{\text{现在}} = 1 : \frac{125}{64} = 64 : 125$

$H_{\text{原来}} : H_{\text{现在}} = 4 : 5$

增加 $\frac{3}{4} = 0.75\text{m}$

$$0.75 \times 5 = 3.75$$



几何最值：

矩形的周长一定，正方形面积最大

矩形的面积一定，正方形周长最短

面积一定，越接近球体积越大

体积一定，越接近于球面积越小

例题9 (2019 新疆)

某健身馆准备将一块周长为 100 米的长方形区域划为瑜伽场地，将一块周长为 160 米的长方形区域划为游泳场馆。若瑜伽场地和游泳场馆均是满足周长条件下的最大面积。问两块场地面积之差为多少平方米？

A. 625

B. 845

C. 975

D. 1150

【参考答案】C

【解析】

周长为 100 米的矩形，边长为 25 时面积最大，此时面积为 625；周长为 160 米的矩形，边长为 40 时面积最大，此时面积为 1600；二者之差=975。

例题 10 (2023 安徽)

某村拟建造一个容积为 144 立方米，深度为 4 米的长方体无盖蓄水池。为节约成本，侧面积最小为多少平方米？

- A. 24 B. 36
C. 96 D. 132

【参考答案】C

【解析】

例题10 (2023安徽 40%) 56%

某村拟建造一个容积为144立方米，深度为4米的长方体无盖蓄水池。为节约成本，侧面积最小为多少平方米？

A. 24 B. 36
C. 96 D. 132

✓

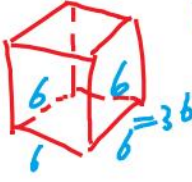
$V = 144$ $h = 4$

$S = 36$

$24 \times 4 = 96$

侧面积 = 底面周长 * 高

周长最短

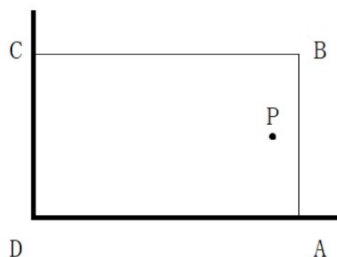


注：侧面积别忘记 $\times 4$

例题 11 (2018 四川)

在美化城市活动中，某街道工作人员想借助如图所示的直角墙角，用 28 米长的篱笆围成一个矩形花园 ABCD，篱笆只围 AB、BC 两边。图中的 P 为一棵直径为 1 米的树，其与墙 CD、AD 的最短距离分别是 14 米和 5 米，若要将这棵树围在花园内，则花园的最大面积为多少平方米？

- A. 187 B. 192
C. 195 D. 196



【参考答案】C

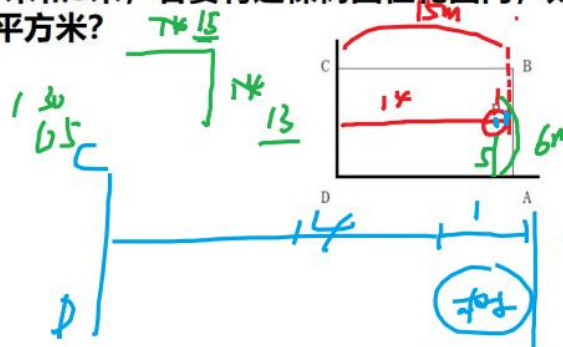
【解析】

例题11 (2018四川 53%)

66%

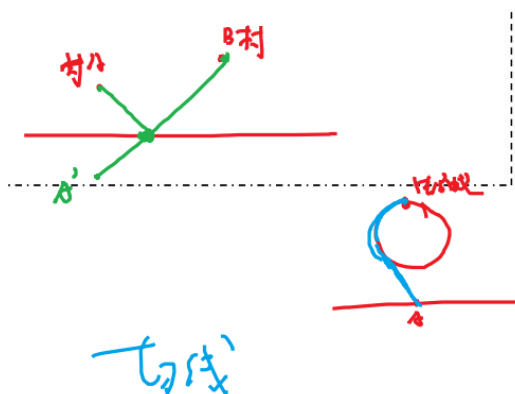
在美化城市活动中，某街道工作人员想借助如图所示的直角墙角，用28米长的篱笆围成一个矩形花园ABCD，篱笆只围AB、BC两边。图中的P为一棵直径为1米的树，其与墙CD、AD的最短距离分别是14米和5米，若要将这棵树围在花园内，则花园的最大面积为多少平方米？

- A. 187
B. 192
C. 195
D. 196



注：题干中说要将树围在花园中，所以需要考虑树的直径一米

最短路径：



如果是圆，切线最短

例题 12 (2023 北京)

一个半径为 120 米的圆形人工湖正中有一个半径为 60 米的圆形人工岛。甲从岛的正北岸边出发，以 1 米/秒的速度匀速划船前往湖的正南岸边，则最少需要多长时间？

- A. 不到 3 分 45 秒
B. 3 分 45 秒~4 分之间
C. 4 分~4 分 15 秒之间
D. 超过 4 分 15 秒

【参考答案】B

【解析】

甲的路程是，先走一段圆弧，再走切线

例题12 (2023北京 36%) 42%

一个半径为120米的圆形人工湖正中有一个半径为60米的圆形人工岛。甲从岛的正北岸边出发，以1米/秒的速度匀速划船前往湖的正南岸边，则最少需要多长时间？

A. 不到3分45秒
B. 3分45秒~4分之间
C. 4分~4分15秒之间
D. 超过4分15秒

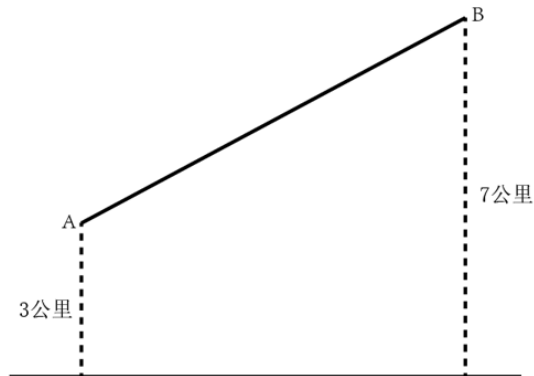
2π·60 / 3 = 40π
= 125.6

3·14·40π + 60√3
= 125.6 + 103.8
= 229.4

注：圆心与切点的连线垂直于切线， $\sqrt{3} = 1.732$

例题 13 (2023 湖北)

A、B 两村在一条笔直公路的同侧，到公路的垂直距离分别是 3 公里和 7 公里，两村相距 8.5 公里，现需在公路边建一个物资集散中心，为节约物资配送成本，集散中心到两个村的直线路程之和应尽可能小，若货车的速度约为 60 公里/小时，那么货车从集散中心出发，到两村送货后返回中心，路途所花费的最少时间为多少？



- A. 18 分钟 B. 21 分钟
C. 24 分钟 D. 27 分钟

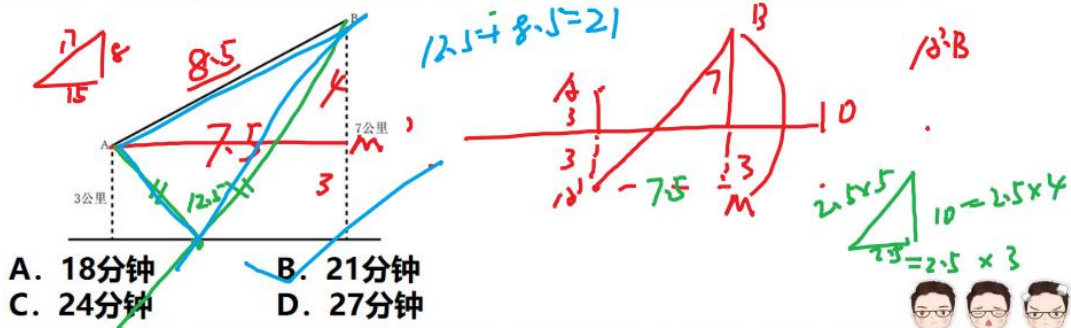
【参考答案】B

【解析】

例题13 (2023湖北 53%)

66%

A、B两村在一条笔直公路的同侧，到公路的垂直距离分别是3公里和7公里，两村相距8.5公里，现需在公路边建一个物资集散中心，为节约物资配送成本，集散中心到两个村的直线路程之和应尽可能小，若货车的速度约为60公里/小时，那么货车从集散中心出发，到两村送货后返回中心，路途所花费的最少时间为多少？



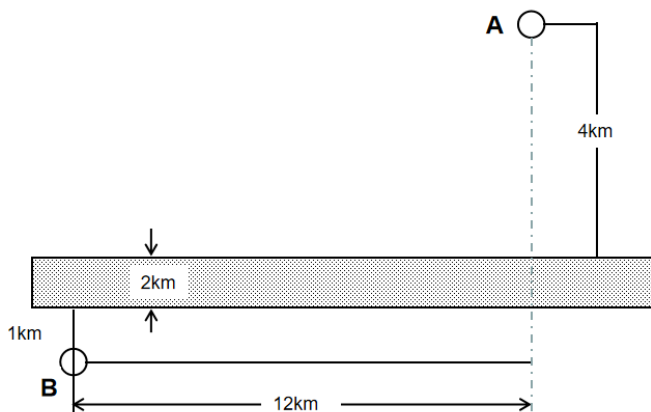
- A. 18分钟
B. 21分钟
C. 24分钟
D. 27分钟

注：灵活运用勾股数，8、15、17；3、4、5

货车速度是 60 公里每小时，一分钟一公里，故 21 公里需要 21 分钟

例题 14 (2022 安徽)

A、B 两个乡镇分布于山谷两侧，山谷间有一条宽为 2km 的河道（如下图所示）。当地政府决定在两个乡镇间修建一条跨河公路促进旅游发展。由于架桥费用高昂，所以要求跨河公路中的桥梁路段长度最短。那么根据图中数据，从 A 镇前往 B 镇的最短距离为多少？



- A. 17km
B. 15km
C. 19km
D. 20km

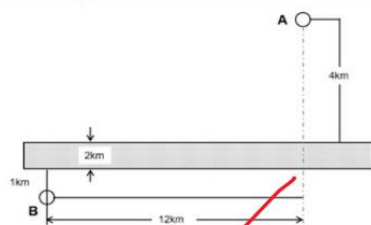
【参考答案】B

【解析】

先将河道抽掉，将 B 上移；再把河道放回来，将 B 下移

例题14 (2022安徽 49%)

A、B两个乡镇分布于山谷两侧，山谷间有一条宽为2km的河道（如下图所示）。当地政府决定在两个乡镇间修建一条跨河公路促进旅游发展。由于架桥费用高昂，所以要求跨河公路中的桥梁路段长度最短。那么根据图中数据，从A镇前往B镇的最短距离为多少？



- A. 17km
C. 19km
B. 15km
D. 20km

