

# 大数模幂乘运算的 VLSI 实现

陈弘毅 盖伟新

(清华大学微电子学研究所, 北京 100084)

【摘要】 信息加密、数字签名、身份验证等是信息安全领域的重要内容, 只有公钥密码体制才能很好地解决这些问题。大数模幂乘运算是许多公钥密码体制的核心运算, 也是运算效率提高的瓶颈。基于 Montgomery 模乘变换, 构造了一种新型的脉动阵列架构模乘运算器。结合简单二进制幂运算算法, 采用  $0.8\mu\text{m}$  CMOS 工艺, 成功地设计并制造了 256bit 模幂乘运算器 THM256, 电路规模为 18677 门, 芯片面积为  $17.63\text{mm}^2$ , 芯片能工作在 90MHz 以上, 功耗低于 1.5W, 数据模幂乘运算速度能达到 117kbps。

关键词: RSA/公钥密码体制, 模幂乘运算, 模乘运算, 脉动阵列

## The VLSI Implementation for Modular Exponentiation of Large Operands

Chen Hongyi, Gai Weixin

(Institute of Microelectronics, Tsinghua Univ., Beijing 100084)

**Abstract:** Many new challenges have been emerging in the information security area such as encryption, digital signature, identification, etc. Public-key cryptosystem is the only solution. Modular exponentiation of large operands is the kernel operation in many public-key cryptosystems. It is also the bottleneck of the computing efficiency. Based on Montgomery algorithm, a novel systolic array for modular multiplication is presented in this article. Moreover, with the binary method, a 256-bit systolic modular exponentiation processor, THM256 has been successfully designed and fabricated with  $0.8\mu\text{m}$  CMOS technology. The die area is  $17.63\text{mm}^2$ , with 18677 equivalent gates. It can run at 90MHz or higher frequency under 5V and less than 1.5W of power consumption, which means the throughput of 117kbps for modular exponentiation calculation.

**Key words:** PSA public-key cryptosystem, Modular exponentiation, Modular multiplication, Systolic array

### 一、引言

世界已进入信息时代, 彻底改变着人们传统的生活方式, 同时也提出了许多信息安全的新课题, 如信息加密、数字签名、身份验证等等。公钥密码体制是唯一的解决方法。大数模幂乘运算是很多公钥密码体制如 RSA<sup>[1]</sup> 的核心运算, 它由一系列的模乘运算构成。大数位数需要在数百 bit 以上, 所以运算量极大, 成为提高加解密运算速度的瓶颈。处理单元 (PE) 局部互连规则的脉动阵列架构特别适合这类运算的 VLSI 实现, 在高时钟频率下能获得高的加解密速度。人们提出了几种脉动阵列架构模乘运算器<sup>[2~4]</sup>, 但是, 有的速度很慢<sup>[2]</sup>, 有的硬件开销巨大<sup>[3]</sup>。本文设计的脉动阵列架构模乘器由 Montgomery 快速模乘算法<sup>[5]</sup> 映射而来, 其规模和速度与文献<sup>[4]</sup> 相当, 但不需像文献<sup>[4]</sup> 中对模数做变换。基于这种架构的模乘器以及采用从左到右的二进制幂快速算法<sup>[6]</sup> 进行模幂乘运算, 完整地构造了一种 VLSI 模幂乘运算器。采用  $0.8\mu\text{m}$  CMOS 工艺, 成功地设计并制造了 256bit 模幂乘运算器芯片——THM256。

### 二、模幂乘算法

Montgomery 模乘算法避免了通常求模算法中费时的除法步骤, 而采用模加右移方法<sup>[5]</sup>, 下述算法 1 就是基  $r=2$  的 Montgomery 模乘算法  $MM(A, B, M)$ 。

算法 1: 基 2 的 Montgomery 模乘算法  $MM(A, B, M)$

输入:  $A$  为  $n$  位二进制被乘数  $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$

$B$  为  $n$  位二进制乘数  $b_{n-1}b_{n-2}\cdots b_1b_0$

模  $M$  为  $n$  位二进制奇数  $m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_1m_0, m_0=1$

$A < M, B < M$

输出:  $S = MM(A, B, M) = AB2^{-n} \bmod M, S < 2M$

方法:  $S_0 = 0$ ;

for  $i = 0$  to  $n$  do

$q_i = S_i \bmod 2$ ;

$S_{i+1} = (S_i + q_i M) \text{div } 2 + b_i A$ ;

end;

$S = S_{n-1}$ ;

其中  $\bmod$  表示求余,  $\text{div}$  表示求商。算法的证明从略, 可参阅文献<sup>[7]</sup>附录。需要说明的是, 输出  $S$  可能会大于  $M$ , 为了限

定  $S$  的位数不超过  $n+1$ , 可以适当增加循环次数(例如 2 次), 注意输出结果也将相应变化(上述算法中  $i=0 \sim n$ , 若  $i=0 \sim n+2$ , 则输出  $S=AB2^{-(n+2)} \bmod M$ ). 考虑到模幂乘是由连续模乘组成, 因而运算中间输入数的位数会达到  $n+1$ , 这时上述算法需做适当的简单调整.

根据这一模乘算法, 以及从左到右的二进制幂快速算法<sup>[6]</sup>, 就可以构造从左到右的模幂乘算法 2.

算法 2: 从左到右的二进制模幂乘算法

输入:  $A$  为  $n$  位二进制底数  $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$

模  $M$  为  $n$  位二进制奇数  $m_{n-1}m_{n-2}\cdots m_1m_0, m_0=1$

$E$  为  $n$  位二进制指数  $e_{n-1}e_{n-2}\cdots e_1e_0$

$A < M$

输出:  $P=A^E \bmod M$

预计算:  $\tilde{A}=A2^{n-2} \bmod M$

方法:

$P=\tilde{A}; i=n-1;$

while  $e_i=0$  do  $i=i-1;$

$i=i-1;$

——找到  $E$  中第一个 1

while  $i \geq 0$  do

$\{P=MM(P, P, M)\};$

——自乘得到  $P=PP2^{-(n+2)} \bmod M$

if  $e_i=1$  then  $P=MM(P, \tilde{A}, M);$

——乘  $A$  得到  $P=P\tilde{A}2^{-(n-2)} \bmod M$

$i=i-1;$

——得到  $P=A^E 2^{n+2} \bmod M$

$P=MM(1, P, M);$  ——得到  $P=A^E \bmod M$

后处理: if  $P > M$  then  $P=P-M.$

算法 2 由三部分组成. 首先是预计算, 运算量为一次求模运算  $\tilde{A}=A2^{n-2} \bmod M$ , 在芯片外完成. 然后是模幂乘运算的主体部分, 由芯片完成. 第三部分是后处理, 使最终结果  $P < M$ , 运算量最多为一次  $n$  位的减法操作, 在芯片外完成.

### 三、模幂乘运算器的脉动阵列架构

在算法 1 中, for 循环可以等效为一个部分积阵列的相加过程, 图 1 示出  $A, B$  为 5bit 数( $n=4$ )的情况, 其中奇数行为  $b_i A$  形成的部分积, 偶数行为  $q_i M$  形成的部分积, 图中通过符号“+”把每两行部分积相加为一行部分积, 其中每一个单元(虚线框内)都表现为同权的  $a_i b_i$  和  $q_i m_{i+1}$  的和, 注意  $q_0$  为 0, 所以相应行写为 0. 所有部分积相加的结果为  $s_4 s_3 s_2 s_1 s_0 000000$ , 由于 for 循环中的 7 次 div2 操作, 所以去掉低位的 7 个 0, 剩下的  $s_4 s_3 s_2 s_1 s_0$  就是模乘运算的结果  $S=AB2^{-(n+2)} \bmod M$ .

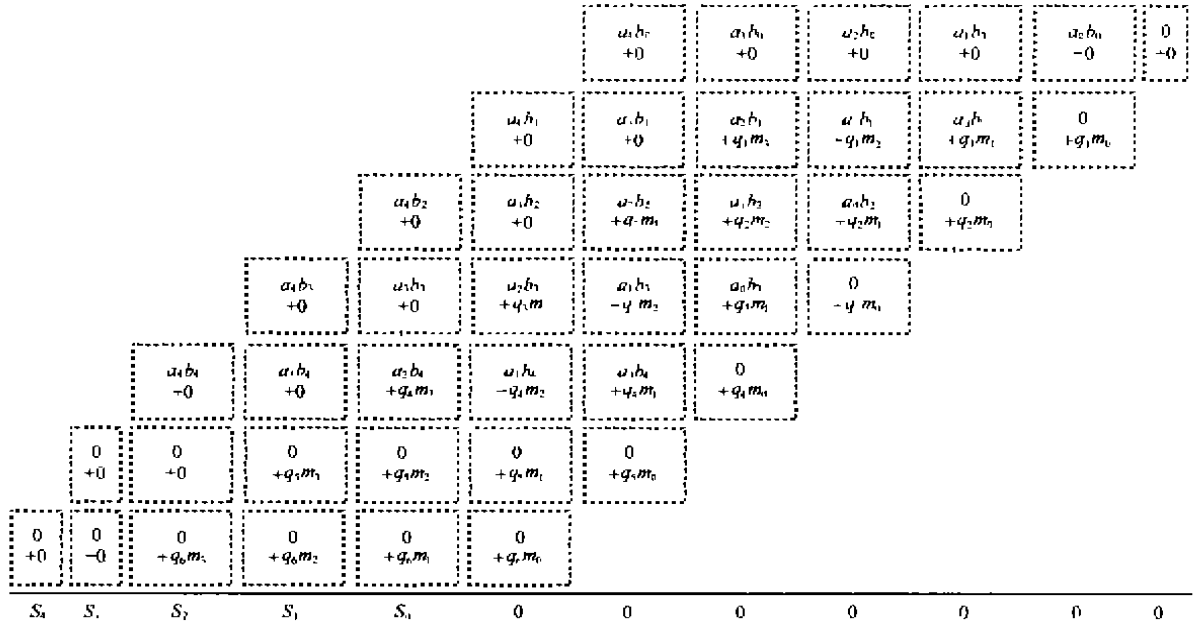


图 1 求和部分积阵列示意图

采用免进位加法器(CSA)作为图 1 中的部分积求和单元, 为了寻找优化的线性脉动阵列架构, 首先画出相应的仅具有局部通信的数据相关图(此处略). 然后按投影矢量  $d=[0, 1]$  进行处理器(PE)分配, 按调度矢量  $s=[0, 1]$  分配各个 PE 的运算顺序, 即  $d$  和  $s$  均沿图 1 中竖直向下方向, 投影得到图 2(a)所示空间局域化的信号流图. 为映射脉动阵列, 采用割集脉动化方法对信号流图进行时序重定. 先对信号流图的每个延迟进行一倍标度( $\alpha=1$ ), 对之进行均匀切割, 然后从该割集向右的边上减去一个延迟  $D$ , 相应地在向左的边上加上

一个延迟  $D$ , 就得到图 2(b)所示时间局域化的信号流图, 图中的虚直线就是切割线. 最后按向左、向右延迟均匀的原则划分模块, 就得到了如图 2(c)所示的脉动阵列架构, 图中的虚线框内的单元结合为一个处理单元. 图中圆形节点完成的运算为  $a_i b_i + m_{i+1} q_i + c_{i+1} + c_{i+2} + s_m = 2c_{i+1} + 2c_{i+2} + s_{out}$ , 方形节点完成的运算为  $m_{i+1} q_m + c_i + s_m = 2c_i + s_{out}$  和  $q_m = (c_i \oplus s_m) q_{sup}$ , 其中  $q_{sup}$  是一个外部输入信号, 用来控制  $q_i$  输入, 信号  $c_{i+1}, c_{i+2}$  和  $c_i$  为来自上一周期低位产生的进位,  $s_m$  为来自同权节点运算的本位值,  $c_{i+1}, c_{i+2}$  和  $c_i$  为当前节点运算产生的进

位,  $s_{out}$  为当前节点运算产生的本位. 图 2 顶部 (a1)、(b1) 给出这两类节点的逻辑示意图. 对图 2(c) 进行适当整理, 就可以得到最终的脉动阵列架构的模乘器, 如图 2(d) 所示.

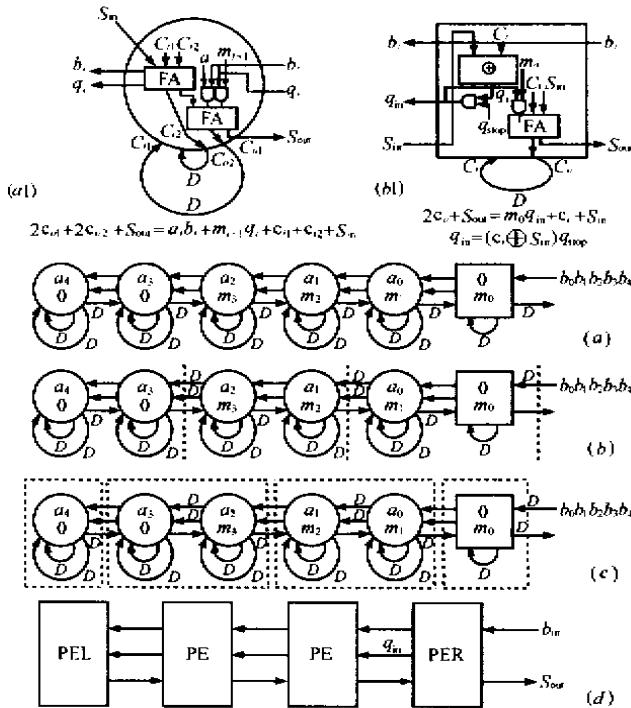


图 2 模乘运算局域化信号流图的脉动化过程

表 1 列出各个端口信号的 bit 流, 随着一个个时钟周期, 在  $b_{in}$  输入端按从低位到高位顺序逐位输入, 到第 5 个时钟周期止, 输入了被乘数的所有比特位 5 个, 从第 6 个周期开始,  $b_{in}$  保持输入低电平.  $q_{in}$  端的输入值来自处理单元 PER 的一个输出端口, 按产生的先后顺序逐位输入  $q_i$  值, 算法要求, 在产生  $q_6$  后, 即从第 9 个时钟开始, 通过  $q_{stop}$  信号由高电平变为低电平,  $q_{in}$  端保持输出低电平. 输出端口  $s_{out}$  首先串行输出 0, 从第 10 个时钟周期, 开始逐位输出  $s_0, s_1, s_2, s_3, s_4$ , 从而得到了模乘运算的结果  $s_4 s_3 s_2 s_1 s_0$ , 完成这一 4 位的模乘运算共需 14 个时钟周期. 对于  $n$  位模乘运算, 采用图 2(d) 所示的模乘器, 需要的时钟周期数为  $2n + 6$ ,  $q_{stop}$  信号从第  $n + 5$  个时钟周期起由高电平变为低电平.

表 1 脉动阵列架构模乘器端口信号的 bit 流

时钟节拍	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$q_{stop}$	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$b_{in}$	$b_0$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$q_{in}$	0	$q_0$	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	0	0	0	0	0	0
$s_{out}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$s_0$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$

阵列的处理单元有三种, 分别为 PEL、PE 和 PER, PEL 和 PER 有且仅有一个, PER 需要包含  $q_i$  产生的功能, PEL 则是 PE 的简化, PE 有  $n/2$  个, 各种处理单元的逻辑结构如图 3 所示, FA 是全加器, D 是寄存器. 处理单元 PE 完成的运算为当前部分积单元的求和并和上一节拍的运算结果按同权相加, 即  $a_i b_{i-1} + a_{i-1} b_i + m_{i+1} q_{i+1} + m_i q_i + s_{in}$ , 此外还要加上保存在处理单元寄存器中上一拍运算的进位信号, 其中前四

项是完成部分积单元求和, 最后一项的相加是完成和上一节拍的运算结果按同权相加, 其最大延迟为一级基本门和两级全加器延迟, 决定了时钟的最高频率, 同时也决定了整个芯片中由这个时钟同步的所有两级寄存器间的组合逻辑的最大延迟亦不能超过这一延迟, 否则, 就会影响脉动阵列的高频时钟的性能.

设基本门延迟为  $\tau_d$ , 全加器延迟为  $\tau_{FA}$ , 考虑到寄存器的建立时间  $\tau_{setup}$  和输出有效时间  $\tau_q$ , 保持时间  $\tau_{hold}$ , 最大延迟  $\tau_{total}$  为  $\tau_d + 2\tau_{FA} + \tau_{setup} + \tau_q$ . 寄存器的保持时间  $\tau_{hold}$  决定了两级寄存器间必须有的最小延迟  $\tau_{hold}$ , 即要求  $\tau_q + \tau_{amin} > \tau_{hold}$ , 其中  $\tau_{amin}$  为两级寄存器间组合逻辑的最小延迟. 在实际设计中, 还应考虑必要的时钟歪斜 (Clock Skew)  $\tau_{skew}$ , 连线的延迟  $\tau_{inter}$  等因素. 在计算最大延迟的时候, 应当加上这些因素造成的延迟, 即决定最小时钟周期的延迟为  $\tau_d + 2\tau_{FA} + \tau_{setup} + \tau_q + \tau_{skew} + \tau_{inter}$ , 而在计算满足最小延迟要求时, 应当加上连线延迟而减去时钟歪斜的延迟, 即  $\tau_q + \tau_{amin} + \tau_{inter} - \tau_{skew}$ .

处理单元 PER 除了和 PE 一样完成一定的部分积相加外, 还用来产生  $q_i$  信号. 由算法 1 或图 1 可以看出, 在 CSA 中, 当前行部分积最低位  $0 + q_i m_0$  中  $q_i$  的取值与上一行部分积参加 CSA 运算产生的同权本位  $s_{in}$  及来自低位的进位  $c_i$  有关, 为了保证能完成算法要求的 div2 运算, 要求当前行部分积最低位与它们的和的本位为 0, 即要求  $s_{in} + c_i + q_{in} m_0$  的本位为 0, 这就决定了  $q_i = s_{in} \oplus c_i$ .  $q_i$  由  $q_{stop}$  信号控制, 输出到端口  $q_{in}$ . 到此, 我们构造了脉动阵列架构的模乘运算器. 基于算法 2, 可以构造如图 4 所示的模乘运算器, 其中的模乘器采用脉动阵列架构.

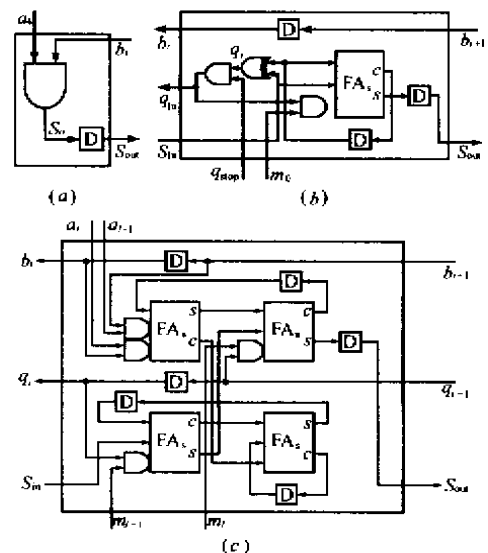


图 3 三种处理单元的结构框图: (a) PEL; (b) PER; (c) PE. 其中 FA 是全加器, D 是寄存器

#### 四、THM256 芯片的设计、测试和性能

采用 VHDL 语言建立了  $n$  bit 模乘运算器的硬件模型.

在 THM256 试验芯片中,  $n = 256$ , 采用  $0.8\mu\text{m}$  双层金属 CMOS 标准单元库进行逻辑综合, 得到规模为 18677 等效门的门级网表, 经过功能模拟和关键路径时序验证确认满足在 100MHz 以上时钟频率下工作的设计要求, 然后布局布线, 生成版图, 芯片不包含压焊块面积为  $10.89\text{mm}^2$ , 包含压焊块时的面积为  $17.63\text{mm}^2$ . 布线后模拟表明芯片仍可以在 100MHz 时钟频率下工作. 在版图验证后在欧洲 ES2 投片, 一次成功. 图 5 为 THM256 管芯的照片, 采用双列直插 DIP24 封装, 其管腿分配示于图 6, 端口  $a$  用来作为输入经过预处理的底数  $A$ ; 端口  $e$  用来输入指数  $E$ ; 端口  $m$  用来作为输入模数  $M$ ; 端口  $\text{crypto}$  用来输出模幂乘运算结果  $C$ . 输入信号  $\text{resetin}$  用来完成复位和初始化芯片;  $cp$  是外部输入时钟, 为芯片提供时钟信号;  $cs$  为片选信号, 控制端口  $\text{exend}$  和  $\text{crypto}$  的输出, 当为高电平时,  $\text{exend}$  和  $\text{crypto}$  输出高阻, 当  $cs$  为低电平时,  $\text{exend}$  和  $\text{crypto}$  输出有效信号;  $wr$  信号为读写信号, 通过给出的低电平脉冲, 控制端口  $a$ ,  $e$  和  $m$  给芯片加载底数、指数和模数, 控制端口  $\text{crypto}$  从芯片读出模幂乘运算结果;  $\text{exend}$  端口用来指示芯片完成模幂乘运算; 端口  $\text{clock}$  用来跟踪模乘器的时钟, 此端口仅在测试时有用, 实际工作时可以悬空.

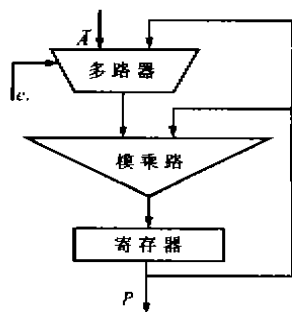


图 4 基于算法 2 的模幂乘结构框图



图 5 THM256 芯片照片

使用 Logic Master XL-60 测试仪在其所能提供的最高频率  $f = 60.15\text{MHz}$  下测试芯片, 降压到  $2.5\text{V}$  时仍能正常工作, 按  $f \sim 1/V_{dd}$  测试曲线外推, 其最高工作频率可达  $90.26\text{MHz}$ , 与设计、模拟结果 ( $100\text{MHz}$ ) 基本吻合, 相应的功耗为  $1.47\text{W}$ . 这样, 芯片的数据模幂乘处理速度可以达到

resetin	1	24	gnd
	2	23	pwrr
a	3	22	
cp	4	21	pwrr
pwrr	5	20	gnd
gnd	6	19	c
wr.rd	7	18	exend
gnd	8	17	
pwrr	9	16	crypto
	10	15	
	11	14	

图 6 THM256 管腿分配顶视图

$117\text{kb/s}$ . 与已发表的 RSA 处理器芯片<sup>[1]</sup>相比, 具有非常高的性能/面积比.

## 五、结 论

大数模幂乘运算是公钥密码体制中许多重要算法特别是 RSA 公钥密码体制的核心运算, 一个 VLSI 快速运算引擎对这类算法实用化具有重要意义. 本文采用自顶而下的正向设计方法, 基于  $0.8\mu\text{m}$  CMOS 工艺和标准单元库, 成功地设计和制造了脉动阵列架构的 256bit 模幂乘运算器 THM256 试验芯片, 能工作在  $90\text{MHz}$  以上, 数据模幂乘运算速度能达到  $117\text{kbps}$ . 芯片内核 (不包括压焊块) 面积为  $10.23\text{mm}^2$ , 随着工艺加工尺寸按  $0.7$  因子缩小, 该芯片的面积与频率都将成倍改善. 该设计很容易按照 RSA 系统要求扩展到  $n = 512, 1024$  或更高 bit 数. 因而本文所给出的模幂乘运算器非常适用于各种需要加密引擎的嵌入式系统芯片中.

## 参 考 文 献

- 1 R. L. Rivest, A. Shamir and L. Adleman. A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. Commun. ACM, 1978, 21: 120 ~ 126
- 2 C. K. Koc and C. Y. Hung. Bit-level systolic arrays for modular multiplication. J. VLSI Signal Processing, 1991, 3: 215 ~ 223
- 3 C. D. Walter. Systolic modular multiplication. IEEE Trans Comput., 1993, 42(3): 376 ~ 378
- 4 P. Komerup. A systolic, linear-array multiplier for a class of right-shift algorithms. IEEE Trans Comput., 1994, 43(8): 892 ~ 898
- 5 P. L. Montgomery. Modular multiplication without trial division. Math. Comp., 1985, 44(170): 519 ~ 521
- 6 D. E. Knuth. The art of computer programming; seminumerical algorithms. U. S. A., 2, 2nd ed., Reading, MA, Addison-Wesley, 1981
- 7 陈弘毅, 盖伟新. 一种大数模乘运算的线性脉动阵列新结构. 清华大学学报, 1998, 38(3): 11 ~ 15
- 8 S. Ishii, K. Ohya and K. Yamanaka. A single-chip RSA processor implemented in a  $0.5\mu\text{m}$  rule gate array. Annual IEEE Inter. ASIC Conf and Exhibn, 1994, 433 ~ 436



**陈弘毅** 1965 年清华大学无线电电子学系本科毕业, 1982 年获该校计算机系工学硕士学位. 现任清华大学微电子学研究所副所长, 教授、博士生导师、中国电子学会高级会员. 研究领域为超大规模集成电路设计. 近十年来主要研究专用集成电路 (ASIC) 设计方法, 库开发技术, 系统的芯片集成 (System on-a-Chip); 算法的硬件架构与实现, VLSI-DSP 在多媒体信号处理和信息安全领域的应用等. 已发表学术论文 60 余篇.

**盖伟新** 1997 年获工学博士学位, 现在美国富士通公司 HAL 分公司从事超高速模拟电路设计. 研究领域为 VLSI 数字信号处理在信息安全中的应用, 快速公钥密码算法及其硬件架构.

# 立体视觉测量中摄像机标定的新技术\*

高立志 方 勇 林志航  
(西安交通大学 CIMS 研究中心, 西安 710049)

TP391.41  
TN948.41

【摘要】 本文实现并改进了一种利用径向排列约束(RAC)的摄像机标定算法,并利用该算法标定了安装在 ZEISS CMM 坐标测量机伺服机构上的 CCD 摄像机的内部和外部参数.算法巧妙地利用了成像过程中的 RAC 分解摄像机参数,提出了带有一阶径向畸变的摄像机模型,利用合理组织的求解次序使得每一步参数的求解都只须求解线性方程组,从而彻底改变了以往摄像机标定依赖于非线性优化方法.这种改进使得 RAC 方法较以往的算法更为精确、快速、简便.

关键词: 机器视觉, 摄像机标定, 径向排列约束, 透镜畸变

三维计算机视觉

## A New Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision Metrology

Gao Lizhi, Fang Yong, Lin Zhihang

(CIMS Research Center of Xi'an Jiaotong Univ., Xi'an 710049)

**Abstract:** A new camera calibration technique for 3D machine vision with the radial alignment constraint (RAC) is described. This method separates camera parameters by using RAC, gives a new camera model with one term radial lens distortion, and provides the solution through a linear algorithm according to the reasonable order instead of traditional nonlinear optimization, so it shows high accuracy and simplicity. The technique has successfully been applied to calibrate the CCD camera fixed on ZEISS CMM.

**Key words:** Machine vision, Camera calibration, Radial alignment constraint, Lens distortion

### 一、引言

在三维计算机视觉领域内的摄像机标定就是指确定摄像机内部几何和光学特性(内部参数)和相对一个世界坐标系统的摄像机坐标的三维位置和方向(外部参数)的方法.目前的摄像机标定算法一般可分为两种:其一是用线性方程求解,简单快速,但没有考虑镜头畸变,准确性欠佳,不能满足工业视觉的需要;其二是考虑了畸变参数,引入了非线性优化,但方法较繁,速度慢,对噪声敏感,并不能保证参数收敛到全局最优解.本文的方法利用成像过程中的径向排列约束分解各参数,建立新的畸变模型,推出了求解全部参数的线性算法.

### 二、摄像机模型

摄像机模型就是对景物成像到图像平面的物理过程的数学描述,我们采用了能精确反映成像过程的摄像机模型——带有透镜一阶径向畸变的小孔(Pin-hole)模型(如图1所示).

设 $(x_w, y_w, z_w)$ 是三维世界坐标系中某目标点 $P$ 的三维坐标, $(x, y, z)$ 是同一点 $P$ 在摄像机坐标系(定义如图1所示)中的三维坐标,摄像机坐标系定义为:中心在 $o$ 点(光学中心), $z$ 轴与光轴重合, $XO_1Y$ 是中心在 $O_1$ 点(光轴 $z$ 与图像平面的交点)平行于 $x, y$ 轴的图像坐标系,有效焦距 $f$ 是图像平面和光心的距离. $(x_u, y_u)$ 是在理想 Pin-hole 模型下 $P$ 点

的图像坐标, $(x_d, y_d)$ 是由透镜变形引起的偏离 $(x_u, y_u)$ 的实际图像坐标.注意到图像在计算机中的坐标 $(x_f, y_f)$ 的单位是像素数(pixels),所以需要附加参数(Scale factor, Image center)将计算机图像坐标转换到图像平面坐标 $XO_1Y$ 中.从 $(x_w, y_w, z_w)$ 到 $(x_f, y_f)$ 的完整变换可以分为四步:

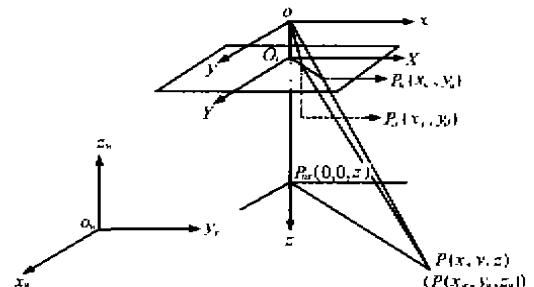


图1 带有一阶径向畸变的(Pin-hole)模型

(1) 三维空间刚体位置变换(从 $(x_w, y_w, z_w)$ 到 $(x, y, z)$ ):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \cdot \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ z_w \end{bmatrix} + T \quad (1)$$

式中, $R$ 为 $3 \times 3$ 的旋转矩阵, $T$ 为 $3 \times 1$ 的平移矩阵.

(2) Pin-hole 模型下的理想投影变换:

$$x_u = f \cdot x / z, y_u = f \cdot y / z \quad (2)$$

(3) 畸变模型:

造成成像坐标偏差的因素有透镜的径向畸变,切向畸变,偏心畸变等。其中,偏心畸变可以通过使用变焦距镜头方法准确估算光心来克服<sup>[1]</sup>,和切向畸变相比,径向畸变为影响工业机器视觉精度的主要因素<sup>[2]</sup>。所以,我们主要考虑径向透镜畸变,并用一个二阶多项式近似:

$$x_d = x_u(1 + kr_d^2), y_d = y_u(1 + kr_d^2) \quad (3)$$

式中,  $r_d^2 = x_u^2 + y_u^2$ ,  $k$  为畸变系数。

(4) 实际图像平面坐标到计算机图像(帧存)坐标变换:

$$x_f = c_x - s_x x_d, y_f = c_y - s_y y_d \quad (4)$$

式中,  $(c_x, c_y)$  为计算机图像中心坐标,  $(s_x, s_y)$  为图像平面单位距离上的像素数(即尺度因子),它们需要预标定<sup>[1]</sup>。

### 三、利用径向排列约束标定摄像机参数

#### 1. 基本原理

需标定的外部参数六个,内部参数六个。其中有  $(c_x, c_y)$  和  $(s_x, s_y)$  四个内部参数已预标定,采用两步标定法,先求解外部参数(6个),再计算内部参数(2个)。

径向排列约束意味着,对成像平面上的每一个目标点  $P$ ,  $\overrightarrow{OP_d}$  和  $\overrightarrow{P_{\alpha}P}$  同向( $P_{\alpha}$  是  $(0,0,z)$  这一点),并且  $\overrightarrow{OP_d}$  的方向与有效焦距  $f$ ,  $T$  的  $t_z$  分量和透镜畸变系数  $k$  的变化无关<sup>[2]</sup>;所以,利用 RAC 可以充分决定  $R$  和  $t_x, t_y$ 。这样 RAC 可表示为:方向  $(\overrightarrow{OP_d}) = \text{方向}(\overrightarrow{P_{\alpha}P})$

$$\text{设 } R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= r_1 x_w + r_2 y_w + r_3 z_w + t_x \\ \text{则 } y &= r_4 x_w + r_5 y_w + r_6 z_w + t_y \\ z &= r_7 x_w + r_8 y_w + r_9 z_w + t_z \end{aligned} \quad (5)$$

RAC 意味着

$$x/y = x_d/y_d \Rightarrow \frac{r_1 x_w + r_2 y_w + r_3 z_w + t_x}{r_4 x_w + r_5 y_w + r_6 z_w + t_y} = \frac{x_d}{y_d} \quad (6)$$

整理得:

$$\begin{bmatrix} r_1/t_y \\ r_2/t_y \\ r_3/t_y \\ r_4/t_y \\ r_5/t_y \\ r_6/t_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_w y_d & y_w y_d & z_w y_d & y_d & -x_w x_d & -y_w x_d & -z_w x_d \end{bmatrix} = x_d \quad (7)$$

行向量  $[x_w y_d \ y_w y_d \ z_w y_d \ y_d \ -x_w x_d \ -y_w x_d \ -z_w x_d]$  是已知的,列向量  $[r_1/t_y \ r_2/t_y \ r_3/t_y \ t_x/t_y \ r_4/t_y \ r_5/t_y \ r_6/t_y]^T$  是待求的参数。

对每一个目标点  $P_i$ , 已知其  $x_w, y_w, z_w, x_d, y_d$  就可以列

出如上的一个方程。为了简单方便,采用同一平面上的空间是点作标定,这样的标定模板较易设计,又不失一般性;可选取世界坐标系使  $z_w = 0$ , 这时上式中关于  $r_3/t_y, r_6/t_y$  两项的系数恒为零,于是有:

$$\begin{bmatrix} r_1/t_y \\ r_2/t_y \\ t_x/t_y \\ r_4/t_y \\ r_5/t_y \end{bmatrix} = x_d \quad (8)$$

$R$  有九个参数,但是其正交性规定了  $R$  仅有三个自由度,再加上  $t_x, t_y$  正好五个独立变量,故上式可唯一确定旋转阵  $R$  和  $t_x, t_y$ 。

#### 2. 标定过程

第一步:求解整个旋转矩阵  $R$  和  $T$  中的  $t_x, t_y$

(1) 拍摄一幅具有若干共面特征点的标定体图像,利用图像处理确定若干个特征点的图像坐标,设共  $N$  个点,图像坐标为  $(x_{fi}, y_{fi}), i = 1 \sim N$ , 并设这些点相应世界坐标为  $(x_{wi}, y_{wi})$ 。

$$\text{则 } x_{di} = -(x_{fi} - c_x)/s_x, y_{di} = -(y_{fi} - c_y)/s_y \quad (9)$$

(2) 对每个点  $P_i$ , 按式(8)可列出一个方程,联立这  $N$  个方程,利用最小二乘法解这个超定方程组( $N \geq 5$ )可得如下变量:

$$r'_1 = r_1/t_y, r'_2 = r_2/t_y, t'_x = t_x/t_y, r'_4 = r_4/t_y, r'_5 = r_5/t_y, \quad (10)$$

(3) 利用  $R$  的正交性可以算出  $t_y$  和  $r_1 \sim r_9$ , 具体如下:

① 计算  $|t_y|$

$$t_y^2 = \frac{s_y^2 - [s_y^2 - 4(r'_1 r'_5 - r'_4 r'_2)^2]^{1/2}}{2(r'_1 r'_5 - r'_4 r'_2)^2} \quad (11)$$

其中,  $s_y = r_1'^2 + r_2'^2 + r_4'^2 + r_5'^2$

② 求得  $|t_y|$  后,尚有  $t_y$  的符号需要确定,这可由下面的

事实给出:在 RAC 中,  $\overrightarrow{OP_d}$  和  $\overrightarrow{P_{\alpha}P}$  同向,而在计算式(6)中,  $\overrightarrow{OP_d} // \overrightarrow{P_{\alpha}P}$ , 这还包含了反向的情况,由成像几何可知,  $x_d$  和  $x$  应有相同的符号,  $y_d$  和  $y$  也有相同符号,可以利用这一点来确定  $t_y$  的符号,即在求得  $|t_y|$  后任选一特征点  $P_i$ , 首先假设  $t_y$  为正号,计算下式:

$$r_1 = r'_1 \cdot t_y, r_2 = r'_2 \cdot t_y, r_4 = r'_4 \cdot t_y, r_5 = r'_5 \cdot t_y \quad (12)$$

$$x = r_1 x_w + r_2 y_w + t_x, y = r_4 x_w + r_5 y_w + t_y$$

若  $x$  与  $x_d, y$  与  $y_d$  同号,则  $t_y$  符号为正,否则  $t_y$  应为负。

③ 现在对于  $R$ , 已知  $r_1, r_2, r_4, r_5$ , 利用正交性和右手系特性(相应于世界坐标系为右手系)可计算  $R$ 。

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & (1 - r_1^2 - r_2^2)^{1/2} \\ r_4 & r_5 & s(1 - r_4^2 - r_5^2)^{1/2} \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中,  $s = -\text{sgn}(r_1 r_4 + r_2 r_5)$ ,  $r_7, r_8, r_9$  可由头两行的叉乘得到。

$$\begin{aligned} r_7 &= sr_2(1 - r_4^2 - r_5^2)^{1/2} - r_5(1 - r_1^2 - r_2^2)^{1/2} \\ r_8 &= r_4(1 - r_1^2 - r_2^2)^{1/2} - sr_1(1 - r_4^2 - r_5^2)^{1/2} \\ r_9 &= r_1 r_5 - r_2 r_4 \end{aligned} \quad (14)$$

Tsai<sup>[2]</sup>在证明这个等式时指出,给定  $r_1, r_2, r_4, r_5, R$  有两个解,另一个为:

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & -(1-r_1^2-r_2^2)^{1/2} \\ r_3 & r_5 & -s(1-r_1^2-r_2^2)^{1/2} \\ -r_7 & -r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad (15)$$

具体选取哪一个可由试探法确定,即先任选一个,向下计算,若据此  $R$  值计算出的  $f < 0$ ,则此次选取不对,应选取另一个  $R$  的解,否则,若  $f > 0$  就是选取正确

第二步:计算有效焦距  $f$ ,  $T$  的  $t_z$  分量和透镜畸变系数  $k$ .

$$x_u = f \cdot \frac{x}{z} = \frac{x_d}{1+kr_d^2}, y_u = f \cdot \frac{y}{z} = \frac{y_d}{1+kr_d^2} \quad (16)$$

式中,  $r_d^2 = x_d^2 + y_d^2$ , 待求变量是  $f, k, t_z$ .

设  $H_x = r_1 x_w + r_2 y_w + t_x, H_y = r_4 x_w + r_5 y_w + t_y,$

$W = r_7 x_w + r_8 y_w, f_k = f \cdot k$

可得:  $H_x \cdot f + H_y \cdot r_d^2 \cdot f_k - x_d \cdot t_z = x_d \cdot W$

$$H_x \cdot f + H_y \cdot r_d^2 \cdot f_k - y_d \cdot t_z = y_d \cdot W \quad (17)$$

对  $N$  个特征点,利用最小二乘法对上述两个方程进行联合最优参数估计,就可得  $f, f_k, t_z$ ,进而求得  $f, k, t_z$ .

#### 四、实验及结果讨论

##### 1. 实验环境的建立

###### (1) 摄像机

我们计划标定一个安装在 ZEISS CMM 的伺服机构上的 MTV-1881EX CCD 面阵摄像机(靶面为  $7.95 \times 6.45\text{mm}$ ),配接一个手动光圈  $8.5\text{mm}$  镜头,采用  $768 \times 576$  的图像卡,灰度级为 8bits,采用自然光源,先进行预标定处理,得到图像的中心点为  $(358.8480, 278.5728)$ ,比例因子为  $s_y = 92.4031(\text{pixels/mm})$ ,  $s_x/s_y = 1.0202$ .

###### (2) 标定模板

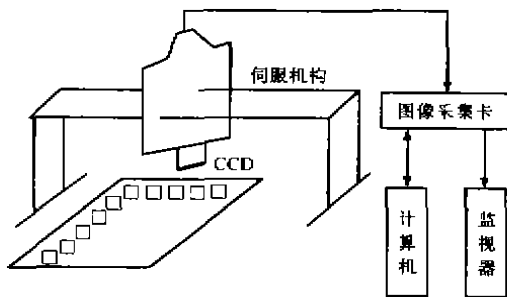


图2 标定实验装置示意图

我们利用计算机打印正方形( $5 \times 6$ 个)贴在一块光洁水平的金属模板上( $200 \times 250\text{mm}$ ),作为标定模板,取每个正方形的顶点作为特征点,其世界坐标  $(x_w, y_w, z_w)$  由三坐标测量机直接测得(测量精度为  $0.01\text{mm}$ ).

###### (3) 特征点图像坐标的提取

在标定工作中,对数据精度要求很高,传统的边缘提取算法或者角点提取算法均不能给出足够精确的坐标值,我们采用一种利用图像高阶多项式拟合的子像素精度边缘提取算

法;该算法用来求正方形每边的精确方程,然后利用两边交点定出正方形顶点的坐标.算法分两步,首先使用能将边缘计算精确到一个像素点级的边缘提取算子(Canny算子),然后利用一个三阶多项式在求取的边缘点的邻域内拟合图像数据,再对这个解析表达的多项式求取二阶导数来计算精确的边缘点(精确到  $0.4$  个像素).

##### 2. 实验结果

用 CMM 所建立的工件坐标系作为世界坐标系,标定模板与 CCD 镜头之间的垂直距离为  $320\text{mm}$  左右,从标定块中选取  $90$  个顶点进行标定实验得,  $f = 8.9085\text{mm}$ ,  $k = -0.0018$ ;

$$R = \begin{bmatrix} 0.0057 & 0.9998 & -0.0165 \\ 0.9987 & -0.0048 & 0.0505 \\ 0.0504 & -0.0168 & -0.9986 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} -136.6582 \\ 117.0021 \\ 325.3839 \end{bmatrix}$$

利用标定结果对另外的  $30$  个顶点恢复它们的三维空间坐标,和三坐标测量机实测值进行对比得,空间坐标平均绝对误差在  $0.10\text{mm}$  左右,计算时间  $0.1\text{s}$ .

##### 3. 结论

Tsai<sup>[2]</sup>方法采用激光作为光源,在一段很短的距离( $110\text{mm}$ )内,三维坐标计算平均误差为  $0.01\text{mm}$  左右;精度较高,但其照明条件较特殊,且定标测定距离很短,对数据精度要求过高,一般工业视觉要求还不能完全适应;例如,用 Tsai<sup>[2]</sup>方法对本文的原始实验数据进行标定处理,非线性搜索部分处于振荡状态,无法给出正确解,而用我们改进后的线性算法则可迅速得到较好的结果.由此可见,本文方法抗噪声能力较强,对实验条件要求相对较低,速度快,比较实用,可以作为工业机器视觉中摄像机标定的一种通用方法.

#### 参 考 文 献

- 1 R. K. Lenz and R. Y. Tsai. Techniques for calibration of the scale factor and image center for high accuracy 3-D machine vision metrology. IEEE Trans. on PAMI, 1988, 10(5): 713~720
- 2 R. Y. Tsai. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3D machine vision metrology using off-the-shelf TV camera and lenses. IEEE Journal of Automation, 1987, 3(4): 323~344



高立志 31岁,讲师,西安交通大学 CIMS 中心在职博士研究生.主要研究方向:机器视觉与智能检测.

方勇 29岁,西安交通大学 CIMS 中心博士研究生.主要研究方向:自动检测、机器视觉与图像处理.

林志航 教授,博士生导师,国家 863 计划 CIMS 质量系统自动化工程实验室主任,西安交通大学 CIM 研究所所长.主要研究方向:计算机集成制造、自动检测和质量工程

# 条纹图像瞬时频率的估计及其在相位展开中的应用

张鸿宾 王 晴

(北京工业大学计算机学院, 北京 100044)

**【摘要】** 相位法是采用正弦投影光和移相技术的一种非接触测量方法. 其中的关键问题是从主值相位 $(-\pi, \pi)$ 恢复绝对相位, 即相位展开问题(phase unwrapping). 这是一个不适定问题. 国内外的研究者进行了大量的研究工作, 至今尚无满意的一般解决方法. 本文利用相位法条纹图像的纹理特性, 利用多频道 Gabor 小波滤波估计条纹图像的瞬时频率. 通过检测瞬时频率幅值和方向的不连续来定位条纹纹理的边界, 从而把相位场分割为一致的一些区域. 本文所提出的方法可以解决存在真实的相位不连续时的相位展开问题. 它比利用极点连线等一类的算法更为可靠.

**关键词:** 相位法 (Phase Measuring Profilometry; PMP), 相位展开, 瞬时频率, 纹理边界

## Measuring Instantaneous Frequencies of Fringe Image and Its Application in Phase Unwrapping

Zhang Hongbin, Wang Qing

(Computer Institute of Beijing Polytechnic University, Beijing 100044)

**Abstract:** Unwrapping a 2-D inconsistent principal-value phase field of PMP (Phase Measuring Profilometry), that may contain regions of discontinuous phase, is an ill-posed problem. Based on the globally nonstationary and locally coherent property of the fringe image texture, this paper measures the instantaneous frequencies by multiple channel wavelet-like Gabor filters. By comparing the channel amplitude and phase responses, boundaries and discontinuities in texture can be detected, thus the phase field of PMP is segmented to consistent regions. The technique is demonstrated by application to synthetic and real PMP image of body models.

**Key words:** Phase measuring profilometry, Phase unwrapping, Instantaneous frequency, Texture boundary

### 一、引言

#### 1. 相位法的基本原理

近年来, 三维物体的非接触测量和形状识别的技术有了很大的发展. 其中相位法 (Phase Measuring Profilometry; PMP) 是八十年代中期发展起来的一种精密测量方法<sup>[1]</sup>. 和“Shape from X”、各种结构光测距以及莫尔条纹和傅立叶条纹分析等方法相比, 相位法具有设备简单、测量范围大、精度高和并行获取数据等优点. 目前已广泛应用于工业测量、产品检验等传统的光学测量领域以及计算机视觉、计算机辅助建模等领域.

相位法测距的原理是, 当把正弦光投影到物体表面时, 由摄像机得到的变形光栅图像的强度分布为:

$$I(x, y) = R(x, y)[A(x, y) + B(x, y)\cos\Psi(x, y)] \quad (1)$$

其中  $R(x, y)$  反映了物体表面的反射特性,  $A(x, y)$  表示背景的光强,  $B(x, y)/A(x, y)$  是条纹的对比度. 相位函数  $\Psi(x, y)$  与物体表面的高度有关, 它们间的关系取决于具体的光学投影和摄像系统.

当把光栅在与栅线垂直的方向上平移栅距的  $1/N$  时, 式 (1) 的相位会发生  $2\pi/N$  的位移, 产生新的强度函数  $I_n$ . 利用  $N(\geq 3)$  次位移, 可以求出相位  $\Psi(x, y)$  的值:

$$\Psi(x, y) = \arctan \left\{ \frac{\sum_{n=1}^N I_n(x, y) \sin(2n\pi/N)}{\sum_{n=1}^N I_n(x, y) \cos(2n\pi/N)} \right\} \quad (2)$$

上式得到的  $\Psi(x, y)$  在反正切函数的主值区间  $(-\pi, \pi)$  内取值. 通过相位展开可以得到点  $(x, y)$  处的真实相位  $\Phi(x, y)$ . 根据相位法原理, 可以从  $\Phi(x, y)$  得到点  $(x, y)$  处的高度<sup>[2]</sup>.

#### 2. 相位法中的相位展开问题

由公式 (2) 得到的物体表面各点的相位值是在主值区间  $(-\pi, \pi)$  内, 称为 Wrapped 相位. 为了得到各点的绝对相位, 即物理上真实的相位值, 需要进行相位的展开.

相位展开可以从数学上描述如下:

$$\Psi(x, y) = \Phi(x, y) + n(x, y) + 2\pi k(x, y) \quad (3)$$

式中  $\Phi(x, y)$  是点  $(x, y)$  的绝对相位,  $\Psi(x, y)$  是测量到的主



值相位,  $n(x, y)$  表示测量中的噪声,  $k(x, y)$  是整数值函数. 相位展开的任务是要从主值的  $\Psi(x, y)$  估计适当的  $k(x, y)$ , 从而得到直实的相位场  $\Phi(x, y)$ . 显然, 这是一个不适定问题. 如果没有辅助信息或约束条件, 这个问题没有唯一解.

在采样点足够密而且物体表面的相位梯度小于  $\pi$  的情况下, 最简单的相位展开算法是, 检验相邻点主值相位的差值. 当差的绝对值大于  $\pi$  时, 加上或减去  $2\pi$  的整数倍, 使它小于  $\pi$ . 然后把校正后的相位差累加求和, 就可以得到展开后的绝对相位. 这种简单的算法在满足上述假设及无噪声的情况下一般工作得很好. 但当物体表面的高度不连续, 有遮挡和阴影时, 会出现有的区域得不到主值相位, 或得到的主值相位不可靠, 或在一些地方存在着实际上的相位梯度大于  $\pi$  的情况, 这些都会给相位展开带来困难. 在任何一点的相位错误都会沿着展开路径传播下去, 形成相位展开时的跳序 (jump order).

相位展开是一件困难的工作. 国内外的研究工作者曾作了大量的工作, 仍未能找到满意的一般解. 随着相位法应用领域的扩大, 相位展开算法的研究已成为一个迫切的课题. 最近的研究成果是 95 年和 96 年底发表的几项工作<sup>[3~6]</sup>. 他们分别采用最小二乘, 最小  $L^p$  模数, 马尔科夫随机场和贝叶斯估计或者正则理论的方法, 这些方法的核心是引入各种适当的约束. 它们虽然对降低噪声和相位插值有一定的作用, 但不能很好地解决存在着真实的表面不连续的情况. 另外一类相位展开算法是建立在寻找所谓极点和相位不一致区域间的分界线的基础上<sup>[7,8]</sup>. 当在某点邻域内一个闭路径上的相位差的和大于 0 时, 该点称为正极点, 小于 0 时称为负极点. 适当连接正负极点形成相位区域间的分界线. 只要相位展开时的路径不越过分界线, 相位展开就是在梯度小于  $\pi$  的区域内进行. 然而, 极点只是提供了极性和位置的信息, 把各个极点连成正确的分界线网是一件困难的工作. 一般是采用一些启发式规则或面向具体问题的方法. 这些方法不仅计算量大, 而且常常失败, 找不到正确的分界线网, 不得不借助人的干预. 寻找极点一类算法的另一个主要问题是, 当高度不连续处两侧条纹的空间频率相差不大时, 可能会找不出极点<sup>[8]</sup>. 而这种情况在三维复杂物体的测量中会经常遇到.

本文利用相位法条纹图像的纹理特性, 使用多频道 Gabor 小波滤波来估计条纹图像的瞬时频率. 通过检测瞬时频率的不连续性, 定位条纹纹理的边界. 边界两侧的纹理, 可能频率不一样, 也可能方向不一样, 还有可能频率和方向虽然都一样, 但纹理间形成了错位. 从计算机视觉的原理看, 这些纹理性质的变化反映了物体表面高度的不连续或存在着遮挡等情况. 检测出的纹理边界把相位场分割为一致的区域. 相位展开可以在一致的区域分别进行.

## 二、条纹图像瞬时频率的估计及纹理边界的检测

当把条形正弦光投影到物体表面时, 摄像机得到了变形条纹的图像 (图 4), 这些条纹的频率和方向反映了物体表面的方向和形状. 当物体表面平滑变化时, 图像具有很强的局部相关性. 在图像的每一局部区域内, 都有主要的频率成分, 而主要频率随图像位置的变化是缓慢的. 当物体由于遮挡而产生高度不连续时, 其图像的主要频率会发生突变. 通过检测频

率的突变, 可以定位可能的高度不连续处, 从而把相位场分割为不同的区域. 这一节讨论采用多频道 Gabor 小波滤波器估计瞬时频率的方法及条纹纹理边界的检测.

### 1 瞬时频率的定义

对于图像

$$I(x, y) = A(x, y) \cos[\Psi(x, y)] \quad (4)$$

式中  $A(x, y)$  表示图像的幅度, 或如下所述, 表示图像的对比度, 它的变化是缓慢的, 且  $0 < A < 1$ .  $\Psi(x, y)$  是相位函数. 定义梯度函数  $\nabla \Psi(x, y) = [u(x, y), v(x, y)]$  为  $\Psi(x, y)$  的瞬时频率. 其中

$$u(x, y) = \partial \Psi(x, y) / \partial x, v(x, y) = \partial \Psi(x, y) / \partial y$$

瞬时频率的幅度为  $\sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ , 其方向为  $\theta(x, y) = \tan^{-1}[v(x, y)/u(x, y)]$ .

对于式 (1) 的相位法的图像, 经过取对数的处理, 可以化为式 (4) 的形式:

$$\begin{aligned} & \log[R(x, y)[A(x, y) + B(x, y)\cos\Psi(x, y)]] \\ &= \log[R(x, y)A(x, y)[1 + B(x, y)\cos\Psi(x, y)/A(x, y)]] \\ &= \log[R(x, y)A(x, y)] + \log[1 + B(x, y) \\ & \quad \cdot \cos\Psi(x, y)/A(x, y)] \\ &\approx \log[R(x, y)A(x, y)] + (B(x, y)/A(x, y))\cos\Psi(x, y) \end{aligned}$$

上式中利用了近似公式  $\log(1+a) \approx a, 0 < a < 1$ . 当利用窄带的带通滤波器滤波时, 上式中低频项  $\log[R(x, y)A(x, y)]$  的响应可以忽略. 因此式 (1) 的图像可以化为式 (4) 的形式.

### 2 瞬时频率的估计

对于平滑物体的图像式 (4), 其  $A(x, y)$  和  $\nabla \Psi(x, y)$  也是平滑变化的. 图像具有很强的局部相关性. 在每一像素位置, 其主要频率都集中在  $\nabla \Psi(x, y)$  附近. 可以采用加窗傅立叶变换、Wigner 分布, 小波变换或多频道滤波等方法来估计每一像素位置的频谱.

在估计瞬时频率时, 应当考虑以下几个原则:

(1) 滤波器应有很好的空域局部性质

(2) 为了抑制每一像素位置上的次要频率, 滤波器应该有尽可能窄的带宽.

(3) 为了能够抽取图像中所有有意义的频率, 滤波器应该足够多, 即频率空间的取样应该足够密.

上述 (1)、(2) 两个准则是矛盾的. 能使它们达到联合最优的是 Gabor 小波<sup>[9]</sup>, 其形式为:

$$h(x, y; u, v) = g(x', y') \exp[2\pi j(ux + vy)] \quad (5)$$

式中  $(x', y') = (x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$  是旋转  $\theta$  角后的坐标.  $g(x, y)$  是二维高斯函数:

$$g(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

Gabor 小波是高斯函数调制的正弦函数, 它有很好的方向选择特性.

为了抽取点  $(x, y)$  处的频率  $(u, v)$ , 可以计算图像  $I(x, y)$  和  $h(x, y; u, v)$  的卷积:

$$F(u, v; x, y) = I(x, y) * h(x, y; u, v)$$

$F(u, v; x, y)$  是  $I(x, y)$  的局域频谱, 其幅频谱为

$$A(u, v; x, y) = |F(u, v; x, y)|.$$

可以用一组不同频率的滤波器和图像作卷积,然后把具有最大响应的滤波器的中心频率作为瞬时频率的估计值。本文采用了 Bowik 提出的频率估计公式<sup>[10]</sup>,它有很好的精度和抗噪声能力。

令  $h_x(x, y; u, v)$  和  $h_y(x, y; u, v)$  分别为式(5)中的 Gabor 函数对  $x$  和  $y$  的一阶偏导数。令  $B(u, v; x, y)$  和  $C(u, v; x, y)$  分别为滤波器  $h_x$  和  $h_y$  的输出幅度:

$$B(u, v; x, y) = |I(x, y) * h_x(x, y; u, v)|,$$

$$C(u, v; x, y) = |I(x, y) * h_y(x, y; u, v)|.$$

则点  $(x, y)$  处的瞬时频率  $(u, v)$  的估计为:

$$\begin{aligned} |\hat{u}(x, y)| &\cong B(u, v; x, y) / 2\pi A(u, v; x, y) \\ |\hat{v}(x, y)| &\cong C(u, v; x, y) / 2\pi A(u, v; x, y) \end{aligned} \quad (7)$$

由于幅频谱  $A, B, C$  都是正数,因此,利用上式不能确定  $u$  和  $v$  的符号。为此做如下约定,瞬时频率估计值的符号应该与滤波器的中心频率的符号一致。

### 3. 滤波器组的设计

由于我们的目的是从条纹图像中抽取有用的瞬时频率的信息,而不在于两维图像的完全表示和重构,所以只要有足够多的一组滤波器就可以了。

在设计滤波器组  $\{h_k\}, k=1, \dots, n$  时,需要规定式(5)中的中心频率  $\{u_k, v_k\}$  和式(6)中的空间参数  $\{\sigma_k\}, k=1, \dots, n$ 。中心频率的选择取决于两维频率空间的采样策略。我们采取了类似小波变换的采样策略(图 1),滤波器的中心频率随着它和原点的距离按倍数增长,而滤波器的空间尺寸则随中心频率的增加而成反比地减小。这样做的优点是引入了一个可变的空间-频率窗,使得在低频处滤波器有较大的空间尺寸  $\sigma_k$ ,而在高频处则有较小的  $\sigma_k$ ,以便能更准确地测量高频的频率。由于实值图像的频谱关于原点对称的,因此只需对频域的半个平面采样就可以了。

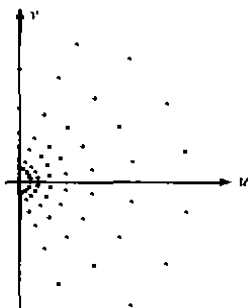


图 1 Gabor 滤波器中心频率的分布

归纳上述分析,估计图像中各点瞬时频率的算法如下:

(1)用如图(1)所示的  $N$  个不同径向、不同中心频率的 Gabor 滤波器  $\{h_k\}_{k=1}^N$  及其  $x$  和  $y$  方向的一阶偏导数  $\{(h_k)_x\}_{k=1}^N, \{(h_k)_y\}_{k=1}^N$  分别与输入图像做卷积运算,得到图像中各点的响应幅度  $\{A_k(x, y)\}_{k=1}^N, \{B_k(x, y)\}_{k=1}^N, \{C_k(x, y)\}_{k=1}^N$ ;将所得到的结果用二维高斯函数进行平滑。

(2)对图像中的每一点  $(x, y)$ ,从  $\{A_k(x, y)\}_{k=1}^N$  中选出在该点响应幅度最大的滤波器  $h_j$ 。

(3)按照式(7)计算图像中各点的瞬时频率值。

(4)计算图像中各点瞬时频率的方向。

### 4. 检测瞬时频率幅值和方向的突变点,定位纹理边界

当纹理区域瞬时频率的幅值和方向发生突变时,可以采用类似 Marr 零交叉的边缘检测算子来检测瞬时频率幅值和方向的突变点,从而定位纹理区域间的边界。具体步骤如下:

(1)计算图像中各点瞬时频率的幅值和方向。

$$\begin{aligned} \hat{f}(x, y) &= \sqrt{\hat{u}^2(x, y) + \hat{v}^2(x, y)}, \\ \hat{\theta}(x, y) &= \tan^{-1}(\hat{v}(x, y) / \hat{u}(x, y)). \end{aligned}$$

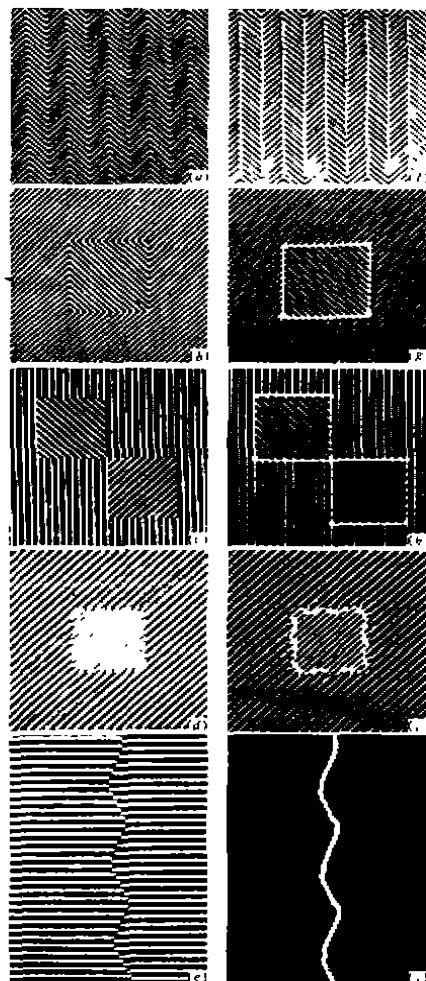


图 2 模拟的条纹图像及检测出的纹理边界



图 3 “人字呢”大衣的图像及检测出的纹理边界

(2)将步骤(1)得到的  $\hat{f}(x, y)$  和  $\hat{\theta}(x, y)$  分别与  $\nabla^2 g(x, y)$  做卷积运算,其中  $g(x, y)$  是高斯函数。

(3)寻找过零且过零处的斜率较大的点。这些点的集合便是瞬时频率发生突变的地方。把这些点作适当的后处理后可