Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

Fyzikální praktikum ...

Úloha č. ....

Název úlohy: ....

Jméno: .... Obor: FOF FAF FMUZV

Datum měření: .... Datum odevzdání: ....

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Práce při měření	0 - 5	
Teoretická část	0 - 1	
Výsledky měření	0 - 8	
Diskuse výsledků	0 - 4	
Závěr	0 - 1	
Seznam použité literatury	0 - 1	
Celkem	max. 20	

Posuzoval:................................. dne: ....

Pracovní úkoly

1. Změřte dobu kmitu T_0 dvou stejných nevázaných fyzických kyvadel.
2. Změřte doby kmitů T_i dvou stejných fyzických kyvadel vázaných slabou pružnou vazbou vypouštěných z klidu při počátečních podmínkách
   (a) $y_1 = y_2 = A \ldots$ doba kmitu T_1
   (b) $y_1 = -y_2 = A \ldots$ doba kmitu T_2
   (c) $y_1 = 0, y_2 = A$
      i. doba kmitu $T3$
      ii. doba $T_S/2$, za kterou dojde k maximální výměně energie mezi kyvadly
3. Vypočtěte kruhové frekvene ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 odpovídající dobám T_0, T_1, T_2, T_3 a T_S, ověřte měřením platnost vztahů odvozených pro ω_3 a ω_4.
4. Vypočtěte stupeň vazby κ.
5. Pro jednu pružinu změřte závislost stupně vazby na vzdálenosti zavěšení pružiny od uložení závěsu kyvadla a graficky znázorněte.

Teoretická část

Budeme studovat kmity dvou fyzických kyvadel vázaných slabou pružinou upevněnou ve vzdálenosti l od uložení závěsů kyvadel (viz obrázek 1). Po upevnění pružiny se rovnovážná poloha obou kyvadel vychýlí ze svislého směru o úhel α směrem k sobě. Okamžitou výchylku $\varphi_1(t)$ resp. $\varphi_2(t)$ uvažujeme od této nové rovnovážné polohy.

Po vyřešení pohybových rovnic dostáváme pro malé výchylky [1]

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= a_1\cos(\omega_1 t) + b_1\sin(\omega_1 t) + a_2\cos(\omega_2 t) + b_2\sin(\omega_2 t)\\ \varphi_2(t) &= a_1\cos(\omega_1 t) + b_1\sin(\omega_1 t) - a_2\cos(\omega_2 t) - b_2\sin(\omega_2 t)\,,\end{aligned} \tag{1}$$

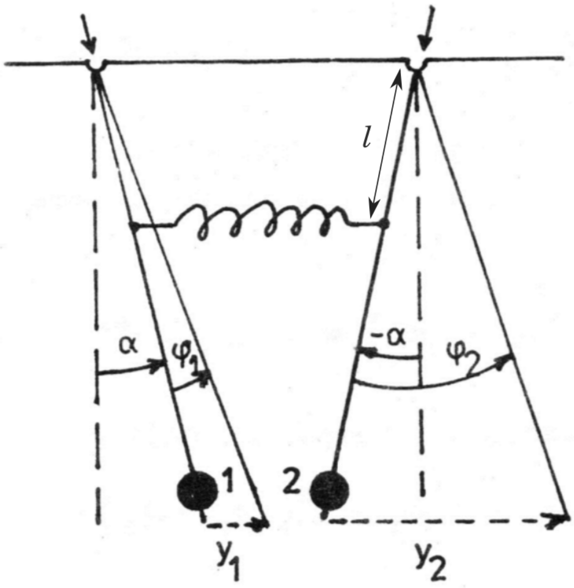
kde a_1, b_1, a_2 a b_2 jsou integrační konstanty, které určíme z počátečních podmínek. Úhlové frekvence ω_1 a ω_2 můžeme vypočítat podle vzorce [1]

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{D}{I}}\\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{D+2D^*}{I}}\,,\end{aligned} \tag{2}$$

kde I je moment setrvačnosti kyvadla, D je direkční moment kyvadla a D^* je direkční moment pružiny. Žádnou z těchto veličin však nebudeme měřit a úhlové rychlosti ω_1 a ω_2 změříme přímo při vhodně zvolených počátečních podmínkách.

Pro různé počáteční podmínky vychází:

1. Pro $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = A$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ dostáváme
$$\varphi_1 = \varphi_2 = A\cos(\omega_1 t)\,. \tag{3}$$
2. Pro $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = A$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ dostáváme
$$\varphi_1 = -\varphi_2 = A\cos(\omega_2 t)\,. \tag{4}$$
3. Pro $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ dostáváme
$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A\sin(\omega_4 t)\cdot\sin(\omega_3 t)\\ \varphi_2 &= A\cos(\omega_4 t)\cdot\cos(\omega_3 t)\,,\end{aligned} \tag{5}$$



Obrázek 1: Nákres experimentu (přezato z [1])

kde

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{1}{2}(\omega_2 + \omega_1) \\ \omega_4 &= \frac{1}{2}(\omega_2 - \omega_1)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Pokud je vazba slabá, je ω_2 jen o málo větší než ω_1 a pohyb kyvadel můžeme považovat za harmonický s úhlovou frekvencí ω_3 a v čase proměnnou amplitudou $A\sin(\omega_4 t)$ ($A\cos(\omega_4 t)$ pro druhé kyvadlo).

Pro úhlové rychlosti ω_1, ω_2 a ω_3 označíme odpovídající periody T_1, T_2 a T_3 resp. Dále zavedeme dobu T_S jako polovinu periody odpovídající ω_4. Platí tedy vztahy

$$\begin{aligned} T_1\omega_1 &= 2\pi \qquad & T_2\omega_2 &= 2\pi \\ T_3\omega_3 &= 2\pi \qquad & T_S\omega_4 &= \pi \end{aligned} \tag{7}$$

Standardní odchylku úhlové rychlosti počítáme vždy jako $\sigma_\omega = \omega \cdot \sigma_T / T$.
S nahlédnutím do (5) je T_S zřejmě doba mezi dvěma časy, kdy je amplituda kyvadla nulová (viz obrázek 2).
Stupeň vazby κ je definován jako [1]

$$\kappa = \frac{D^*}{D + D^*}\,. \tag{8}$$

S využitím (2) můžeme (8) upravit na

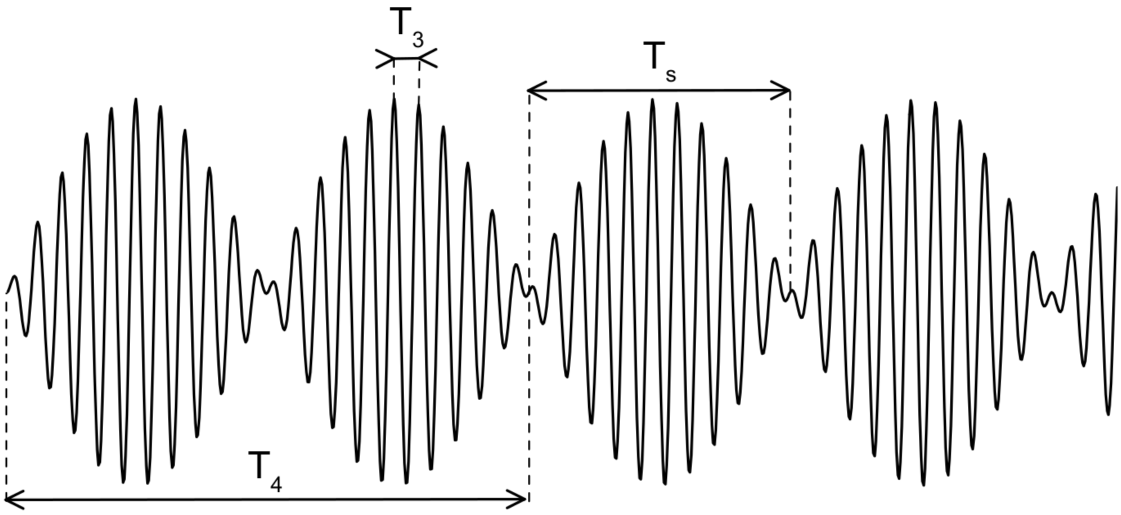
$$\kappa = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}\,. \tag{9}$$

Standardní odchylku stupně vazby σ_κ v závislosti na odchylkách σ_{ω_1} a σ_{ω_2} určíme jako

$$\sigma_\kappa = \sqrt{\left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_1}\right)^2 \cdot \sigma_{\omega_1}^2 + \left(\frac{\partial\kappa}{\partial\omega_2}\right)^2 \cdot \sigma_{\omega_2}^2} = \frac{4\omega_1^2\omega_2^2}{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}\sqrt{\left(\frac{\sigma_{\omega_1}}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\omega_2}}{\omega_2}\right)^2} \tag{10}$$

Měřící přístroje

Vzdálenost upevnění pružiny od uložení závěsů kyvadla l jsme měřili svinovacím metrem s nejmenším dílkem 1 mm. Standardní odchylku σ_l odhadujeme také na 1 mm. Dobu kyvu jsme měřili sonarem, který snímal polohu kyvadla v čase se vzorkovací frekvencí 25 Hz. Výstup jsme zobrazili v programu Logger Lite a odečetli dobu většího počtu kyvů (většinou 9 nebo 10). Standardní odchylku určení času odhadujeme na 0,1 s. Protože jsme odečítali dvě hodnoty od sebe, považujeme standardní odchylku změřeného času za $\sqrt{2}\cdot$ 0,1 s. Pokud jsme měřili



Obrázek 2: Časová závislost výchylky prvního kyvadla φ_1 při počátečních podmínkách $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = A$ a $\dot{\varphi_1}(0) = \dot{\varphi_2}(0) = 0$, pokud zanedbáme tlumení. Závislost φ_2 je oproti φ_1 posunutá o čas $T_S/2$. Doba T_4 je perioda odpovídající úhlové rychlosti ω_4 a platí $T_4 = 2T_S$. (přezato z [1])

dobu n kyvů, považujeme za standardní odchylku $\frac{1}{n}\sqrt{2}{\cdot}0{,}1\,\mathrm{s}$. Uvádíme pouze výsledné časy a jejich odchylky. Co se týče doby T_S, měřili jsme vždy pouze polovinu periody (tedy přímo dobu T_S), protože energické ztráty byly příliš vysoké a po dvou periodách byl již celý systém téměř v klidu. Navíc přesný čas, kdy byla amplituda nulová bylo obtížné přesně určit (viz obrázek 2). Vzhledem k těmto skutečnostem odhadujeme standardní odchylku σ_{T_S} vždy za 0,3 s.

Výsledky měření

Nejdříve jsme změřili periodu obou kyvadel, když nebyly vázány, abychom se ujistili, že skutečně kmitají stejně. Naměřené T_0 a odpovídající $\omega_0 = 2\pi/T_0$ jsou uvedeny v tabulce 1.

kyvadlo	T_0 (s)	ω_0 (s^{-1})
levé	0	0
pravé	0	0

Tabulka 1: Kmity nevázaných kyvadel

Časy T_1, T_2, T_3 a T_S jsme změřili s dvěma pružinami A ($k = 7\,\mathrm{N\,m^{-1}}$) a B ($k = 4\,\mathrm{N\,m^{-1}}$) při $l = (27{,}8 \pm 0{,}1)$ cm. Spolu s odpovídajícími ω_1, ω_2, ω_3 a ω_4 a vypočtenými κ jsou uvedeny v tabulce 2.

pružina	T_1 (s)	ω_1 (s^{-1})	T_2 (s)	ω_2 (s^{-1})	T_3 (s)	ω_3 (s^{-1})	T_S (s)	ω_4 (s^{-1})	κ
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabulka 2: Kmity vázaných kyvadel při různých počátečních podmínkách

S pružinou A jsme navíc změřili T_1 a T_2 pro různé vzdálenosti upevnění pružiny l. Spolu s odpovídajícími ω_1, ω_2 a vypočtenými κ jsou uvedeny v tabulce 3. Závislost $\kappa(l)$ je vynesena do grafu 1.

Diskuze

Závěr

Seznam použité literatury

1. *Studium kmitů vázaných oscilátorů.*

l	T_1 (s)	ω_1 (s^{-1})	T_2 (s)	ω_2 (s^{-1})	κ
XX	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0

Tabulka 3: Kmity vázaných kyvadel při různých počátečních podmínkách

Graf 1: Závislost stupně vazby κ na vzdálenosti upevnění pružiny A od uložení závěsů kyvadel l