4.随机变量的数字特征

4.2 方差

1. 方差的定义

1.离散型随机变量

$DX=\sum_k^r(x_k-EX)^2P_k$

2.连续型随机变量

$DX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x_k-EX)^2f(x)\,\mathrm{d}x$

$DX=E(X^2)-(EX)^2$

2. 方差的性质

1. $DC=0$

2. $D(X+c)=DX$

3 . $D(cX)=c^2DX$

4. $D(kX+b)=k^2DX$

5. X,Y独立时 : $D(X\pm Y)=DX+DY$

6. $DX=0\Leftrightarrow P(X=EX)=1$

4.3常见随机变量的期望与方差

1.常见离散型的期望与方差

1. 0-1分布: $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}\quad k=0,1$

$$\begin{array}{c|cc} X & 0 & 1 \\ \hline P & p & 1-p \end{array}$$

$EX=p\quad E(X^2)=p$

$$\begin{aligned} DX&=E(X^2)-(EX)^2\\ &=p-p^2\\ &=p(1-p) \end{aligned}$$

2. 二项分布: $P(X=k)=C_n^k\,p^k\,(1-p)^{n-k}$

$$\begin{aligned} EX&=\sum_{k=0}^{n}kC_n^k\,p^k\,q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}\,p^kq^{n-k}\\ &=np\sum_{k-1=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}\,p^{k-1}q^{n-k}=np(p+q)^{n-1}\\ &=np \end{aligned}$$

$DX=E(X^2)-(EX)^2=np(1-p)$

3. 几何分布: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$

$$\begin{aligned}EX&=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}p\\&=p\sum_{k=1}^{+\infty}[(1-p)^k]'\\&=p[\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^k]'\\&=\frac{1}{p}\end{aligned}$$

P.S. 此处求导为对(1-p)求导

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1}p\\&=p(\sum_{k=1}^{+\infty}k^2(1-p)^{k-1})\end{aligned}$$

令 $x=1-p$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=p\sum_{k=1}^{+\infty}k^2x^{k-1}=p\sum_{k-1}^{+\infty}k\cdot kx^{k-1}=p[\sum_{k=1}^{+\infty}kx^k]'\\&=p[x\sum_{k=1}^{+\infty}\cdot kx^{k-1}]'=\frac{2-p}{p^2}\end{aligned}$$

$DX=\frac{1-p}{p^2}$

4. 泊松分布: $P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$

$$EX=\sum_{k=0}^{+\infty}ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k-1=0}^{+\infty}\lambda\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda$$

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{+\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=1}^{+\infty}k\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\&=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-1)\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\&=\lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}e^{-\lambda}+\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda}\\&=\lambda^2+\lambda\end{aligned}$$

$DX=\lambda$

2. 常见连续型的期望与方差

1.均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in[a,b]\\ 0, & else\end{cases}$

$EX=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2}$

$E(X^2)=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,dx=\frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$DX=E(X^2)-(EX)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$

2. 指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & else\end{cases}$

$EX=\frac{1}{\lambda}$

$E(X^2)=\frac{2}{\lambda^2}$

$D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$

均使用分部积分求解

3.正态分布 $X\text{~}N(\mu,\sigma)$

$EX=\mu$

$DX=\sigma^2$

4.4协方差与相关系数

1. 协方差

1.定义

$$\begin{aligned}Cov(X,Y)&=E[(X-EX)(Y-EY)]\\&=E(XY)-EX\cdot EY\end{aligned}$$

$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

2.性质

(1) $Cov(aX,bY)=abCov(X,Y)$

(2) $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$

(3) $Cov(c,X)=0$

(5) X,Y **独立,** $Cov(X,Y)=0$

(6) $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

3. 标准化

协方差会受到计量单位影响，为了消除该影响引入对随机变量的标准化

$X^* = \frac{X-EX}{\sqrt{DX}} \quad Y^* = \frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$

$Cov(X^*, Y^*) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX} \cdot \sqrt{DY}}$

2. 相关系数 $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$

1. $|\rho| = 1 \Leftrightarrow X与Y以p = 1成线性关系$