# 5.大数定律及中心极限定理

# 5.1大数定律

## 1.切比雪夫不等式

EX,DX均存在,  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $P(|X - EX| \ge \varepsilon) \le \frac{DX}{\varepsilon^2}$ 

证明:

$$egin{aligned} P(|X-EX| \geq arepsilon) &= \int_{|X-EX| \geq arepsilon} f(x) \, dx \leq \int_{|X-EX| \geq arepsilon} rac{(X-EX)^2}{arepsilon^2} f(x) \, dx \ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} rac{(X-EX)^2}{arepsilon^2} f(x) \, dx = rac{1}{arepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (X-EX)^2 f(x) \, dx \ &= rac{DX}{arepsilon^2} \end{aligned}$$

## 2.切比雪夫大数定律

收敛: $a_n o a: orall arepsilon>0, \quad \exists N>0, \quad n>N$ 时  $|a_n-a|<arepsilon$ 

#### 依概率收敛:

$$x_n o a: orall arepsilon > 0, \quad \exists N > 0, \quad n > N$$
时  $P\{|x_n - a| < arepsilon\} = 1$ 

#### 1.伯努利大数定律

试验次数无穷多时可以用频率来逼近概率

$$m ext{-}b(n,p)$$
,有 $\lim_{n o +\infty}P\{|rac{m}{n}-p|$ 

#### 证明:

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$
满足独立同分布

$$egin{align} E(rac{m}{n}) &= p \quad D(rac{m}{n}) = rac{p(1-p)}{n} \ 1 &\geq P\{|rac{m}{n} - p| < arepsilon\} \geq 1 - rac{p(1-p)}{narepsilon^2} \ n &
ightarrow + \infty \ rac{p(1-p)}{narepsilon^2} 
ightarrow 0 \ P\{|rac{m}{n} - p| < arepsilon\} 
ightarrow 1 \ . \end{align}$$

## 2.切比雪夫大数定律

实验次数无穷多时可以通过样本均值来高概率逼近期望

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$
满足均不相关

$$EX_i$$
均存在,  $\exists M$ 使得 $DX_i \leq M \quad \forall \varepsilon > 0$ 

$$\lim_{n\to +\infty} P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i| < \varepsilon\} = 1$$

#### 证明:

$$E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_{i}$$

$$\therefore X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$$
 满足不相关

$$\therefore Cov(X_i, X_j) = 0$$

$$D(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{i}) = \frac{1}{n^{2}}\sum_{i=1}^{n}DX_{i} \leq \frac{nM}{n^{2}} = \frac{M}{n}$$

根据切比雪夫不等式

$$P\{|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i| < \varepsilon\} \ge 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{M}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n o\infty}1-rac{M}{narepsilon^2}=1$$

$$\lim_{n \to +\infty} P\{|rac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - rac{1}{n}\sum_{i=1}^n EX_i| < \varepsilon\} = 1$$

# 5.2中心极限定理

大量独立同分布的变量和的极限分布是正态分布

$$X_1,X_1,\cdots,X_n,\cdots$$
满足独立同分布, $EX_i=\mu\,,DX_i=\sigma^2\,,0\leq\sigma^2\leq+\infty$ 

$$\lim_{n o\infty}P\{rac{\sum_{i=1}^nX_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leq x\}=\Phi_0(x)$$