7.参数估计

想要知道总体的参数，则通过使用样本的参数来构造某些函数，从而估计总体参数

7.1 点估计

1. 矩估计：样本的矩 $\longrightarrow$ 总体的矩

$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow EX$

$A_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightarrow EX^2$

对于总体均值μ与总体方差σ^2都有：

$$\hat{\mu} = \overline{X} \quad \hat{\sigma}^2 = B_2$$

2. 极大似然估计：已知A发生，选择使A发生概率最大的参数来作为估计值

（1）写出总体概率/密度函数

（2）写出关于参数的似然函数L

（3）两边同时取ln

（4）两边求导，使导函数为0

e.g.1

总体$X \sim P(\lambda)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为样本，求λ的极大似然估计

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x^i}}{x_i!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i} \cdot ne^{-\lambda}$$

$$ln(L(\lambda)) = \sum_{i=1}^{n} x_i ln\lambda - ln\prod_{i=1}^{n} x_i - n\lambda$$

$$\frac{dln(L(\lambda))}{d\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} - n = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

3.估计量的无偏性和有效性

用估计量T来估计实际参数θ

1.无偏性：$ET=\theta$

2.有效性

计算估计量T的方差，方差越小越有效

7.2区间估计

1.枢轴量

有样本$\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，构造$Z=f(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)$，其中$\theta$为未知参数，使得$Z$服从一个不依赖于参数$\theta$的分布，则$Z$为枢轴量

2.三种情况下对枢轴量的构造（总体服从正态分布）

1.一个正态总体

（1）σ^2已知

构造$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, $Z\sim N(0,1)$

置信区间:$(\overline{X}-\Phi(1-\frac{\alpha}{2}),\overline{X}+\Phi(1-\frac{\alpha}{2}))$

（2）σ^2未知

构造$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{S\sqrt{n}}$, $Z\sim t(n-1)$

置信区间:$(\overline{X}-t_{\frac{\alpha}{2},n-1},\overline{X}+t_{\frac{\alpha}{2},n-1})$

（3）已知S^2，估计σ^2

构造$Z=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$，$Z\sim\mathcal{X}^2(n-1)$

置信区间:$(\frac{(n-1)S^2}{\mathcal{X}^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\frac{(n-1)S^2}{\mathcal{X}_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}})$

2.两个正态总体 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

（1）σ_1^2,σ_2^2已知，求$\mu_1-\mu_2$

构造$Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$

置信区间：$(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}})$

（2）σ_1^2,σ_2^2未知，求$\mu_1-\mu_2$

构造$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$

置信区间:

$(\overline{X}-\overline{Y}-t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\overline{X}-\overline{Y}+t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\cdot\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}})$

（3）求$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$

构造$F=\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}\sim F(n_1-1,n_2-1)$

置信区间：$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)})$