5.大数定律及中心极限定理

5.1大数定律

1.切比雪夫不等式

EX,DX均存在， $\forall \varepsilon > 0$， $P(|X-EX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

证明:

$$
\begin{aligned}
P(|X-EX| \geq \varepsilon) &= \int_{|X-EX|\geq\varepsilon} f(x)\,dx \leq \int_{|X-EX|\geq\varepsilon} \frac{(X-EX)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx \\
&\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(X-EX)^2}{\varepsilon^2} f(x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{-\infty}^{+\infty} (X-EX)^2 f(x)\,dx \\
&= \frac{DX}{\varepsilon^2}
\end{aligned}
$$

2.切比雪夫大数定律

收敛 : $a_n \to a : \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad n > N时 \ \ |a_n - a| < \varepsilon$

依概率收敛:

$x_n \to a : \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad n > N时 \ P\{|x_n - a| < \varepsilon\} = 1$

1.伯努利大数定律

试验次数无穷多时可以用频率来逼近概率

m~$b(n,p)$， 有 $\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} = 1$

证明:

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$满足独立同分布

$$E(\frac{m}{n}) = p \quad D(\frac{m}{n}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$1 \geq P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$

$$n \to +\infty时,\ \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \to 0$$

$$P\{|\frac{m}{n} - p| < \varepsilon\} \to 1$$

2.切比雪夫大数定律

实验次数无穷多时可以通过样本均值来高概率逼近期望

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$满足均不相关

EX_i均存在, $\exists M$使得$DX_i \leq M \quad \forall \varepsilon > 0$

$\lim_{n\to+\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i| < \varepsilon\} = 1$

证明：

$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$

$\because X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 满足不相关

$\therefore Cov(X_i,X_j)=0$

$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i\leq\frac{nM}{n^2}=\frac{M}{n}$

根据切比雪夫不等式

$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}\geq 1-\frac{M}{n\varepsilon^2}$

$\lim_{n\to\infty}1-\frac{M}{n\varepsilon^2}=1$

$\lim_{n\to+\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i|<\varepsilon\}=1$

5.2中心极限定理

大量独立同分布的变量和的极限分布是正态分布

$X_1,X_1,\cdots,X_n,\cdots$满足独立同分布,$EX_i=\mu$, $DX_i=\sigma^2$, $0\leq\sigma^2\leq+\infty$

$\lim_{n\to\infty}P\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\}=\Phi_0(x)$