



Metody Obliczeniowe i Planowanie Eksperymentu

Projekt 1 - Zadanie 9 - Wariant 1

Imię i nazwisko
Number albumu
Wydział
Kierunek
Grupa Projektowa

Wojciech Brandt
401 841
Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Mechanika i Budowa Maszyn
CP01

1. Opis eksperymentu

Podmiotem eksperymentu jest zmiana temperatury powietrza w ciągu roku. Od tej temperatury zależy bowiem efektywność instalacji grzewczych wykorzystujących pompę ciepła.

W celu wykonania eksperymentu przeprowadzono pomiary wykorzystując przygotowany program **z09v01.exe**. Zgodnie z zaleceniami zadania, jako zakres pomiarowy eksperymentu głównego wykorzystano 365 dni, lub inaczej $\langle 1; 365 \rangle$. Wyniki pomiarów to temperatura powietrza, podawana w stopniach celsjusza.

- Dostępne w załącznikach są programy, w których znajdują się skrypty użyte podczas generacji danych:
- config.py** Plik konfiguracyjny.
 - custom_approx.py** Moduł zawierający własnoręcznie napisane funkcje aproksymacyjne, oraz funkcje służące do oceny ich przydatności.
 - custom_statistics.py** Moduł zawierający funkcje służące do wyznaczania parametrów statystycznych.
 - final_notebook.ipynb** Zeszyt Jupyter Notebooks, implementujący funkcje z powyżej wymienionych modułów w celu wyznaczania i wymieniania danych.

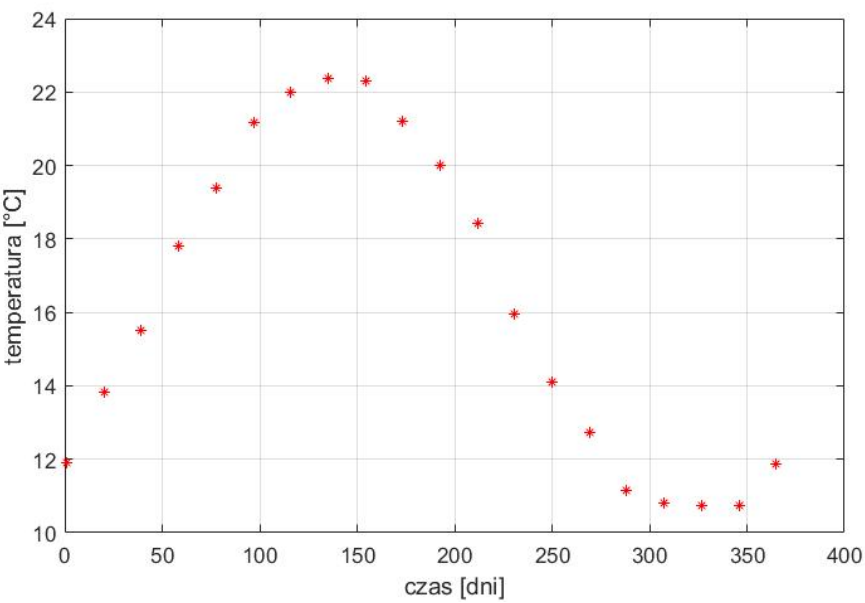
2. Badanie wstępne

2.1. Ogólne zachowanie układu

W celu zbadania zachowania układu przeprowadzono szereg badań, z różnymi zakresami badanymi. Na początek przeprowadzono badania mające na celu uzyskanie wielu punktów w różnych przedziałach czasowych. Ostatecznie w celu zaprezentowania ogólnego działania układu wygenerowano zestaw danych w zalecanym zakresie czasu $\langle 1; 365 \rangle$ dni, generując 20 równo rozłożonych punktów:

Czas [dni]	Temp. [°C]	Czas [dni]	Temp. [°C]	Czas [dni]	Temp. [°C]	Czas [dni]	Temp. [°C]
1	11.8902	20.1578	13.8429	39.3157	15.5230	58.4736	17.8125
77.6315	19.4006	96.7894	21.1582	115.9473	21.9841	135.1052	22.3592
154.2631	22.3124	173.4210	21.1953	192.5789	20.0178	211.7368	18.4292
230.8947	15.9471	250.0526	14.1009	269.2105	12.7434	288.3684	11.1467
307.5263	10.8011	326.6842	10.7493	345.8421	10.7206	365	11.8595

Tablica 1. Otrzymane pomiary do eksperymentu właściwego



Rysunek 1. Wykres danych z tabeli 1

Jak wydać na rys. 1 układ zachowuje się w taki sposób, że jego wykres w czasie wygląda podobnie do wykresu funkcji sinusoidalnej. Na wykresie zaznaczone są punkty pomiarowe otrzymane przy pomiarze (zaznaczone czerwonymi gwiazdkami).

Z tab. 1 i rys. 1 odczytać możemy istotne dane dla eksperymentu właściwego:

- Zakres badany: $\langle 1; 365 \rangle$
- Ilość węzłów: 20
- Lokalne maksimum: $T_{max} = 22.3593 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Lokalne minimum: $T_{min} = 10.7205 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Wartość początkowa: $T_{pocz} = 11.9803 \text{ }^{\circ}\text{C}$
- Wartość końcowa: $T_{kon} = 11.8595 \text{ }^{\circ}\text{C}$

2.2. Parametry statystyczne układu

W celu określenia istotnych parametrów statystycznych pomiaru, wykonano serię prób pomiarowych w tym samym punkcie czasowym. Powtórzeń wykonano 30, obrany punkt czasowy to $T_{stat} = 170$ dni

Lp.	Temp [°C]	Lp.	Temp [°C]	Lp.	Temp [°C]	Lp.	Temp [°C]	Lp.	Temp [°C]
1	21.3278	7	21.4407	13	21.5572	19	21.6734	25	21.8294
2	21.5581	8	21.598	14	21.6125	20	21.6867	26	21.7179
3	21.6436	9	21.4865	15	21.772	21	21.5976	27	21.4053
4	21.7363	10	21.3967	16	21.5016	22	21.838	28	21.5411
5	21.7832	11	21.4783	17	21.5292	23	21.6015	29	21.6239
6	21.663	12	21.7504	18	21.6604	24	21.4649	30	21.6096

Tablica 2. Dane otrzymane przy wielokrotnym mierzeniu w punkcie 170, sortowane rosnąco

Na podstawie danych z tab. 2 możemy wyznaczyć ważne wyznaczniki statystyczne dotyczące podmiotu badań.

Ilość powtórzeń wynosi 30.

Średnia wyznaczona na podstawie wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 21.6028 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Wartość minimalna $x_{min} = 21.3278 \text{ }^{\circ}\text{C}$

Wartość maksymalna $x_{max} = 21.8380 \text{ }^{\circ}\text{C}$

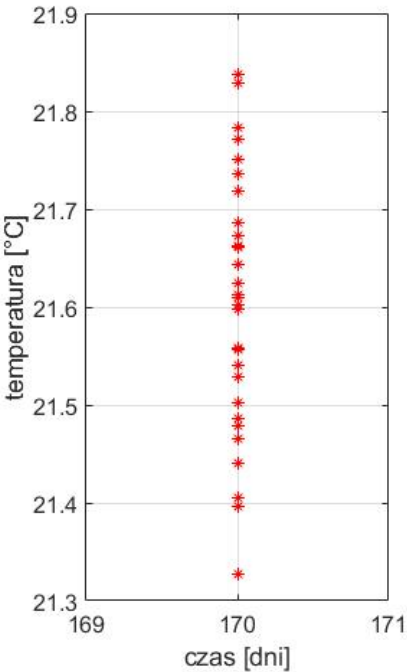
Mediana wynosi 21.5015 °C

Wariancja wyznaczona na podstawie wzoru:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 0.01713$$

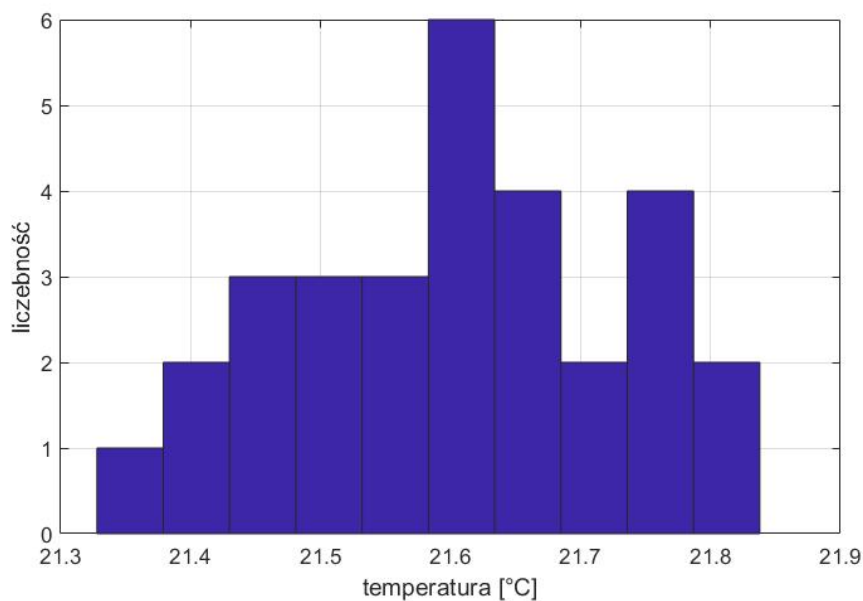
Odchylenie standardowe wyznaczone na podstawie wzoru:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = 0.13089$$



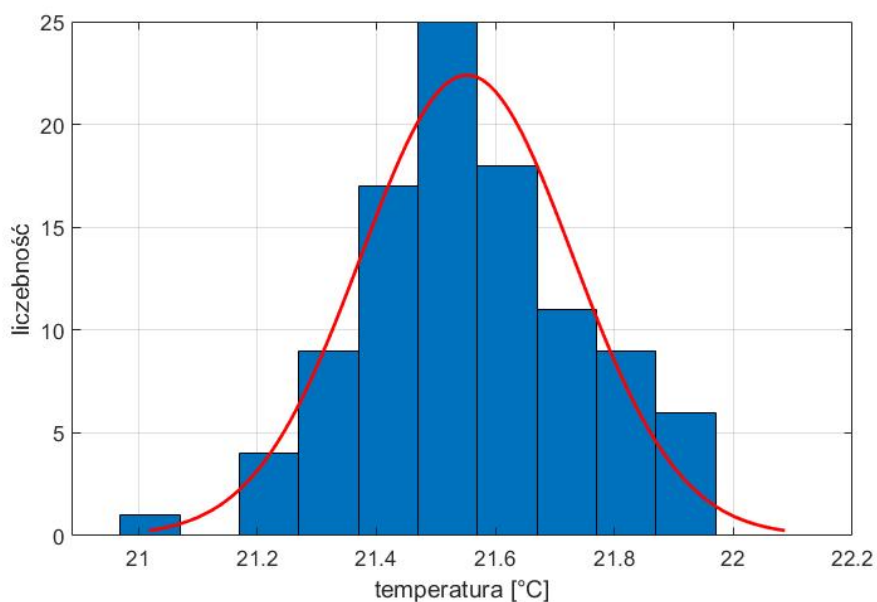
Rysunek 2. Wykres danych z tab. 2

Histogram wyznaczony na podstawie tab. 2:



Rysunek 3. Histogram oparty o dane z tab. 2

Aby dodatkowo sprawdzić rozkład pomiarów pod względem, utworzono próbę zawierającą 100 powtórzeń:



Rysunek 4. Histogram oparty o większą próbę, z dopasowanym rozkładem normalnym

Sprawdzając dane przedstawione na rys. 4 komputerowo pod kątem dopasowania do rozkładu normalnego (m.in. wykonując test Shapiro-Wilka) otrzymujemy *wartość p* na poziomie 0.49, który jest większy od przyjętego poziomu istotności 0.05. Wynika z tego że rozkład jest normalny.

3. Eksperyment właściwy

Następujące operacje przeprowadzane były na podstawie danych z tab. 1.

3.1. Standaryzacja zmiennych wejściowych

Pierwszym krokiem eksperymentu właściwego jest przeskalowanie (standaryzacja) danych do przedziału $\langle -1; 1 \rangle$. Wykonano to za pomocą obliczenia:

średniej ze wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_{i,min} + x_{i,max}}{2}$$

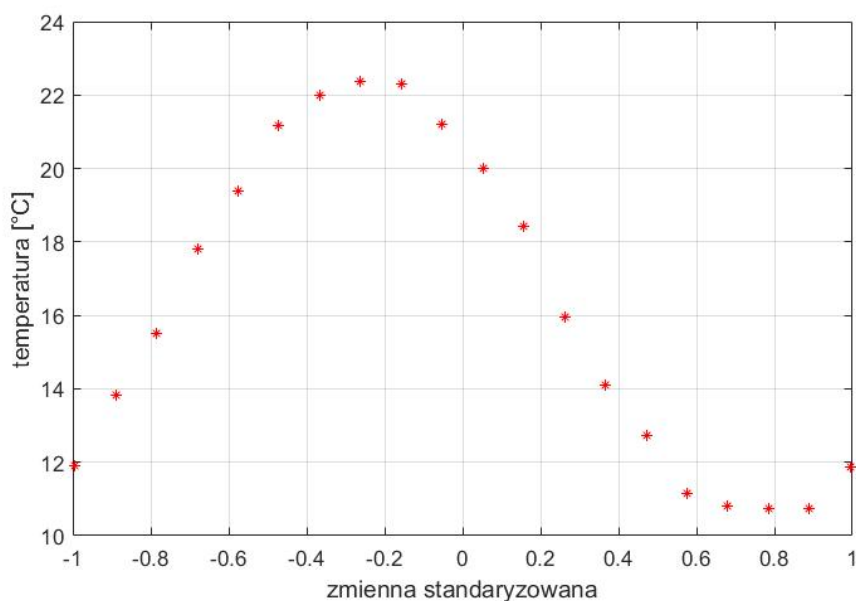
jednostki zmienności ze wzoru:

$$\Delta x = \frac{x_{i,max} + x_{i,min}}{2}$$

Oraz podstawienia powyższych wraz z kolejnymi wartościami x_i do wzoru:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\Delta x}$$

A więc dane z tab. 1 przedstawione wobec nowej osi zmiennej standaryzowanej prezentują się następująco:



Rysunek 5. Zmienne wejściowe przedstawione wobec osi x standaryzowanej

3.2. Opracowanie modelu badań

Model układu utworzony zostanie poprzez wykorzystanie aproksymacji średniokwadratowej. Uogólniony wzór funkcji aproksymującej wygląda w następujący sposób:

$$Q(x) = a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) + \dots + a_j q_j(x) + \dots + a_m q_m(x) = \sum_{j=1}^m a_j q_j(x)$$

gdzie $q_j(x)$ jest obraną funkcją bazową, a współczynniki a_i wyznaczać będziemy ze wzoru macierzowego:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X})^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}$$

3.2.1. Aproksymacja funkcją wielomianową

Wzór ogólny dla aproksymacji funkcjami wielomianowymi wygląda następująco:

$$Q(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + \dots + a_nx^{n-1}$$

I w celu określenia dobrego modelu dla układu można sprawdzać różne stopnie n , na przykład $n = 0$, co da nam funkcję stałą, $n = 1$ co da nam prostą, $n = 7$ co da nam wielomian siódmego stopnia.

Macierze aproksymacji wyglądać będą więc w następujący sposób:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Aproksymacja wielomianem 1-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**, wyliczona w oparciu o oś X wejściową:

$$\mathbf{A} = [19.6688 \quad -0.0189]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 19.6688 - 0.0189x$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**, wyliczona w oparciu o oś T standaryzowaną:

$$\mathbf{B} = [16.1997 \quad -3.4691]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 16.1997 - 3.4691x$$

Aproksymacja wielomianem 2-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**:

$$\mathbf{A} = [13.8088 \quad 0.0818 \quad -2.753 \cdot 10^{-4}]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 13.8088 + 0.0818x - 2.753 \cdot 10^{-4} \cdot x^2$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**:

$$\mathbf{B} = [19.5594 \quad -3.4690 \quad -9.2197]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 19.5594 - 3.4690x - 9.2197x^2$$

Aproksymacja wielomianem 7-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**:

$$\mathbf{A} = [11.7930 \quad 0.1012 \quad -2.88 \cdot 10^{-4} \quad 1.023 \cdot 10^{-5} \quad -1.24 \cdot 10^{-7} \quad 5 \cdot 10^{-10} \quad 0 \quad 6.082]$$

Funkcja aproksymująca (w przybliżeniu):

$$Q(x) \approx 11.7930 + 0.1012x + 6.082x^7$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**:

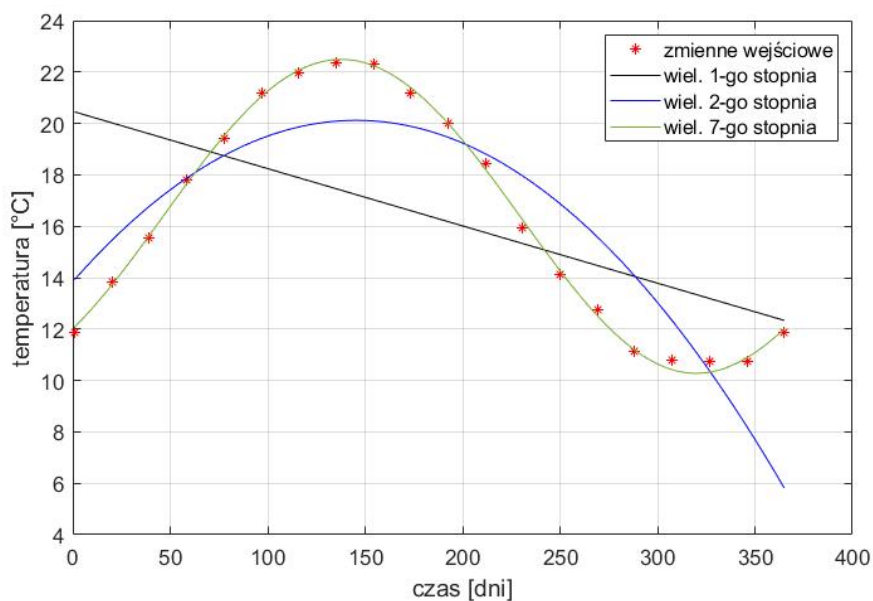
$$\mathbf{B} = [20.692 \quad -13.7 \quad -21.28 \quad 24.59 \quad 18.154 \quad -15.044 \quad -5.744 \quad 4.180]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 20.692 - 13.7x - 21.28x^2 + 24.59x^3 + 18.154x^4 - 15.044x^5 - 5.744x^6 + 4.180x^7$$

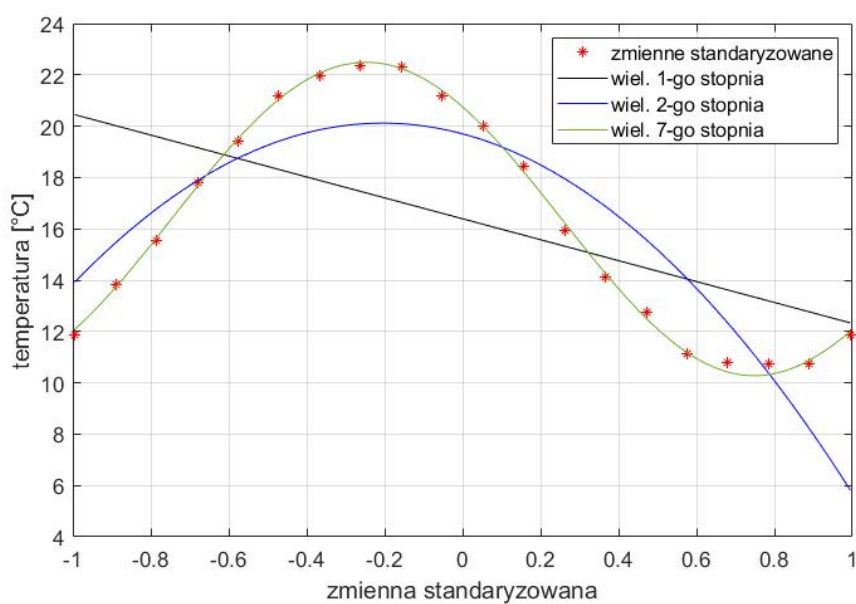
Otrzymane funkcje prezentują się w następujący sposób:

Dla zmiennej wejściowej (na podstawie funkcji o współczynnikach macierzy **A**):



Rysunek 6. Wyniki aproksymacji wielomianami wobec osi zmiennych wejściowych

Dla zmiennej standaryzowanej (na podstawie funkcji o współczynnikach macierzy **B**):



Rysunek 7. Wyniki aproksymacji wielomianami wobec osi zmiennych standaryzowanych

3.2.2. Aproksymacja funkcją logarytmu naturalnego

Wzór uogólniony aproksymacji jest następujący:

$$Q(x) = a_1 + a_2 \ln(x) + a_3 \ln^2(x) + \dots + a_n \ln^{n-1}(x)$$

A macierze aproksymacji prezentują się w następujący sposób:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln(x_1) & \cdots & \ln^{n-1}(x_1) \\ 1 & \ln(x_2) & \cdots & \ln^{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) & \cdots & \ln^{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Na tym etapie należy zaznaczyć, że niemożliwe jest aproksymowanie funkcją logarytmu naturalnego w oparciu o zmienne standaryzowane, gdyż nie istnieje logarytm z wartości ujemnej.

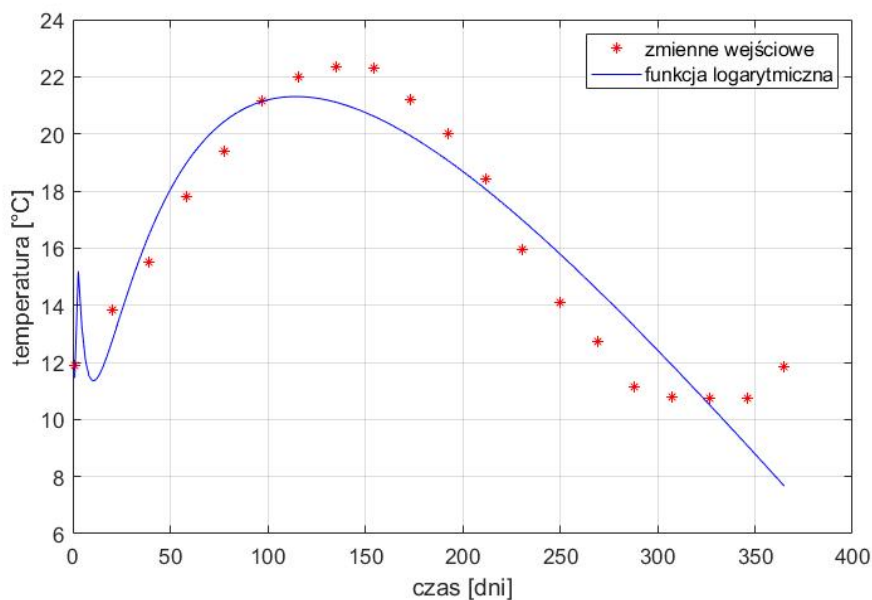
Macierz **A** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11.888 \\ 286.226 \\ -267.589 \\ 91.286 \\ -13.427 \\ 0.719 \end{bmatrix}$$

A więc funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 11.888 + 286.226 \ln(x) - 267.589 \ln^2(x) + 91.286 \ln^3(x) - 13.427 \ln^4(x) + 0.719 \ln^5(x)$$

I jej wykres:



Jak widać przy programowaniu skryptu zdecydowano się na przyjęcie stopnia $n = 6$. Wybór ten wynika z nieadekwatności modelu do układu - dalsze zwiększanie współczynnika dawało niewiele lepsze rezultaty.

3.2.3. Aproksymacja funkcją wymierną

Wzór uogólniony funkcji jest następujący:

$$Q(x) = a_1 + a_2 \left(\frac{1}{x}\right) + a_3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_n \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

A macierze aproksymujące są następujące:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} & \dots & \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \\ 1 & \frac{1}{x_2} & \dots & \left(\frac{1}{x_2}\right)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{x_n} & \dots & \left(\frac{1}{x_n}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Macierz **A** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = [-5.041 \quad 7.142 \cdot 10^3 \quad -6.104 \cdot 10^5 \quad 1.928 \cdot 10^7 \quad -2.052 \cdot 10^8 \quad 1.865 \cdot 10^8]$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = -5.041 + 7.142 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{x} - 6.104 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1.928 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2.052 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 1.865 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

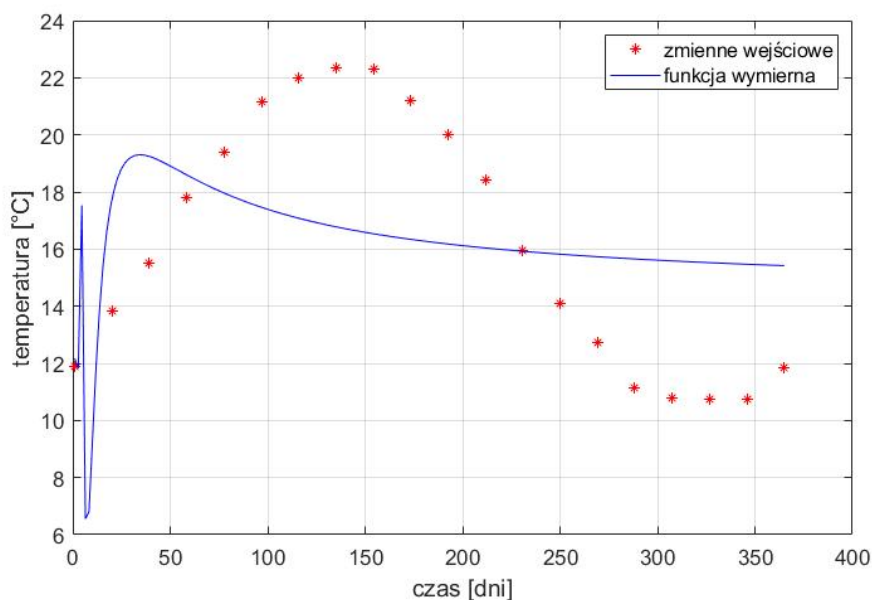
Macierz **B** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{B} = [14.022 \quad -1.764 \quad 0.213 \quad 0.041 \quad -5.349 \cdot 10^{-4} \quad -9.925 \cdot 10^{-5}]$$

Funkcja aproksymująca:

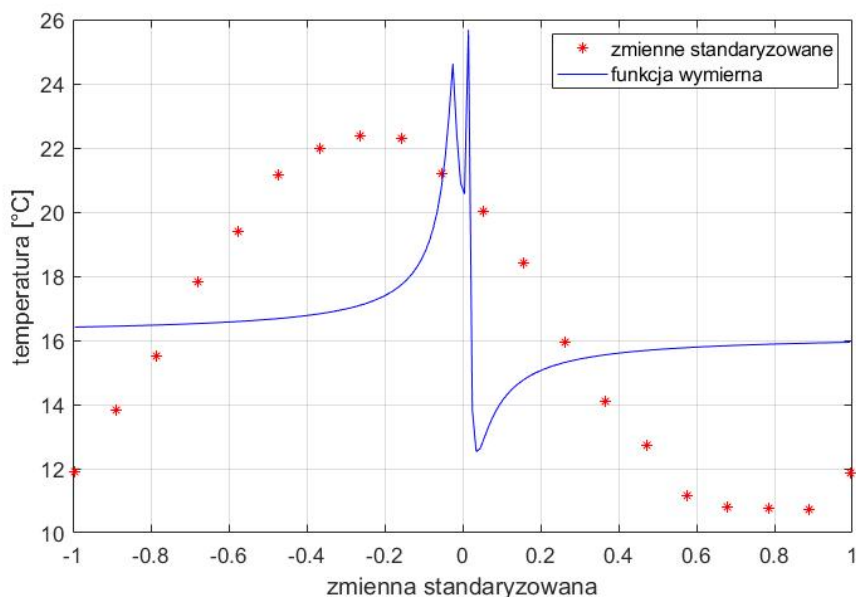
$$Q(x) = 14.022 - 1.764 \cdot \frac{1}{x} + 0.213 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 0.041 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 5.349 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 - 9.925 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych wejściowych **x**:



Rysunek 8. Wykres aproksymacji funkcją wymierną na zmiennych wejściowych

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych standaryzowanych t :



Rysunek 9. Wykres aproksymacji funkcją wymierną na zmiennych standaryzowanych

3.2.4. Aproksymacja funkcją trygonometryczną

Wzór uogólniony wybranej funkcji ma następującą postać:

$$Q(x) = a_1 + a_2 \cos(c \cdot x) + a_3 \sin(c \cdot x) + a_4 \cos(c \cdot 2x) + a_5 \sin(c \cdot 2x) + \dots + a_n \cos\left(c \cdot \frac{n}{2}x\right) + a_{n+1} \sin\left(c \cdot \frac{n}{2}x\right)$$

Gdzie c to zmienna mająca wpływ na okres funkcji aproksymowanej; podczas prób aproksymacji dobierana była empirycznie.

Macierz aproksymacji \mathbf{X} przyjmie postać:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(c \cdot x_1) & \sin(c \cdot x_1) & \cdots & \cos\left(c \cdot \frac{n}{2}x_1\right) & \sin\left(c \cdot \frac{n}{2}x_1\right) \\ 1 & \cos(c \cdot x_2) & \sin(c \cdot x_2) & \cdots & \cos\left(c \cdot \frac{n}{2}x_2\right) & \sin\left(c \cdot \frac{n}{2}x_2\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(c \cdot x_n) & \sin(c \cdot x_n) & \cdots & \cos\left(c \cdot \frac{n}{2}x_n\right) & \sin\left(c \cdot \frac{n}{2}x_n\right) \end{bmatrix}$$

Podczas aproksymacji w oparciu o zmienne wejściowe x wybrano współczynnik $c = 0.003 \cdot \pi$. Macierz \mathbf{A} otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = [15.982 \quad -0.226 \quad 0.579 \quad -3.923 \quad 4.541]$$

Postać funkcji aproksymującej:

$$Q(x) = 15.982 - 0.226 \cos(c \cdot x) + 0.579 \sin(c \cdot x) - 3.923 \cos(c \cdot 2x) + 4.541 \sin(c \cdot 2x)$$

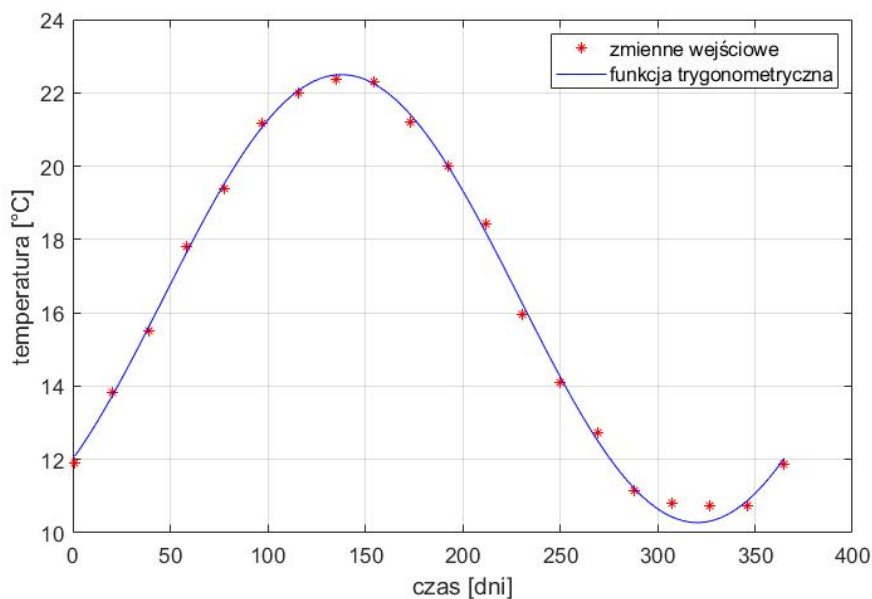
Podczas aproksymacji w oparciu o zmienne standaryzowane t wybrano współczynnik $c = \pi$. Macierz \mathbf{B} otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{B} = [16.395 \quad 4.316 \quad -4.218 \quad -0.047 \quad -0.0628]$$

Postać funkcji aproksymującej:

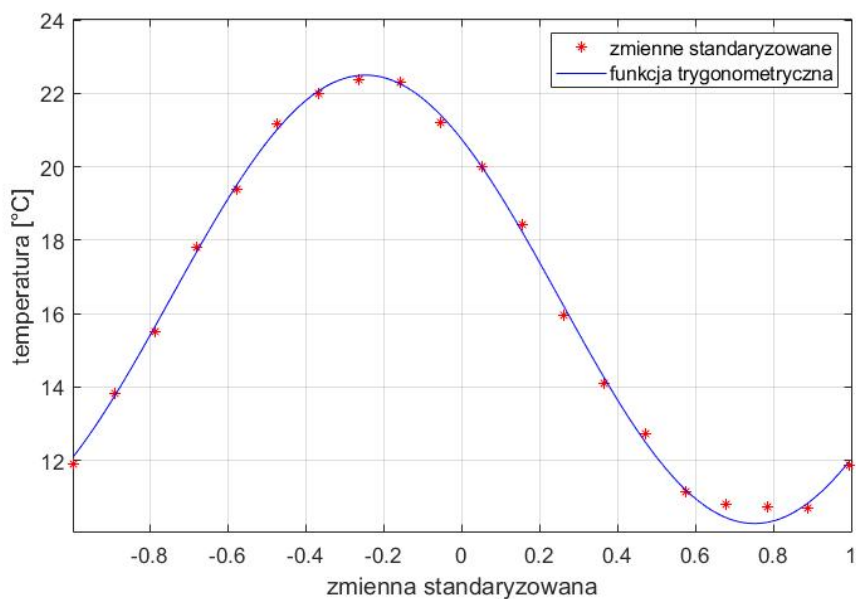
$$Q(x) = 16.395 + 4.316 \cos(c \cdot x) - 4.218 \sin(c \cdot x) - 0.047 \cos(c \cdot 2x) - 0.0628 \sin(c \cdot 2x)$$

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych wejściowych x :



Rysunek 10. Wykres aproksymacji funkcją trygonometryczną na zmiennych wejściowych

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych standaryzowanych t :



Rysunek 11. Wykres aproksymacji funkcją trygonometryczną na zmiennych standaryzowanych

3.3. Ocena przydatności przyjętych modeli

3.3.1. Ocena wizualna

Na podstawie oceny wizualnej od razu można ocenić, że najlepiej aproksymującymi modelami były te, które oparte były na funkcji wielomianu wysokiego stopnia oraz na funkcji trygonometrycznej. Pozostałe modele, nawet pomimo prób zwiększania ich stopnia n (jak w przypadku funkcji wymiernej oraz logarytmicznej), nie dawały dobrych rezultatów. W związku z tym w dalszej części oceniana będzie zdolność modelu opartego o wielomian 7-go stopnia (przedstawiony na rys. 6 oraz na rys. 7), oraz opartego o funkcję trygonometryczną (przedstawiony na rys. 10 oraz na rys. 11).

3.3.2. Wyznaczanie błędów oraz współczynników opisujących zdolność modelu

Do dokładniejszej, systematycznej oceny modelu wykorzystane zostaną następujące własności:

Błąd bezwzględny :

$$|\Delta y_i| = |\hat{y}_i - y_i|$$

Błąd względny :

$$|\varepsilon_i| = \frac{|\hat{y}_i - y_i|}{|y_i|}$$

Współczynnik determinancji R^2 wyznaczony na podstawie wzoru:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Pierwiastek błędu średniokwadratowego RMSE :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}$$

Na tablicy 3 przedstawione zostały obliczone własności modeli:

1. Wielomian 7-go stopnia wyznaczony na podstawie zmiennych wejściowych
2. Wielomian 7-go stopnia wyznaczony na podstawie zmiennych standaryzowanych
3. Funkcja trygonometryczna wyznaczona na podstawie zmiennych wejściowych
4. Funkcja trygonometryczna wyznaczona na podstawie zmiennych standaryzowanych

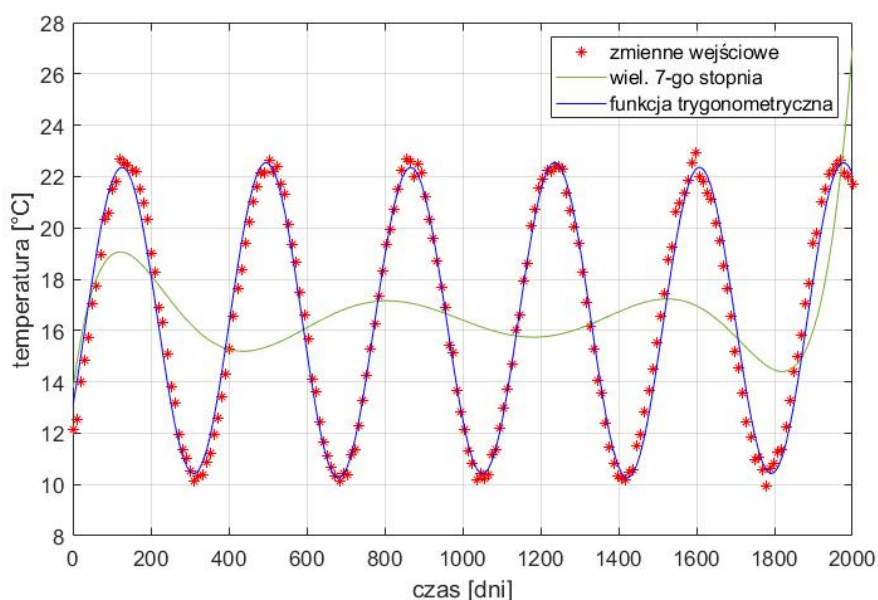
Wynikowe błędy względne i bezwzględne to średnie wartości wszystkich węzłów.

	1.	2.	3.	4.
Δy_i	$0.9502 \cdot 10^{-2}$	$0.9502 \cdot 10^{-2}$	$1.0461 \cdot 10^{-2}$	$1.1412 \cdot 10^{-2}$
ε_i	$1.4070 \cdot 10^{-1}$	$14070 \cdot 10^{-1}$	$1.5119 \cdot 10^{-1}$	$1.6368 \cdot 10^{-1}$
R^2	0.9986	0.9986	0.9984	0.9982
$RMSE$	0.1573	0.1573	0.1705	0.1773

Tablica 3. Błędy oraz współczynniki adekwatności modeli

3.4. Wnioski

Trudno stwierdzić który z modeli (wielomianowy czy trygonometryczny) jest lepszy; z jednej strony wartości przedstawione w tabeli 3 pokazują, że model oparty o wielomian 7-go stopnia jest dokładniejszy, jego błędy są mniejsze, współczynnik determinancji R^2 jest bliższy 1 (im bliżej 1 tym lepsze dopasowanie), a błąd $RMSE$ jest mniejszy (im bliżej 0 tym lepiej). Warto jednak zaznaczyć, że jest tak dla wybranego przedziału; gdyby wybrać szerszy przedział czasowy, na przykład $\langle 1; 2000 \rangle$, to bardzo szybko jego dokładność by spadła w porównaniu do modelu opartego o funkcje trygonometryczne, który w dalszym ciągu byłby dobrze dopasowany.



Rysunek 12. Prezentacja działania modeli na dłuższym przedziale czasowym

Jak widać na rys. 12 model oparty o aproksymację trygonometryczną na dłuższym przedziale czasowym utrzymuje swoją zdolność, podczas gdy wielomianowy kompletnie ją traci - aby model oparty o wielomiany ponownie stał się dokładny, trzeba byłoby znacznie zwiększyć stopień funkcji podstawowej, przy czym nigdy nie nastąpi sytuacja w której będzie on w stanie aproksymować działanie układu w czasie nieskończonym, podczas gdy trygonometryczny jak najbardziej może tak zadziałać.

Różnica dokładności między tymi dwoma modelami - wielomianowym i trygonometrycznym - wynika z faktu, że w ogólnym rozrachunku model wielomianowy stara się jak najdokładniej przybliżyć dowolną funkcję (przez co "wychwytuje" niewielkie wachania w stosunku do prostej funkcji trygonometrycznej ukazane w podrozdziale 2.2), podczas gdy model trygonometryczny bardziej ogólnie opisuje zachowanie układu. Inaczej ujmując wystarczyłoby ponownie uruchomić eksperyment w celu uzyskania nowych danych aby zauważyć niepomijalne różnice w zapisie funkcji wielomianowej, podczas gdy funkcja trygonometryczna pozostałaby podobna.

Pozostałe modele nie dawały zadowalających wyników, różnice pomiędzy krzywą określaną przez węzły a funkcjami logarytmiczną oraz wymierną były bardzo duże, zauważalne gołym okiem. Być może byłyby one dobrymi modelami dla innych układów/eksperymentów, lecz w tym nie sprawdziły się.