XXV. Studium tlumených a nucených kmitů

Tlumené kmity

V přírodě nelze pozorovat netlumené volné kmitání, amplituda kmitů s časem klesá, kmity jsou tlumeny. Působí-li na kmitající těleso tlumící třecí síla úměrná rychlosti pohybu, pohybová rovnice má tvar [1, 2]

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \omega^2 y = 0 \ , \tag{1}$$

kde ω je úhlový kmitočet netlumené soustavy a koeficient δ [s^{-1}] nazýváme konstanta tlumení. Obecným řešením této pohybové rovnice lze napsat ve tvaru

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \ , \tag{2}$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty a pro λ_1 a λ_2 platí

$$\lambda_{12} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \ . \tag{3}$$

Jsou možné tři případy, které si liší podle velikosti tlumení.

Periodické tlumené kmity

Je-li tlumení tak malé, že platí $\delta < \omega$, má diferenciální rovnice tlumených kmitů (1) řešení [1]

$$y = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) \ , \tag{4}$$

a pro vztah mezi úhlovou frekvencí ω vlastních kmitů a konstantou tlumení δ platí vztah

$$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2} \ . \tag{5}$$

Vzniká kmitavý pohyb o stálé frekvenci ω_1; jeho amplituda se zmenšuje s časem podle rovnice

$$A_1 = Ae^{-\delta t} \ . \tag{6}$$

Úhlová frekvence tlumených kmitů ω_1 je menší než vlastní úhlová frekvence ω, kterou by měl oscilátor, kdyby nebyl tlumen. Úhlová frekvence souvisí s dobou kmitu T_1 dle vztahu

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \ . \tag{7}$$

Nucené kmity

Důležitý případ nastane, působí-li na kmitavou soustavu periodická vnější síla. Tato síla nutí soustavu kmitat s kmitočtem vnější síly, který je zpravidla odlišný od vlastního kmitočtu soustavy a soustava tak koná nucené kmity. Uvažujme periodickou vnější sílu sinusového průběhu s kruhovou frekvencí Ω odlišnou od vlastního kmitočtu ω. Pohybová rovnice vynucených kmitů má potom tvar [2]

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + 2\delta m\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + m\omega^2 y = F_0 \sin \Omega t \quad , \tag{8}$$

Úplné řešení nuceného kmitání má tvar

$$y = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0) + A_v \sin(\Omega t + \gamma) \quad , \tag{9}$$

kde A a φ_0 jsou integrační konstanty a A_v a γ jsou konstanty. Výsledný pohyb se tedy skládá z tlumeného pohybu, který by oscilátor konal, kdyby periodicky proměnná vnější síla nepůsobila, a z netlumených harmonických kmitů konstantní amplitudy a konstantního fázového posuvu γ. Amplituda tlumeného kmitání klesá exponenciálně s časem, takže tlumené kmitání za určitou dobu prakticky vymizí. V ustáleném stavu, po uplynutí jisté doby (zakmitávací) zbývají tedy jen netlumené kmity, jejichž frekvence je rovna frekvenci je rovna frekvenci budicí periodické síly.

Při zakmitávání se skládají volné tlumené kmity soustavy s nucenými kmity. Má-li vnější síla kmitočet rovný vlastnímu kmitočtu soustavy, roste amplituda výchylek pozvolna podle exponenciální křivky. Liší-li se oba kmitočty, má skládání složitější průběh, zakmitávání není obecně periodické. Jsou-li oba kmitočty blízké, vzniknou při zakmitávání rázy.

Rezonance

Řešením pohybové rovnic pro nucené kmity dostaneme vztahy [1] pro závislost amplitudy výchylky A a fázového posunutí φ na poměru budící a vlastní frekvence systému Ω/ω.

Pro amplitudu výchylky platí

$$A = \frac{F_0}{m\omega^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\Omega/\omega)^2\right)^2 + 4(\delta/\omega)^2 (\Omega/\omega)^2}} \quad , \tag{10}$$

Při nucených kmitech tedy závisí jak amplituda výchylky a rychlosti, tak i fázové posunutí mezi vnější silou a pohybem jednak na tlumení soustavy, jednak na poměru kmitočtu vnější síly k vlastnímu kmitočtu netlumené soustavy [1]. Výsledky jsou nejlépe patrné z grafického znázornění (obr. 1). Amplituda výchylky dosahuje maxima při určitém kmitočtu. Tento jev se nazývá rezonance, křivkám na obr. 1 rezonanční křivky a kmitočet, při němž nastane největší amplituda výchylky, rezonanční kmitočet. Rezonance nastává, má-li budící síla rezonanční kmitočet.

Rezonance výchylky nastává při nižším kmitočtu než je vlastní kmitočet netlumené soustavy

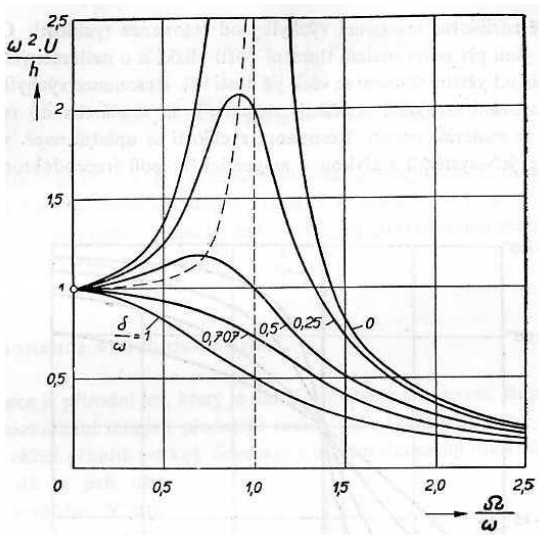
$$\Omega_{res} = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2} \quad . \tag{11}$$

Při srovnání s rovnicí (5) vidíme, že rezonanční kmitočet je nižší než vlastní kmitočet soustavy. Pro různě tlumené soustavy je i rezonanční kmitočet různý, s rostoucím tlumením klesá. Dále se s rostoucím tlumení snižuje amplituda rezonanční výchylky.

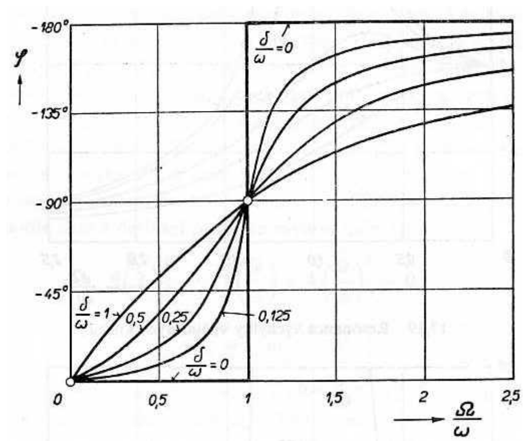
Závislost fázového posunutí na poměru budící a vlastní frekvence systému Ω/ω je popsána vztahem

$$tg\varphi = -\frac{2\delta}{\omega}\frac{\Omega/\omega}{1-(\Omega/\omega)^2} \quad . \tag{12}$$

Fázové poměry při vynucených kmitech jsou znázorněny na obr. 2.



Obr. 1: Rezonance výchylky vynucených kmitů [1].



Obr. 2: Fázové poměry při nucených kmitech [1].

Literatura:

[1] J.B.Slavík a kol.: Základy fysiky I, Nakladatelství ČSAV, Praha 1962

[2] Z. Horák, F. Krupka: Fyzika, SNTL, Praha 1981, kap. 2.2.4