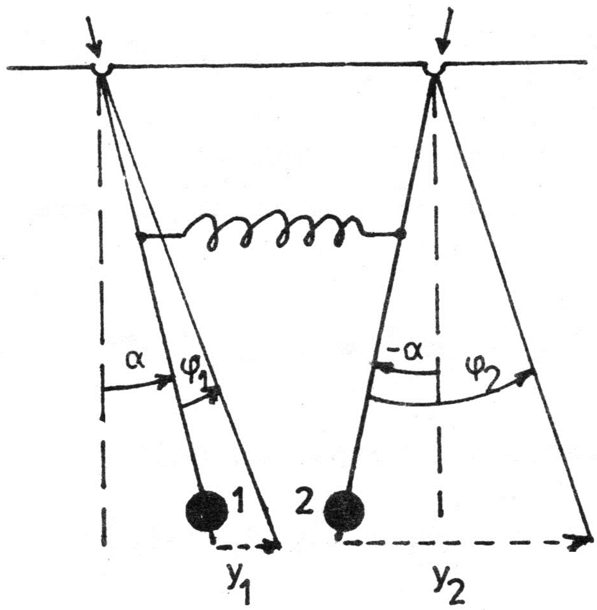
VII. Studium kmitů vázaných oscilátorů

Vázané mechanické oscilátory

Mějme dvě stejná fyzická kyvadla 1, 2 vázaná slabou pružnou vazbou (obr. 1), kyvadla kývají pouze v rovině nákresny. Vazba může být tvořena i bez mechanického působení např. pokud jsou tělesa kyvadel zhotovena z permanentních magnetů. Předpokládáme, že výchylky kyvadel jsou malé a tření v uložení závěsů kyvadel zanedbáváme. Bez vazby obě kyvadla vykonávají harmonické kmity s kruhovou frekvencí ω_0

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I}} \ , \qquad (1)$$

kde D je direkční moment a I moment setrvačnosti kyvadla.



Obr. 1: Vázaná kyvadla

Vazba způsobí, že v klidové poloze jsou obě kyvadla otočena vůči vertikálnímu směru o úhel α proti sobě. V klidové poloze vymizí výsledný moment vnějších sil jak pro kyvadlo 1, tak i pro kyvadlo 2. Je-li D direkční moment kyvadla 1 resp. 2 a M_0 moment vnějších sil, kterým pružina působí na kyvadlo 1 resp. 2, pak platí v klidové poloze

$$D\alpha = M_0 \ . \qquad (2)$$

Vychýlíme-li kyvadlo 1 o úhel φ_1 a kyvadlo 2 o úhel φ_2 (obr. 1), pak působí na kyvadlo 1 moment vnějších sil [3]

$$-D(\varphi_1 + \alpha) + M_0 + D^*(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_1 - D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \ , \qquad (3)$$

kde člen $M_0 + D^*(\varphi_2 - \varphi_1)$ je příspěvek k momentu vnějších sil, který způsobuje pružina, a D^* je direkční moment pružiny. Pro kyvadlo 2 analogicky:

$$-D(\varphi_2 - \alpha) - M_0 - D^*(\varphi_2 - \varphi_1) = -D\varphi_2 + D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \ . \qquad (4)$$

Pohybové rovnice pro kyvadlo 1 resp. 2 mají pak tvar:

$$I\ddot{\varphi}_1 = -D\varphi_1 - D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \qquad (5)$$

$$I\ddot{\varphi}_2 = -D\varphi_2 + D^*(\varphi_1 - \varphi_2) \ . \qquad (6)$$

Při zavedení substituce $\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ a $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ mají pohybové rovnice tvar

$$I\ddot{\psi}_1 = -D\psi_1 \qquad (7)$$

$$I\ddot{\psi}_2 = -(D + 2D^*)\psi_2 \qquad (8)$$

a jejich řešením je

$$\psi_1 = a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t \tag{9}$$

$$\psi_2 = a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t \ , \tag{10}$$

kde $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{D}{I}}$ a $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{D+2D^*}{I}}$ a a_1, a_2, b_1, b_2 jsou integrační konstanty. Pro úhly φ_1 a φ_2 pak platí

$$\varphi_1 = \left(a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t + a_2 \cos\omega_2 t + b_2 \sin\omega_2 t\right) \tag{11}$$

$$\varphi_2 = \left(a_1 \cos\omega_1 t + b_1 \sin\omega_1 t - a_2 \cos\omega_2 t - b_2 \sin\omega_2 t\right) \tag{12}$$

Integrační konstanty určíme z počátečních podmínek pro tři různé případy. Předpokládejme malé výchylky y kyvadel z rovnovážné polohy, kdy platí $y \sim \varphi$.

1. Pro počáteční podmínky $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ z rovnic (11) a (12) plyne $a_1 = A$ a $b_1 = a_2 = b_2 = 0$, tedy

$$\varphi_1 = \varphi_2 = A\cos\omega_1 t \tag{13}$$

Obě kyvadla se pohybují tak, jako by vazba mezi nimi nebyla realizována.

2. Pro $\varphi_1(0) = A$, $\varphi_2(0) = -A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ dostaneme $a_2 = A$ a $a_1 = b_1 = b_2 = 0$,

$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A\cos\omega_2 t \tag{14}$$

Obě kyvadla kmitají se stejnou amplitudou a stejnou frekvencí ω_2, ale s fázovým posunem π.

3. Pro $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ z rovnic (11) a (12) plyne: $a_1 = -a_2 = A/2$ a $b_1 = b_2 = 0$, tedy

$$\varphi_1 = \frac{A}{2}\left(\cos\omega_1 t - \cos\omega_2 t\right) = A\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right] \ , \tag{15}$$

$$\varphi_2 = \frac{A}{2}\left(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t\right) = A\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t\right]\cos\left[\frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1)t\right] \ . \tag{16}$$

Je-li vazba slabá, tj. ω_2 je jen o málo větší než ω_1, lze rovnice (15) a (16) interpretovat tak, že obě kyvadla kmitají se stejnou frekvencí

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \tag{17}$$

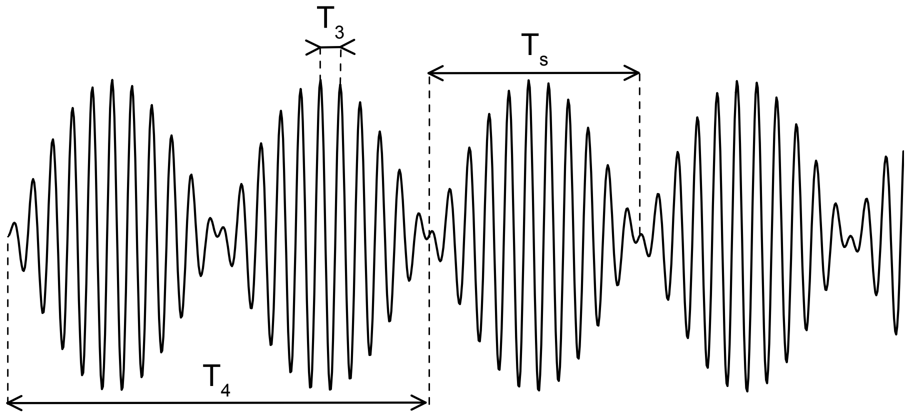
a amplitudy jejich pohybu $A\sin\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ resp. $A\cos\frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)t$ se s časem periodicky mění s frekvencí

$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1) \ . \tag{18}$$

Amplituda pohybu kyvadla 1 je pak nulová pro časy $t = nT_s$ (n = 0, 1, 2...), kde $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_s = \pi$ (obr. 2). Pro úhlové frekvence ω_3 a ω_4 tedy platí vztahy

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{T_3} \ , \tag{19}$$

$$\omega_4 = \frac{\pi}{T_s} \, . \tag{20}$$



Obr. 2: Časová závislost výchylky kyvadla pro počáteční podmínky $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$.

Stupeň vazby κ je definován jako

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*} \ . \tag{21}$$

Porovnáním se zavedením kruhových frekvencí ω_1 a ω_2 dostaneme

$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2} \ . \tag{22}$$

Literatura:

[1] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967, st. 2.6.3.

[2] J. Brož a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1983, st. 2.5.3.

[3] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL, Praha 1981, kap. 3.1.9