ECC 加密算法入门介绍

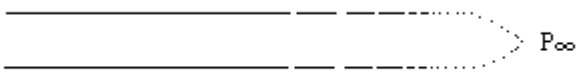
作者 ：ZMWorm[CCG]
E-Mail：zmworm@sohu.com
主页 ：Http://ZMWorm.Yeah.Net/

前言

同 RSA（Ron Rivest，Adi Shamir，Len Adleman 三位天才的名字）一样，ECC（Elliptic Curves Cryptography，椭圆曲线密码编码学）也属于公开密钥算法。目前，国内详细介绍 ECC 的公开文献并不多（反正我没有找到）。有一些简介，也是泛泛而谈，看完后依然理解不了 ECC 的实质（可能我理解力太差）。前些天我从国外网站找到些材料，看完后对 ECC 似乎懵懂了。于是我想把我对 ECC 的认识整理一下，与大家分享。当然 ECC 博大精深，我的认识还很肤浅，文章中错误一定不少，欢迎各路高手批评指正，小弟我洗耳恭听，并及时改正。文章将采用连载的方式，我写好一点就贴出来一点。本文主要侧重理论，代码实现暂不涉及。这就要求你要有一点数学功底。最好你能理解 RSA 算法，对公开密钥算法有一个了解。《近世代数基础》《初等数论》之类的书，最好您先翻一下，这对您理解本文是有帮助的。别怕，我尽量会把语言通俗些，希望本文能成为学习 ECC 的敲门砖。

一、从平行线谈起。

平行线，永不相交。没有人怀疑把:）不过到了近代这个结论遭到了质疑。平行线会不会在很远很远的地方相交了？事实上没有人见到过。所以“平行线，永不相交”只是假设（大家想想初中学习的平行公理，是没有证明的）。既然可以假设平行线永不相交，也可以假设平行线在很远很远的地方相交了。即平行线相交于无穷远点 P∞（请大家闭上眼睛，想象一下那个无穷远点 P∞，P∞是不是很虚幻，其实与其说数学锻炼人的抽象能力，还不如说是锻炼人的想象力）。给个图帮助理解一下：



直线上出现 P∞点，所带来的好处是所有的直线都相交了，且只有一个交点。这就把直线的平行与相交统一了。为与无穷远点相区别把原来平面上的点叫做平常点。

以下是无穷远点的几个性质。

▲直线 L 上的无穷远点只能有一个。
（从定义可直接得出）
▲平面上一组相互平行的直线有公共的无穷远点。
（从定义可直接得出）
▲ 平面上任何相交的两直线 L1,L2 有不同的无穷远点。

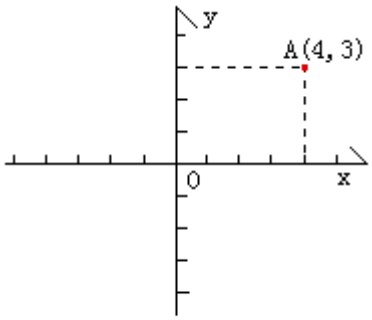
（否则 L1 和 L2 有公共的无穷远点 P ，则 L1 和 L2 有两个交点 A、P，故假设错误。）

▲平面上全体无穷远点构成一条**无穷远直线**。（自己想象一下这条直线吧）

▲平面上全体无穷远点与全体平常点构成**射影平面**。

二、射影平面坐标系

射影平面坐标系是对普通平面直角坐标系（就是我们初中学到的那个笛卡儿平面直角坐标系）的扩展。我们知道普通平面直角坐标系没有为无穷远点设计坐标，不能表示无穷远点。为了表示无穷远点，产生了射影平面坐标系，当然射影平面坐标系同样能很好的表示旧有的平常点（数学也是“向下兼容”的）。



普通平面直角坐标系

我们对普通平面直角坐标系上的点 A 的坐标（x,y）做如下改造：

令 x=X/Z ， y=Y/Z（Z≠0）；则 A 点可以表示为（X:Y:Z）。

变成了有三个参量的坐标点，这就对平面上的点建立了一个新的坐标体系。

例 2.1：求点（1,2）在新的坐标体系下的坐标。

解：∵X/Z=1 ， Y/Z=2（Z≠0）∴X=Z，Y=2Z ∴坐标为（Z:2Z:Z），Z≠0。即（1:2:1）（2:4:2）（1.2:2.4:1.2）等形如（Z:2Z:Z），Z≠0 的坐标，都是（1,2）在新的坐标体系下的坐标。

我们也可以得到直线的方程 aX+bY+cZ=0（想想为什么？提示：普通平面直角坐标系下直线一般方程是 ax+by+c=0）。新的坐标体系能够表示无穷远点么？那要让我们先想想无穷远点在哪里。根据上一节的知识，我们知道无穷远点是两条平行直线的交点。那么，如何求两条直线的交点坐标？这是初中的知识，就是将两条直线对应的方程联立求解。平行直线的方程是：

$aX+bY+c_1Z=0$； $aX+bY+c_2Z=0$ $(c_1\neq c_2)$；

（为什么？提示：可以从斜率考虑，因为平行线斜率相同）；

将二方程联立，求解。有 $c_2Z=c_1Z=-(aX+bY)$，∵$c_1\neq c_2$ ∴Z=0 ∴aX+bY=0；

所以无穷远点就是这种形式（X：Y：0）表示。注意，平常点 Z≠0，无穷远点 Z=0，因此无穷远直线对应的方程是 Z=0。

例 2.2：求平行线 L1：X+2Y+3Z=0 与 L2：X+2Y+Z=0 相交的无穷远点。

解：因为 L1∥L2 所以有 Z=0， X+2Y=0；所以坐标为（-2Y:Y:0），Y≠0。即（-2:1:0）（-4:2:0）（-2.4:1.2:0）等形如（-2Y:Y:0），Y≠0 的坐标，都表示这个无穷远点。

看来这个新的坐标体系能够表示射影平面上所有的点，我们就把这个能够表示射影平面上所有点的坐标体系叫做**射影平面坐标系**。

练习：

1、求点 A(2,4) 在射影平面坐标系下的坐标。

2、求射影平面坐标系下点(4.5:3:0.5)，在普通平面直角坐标系下的坐标。

3、求直线 X+Y+Z=0 上无穷远点的坐标。

4、判断：直线 aX+bY+cZ=0 上的无穷远点 和 无穷远直线与直线 aX+bY=0 的交点，是否是同一个点？

三、椭圆曲线

上一节，我们建立了射影平面坐标系，这一节我们将在这个坐标系下建立椭圆曲线方程。因为我们知道，坐标中的曲线是可以用方程来表示的（比如：单位圆方程是 $x^2+y^2=1$）。椭圆曲线是曲线，自然椭圆曲线也有方程。

椭圆曲线的定义：

一条椭圆曲线是在射影平面上满足方程

$Y^2Z+a_1XYZ+a_3YZ^2=X^3+a_2X^2Z+a_4XZ^2+a_6Z^3$ ----------[3-1]

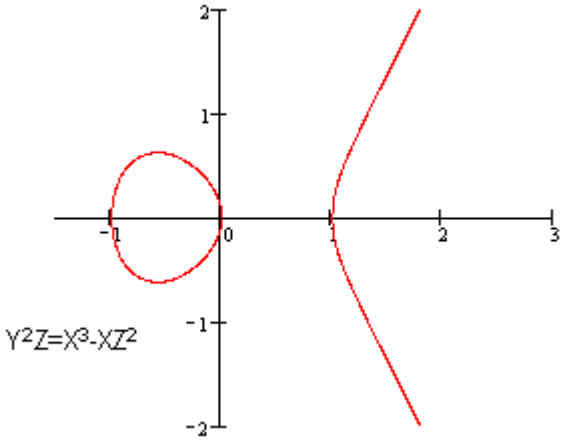
的所有点的集合，且曲线上的每个点都是非奇异（或光滑）的。

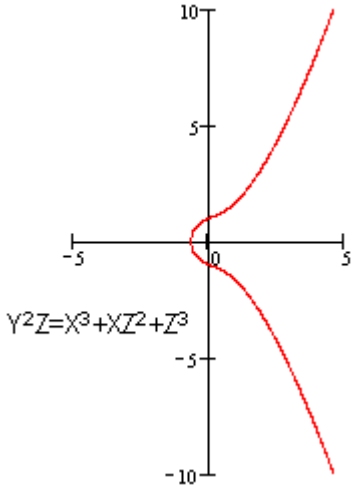
定义详解：

▲ $Y^2Z+a_1XYZ+a_3YZ^2 = X^3+a_2X^2Z+a_4XZ^2+a_6Z^3$ 是 Weierstrass 方程（维尔斯特拉斯，Karl Theodor Wilhelm Weierstrass,1815-1897），是一个齐次方程。

▲ 椭圆曲线的形状，并不是椭圆的。只是因为椭圆曲线的描述方程，类似于计算一个椭圆周长的方程（计算椭圆周长的方程，我没有见过，而对椭圆线积分（设密度为 1）是求不出来的。谁知道这个方程，请告诉我呀^_^），故得名。

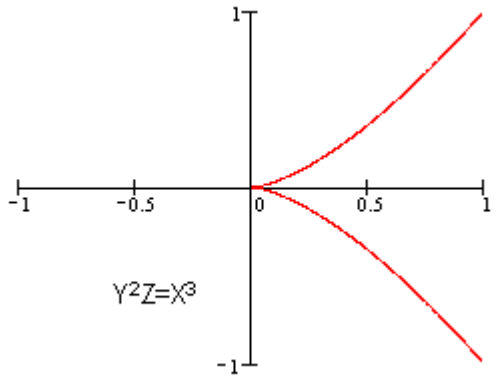
我们来看看椭圆曲线是什么样的。

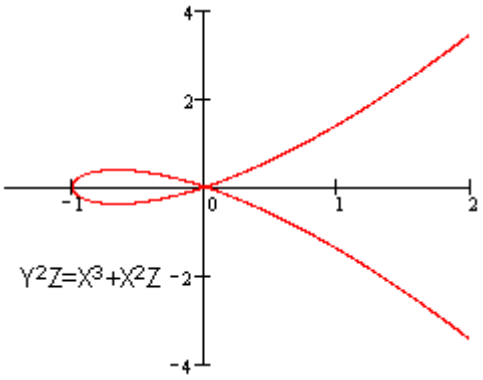




▲ 所谓“非奇异”或“光滑”的，在数学中是指曲线上任意一点的偏导数 $F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$，$F_z(x,y,z)$不能同时为 0。如果你没有学过高等数学，可以这样理解这个词，即满足方程的任意一点都存在切线。

下面两个方程都不是椭圆曲线，尽管他们是方程[3-1]的形式。





因为他们在（0:0:1）点处（即原点）没有切线。

▲椭圆曲线上有一个无穷远点 O∞（0:1:0），因为这个点满足方程[3-1]。

知道了椭圆曲线上的无穷远点。我们就可以把椭圆曲线放到普通平面直角坐标系上了。因为普通平面直角坐标系只比射影平面坐标系少无穷远点。我们在普通平面直角坐标系上，求出椭圆曲线上所有平常点组成的曲线方程，再加上无穷远点 O∞（0:1:0），不就构成椭圆曲线了么？

我们设 x=X/Z ， y=Y/Z 代入方程[3-1]得到：

$y^2+a_1xy+a_3y = x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ ----------[3-2]

也就是说满足方程[3-2]的光滑曲线加上一个无穷远点 O∞，组成了椭圆曲线。为了方便运算，表述，以及理解，今后论述椭圆曲线将主要使用[3-2]的形式。

本节的最后，我们谈一下求椭圆曲线一点的切线斜率问题。
由椭圆曲线的定义可以知道，椭圆曲线是光滑的，所以椭圆曲线上的平常点都有切线。而切线最重要的一个参数就是斜率 k。

例 3.1：求椭圆曲线方程 $y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ 上，平常点 A(x,y)的切线的斜率 k。
解：令 $F(x,y)= y^2+a_1xy+a_3y-x^3-a_2x^2-a_4x-a_6$
求偏导数
$F_x(x,y)= a_1y-3x^2-2a_2x-a_4$
$F_y(x,y)= 2y+a_1x +a_3$
则导数为：$f'(x)=- F_x(x,y)/ F_y(x,y)=-(a_1y-3x^2-2a_2x-a_4)/(2y+a_1x +a_3)$
$= (3x^2+2a_2x+a_4-a_1y) /(2y+a_1x +a_3)$
所以 $k=(3x^2+2a_2x+a_4-a_1y) /(2y+a_1x +a_3)$ ----------[3-3]

看不懂解题过程没有关系，记住结论[3-3]就可以了。

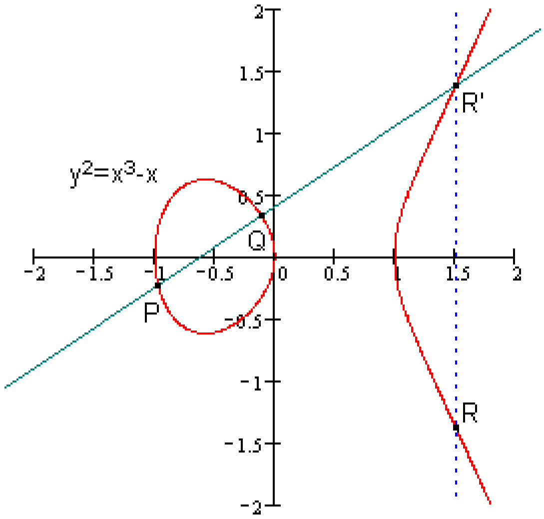
练习：
1、将给出图例的椭圆曲线方程 $Y^2Z=X^3-XZ^2$ 和 $Y^2Z=X^3+XZ^2+Z^3$ 转换成普通平面直角坐标系上的方程。

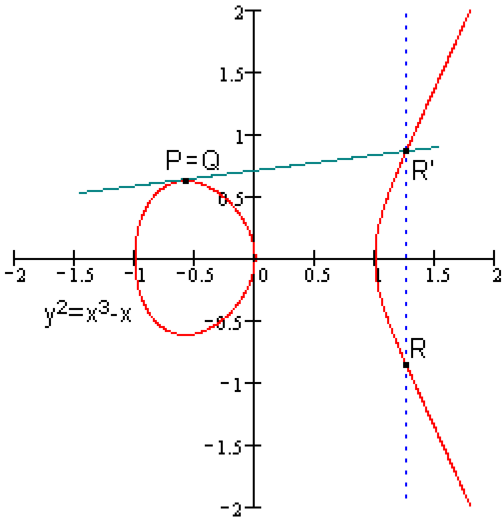
四、椭圆曲线上的加法

上一节，我们已经看到了椭圆曲线的图象，但点与点之间好象没有什么联系。我们能不能建立一个类似于在实数轴上加法的运算法则呢？天才的数学家找到了这一运算法则

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆
自从近世纪代数学引入了群、环、域的概念，使得代数运算达到了高度的统一。比如数学家总结了普通加法的主要特征，提出了加群（也叫交换群，或 Abel（阿贝尔）群），在加群的眼中。实数的加法和椭圆曲线的上的加法没有什么区别。这也许就是数学抽象把：)。关于群以及加群的具体概念请参考近世代数方面的数学书。
☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

运算法则：任意取椭圆曲线上两点 P、Q （若 P、Q 两点重合，则做 P 点的切线）做直线交于椭圆曲线的另一点 R’，过 R’做 y 轴的平行线交于 R。我们规定 P+Q=R。（如图）

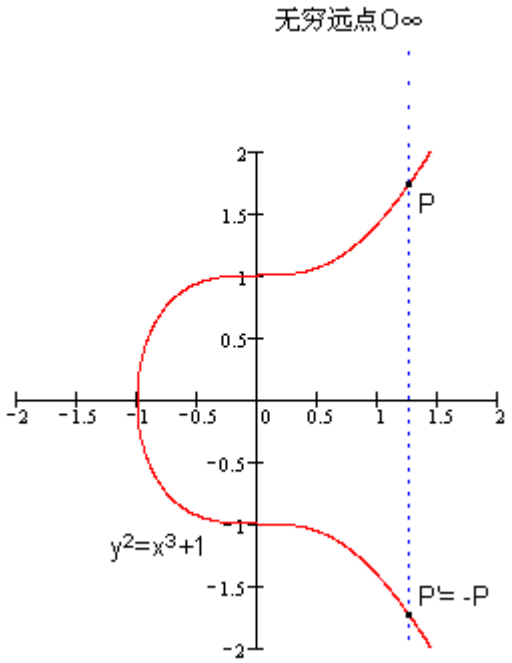




法则详解：

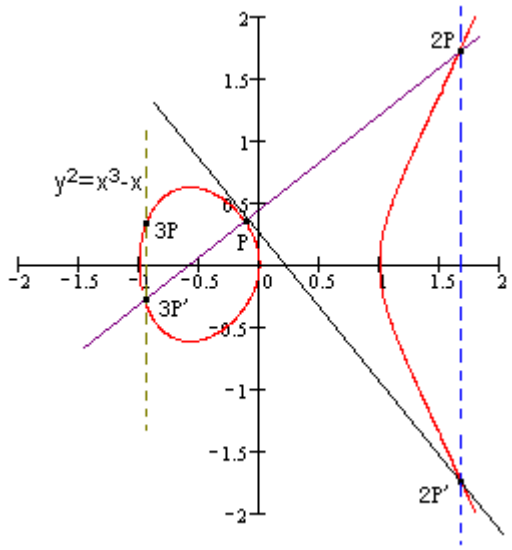
▲这里的+不是实数中普通的加法，而是从普通加法中抽象出来的加法，他具备普通加法的一些性质，但具体的运算法则显然与普通加法不同。

▲根据这个法则，可以知道椭圆曲线无穷远点 O∞与椭圆曲线上一点 P 的连线交于 P’，过 P’作 y 轴的平行线交于 P，所以有 无穷远点 O∞+ P = P 。这样，无穷远点 O∞的作用与普通加法中零的作用相当（0+2=2），我们把无穷远点 O∞ 称为 **零元**。同时我们把 P’称为 P 的**负元**（简称，负 P；记作，-P）。（参见下图）



▲根据这个法则，可以得到如下结论 ：如果椭圆曲线上的三个点 A、B、C，处于同一条直线上，那么他们的和等于零元，即 A+B+C= O∞

▲k 个相同的点 P 相加，我们记作 kP。如下图：P+P+P = 2P+P = 3P。



下面，我们利用 P、Q 点的坐标(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，求出 R=P+Q 的坐标(x_4,y_4)。

例 4.1：求椭圆曲线方程 $y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ 上，平常点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的和 $R(x_4,y_4)$的坐标。

解：（1）先求点-$R(x_3,y_3)$

因为 P,Q,-R 三点共线，故设共线方程为 y=kx+b,其中

若 P≠Q(P,Q 两点不重合) 则

直线斜率 $k=(y_1-y_2)/(x_1-x_2)$

若 P=Q(P,Q 两点重合) 则直线为椭圆曲线的切线，故由例 3.1 可知：

$k=(3x_2+2a_2x+a_4-a_1y)/(2y+a_1x+a_3)$

因此 P,Q,-R 三点的坐标值就是方程组：

$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ ----------[1]

$y=(kx+b)$ ----------[2]

的解。

将[2]，代入[1] 有

$(kx+b)^2+a_1x(kx+b)+a_3(kx+b)=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ --------[3]

对[3]化为一般方程，根据三次方程根与系数关系（当三次项系数为 1 时；$-x_1x_2x_3$ 等于常数项系数，$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ 等于一次项系数，$-(x_1+x_2+x_3)$等于二次项系数。）

所以$-(x_1+x_2+x_3)=a_2-ka_1-k^2$

$x_3=k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$;----------求出点-R 的横坐标

因为 $k=(y_1-y_3)/(x_1-x_3)$ 故

$y_3=y_1-k(x_1-x_3)$;----------求出点-R 的纵坐标

（2）利用-R 求 R

显然有 $x_4=x_3=k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$; ----------求出点 R 的横坐标

而 y_3 y_4 为 $x=x_4$ 时 方程 $y^2+a_1xy+a_3y=x_3+a_2x_2+a_4x+a_6$ 的解

化为一般方程 $y^2+(a_1x+a_3)y-(x^3+a_2x^2+a_4x+a_6)=0$，根据二次方程根与系数关系得：

$-(a_1x+a_3)=y_3+y_4$

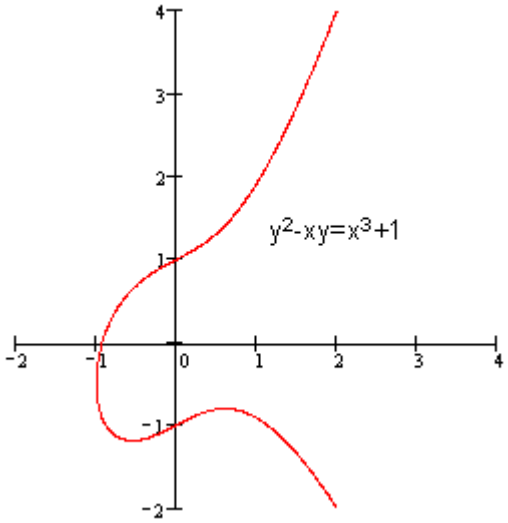
故 $y_4=-y_3-(a_1x+a_3)=k(x_1-x_4)-y_1-(a_1x_4+a_3)$; ----------求出点 R 的纵坐标

即：

$x_4=k^2+ka_1+a_2+x_1+x_2$;

$y_4=k(x_1-x_4)-y_1-a_1x_4-a_3$;

本节的最后，提醒大家注意一点，以前提供的图像可能会给大家产生一种错觉，即椭圆曲线是关于 x 轴对称的。事实上，椭圆曲线并不一定关于 x 轴对称。如下图的 $y^2-xy=x^3+1$



五、密码学中的椭圆曲线

我们现在基本上对椭圆曲线有了初步的认识，这是值得高兴的。但请大家注意，前面学到的椭圆曲线是连续的，并不适合用于加密；所以，我们必须把椭圆曲线变成离散的点。

让我们想一想，为什么椭圆曲线为什么连续？是因为椭圆曲线上点的坐标，是实数的（也就是说前面讲到的椭圆曲线是定义在实数域上的），实数是连续的，导致了曲线的连续。因此，我们要把椭圆曲线定义在有限域上（顾名思义，有限域是一种只有由有限个元素组成的域）。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

域的概念是从我们的有理数，实数的运算中抽象出来的，严格的定义请参考近世代数方面的书。简单的说，域中的元素同有理数一样，有自己得的加法、乘法、除法、单位元(1)，零元(0),并满足交换率、分配率。

☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆☆

下面，我们给出一个有限域 F_p，这个域只有有限个元素。

F_p 中只有 p（p 为素数）个元素 0,1,2 …… p-2,p-1；

F_p 的加法（a+b）法则是 $a+b\equiv c \pmod p$；即，(a+c)÷p 的余数 和 c÷p 的余数相同。

F_p 的乘法(a×b)法则是 $a\times b\equiv c \pmod p$；

F_p 的除法(a÷b)法则是 $a/b\equiv c \pmod p$；即 $a\times b^{-1}\equiv c \pmod p$；（$b^{-1}$ 也是一个 0 到 p-1 之间的整数，但满足 $b\times b^{-1}\equiv 1 \pmod p$；具体求法可以参考初等数论，或我的另一篇文章）。

F_p 的单位元是 1，零元是 0。

同时，并不是所有的椭圆曲线都适合加密。$y^2=x^3+ax+b$ 是一类可以用来加密的椭圆曲线，也是最为简单的一类。下面我们就把 $y^2=x^3+ax+b$ 这条曲线定义在 F_p 上：

选择两个满足下列条件的小于 p(p 为素数)的非负整数 a、b

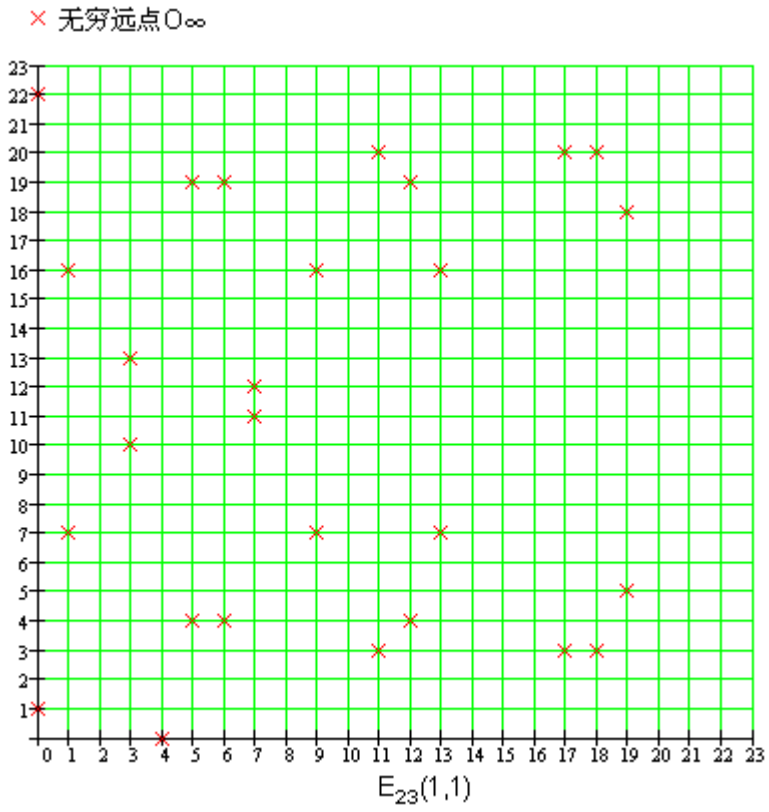
$4a^3+27b^2\neq 0 \pmod p$

则满足下列方程的所有点(x,y)，再加上 无穷远点 O∞ ，构成一条椭圆曲线。

$y^2=x^3+ax+b \pmod p$

其中 x,y 属于 0 到 p-1 间的整数，并将这条椭圆曲线记为 Ep(a,b)。

我们看一下 $y^2=x^3+x+1 \pmod{23}$的图像



是不是觉得不可思议？椭圆曲线，怎么变成了这般模样，成了一个一个离散的点？

椭圆曲线在不同的数域中会呈现出不同的样子，但其本质仍是一条椭圆曲线。举一个不太恰当的例子，好比是水，在常温下，是液体；到了零下，水就变成冰，成了固体；而温度上升到一百度，水又变成了水蒸气。但其本质仍是 H_2O。

F_p 上的椭圆曲线同样有加法，但已经不能给以几何意义的解释。不过，加法法则和实数域上的差不多，请读者自行对比。

1 无穷远点 O∞是零元，有 O∞+ O∞= O∞，O∞+P=P

2 P(x,y)的负元是 (x,-y)，有 P+(-P)= O∞

3 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$的和 $R(x_3,y_3)$ 有如下关系：

$x_3 \equiv k^2 - x_1 - x_2 \pmod p$

$y_3 \equiv k(x_1 - x_3) - y_1 \pmod p$

其中若 P=Q 则 $k=(3x^2+a)/2y_1$ 若 P≠Q，则 $k=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$

例 5.1 已知 E23(1,1)上两点 P(3,10)，Q(9,7)，求 1)-P，2)P+Q，3) 2P。

解 1) –P 的值为(3,-10)

2) k=(7-10)/(9-3)=-1/2，2 的乘法逆元为 12 因为 2*12≡1 (mod 23)

k≡-1*12 (mod 23) 故 k=11。

$x=11^2-3-9=109\equiv 17 \pmod{23}$;

y=11[3-(-6)]-10=89≡20 (mod 23)

故 P+Q 的坐标为(17,20)

3) $k=[3(3^2)+1]/(2*10)=1/4\equiv 6 \pmod{23}$

$x=6^2-3-3=30\equiv 20 \pmod{23}$

y=6(3-7)-10=-34≡12 (mod 23)

故 2P 的坐标为(7,12)

最后，我们讲一下椭圆曲线上的点的阶。

如果椭圆曲线上一点 P，存在最小的正整数 n，使得数乘 nP=O∞，则将 n 称为 P 的 **阶**，若 n 不存在，我们说 P 是无限阶的。

事实上，在有限域上定义的椭圆曲线上所有的点的阶 n 都是存在的（证明，请参考近世代数方面的书）

练习：

1 求出 $E_{11}(1,6)$上所有的点。

2 已知 $E_{11}(1,6)$上一点 G(2,7)，求 2G 到 13G 所有的值。

六、椭圆曲线上简单的加密/解密

公开密钥算法总是要基于一个数学上的难题。比如 RSA 依据的是：给定两个素数 p、q 很容易相乘得到 n，而对 n 进行因式分解却相对困难。那椭圆曲线上有什么难题呢？

考虑如下等式：

K=kG [其中 K,G 为 Ep(a,b)上的点，k 为小于 n（n 是点 G 的阶）的整数]

不难发现，给定 k 和 G，根据加法法则，计算 K 很容易；但给定 K 和 G，求 k 就相对困难了。

这就是椭圆曲线加密算法采用的难题。我们把点 G 称为基点（base point），k（k<n，n 为基点 G 的阶）称为私有密钥（privte key），K 称为公开密钥（public key)。

现在我们描述一个利用椭圆曲线进行加密通信的过程：

1、用户 A 选定一条椭圆曲线 Ep(a,b)，并取椭圆曲线上一点，作为基点 G。

2、用户 A 选择一个私有密钥 k，并生成公开密钥 K=kG。

3、用户 A 将 Ep(a,b)和点 K，G 传给用户 B。

4、用户 B 接到信息后 ，将待传输的明文编码到 Ep(a,b)上一点 M（编码方法很多，这里不作讨论），并产生一个随机整数 r（r<n）。

5、用户 B 计算点 $C_1=M+rK$；$C_2=rG$。

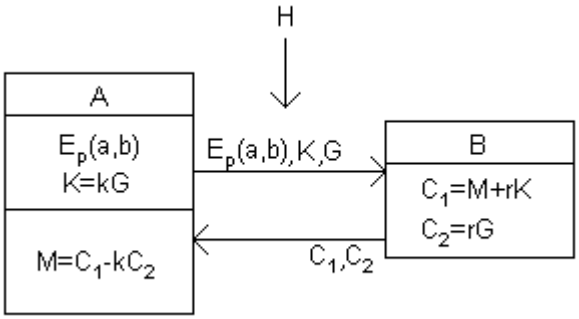
6、用户 B 将 C_1、C_2 传给用户 A。

7、用户 A 接到信息后，计算 C_1-kC_2，结果就是点 M。因为

$C_1-kC_2=M+rK-k(rG)=M+rK-r(kG)=M$

再对点 M 进行解码就可以得到明文。

在这个加密通信中，如果有一个偷窥者 H ，他只能看到 Ep(a,b)、K、G、C_1、C_2 而通过 K、G 求 k 或通过 C_2、G 求 r 都是相对困难的。因此，H 无法得到 A、B 间传送的明文信息。



密码学中，描述一条 Fp 上的椭圆曲线，常用到六个参量：

T=(p,a,b,G,n,h)。

（p 、a 、b 用来确定一条椭圆曲线，

G 为基点，

n 为点 G 的阶，

h 是椭圆曲线上所有点的个数 m 与 n 相除的整数部分）

这几个参量取值的选择，直接影响了加密的安全性。参量值一般要求满足以下几个条件：

1、p 当然越大越安全，但越大，计算速度会变慢，200 位左右可以满足一般安全要求；

2、$p\neq n\times h$；

3、$p^t\neq 1 \pmod n$，$1\leq t<20$；

4、$4a^3+27b^2\neq 0 \pmod p$；

5、n 为素数；

6、$h\leq 4$。

七、椭圆曲线在软件注册保护的应用

我们知道将公开密钥算法作为软件注册算法的好处是 Cracker 很难通过跟踪验证算法得到注册机。下面，将简介一种利用 Fp(a,b)椭圆曲线进行软件注册的方法。

软件作者按如下方法制作注册机（也可称为签名过程）

1、选择一条椭圆曲线 Ep(a,b)，和基点 G；
2、选择私有密钥 k（k<n，n 为 G 的阶），利用基点 G 计算公开密钥 K=kG；
3、产生一个随机整数 r（r<n），计算点 R=rG；
4、将用户名和点 R 的坐标值 x,y 作为参数，计算 SHA（Secure Hash Algorithm 安全散列算法，类似于 MD5）值，即 Hash=SHA(username,x,y)；
5、计算 sn≡r - Hash * k (mod n)
6、将 sn 和 Hash 作为 用户名 username 的序列号

软件验证过程如下：（软件中存有椭圆曲线 Ep(a,b)，和基点 G，公开密钥 K）

1、从用户输入的序列号中，提取 sn 以及 Hash；
2、计算点 R≡sn*G+Hash*K (mod p)，如果 sn、Hash 正确，其值等于软件作者签名过程中点 R(x,y)的坐标，因为
sn≡r-Hash*k （mod n）
所以
sn*G + Hash*K
=(r-Hash*k)*G+Hash*K
=rG-Hash*kG+Hash*K
=rG- Hash*K+ Hash*K
=rG=R ；
3、将用户名和点 R 的坐标值 x,y 作为参数，计算 H=SHA(username,x,y)；
4、如果 H=Hash 则注册成功。如果 H≠Hash ，则注册失败(为什么？提示注意点 R 与 Hash 的关联性)。

简单对比一下两个过程：
作者签名用到了：椭圆曲线 Ep(a,b)，基点 G，私有密钥 k，及随机数 r。
软件验证用到了：椭圆曲线 Ep(a,b)，基点 G，公开密钥 K。
Cracker 要想制作注册机，只能通过软件中的 Ep(a,b)，点 G，公开密钥 K ，并利用 K=kG 这个关系获得 k 后，才可以。而求 k 是很困难的。

练习：
下面也是一种常于软件保护的注册算法，请认真阅读，并试回答签名过程与验证过程都用到了那些参数，Cracker 想制作注册机，应该如何做。

软件作者按如下方法制作注册机（也可称为签名过程）
1、选择一条椭圆曲线 Ep(a,b)，和基点 G；
2、选择私有密钥 k（k<n），利用基点 G 计算公开密钥 K=kG；
3、产生一个随机整数 r（r<n），计算点 R(x,y)=rG；
4、将用户名作为参数，计算 Hash=SHA(username)；
5、计算 x’=x (mod n)
6、计算 sn≡(Hash+x’*k)/r (mod n)
7、将 sn 和 x’作为 用户名 username 的序列号

软件验证过程如下：(软件中存有椭圆曲线 Ep(a,b)，和基点 G，公开密钥 K)

1、从用户输入的序列号中，提取 sn 以及 x'；

2、将用户名作为参数，计算 Hash=SHA(username)；

3、计算 R=(Hash*G+x'*K)/sn，如果 sn、Hash 正确,其值等于软件作者签名过程中点 R(x,y)，因为

sn≡(Hash+x'*k)/r (mod n)

所以

(Hash*G+x'*K)/sn

=(Hash*G+x'*K)/[(Hash+x'*k)/r]

=(Hash*G+x'*K)/[(Hash*G+x'*k*G)/(rG)]

=rG*[(Hash*G+x'*K)/(Hash*G+x'*K)]

=rG=R (mod p)

4、v≡x (mod n)

5、如果 v=x' 则注册成功。如果 v≠x' ，则注册失败。

八、结语

历经半个多月断断续续的写作，这篇拙作终于算告一段落了。为写这篇文章，我查了大量的资料，但为了使文章更通俗易懂，我尽量避免涉及专业术语，F_2n 域上的椭圆曲线本文也没有涉及。不过，一些名词描述的可能还不太精确，希望众读者对文章的问题，多多批评指正。我也仅仅把这篇文章作为初稿，我会不断修订他的。最后感谢看雪、Sunbird、CCG 以及看雪论坛所有成员对我的支持，感谢一切帮助过我的人，没有你们的鼓励，这篇文章我是没有动力写完的，谢谢，谢谢大家！

2003-5-3 初稿，于看雪论坛

2004-7-11 二稿，修正一张图片

<全文完>

主要参考文献

张禾瑞，《近世代数基础》，高等教育出版社，1978

闵嗣鹤 严士健，《初等数论》，高等教育出版社，1982

段云所，《网络信息安全》第三讲，北大计算机系

Michael Rosing ，chapter5《Implementing Elliptic Curve Cryptography》，Softbound，1998

《SEC 1: Elliptic Curve Cryptography》，Certicom Corp.，2000

《IEEE P1363a / D9》，2001