ТЕМА 2.
Вычислительная математика

С помощью математического моделирования решение прикладной задачи сводится к решению математической задачи. При этом, как уже было сказано ранее, могут быть использованы следующие методы:

- *Аналитические*, применяемые в случае, когда решение задачи сводится к использованию известных формул.
- *Графические*, применяемые в случае, когда решение задачи более очевидно при использовании геометрических построений.
- *Численные*, применение которых сводит решение к выполнению конечного числа арифметических действий над числами.

Эти методы являются основным инструментом решения сложных задач и позволяют получить приближенное решение задачи с заданной степенью точности.

Понятие «вычислительная математика» в настоящее время нельзя считать полностью установившимся. Поначалу так называлось любое применение математических методов к решению задач естествознания. Позднее под этим термином подразумевалось изучение вопросов применения численных методов и созданных на их основе алгоритмов решения достаточно общих задач, теперь же под данным термином скорее понимается часть информатики, относящаяся к вопросам реализации численных методов на ЭВМ и методологии применения ЭВМ для решения тех или иных задач, стоящих перед человеком практически во всех областях его деятельности.

Применение компьютеров значительно ускорило и упростило решение трудоемких задач с помощью именно численных методов, выдвинув на передний план при решении практических инженерных и научных задач вычислительную математику и программирование. **Вычислительная математика изучает построение и исследование численных методов решения математических задач** посредством реализации соответствующих математических моделей. **Программирование же обеспечивает их техническую реализацию.**

Вычислительные алгоритмы, используемые для моделирования конкретных ситуаций, базируются на следующих численных методах:

Рис.2. Схема вычислительных алгоритмов

Сюда же можно отнести методы спектрального и Фурье-анализа, а также численные методы обработки данных.

Теория погрешностей

Из практики известно, что лишь в редких случаях удается найти метод решения, приводящий к точному результату. Как правило, приближенные решения используются совместно с точными решениями, поэтому, наряду с выбором вычислительного метода, с точки зрения оптимальности алгоритма его реализации, важной задачей является оценка степени точности получаемого решения. Поэтому важнейшим моментом при математическом моделировании является **обеспечение достоверности полученных решений**. Ее принято оценивать некоторой численной величиной, называемой погрешностью. При решении любой практической задачи необходимо всегда указывать требуемую точность результата. В связи с этим необходимо уметь:

- зная заданную точность исходных данных, оценивать точность результата (прямая задача теории погрешностей);
- зная требуемую точность результата, выбирать необходимую точность исходных данных (обратная задача теории погрешностей).

Основные источники погрешностей

Погрешности, встречающиеся в математических задачах, в основном могут быть разбиты на группы:

1). Погрешности, связанные с самой постановкой математической задачи. Математические формулировки редко точно отображают реальные явления: обычно они дают лишь более или менее идеализированные модели с упрощающими задачу условиями. Все это вызывает ряд погрешностей. Их называют **погрешности задачи**.

Иногда бывает и так, что решить задачу в точной постановке трудно или даже невозможно. Тогда ее заменяют близкой по результатам приближенной задачей. При этом возникает погрешность, которую можно назвать - **погрешность метода. Таким образом – это погрешности самой математической модели.**

2). Погрешности, связанные с наличием в математических формулах исходных числовых параметров, значения которых могут быть определены лишь приближенно. Таковы, например, все физические константы или число «пи». Условно так можно определить **начальные погрешности или погрешности исходных данных** задачи.

3). Погрешности, связанные с наличием бесконечных процессов в математическом анализе. Но при решении непрерывные функции в математических формулах часто задаются в виде бесконечных последовательностей или рядов (например, ряд Тейлора, замена интеграла суммой и т.д.). Более того, многие математические уравнения можно решить, лишь описав процессы в бесконечных пределах. В этом случае конечные пределы являются искомыми приближенными решениями задачи. Обрыв процесса вызывает наличие **остаточной погрешности численного метода.**

4). Погрешности, связанные с системой счисления. Так, при отображении рациональных чисел в десятичной системе справа от запятой может быть бесконечное число цифр. Но при вычислениях, очевидно, используется лишь их конечное число. И тогда возникает **погрешность округления**. Например, полагая в задаче, что $1/3 = 0.333$, мы получаем погрешность $\Delta \approx 3 \cdot 10^{-4}$. Кроме того, приходится округлять и конечные числа, имеющие большое количество знаков.

Понятно, что, производя вычисления с приближенными числами, погрешности исходных данных мы в какой-то мере переносим на результат вычислений. При осуществлении различных преобразований приближенных чисел мы получаем **погрешности вычислений.**

Погрешности выбранной математической модели и погрешности исходных данных считаются **неустранимыми**, так как не могут быть устранены в ходе решения задачи. Погрешности численного метода и погрешности округления могут быть отрегулированы и считаются **устранимыми.**

Само собой разумеется, что при решении конкретной задачи те или иные погрешности могут отсутствовать или иметь ничтожное влияние на результат. Но для полного анализа погрешностей следует принимать во внимание все их виды.

Приближенные числа

Важным отличием численных методов является то, что они позволяют получить лишь приближенное решение задачи, причем задача должна иметь конкретные исходные данные и значения параметров.

Но на практике часто числа, над которыми производятся вычисления, являются приближенными значениями тех или иных величин математической задачи. Истинное значение величины называют точным числом.

Применение компьютеров также обуславливает получение приближенных результатов. Современные процессоры позволяют обрабатывать целые числа и числа в форме с плавающей точкой. Числовое множество бесконечно. Процессор же ограничен своей разрядной сеткой и вынужден работать только с некоторым конечным подмножеством множества действительных чисел.

Числа в форме с плавающей точкой имеют вид

$$x = \pm m \cdot 10^n,$$

где m – мантисса числа, а n – его порядок. Если мантисса представлена в виде: $m = 0.d_1 d_2 \dots d_k$, то при $d_1 \neq 0$ число x будет представлено в нормализованной форме с плавающей точкой. Например, число $x = 345.8$ представлено в **форме с фиксированной точкой**. **В нормализованной форме с плавающей точкой** оно будет записано как $x = 0.3458 \cdot 10^3$.

Представление числа в форме с плавающей запятой может рассматриваться как компьютерная реализация экспоненциальной записи чисел. Преимущество использования представления чисел в формате с плавающей запятой над представлением в формате с фиксированной запятой (и целыми числами) состоит в том, что можно использовать существенно больший диапазон значений при неизменной относительной точности.

Например, в форме с фиксированной запятой число, занимающее 6 разрядов в целой части и 2 разряда после запятой, может быть представлено в виде 123456,78. В свою очередь, в формате с плавающей запятой в тех же 8 разрядах можно записать числа: 1,2345678; 1234567,8; 0,0012345678; 12345678000 и так далее, но для этого необходимо иметь дополнительное двухразрядное поле для записи показателей степени по основанию 10 от 0 до 16. При этом общее число разрядов составит 8+2=10.

Скорость выполнения компьютером операций с числами, представленными в форме с плавающей запятой, измеряется во FLOPS (от англ. *floating-point operations per second* — «количество операций с плавающей запятой в секунду») и является одной из основных единиц измерения быстродействия вычислительных систем.

Таким образом компьютер осуществляет перевод привычных для человека десятичных чисел в числа двоичной системы. При этом разряды, выходящие за рамки разрядной сетки, не округляются, а отбрасываются, и компьютер оперирует с приближенными значениями действительных чисел.

Приближенное число имеет практическую ценность лишь тогда, когда можно определить, насколько оно отличается от точного (истинного) числа. **Мерой точности приближенных чисел является их погрешность.**

Абсолютная и относительная погрешности

Обозначим x - точное, вообще говоря, неизвестное значение некоторой величины, и пусть a — его приближение значение.

Истинной погрешностью приближенного числа a при представлении итогового результата называется разность между точным числом x и его приближенным значениемa –

$$(x - a). \qquad (1)$$

Истинная погрешность может быть числом с любым знаком или равным нулю.

Абсолютной погрешностью Δa приближенного числа a называется модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a –

$$\Delta a = |x - a|. \qquad (2)$$

Относительной погрешностью δ приближенного значения a называется отношение абсолютной погрешности Δa к модулю числа x –

$\delta = |x - a|/|x| = \Delta a/|x|$. (3)

Так как точное число обычно бывает неизвестно, то его заменяют приближенным числом: $\delta = \Delta a/|a|$. Относительную погрешность часто выражают в процентах как: $\delta = (\Delta a/|a|) \cdot 100\%$.

Если погрешность δ не превышает 5%, то различие между этими двумя формулами сказывается только во втором знаке самой погрешности. Вот эта погрешность сопоставима в идентичных экспериментах, т.е. она может характеризовать качество измерения.

В связи с тем, что точное значение x, как правило, неизвестно, то формулы абсолютной и относительной погрешностей носят сугубо теоретический характер.

Для практических целей вводится **понятие предельной погрешности**. Предельная абсолютная погрешность D_a — это верхняя оценка модуля абсолютной погрешности числа x, т.е.

$\Delta a \le D_a$. (4)

Тогда при вычислении точного числа x можно использовать записи вида:

$a - D_a \le x \le a + D_a$ или $|x| \le a \pm D_a$. (5)

Очевидно, что предельная абсолютная погрешность выбирается неоднозначно: если какое-то число является предельной абсолютной погрешностью, то любое бОльшее число тоже есть предельная абсолютная погрешность. На практике стараются выбирать возможно меньшее и простое по записи.

Далее, так как термины «истинная погрешность» и абсолютная погрешность» практически не используются, то предельную абсолютную погрешность и называют просто абсолютной погрешностью!

Кроме того, следует иметь ввиду, что слово «погрешность» употребляется, когда речь идет о действиях над числами. Когда говорят об измерениях, то чаще вместо него употребляют слово «ошибка».

Правила записи приближенных чисел

Запись приближенных чисел должна подчиняться правилам, связанным с понятиями **верных значащих цифр**.

Значащими цифрами числа называют все цифры его десятичного представления, начиная с первой ненулевой слева. Например, в числе $a = 3.1415$ четыре десятичных знака, но пять значащих цифр; в числе $a = 0.03140$ пять десятичных знаков, но четыре значащих цифры. И последнее число может быть записано как $a = 3.140 \cdot 10^{-2}$.

Любое десятичное число точное или приближенное

$$a = \pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} \qquad (6)$$

представимо в виде

$$a = \pm a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10 + a_0 + a_{-1} 10^{-1} + \dots + a_{-m} 10^{-m}, \qquad (7)$$

где a_i,- - это цифры числа, 10^i - их позиция, $i \in (n, m)$.

Значащую цифру a_i приближенного числа a называют **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифре, то есть выполняется неравенство $|x - a| \leq 0.5 \cdot 10^i$. (8)

Значащую цифру a_i приближенного числа a называют **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы разряда, в котором находится значащая цифра, т.е. $|x - a| \leq 10^i$. (9)

Например, результат вычисления представлен в виде 0,3548, а точность его получения была 1%, следовательно, доверять в таком результате можно только первым двум знакам.

Или же если $a = 0.030587$ и $\Delta a = 0.6 \cdot 10^{-5}$, то верными в узком смысле будут подчеркнутые значащие цифры 0,0<u>305</u>87, а верными в широком смысле будут подчеркнутые значащие цифры 0,0<u>3058</u>7 . Оставшиеся справа цифры считаются сомнительными. Однако одну или две из них принято сохранять для избежания потери точности результата при округлении.

И наоборот, если задано n верных знаков приближенного числа, то за абсолютную погрешность можно принять $\Delta a = 0.5 \cdot 10^{m-n+1}$.

Вычислить приближенное значение числа $\boldsymbol{a}$ с точностью до $\boldsymbol{\varepsilon = 10^{-m}}$ означает необходимость сохранить верной значащую цифру, стоящую в $\boldsymbol{m}$ –ом разряде после запятой.

Иногда в ответе оставляют только верные цифры. Однако последняя верная цифра может стать при этом верной в нестрогом смысле, так как произойдет округление и к погрешности числа прибавится погрешность округления.

Округление чисел

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр. В тех случаях, когда приближенное число содержит излишнее количество неверных значащих цифр, прибегают к округлению.

Приходится также округлять точные числа, содержащие слишком много или бесконечное количество значащих цифр, сообразуясь с общей точностью вычислений.

Существует несколько способов округления числа до n значащих цифр.

Наиболее простой из них – усечение. Состоит в отбрасывании всех цифр, расположенных справа от n –ой значащей цифры.

Более предпочтительным является округление по дополнению. В простейшем варианте это правило округления состоит в следующем. Если первая слева из отбрасываемых цифр меньше 5, то сохраняемые цифры остаются без изменения. Если же она больше либо равна 5, то в младший сохраняемый разряд добавляется единица.

Абсолютное значение погрешности округления при округлении по дополнению не превышает половины единицы разряда, соответствующего последней оставляемой цифре, а при округлении усечением – единицы того же разряда.

Существуют определенные соглашения при оперировании понятиями округления и верных значащих цифр.

1) Если число имеет лишь верные цифры, то и его округление имеет также только верные цифры.

2) Совпадение приближенного значения, имеющего все верные значащие цифры, с точным значением не обязательно.

3) Абсолютные и относительные погрешности числа принято округлять в большую сторону, так как при округлениях границы неопределенности числа, как правило, увеличиваются.

4) При изменении формы записи числа количество значащих цифр не должно меняться, т.е. необходимо соблюдать **равносильность преобразований.**

Примером равносильных преобразований могут быть следующие равенства:

$7500 = 0{,}7500 \cdot 10^4$,

$0{,}110 \cdot 10^4 = 11{,}0$.

Примером неравносильных преобразований могут быть следующие равенства

$7500 = 0{,}75 \cdot 10^4$,

$0{,}110 \cdot 10^4 = 11$.

Во втором случае два нуля в первом и один ноль во втором выражениях переведены в разряд незначащих цифр, и такую запись использовать не следует.

5) При выполнении приближенных вычислений в промежуточных результатах желательно сохранять такое количество значащих цифр, чтобы их число не превышало числа верных цифр более чем на одну-две единицы.

6) Верные значащие цифры числа характеризуют ориентировочно относительную погрешность по схеме:

- одна верная цифра 10%,
- две 1%,
- три 0,1% и т.д.

Существует теорема:

Если положительное приближенное число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле, то относительная погрешность δ этого числа не превосходит $\left(1/_{10}\right)^{n-1}$, деленную на первую значащую цифру a_m данного числа, т.е.

$$\delta \le \frac{1}{a_m 10^{n-1}} \qquad \textbf{(10)}$$

Эту величину и принимают за относительную предельную погрешность числа a, устанавливая в формуле знак равенства.

В целом приближенные числа принято записывать таким образом, чтобы все цифры числа, кроме нулей впереди, если они есть, были значащими и верными цифрами.

Вычисление погрешностей

Вычисление погрешностей результатов вычислений при выполнении арифметических операций с числами a и b проводится по следующим формулам:

Для предельной абсолютной погрешности (11)

$\Delta(a \pm b) = \Delta a + \Delta b,$
$\Delta(a^m) = ma^{m-1}\Delta(a),$
$\Delta(a \cdot b) = b\Delta a + a\Delta b,$
$\Delta(a/b) = \frac{b\Delta a + a\Delta b}{b^2},$

Для относительной предельной погрешности **(12)**

$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b},$
$\delta(a \cdot b) = \delta(a) + \delta(b),$
$\delta(a/b) = \delta(a) + \delta(b)$
$\delta(a^m) = m\delta(a),$
$\delta(\sqrt[m]{a}) = \delta(a)/m,$

Здесь
Δ - предельная абсолютная погрешность;
δ - относительная предельная погрешность;
m - рациональное число.

Следует отметить, что приведенные оценки погрешностей приближенных чисел справедливы, если в записи этих чисел все «значащие» цифры «верны». Также обратите внимание, **что при выполнении измерений физических величин, абсолютные и относительные ошибки результата должны иметь соответствующие размерности!**

Общая формула для погрешности

В практике вычислений очень часто приходится оценивать погрешность числового значения величины, полученной в результате вычислений по формуле, которая содержит не одно, а несколько действий. Для оценки погрешности в этом случае следует последовательно применять теоремы о погрешностях.

Кроме того, основной задачей теории погрешностей является ситуация, когда известны погрешности некоторой системы величин и требуется определить погрешность функционального преобразования от этих величин.

Пусть задана дифференцируемая функция

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

и пусть $|\Delta(x_i)|, i = 1,2, \dots, n$ – абсолютные погрешности аргументов функции. Тогда абсолютная погрешность функции будет иметь вид:

$$|\Delta(u)| = f\big(x_1 + \Delta(x_1), x_2 + \Delta(x_2), \dots, x_n + \Delta(x_т)\big) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Обычно на практике $|\Delta(x_i)|$ – малые величины, произведениями, квадратами и высшими степенями которых можно пренебречь. Поэтому для абсолютной погрешности можно получить границу сверху в виде:

$$|\Delta(u)| \approx |df(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \Delta(x_i)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\ |\Delta(x_i)|.$$

Обозначая через $\Delta_i, i = 1,2, \dots, n$ предельные абсолютные погрешности аргументов x_i и через Δ_u – предельную абсолютную погрешность функции u, для малых Δ_i получим:

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\ |\Delta_i|. \qquad (13)$$

Разделив обе части неравенства на u, будем иметь оценку для относительной погрешности функции u вида:

$$\delta_u \le {}^{\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\ |\Delta(x_i)|}\Big/_{u} = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial}{\partial x_i} \ln(u)\right| \Delta_i\ . \qquad (14)$$

Для функции одного аргумента формулы упрощаются до одного слагаемого.

Вычисление по методу границ

Если нужно иметь абсолютно гарантированные границы возможных значений вычисляемой функции, если известны границы изменения ее аргументов. В этом случае используют специальный метод вычислений – метод границ.

Пусть

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- непрерывно дифференцируемая функция, монотонная по каждому аргументу $x_i, i = 1,2, \dots, n$. Для этого достаточно предположить, что производные $\frac{\partial f}{\partial x_i},\ i = 1,2, \dots, n$ сохраняют постоянный знак в рассматриваемой области ω изменения аргументов. Допустим, что переменные внутри области ограничены

$$\underline{x_i} \le x_i \le \overline{x_i}, i = 1,2, \dots, n.$$

Допустим, что функция u внутри области ω возрастает по каждому аргументу. Тогда

$\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$.

Пусть теперь функция u возрастает по части $x_i, i = 1,2,\dots,k, k < n$ аргументов и убывает по части $x_i, i = 1,2,\dots,l, k < l \leq n$. Тогда будет строго гарантировано неравенство:

$$f\left(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \dots, \underline{x_l}, \overline{x_{l+1}}, \overline{x_n}\right) < f(x_1, x_2, \dots, x_n) < f\left(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_l}, \underline{x_{l+1}}, \underline{x_n}\right). \quad (15)$$

На примере основных арифметических действий для функции двух переменных $f(x, y)$ это будет выглядеть следующим образом:

1). Пусть $f(x, y) = x \pm y$

Когда x, y – возрастают:

$\underline{x} \pm \underline{y} < x \pm y < \overline{x} \pm \overline{y}$ и

$\overline{x} \pm \overline{y} < x \pm y < \underline{x} \pm \underline{y}$,

когда они убывают.

Когда x – возрастает, y – убывает, тогда очевидно, что

$\underline{x} \pm \overline{y} < x \pm y < \overline{x} \pm \underline{y}$.

2). Аналогично для умножения и деления:
например, когда x – возрастает, y – убывает

$\underline{x} \cdot \overline{y} < x \cdot y < \overline{x} \cdot \underline{y}$,

или же

$$\underline{x}/\overline{y} < x/y < \overline{x}/\underline{y}.$$

О вычитании близких чисел

Точность результата при вычитании близких чисел можно повысить, если перед прямым выполнением вычислений предварительно произвести тождественные преобразования так, чтобы избежать вычитания близких чисел.

Например, пусть $a = \sqrt{2.01} - \sqrt{2}$, и под знаком радикала стоят точные числа. Это разность близких чисел. Во избежание потери точности преобразуем выражения так:

$$a = \sqrt{2.01} - \sqrt{2} = \frac{\left(\sqrt{2.01}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2.01}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2.01}+\sqrt{2}\right)} = \frac{0.01}{1.42+1.41}.$$

Относительная погрешность этого приближенного частного равна относительной погрешностей знаменателя, т.к. в числителе стоит точное число.

$\sqrt{2.01} \approx 1.4177, \sqrt{2} \approx 1.4142,$

Абсолютные погрешности слагаемых в знаменателе

$|x - a| = |1.42 - 1.4177| = 0.0023 \leq 0.5 \cdot 10^{-2},$

$|1.41 - 1.4142| = 0.0042 \leq 0.5 \cdot 10^{-2}.$

Относительная погрешность знаменателя складывается из суммы относительных погрешностей слагаемых:

$\delta_1 = \frac{0.0023}{1.42} \approx 0.0016\,, \delta_2 = \frac{0.0042}{1.41} \approx 0.0030\,.$

$\delta(a \pm b) = \frac{a\delta_a + b\delta_b}{a \pm b} = 0.0023.$

Если же считать напрямую, то имеем:

$\delta \approx \frac{1.42 \cdot 0.0016 + 1.41 \cdot 0.0042}{1.42 - 1.41} = \frac{0.0059}{0.01} = 0.59.$

Возникает разница в несколько порядков!

Устойчивость, корректность и сходимость

Так как при математическом моделировании в приближенных расчетах имеются неустранимы погрешности, мы должны иметь представление об их влиянии на точность окончательных результатов вычислений.

Пусть в результате решения задачи по исходному значению величины x находится значение искомой величины $y = f(x)$. Если исходная величина имеет абсолютную погрешность Δx, то решение y имеет погрешность Δy.

Задача называется **устойчивой** по исходному параметру x, если решение у непрерывно зависит от x, т.е. малое приращение исходной величины x приводит к малому приращению искомой величины y. Другими словами, малые погрешности в исходной величине приводят к малым погрешностям в результате расчетов.

Отсутствие устойчивости означает, что даже незначительные погрешности в исходных данных приводят к большим погрешностям в решении или вовсе к неверному результату.

Задача называется поставленной **корректно**, если для любых значений исходных данных из некоторого класса ее решение существует, единственно и устойчиво по исходным данным.

При анализе точности вычислений одной из важнейших характеристик является **сходимость** выбранного численного метода. Она означает близость получаемого численного решения задачи к исходному решению. **Различают сходимость итерационного процесса и сходимость в методах дискретизации.**

Итерационный процесс состоит в том, что для решения некоторой задачи строится метод последовательных приближений. В результате многократного повторения этого процесса (итераций) мы получаем последовательность приближенных решений $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$

Говорят, что последовательность $y_n = f(x_n)$ сходится к точному решению y, если существует предел $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y$, Вычисления прекращаются при достижении $|y_n - y_{n-1}| \leq D_y$.

Методы дискретизации заключаются в замене задачи с непрерывными параметрами на задачу, в которой значения функции вычисляются в фиксированных точках l_i. Здесь под сходимостью метода понимается стремление значений решения исходной задачи к значению искомой величины y при стремлении к нулю параметра дисретизации $\Delta = l_{i+1} - l_i$.

Некоторые обобщенные требования к выбору численных методов

Для получения решения задачи с необходимой точностью ее постановка должна быть корректной, а используемый численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

Кроме того, рассмотренные выше вопросы о погрешностях являются одними из важнейших моментов при выборе численного метода. Так что, в основе выбора численного метода лежат следующие соображения:

1) Можно утверждать, что нет ни одного метода, пригодного для решения всех задач одного и того же класса. Поэтому всегда стоит задача выбора численного метода, сообразуясь из конкретной технической задачи и выбранным методом математического моделирования.

2) Численный метод можно считать удачно выбранным:

- если его погрешность в несколько раз меньше неустранимой погрешности, а погрешность округлений в несколько раз меньше погрешности метода;

- если неустранимая погрешность отсутствует, то погрешность метода должна быть несколько меньше заданной точности;

- завышенное снижение погрешности численного метода приводит не к повышению точности результатов, а к необоснованному увеличению объема вычислений.

3) Предпочтение отдается методу, который:

- реализуется с помощью меньшего числа действий;
- требует меньшего объема памяти ЭВМ;
- логически является более простым.

4) Численный метод должен обладать устойчивостью и сходимостью.

5) По возможности нужно прибегать к существующему программному обеспечению ЭВМ для решения типовых задач.

Литература

1. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики: учебное пособие / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – 8-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. – 672 с.
2. Жидков Е.Н. Вычислительная математика: [уч. пособие для студ. вузов, обучающихся по направлениям "Информатика и вычислит. техника", "Информ. системы"] / Е.Н. Жидков .— М. : Академия, 2010 .— 199 с.
3. Изаак Д.Д., Швалева А.В. Вычислительная математика: уч.-метод. пособие. – Орск: изд-во Орского гуманитарно-технологического института (филиала) ОГУ, 2012. – 97 с. - [Электронный ресурс]: — Режим доступа: http://dizaak.narod.ru/downloads/misis/vm_book2.pdf.
4. Игумнов Л. А. Методы вычислительной математики. Решение уравнений и систем уравнений: уч. пособие / Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, Т.В. Юрченко; Нижегор. гос. архитектур. – строит. ун-т. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2018. – 100 с. - [Электронный ресурс]: — Режим доступа: - https://bibl.nngasu.ru/electronicresources/uch-metod/programming/869347.pdf.
5. Вычислительная математика: уч. пособие / Е.Г. Агапова; [науч. ред. Т.М. Попова]. - Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2017. - 92 с. - [Электронный ресурс]: — Режим доступа: https://pnu.edu.ru/media/filer_public/6f/67/6f67923d-f9e9-4fe7-8173-4ec240b420ed/agapova16.pdf.
6. Вычислительная математика: учебное пособие / В.О. Чернецкий, И.В.Чернецкая. – Челябинск: Издательский центр

ЮУрГУ, 2012. – 131 с. - . - [Электронный ресурс]: — Режим доступа: https://lib.susu.ru/ftd?base=SUSU_METHOD&key=000508854&dtype=F&etype=.pdf.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы / Н.С. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. – 592 с.
8. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. / В.М. Вержбицкий. - М.: Высшая школа, 2002. – 842 с.