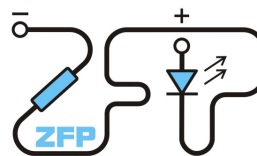


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...



Úloha č.

Název úlohy:

Jméno: Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření:

Datum odevzdání:

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:.....

dne:

Pracovní úkoly

1. Pro tři vodorovné trubice s různými poloměry kruhového průřezu, které jsou opatřeny manometry, změřte závislost objemového průtoku Q_v na úbytku statického tlaku Δp na vyšetřované délce trubice l ve směru proudění.
2. Sestrojte graf závislosti $Q_v = Q_v(p)$.
3. Ze směrnice závislosti $Q_v = Q_v(p)$ v oblasti laminárního proudění určete poloměr trubice.
4. Upravený poloměr dosadíte do vztahů pro výpočet Re a k .
5. Sestrojte graf závislosti $k = k(Re)$, kde k je součinitel odporu trubice a Re je Reynoldsovo číslo. Do grafu vynesete teoretickou závislost pro laminární i turbulentní proudění.

Teoretická část

K pokusu používáme aparaturu znázorněnou na obrázku 1. Vodorovná trubice má vnitřní poloměr r a ve vzdálenosti l od ústí je umístěna manometrická trubice.

Měříme závislost objemového průtoku Q_v na úbytku statického tlaku p^1 na délce l ($Q_v = Q_v(p)$). Při určitém tlaku změříme objem vyteké vody V za dobu t , z toho vypočteme objemový průtok a jeho standardní odchylku podle

$$Q_v = \frac{V}{t} \quad (1)$$

$$\sigma Q_v = Q_v \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\sigma t}{t}\right)^2} \quad (2)$$

Úbytek statického tlaku a jeho odchylku spočítáme z výšky vodního sloupce h v manometrické trubici podle[1]

$$p = h \cdot \rho \cdot g \quad (3)$$

$$\sigma p = p \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma h}{h}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma g}{g}\right)^2}, \quad (4)$$

kde ρ je hustota vody a g je tíhové zrychlení.

Při laminárním proudění teoreticky objemový průtok závisí lineárně na úbytku tlaku, tento vztah je dán Poisseuilovou rovnicí[1]

$$Q_v = \frac{\pi r^4}{8\eta l} p, \quad (5)$$

kde η je dynamická viskozita vody.

Nafitujeme tuto závislost v oblasti laminárního proudění pro každou trubici funkcí

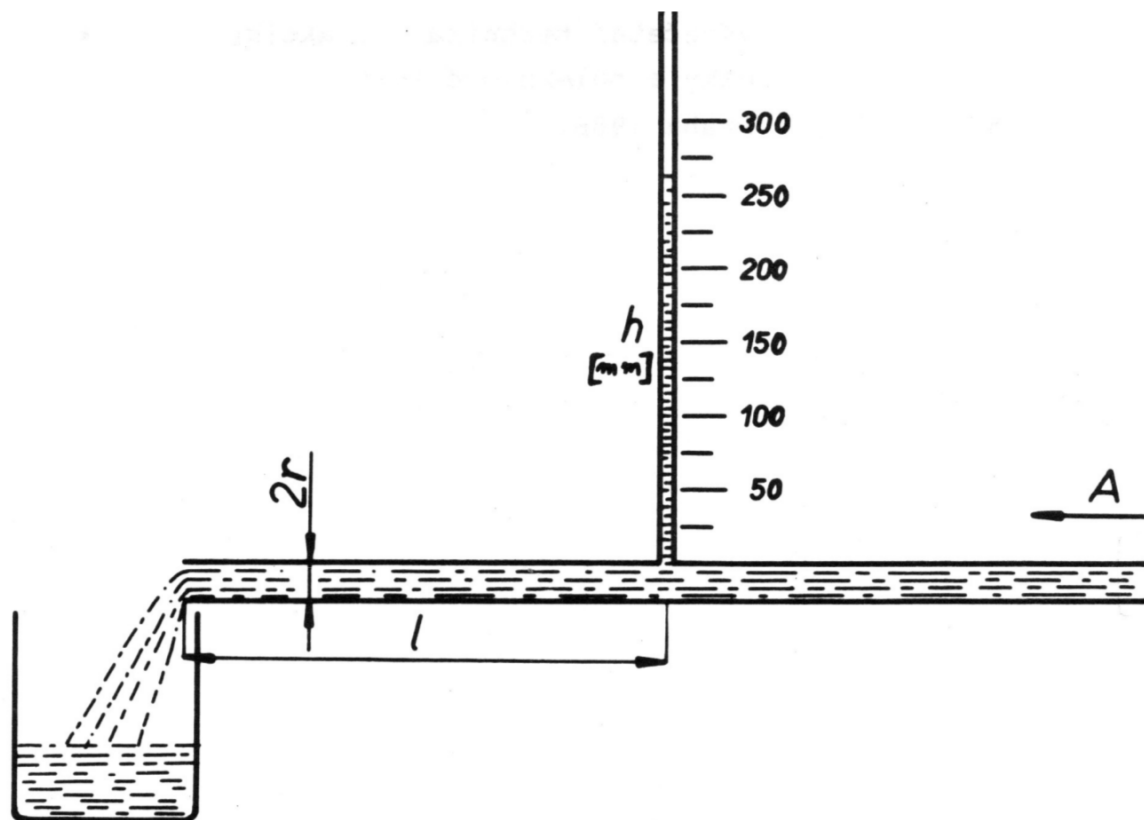
$$Q_v = a \cdot p + b \quad (6)$$

Porovnáním s (5) dostáváme

$$r = \sqrt[4]{\frac{8a\eta l}{\pi}} \quad (7)$$

$$\sigma r = \frac{1}{16} \cdot r \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \eta}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{\sigma l}{l}\right)^2} \quad (8)$$

¹Úbytek statického tlaku značíme p , zatímco σp značíme jeho standardní odchylku.



Obrázek 1: Náčrt použité aparatury (převzato z [1])

Parametr b zavádíme kvůli systematické chybě způsobené kapilárními jevy v manometrické trubici. Výška sloupce vody v (3) neodpovídá přesně úbytku tlaku. V jedné z trubic dosahovala výška sloupce při nulovém průtoku až 1 cm.

K rozlišení laminárního a turbulentního proudění se používá Reynoldsovo číslo definované vztahem[1]

$$Re = \frac{r \rho v_s}{\eta}, \quad (9)$$

kde v_s je střední rychlost proudění v průřezu trubice. Zřejmě platí $Q_v = \pi r^2 v_s$. Po dosazení za v_s do (9) dostáváme Reynoldsovo číslo a jeho chybu²

$$Re = \frac{Q_v \cdot \rho}{r \cdot \pi \cdot \eta} \quad (10)$$

$$\sigma Re = Re \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma Q_v}{Q_v}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \rho}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{\sigma r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \eta}{\eta}\right)^2} \quad (11)$$

Pokud je hodnota Reynoldsova čísla nižší než kritická hodnota (přibližně 2000 [1]), jedná se o laminární proudění. V rozmezí přibližně 1000–2000 [1] je proudění nestabilní, to se projeví vysokým rozptylem naměřených hodnot h v této oblasti. Pro hodnoty vyšší než 2000 je již proudění trvale turbulentní.

Zavedeme součinitel odporu trubice k a definujeme ho vztahem[1]

$$p = k \cdot \frac{l}{r} \cdot \frac{1}{2} \rho v_s^2 \quad (12)$$

Po úpravě a dosazení za v_s dostáváme

²za r dosazujeme opravený poloměr z (7)

$$k = 2\pi^2 \cdot \frac{p \cdot r^5}{l \cdot \rho \cdot Q_v^2} \quad (13)$$

$$\sigma k = k \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma p}{p}\right)^2 + \left(5\frac{\sigma r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\sigma l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\sigma \rho}{\rho}\right)^2 + \left(2\frac{\sigma Q_v}{Q_v}\right)^2} \quad (14)$$

Porovnáním (5), (12) a (9) dostaneme pro laminární proudění

$$k = \frac{16}{Re} \quad (15)$$

Pro turbulentní proudění se uvádí experimentálně zjištěná závislost[1]

$$k \approx \frac{0,133}{\sqrt[4]{Re}} \quad (16)$$

Podmínky a měřicí přístroje

Teplotu vody jsme změřili rtuťovým teploměrem. Vzhledem k možnému chladnutí vody během průběhu experimentu odhadujeme standardní odchylku na 1°C . Teplota vody byla tedy $(27 \pm 1)^\circ\text{C}$.

Dynamická viskozita vody je při této teplotě $\eta = (0,85 \pm 0,05) \text{ mPa}\cdot\text{s}$ [3].

Hustota vody je při této teplotě $\rho = (996 \pm 5) \cdot \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ [3].

Tíhové zrychlení v Praze zaokrouhlíme na $g = (9,81 \pm 0,01) \cdot \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ [4].

Výšku sloupce vody v manometrické trubici jsme měřili pravítkem s nejmenším dílkem 1 mm. Standardní odchylku výšky sloupce odhadujeme v případě, kdy hladina nekolísá, na $\sigma h = 1 \text{ mm}$ a v případě, kdy hladina kolísá, uvažujeme odchylku jako maximální změnu během daného měření.

Délku l (viz obr. 1) jsme měřili metrem s nejmenším dílkem 1 mm. Kvůli šířce manometrické trubice však odhadujeme standardní odchylku $\sigma l = 2 \text{ mm}$.

Průměr trubic r jsme měřili plastovým posuvným měřítkem, poloměr jsme určili jako polovinu průměru. Za standardní odchylku poloměru považujeme $\sigma r = 0,1 \text{ mm}$.

Objem vytečené vody jsme měřili odměrnými válci s nejmenšími dílky 0,2 ml, 0,5 ml, 1 ml a 2 ml. Za standardní odchylku považujeme vždy nejmenší dílek.

Dobu výtoku jsme měřili stopkami s poslední zobrazenou číslicí odpovídající 0,1 s. Měření jsme prováděli tím způsobem, že při určitém čase na stopkách jsme se snažili odejmout odměrný válec od ústí trubice. Tento postup s sebou nese zřejmou nepřesnost, proto považujeme standardní odchylku doby výtoku $\sigma t = 0,5 \text{ s}$. Tato odchylka je stejná pro všechny měření času.

Výsledky měření

Měření jsme provedli pro tři trubice (A, B, C) o různých poloměrech, viz tabulka 1. Změřené hodnoty h , V , a t a z nich pomocí (3) a (1) vypočteny p a Q_v s odchylkami podle (4) a (2) resp. jsou uvedeny v tabulkách 2, 3 a 4. Závislost $Q_v = Q_v(p)$ je vynesena do grafu na obrázku 2. Nařítované hodnoty parametrů v (6) a poloměry trubic jsou uvedeny v tabulce 5, viz diskuze.

trubice	r [mm]	l [cm]
A	$1,2 \pm 0,1$	$25,0 \pm 0,2$
B	$1,5 \pm 0,1$	$24,8 \pm 0,2$
C	$2,4 \pm 0,1$	$20,0 \pm 0,2$

Tabulka 1: Měřené trubice, jejich poloměry r a délky l

Hodnoty Re a k vypočítané pomocí (10) a (13) a jejich odchylky pomocí (11) a (14) resp. pro každé měření jsou uvedeny v tabulkách 6, 7 a 8. Závislost $k(Re)$ je spolu s teoretickou pro laminární (15) a turbulentní (16) vynesena do grafu 3. V grafu není nakreslena jedna hodnota trubice C ($k = 1,1$).

h [cm]	V [ml]	t [s]	p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]
5,9 ± 0,1	8,0 ± 0,2	9	577 ± 11	0,89 ± 0,05
8,1 ± 0,1	9,4 ± 0,2	7	792 ± 11	1,34 ± 0,10
11,0 ± 0,1	24,0 ± 0,5	14	1076 ± 12	1,71 ± 0,07
12,0 ± 0,1	19,0 ± 0,5	10	1174 ± 12	1,90 ± 0,11
12,8 ± 0,1	23,5 ± 0,5	12	1252 ± 12	1,96 ± 0,10
13,8 ± 0,1	43 ± 1	20	1350 ± 12	2,15 ± 0,08
14,8 ± 0,1	48 ± 1	20	1447 ± 13	2,40 ± 0,08
15,8 ± 0,1	41 ± 1	16	1545 ± 13	2,56 ± 0,10
16,9 ± 0,1	39 ± 1	14	1653 ± 13	2,79 ± 0,13
17,8 ± 0,1	38 ± 1	13	1741 ± 14	2,92 ± 0,14
18,8 ± 0,1	43 ± 1	14	1839 ± 14	3,07 ± 0,14
20,0 ± 0,1	38 ± 1	12	1956 ± 14	3,17 ± 0,16
21,1 ± 0,1	38 ± 1	11	2063 ± 15	3,45 ± 0,19
22,1 ± 0,1	35 ± 1	10	2161 ± 15	3,50 ± 0,21
23,4 ± 0,1	41 ± 1	11	2288 ± 16	3,73 ± 0,20
24,9 ± 0,1	41 ± 1	10	2435 ± 16	4,10 ± 0,23
26,4 ± 0,1	42 ± 1	10	2582 ± 17	4,20 ± 0,24

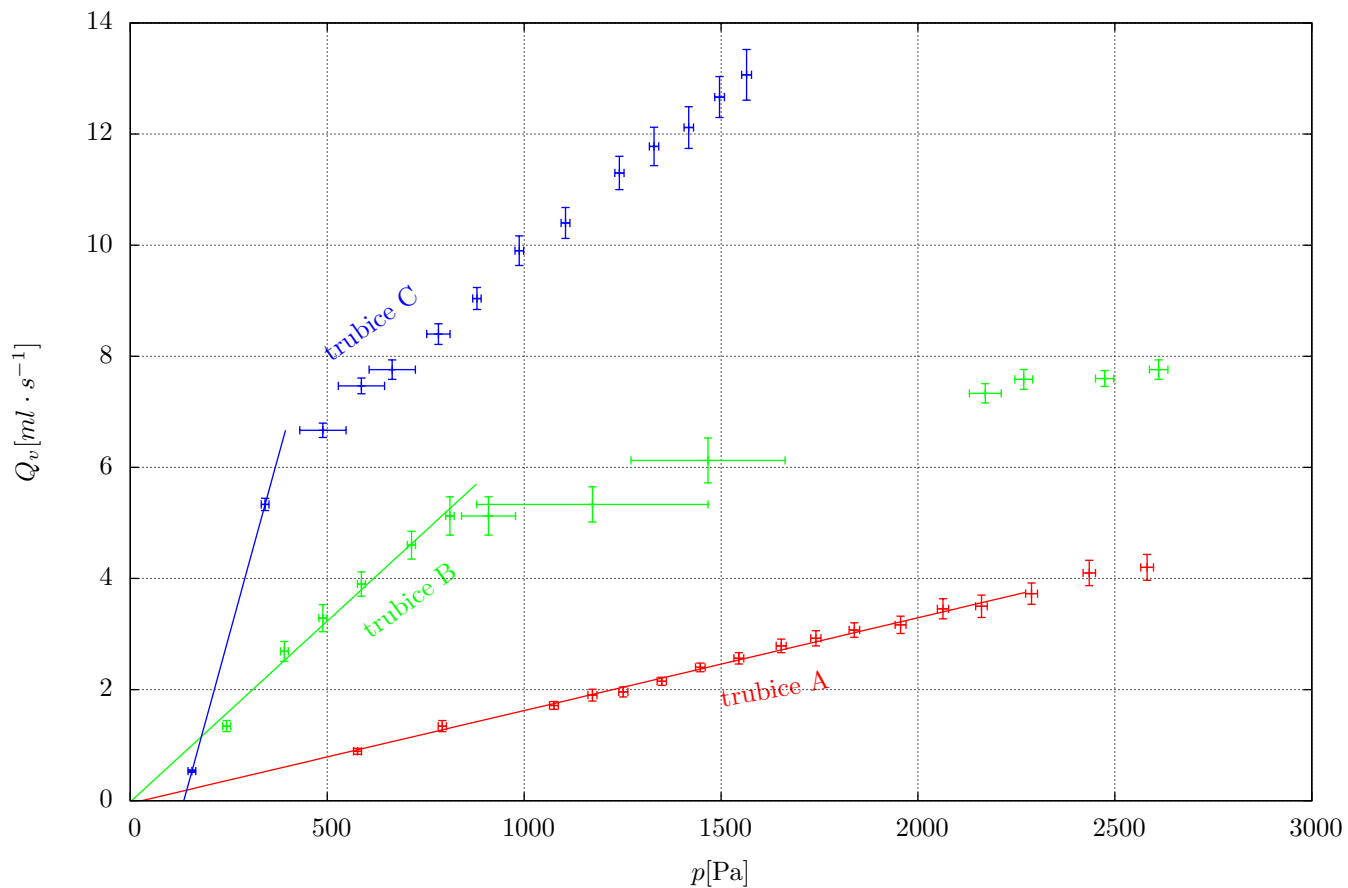
Tabulka 2: Naměřené hodnoty pro trubicí A

h [cm]	V [ml]	t [s]	p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]
2,5 ± 0,1	9,4 ± 0,2	7	244 ± 10	1,34 ± 0,10
4,0 ± 0,1	21,5 ± 0,5	8	391 ± 10	2,69 ± 0,18
5,0 ± 0,1	23,0 ± 0,5	7	489 ± 11	3,29 ± 0,25
6,0 ± 0,1	39 ± 1	10	587 ± 11	3,90 ± 0,22
7,3 ± 0,1	46 ± 1	10	714 ± 11	4,60 ± 0,26
8,3 ± 0,1	41 ± 1	8	812 ± 11	5,13 ± 0,35
9,3 ± 0,7	41 ± 1	8	909 ± 69	5,13 ± 0,35
12 ± 3	48 ± 1	9	1170 ± 300	5,33 ± 0,32
15 ± 2	49 ± 1	8	1470 ± 200	6,13 ± 0,40
22,2 ± 0,4	176 ± 2	24	2171 ± 41	7,33 ± 0,18
23,2 ± 0,2	182 ± 2	24	2269 ± 23	7,58 ± 0,18
25,3 ± 0,2	228 ± 2	30	2474 ± 24	7,60 ± 0,15
26,7 ± 0,2	194 ± 2	25	2611 ± 24	7,76 ± 0,18

Tabulka 3: Naměřené hodnoty pro trubicí B

h [cm]	V [ml]	t [s]	p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]
1,6 ± 0,1	8,0 ± 0,2	15	156 ± 10	0,53 ± 0,02
3,5 ± 0,1	160 ± 2	30	342 ± 10	5,33 ± 0,12
5,0 ± 0,6	200 ± 2	30	489 ± 59	6,67 ± 0,13
6,0 ± 0,6	224 ± 2	30	587 ± 59	7,47 ± 0,15
6,8 ± 0,6	194 ± 2	25	665 ± 59	7,76 ± 0,18
8,0 ± 0,3	210 ± 2	25	782 ± 30	8,40 ± 0,19
9,0 ± 0,1	226 ± 2	25	880 ± 11	9,04 ± 0,20
10,1 ± 0,1	198 ± 2	20	988 ± 11	9,90 ± 0,27
11,3 ± 0,1	208 ± 2	20	1105 ± 12	10,40 ± 0,28
12,7 ± 0,1	226 ± 2	20	1242 ± 12	11,30 ± 0,30
13,6 ± 0,1	212 ± 2	18	1330 ± 12	11,78 ± 0,35
14,5 ± 0,1	206 ± 2	17	1418 ± 13	12,12 ± 0,38
15,3 ± 0,1	228 ± 2	18	1496 ± 13	12,67 ± 0,37
16,0 ± 0,1	196 ± 2	15	1565 ± 13	13,07 ± 0,46

Tabulka 4: Naměřené hodnoty pro trubicí C

Obrázek 2: Závislost objemového průtoku na úbytku statického tlaku na vyšetřované délce trubice l

trubice	a [$10^{-3} \cdot \text{ml} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$]	b [$\text{ml} \cdot \text{s}^{-1}$]	r [mm]
A	$1,67 \pm 0,03$	$-0,05 \pm 0,05$	$0,975 \pm 0,004$
B	$6,508 \pm 0,001$	$0,0 \pm 0,3$	$1,367 \pm 0,006$
C	26 ± 5	$-3,5 \pm 1,0$	$1,83 \pm 0,03$

Tabulka 5: Nafitované parametry a , b a poloměry trubic

p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]	Re	k
577 ± 11	0,89 ± 0,05	340 ± 29	0,051 ± 0,007
792 ± 11	1,34 ± 0,10	514 ± 49	0,031 ± 0,005
1076 ± 12	1,71 ± 0,07	656 ± 48	0,026 ± 0,003
1174 ± 12	1,90 ± 0,11	727 ± 60	0,023 ± 0,003
1252 ± 12	1,96 ± 0,10	749 ± 57	0,023 ± 0,003
1350 ± 12	2,15 ± 0,08	822 ± 57	0,020 ± 0,002
1447 ± 13	2,40 ± 0,08	918 ± 62	0,018 ± 0,002
1545 ± 13	2,56 ± 0,10	980 ± 70	0,016 ± 0,002
1653 ± 13	2,79 ± 0,13	1066 ± 79	0,015 ± 0,002
1741 ± 14	2,92 ± 0,14	1118 ± 85	0,014 ± 0,002
1839 ± 14	3,07 ± 0,14	1175 ± 86	0,014 ± 0,002
1956 ± 14	3,17 ± 0,16	1211 ± 94	0,014 ± 0,002
2063 ± 15	3,45 ± 0,19	1321 ± 105	0,012 ± 0,002
2161 ± 15	3,50 ± 0,21	1339 ± 111	0,012 ± 0,002
2288 ± 16	3,73 ± 0,20	1426 ± 112	0,012 ± 0,002
2435 ± 16	4,10 ± 0,23	1568 ± 128	0,010 ± 0,002
2582 ± 17	4,20 ± 0,24	1607 ± 131	0,010 ± 0,002

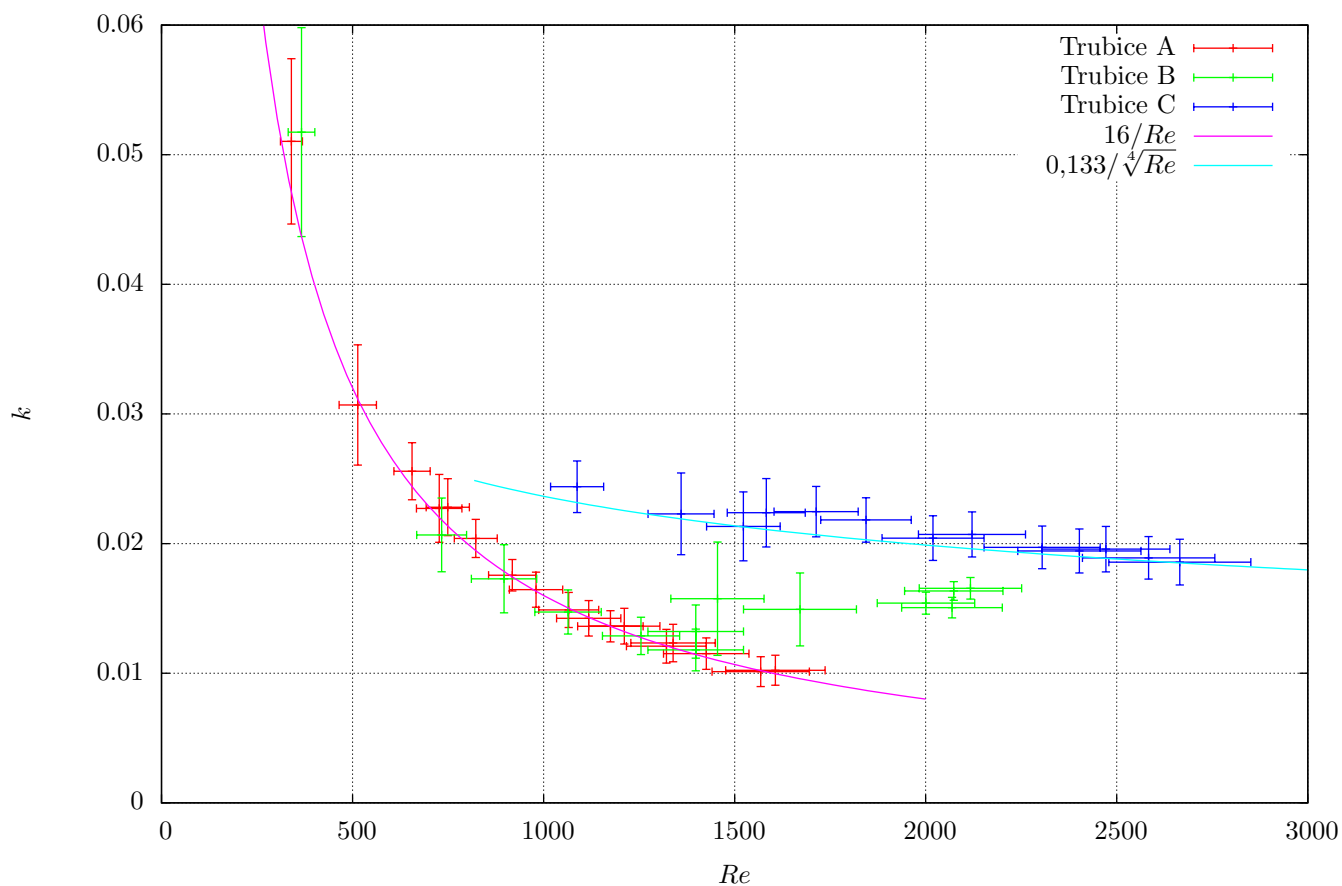
Tabulka 6: Hodnoty Re a k pro trubicí A

p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]	Re	k
244 ± 10	1,34 ± 0,10	366 ± 35	0,052 ± 0,008
391 ± 10	2,69 ± 0,18	733 ± 66	0,021 ± 0,003
489 ± 11	3,29 ± 0,25	896 ± 86	0,015 ± 0,002
587 ± 11	3,90 ± 0,22	1064 ± 101	0,015 ± 0,002
714 ± 11	4,60 ± 0,26	1255 ± 101	0,013 ± 0,002
812 ± 11	5,13 ± 0,35	1398 ± 125	0,012 ± 0,002
909 ± 69	5,13 ± 0,35	1398 ± 125	0,013 ± 0,002
1170 ± 300	5,33 ± 0,32	1455 ± 122	0,016 ± 0,005
1470 ± 200	6,13 ± 0,40	1671 ± 148	0,015 ± 0,003
2171 ± 41	7,33 ± 0,18	2001 ± 128	0,015 ± 0,001
2269 ± 23	7,58 ± 0,18	2069 ± 132	0,015 ± 0,001
2474 ± 24	7,60 ± 0,15	2073 ± 129	0,016 ± 0,001
2611 ± 24	7,76 ± 0,18	2117 ± 134	0,017 ± 0,001

Tabulka 7: Hodnoty Re a k pro trubicí B

p [Pa]	Q_v [ml.s ⁻¹]	Re	k
156 ± 10	0,53 ± 0,02	109 ± 8	1,11 ± 0,14
342 ± 10	5,33 ± 0,12	1088 ± 70	0,024 ± 0,002
489 ± 59	6,67 ± 0,13	1360 ± 87	0,022 ± 0,004
587 ± 59	7,47 ± 0,15	1523 ± 97	0,021 ± 0,003
665 ± 59	7,76 ± 0,18	1583 ± 102	0,022 ± 0,003
782 ± 30	8,40 ± 0,19	1713 ± 111	0,022 ± 0,002
880 ± 11	9,04 ± 0,20	1844 ± 119	0,022 ± 0,002
988 ± 11	9,90 ± 0,27	2019 ± 134	0,020 ± 0,002
1105 ± 12	10,40 ± 0,28	2121 ± 141	0,021 ± 0,002
1242 ± 12	11,30 ± 0,30	2305 ± 152	0,020 ± 0,002
1330 ± 12	11,78 ± 0,35	2402 ± 161	0,020 ± 0,002
1418 ± 13	12,12 ± 0,38	2472 ± 168	0,020 ± 0,002
1496 ± 13	12,67 ± 0,37	2584 ± 174	0,019 ± 0,002
1565 ± 13	13,07 ± 0,46	2665 ± 186	0,019 ± 0,002

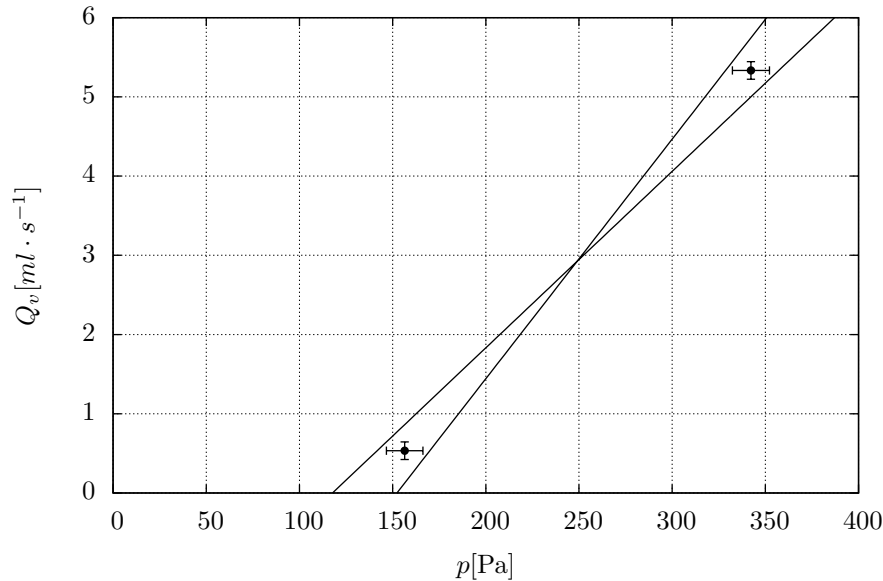
Tabulka 8: Hodnoty k a Re pro trubicí C



Obrázek 3: Závislost součinitele odporu trubice k na Reynoldsově čísle Re . Zobrazeny jsou i teoretické závislosti pro laminární a turbulentní proudění.

Diskuze

Trubice C měla jen velmi malou oblast laminárního proudění, při výšce vodního sloupce 4,5 cm již bylo proudění nestabilní a hladina velmi kolísala. Pro velmi malé tlaky byl naopak průtok téměř neměřitelný. V oblasti laminárního proudění jsme tedy provedli jen dvě měření a při fitování závislosti (6) jsme měli k dispozici stejný počet bodů jako fitovaných parametrů. Navíc první ze dvou měření ($h = 1,6$ cm) mohlo být zatíženo hrubou chybou, voda vytékala částečně po vnějších stěnách trubice a je možné, že se do odměrného válce nepodařila odchytnout všechna. Graf 3 navíc napovídá, že druhé z těchto dvou měření ($Re = 1088$, $k = 0.024$) již proběhlo při turbulentním proudění, přestože hladina v manometrické trubici ještě nekolísala. Vzhledem k těmto skutečnostem odchylku parametrů mírně nadhodnotíme a určíme s ohledem na odchylky obou bodů (viz obrázek 4).



Obrázek 4: První dva změřené body v oblasti laminárního proudění pro trubici C. Dvě přímky $Q_v = (a + \sigma a) \cdot p + (b - \sigma b)$, $Q_v = (a - \sigma a) \cdot p + (b + \sigma b)$ ilustrují odhadnutou odchylku parametrů a a b .

Opravené poloměry se s těmi naměřenými příliš neshodují, naměřené jsou vždy vyšší. Jedním možným vysvětlením je neodhalená systematická chyba při měření posuvným měřítkem. Poloměr jsme měřili tím způsobem, že jsme dovnitř trubice strčili pacičky měřítka a roztáhli je na celý průměr trubice. Posuvné měřítko bylo plastové, takže je možné, že jsme působili příliš velkou silou, pacičky se deformovaly a naměřili jsme vyšší hodnotu.

Závislost $k(Re)$ vyšla podle očekávání. Trubice A měla nejmenší poloměr, při všech měřeních v ní voda proudila laminárně a závislost přesně odpovídá teoretické. U trubice C proběhly všechny měření kromě prvních dvou při turbulentním proudění a závislost téměř přesně odpovídá teoretické pro turbulentní proudění. V trubici B bylo nejdříve laminární proudění a přibližně při $Re = 1300$ začalo být nestabilní. Pro $Re > 2000$ bylo již proudění trvale turbulentní. Skutečně hodnoty k nejdříve odpovídají křivce pro laminární proudění a poté se začínají blížit té pro turbulentní.

Závěr

Poloměry trubic jsme určili ze směrnice závislosti objemového průtoku na úbytku statického tlaku při laminárním proudění takto:

- Trubice A: $r = (0,975 \pm 0,004)$ mm
- Trubice B: $r = (1,367 \pm 0,006)$ mm
- Trubice C: $r = (1,83 \pm 0,03)$ mm

Od hodnot změřených posuvným měřítkem se značně liší.

Ve všech trubicích začalo být proudění nestabilní při hodnotě Reynoldsova čísla přibližně 1400–1500. Pro hodnoty menší bylo laminární.

Reference

- [1] Studium proudění viskózní kapaliny trubicemi kruhového průřezu;. Studijní text pro fyzikální praktikum I MFF UK [online] [cit. 21. 3. 2016] Dostupné z http://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_103.pdf.
- [2] Brož J, et al. Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha; 1967.
- [3] Viscopedia — A free encyclopedia for viscosity;. [cit. 21. 3. 2016] Dostupné z <http://www.viscopedia.com/viscosity-tables/substances/water/>.
- [4] Pavlis NK, Holmes SA, Kenyon SC, Factor JK. The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008); 2012.