# 2.一维随机变量及其分布

# 2.1常见一维离散型随机变量及其分布

## 1.二项分布

$X \sim b(n,p)$ : 做$n$次实验，每次成功的概率为$p$

$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$

## 2.泊松分布

$X \sim \pi(\lambda)$

$P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

泊松分布基于二项分布，当二项分布的$n\cdot p<10$时可以使用泊松分布近似，给出证明：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{k!}p^k(1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

$$令\lambda=np,p=\frac{\lambda}{n}带入p得到：$$

$$\begin{aligned}原式&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^k}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{-\frac{n}{\lambda}\cdot(-\frac{\lambda}{n})\cdot(n-k)}\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^{-\frac{n}{\lambda}}=e$，带入得到：

$$\begin{aligned}原式&=\frac{\lambda}{k!}e^{\lim_{n\to+\infty}-\lambda+\frac{\lambda k}{n}}\\&=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\end{aligned}$$

## 3.几何分布

$P(X=k)=(1-p)^k\cdot$

## 4.负二项分布

成功$r$次实验需要进行$k$次实验的概率

$P(X=k)=C_{k-1}^{r-1}p^r p^{k-r}$

# 2.2常见一维连续性随机变量的概率密度

## 1.均匀分布

$X \sim U(a,b)$

$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\0, & else\end{cases}$

## 2.指数分布

$X \sim Exp(\lambda)$

$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{-\lambda}, & x > 0 \\ 0, & else \end{cases}$

指数分布具有无记忆性：

e.g.某家具的使用寿命服从指数分布，该家具能使用一年的概率为$p$，那么已经使用三年后还能再使用一年的概率也为$p$

## 3.正态分布

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

（1）性质: $\Phi_0(-x) = 1 - \Phi(x)$

其中$\varphi$表示概率密度，$\Phi$表示分布函数

（2）普通正态分布的标准化：

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim (0,1)$

# 2.3一维随机变量的函数

## 1.离散型

直接根据分布律表格计算

## 2.连续性

（1）求$F_X(x)$，即对$f(x)$积分

（2）用$F_X(x)$表示出$F_Y(y)$

（3）对$F_Y(y)$求导

Tips：可以省略第一步，即用$F_X(x)$表示出$F_Y(y)$后直接求导

补充：

### 卷积公式

当$y$关于$x$的函数$g(x)$处处可导且满足$g'(x) > 0$或$g'(x) < 0$恒成立，随机变量$Y = g(x)$，则有：

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) \cdot h'(y), & \alpha < y < \beta \\ 0, & else \end{cases}$$