Metody Obliczeniowe i Planowanie Eksperymentu

Projekt 1

Imię i nazwisko	**Wojciech Brandt**
Number albumu	**401 841**
Wydział	**Inżynierii Mechanicznej i Robotyki**
Kierunek	**Mechanika i Budowa Maszyn**
Grupa Projektowa	**CP01**

1. Cele projektu I

Student:

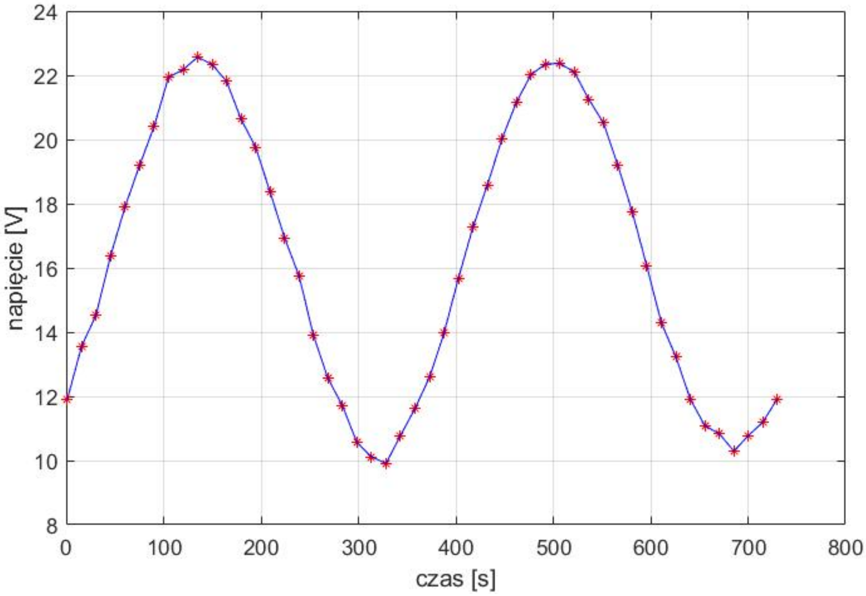
— oswoi się ze sposobem badania układów przed następnym projektem
— zapozna się z metodami opracowywania zależności empirycznych i badania ich zgodności

2. Badanie wstępne

2.1. Ogólne zachowanie układu

W celu zbadania zachowania układu przeprowadzono szereg badań, z różnymi zakresami badanymi.

Na początek przeprowadznono badania mające na celu uzyskanie wielu punktów w różnych przedziałach czasowych. Ostatecznie w celu zaprezentowania ogólnego działania układu wygenerowano zestaw danych w zakresie czasu $\langle 1; 730 \rangle$ s:

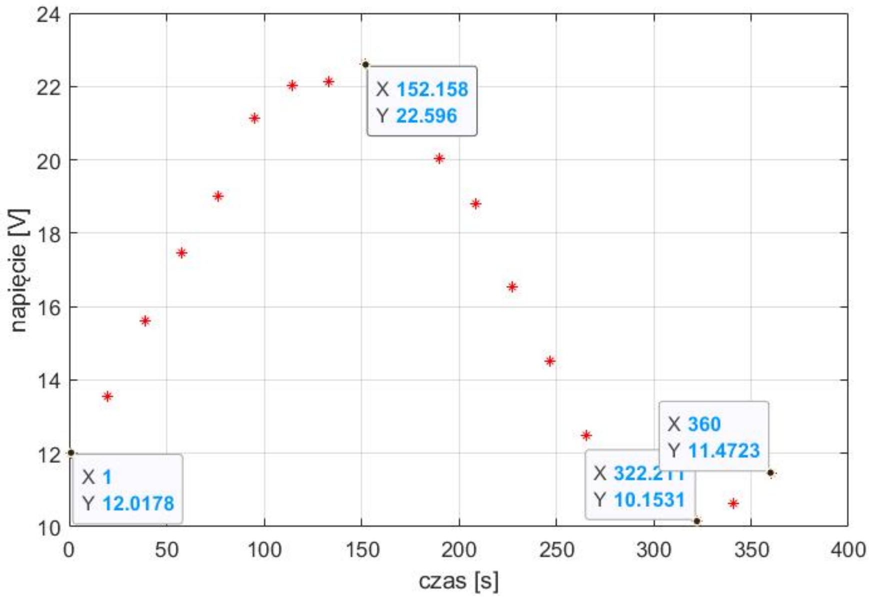


Rysunek 1. Dane uzyskane w celu wstępnego określenia działania układu.

Jak wydać na rys. 1 układ zachowuje się w taki sposób, że jego wykres w czasie wygląda podobnie do wykresu funkcji sinusoidalnej. Na wykresie zaznaczone są punkty pomiarowe otrzymane przy pomiarze (zaznaczone czerwonymi gwiazdkami), połączone niebieską linią.

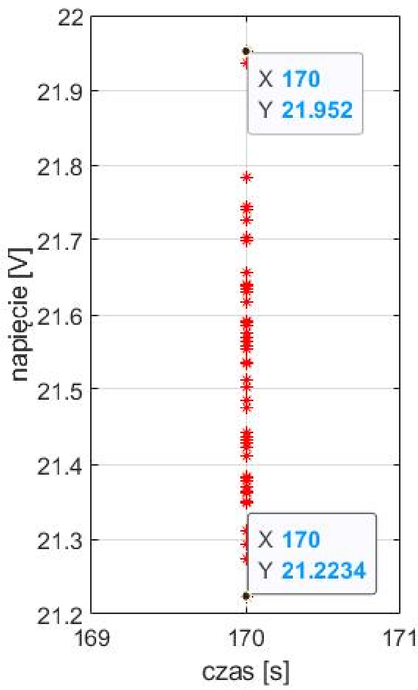
2.2. Otrzymywanie danych

Dla dalszego określania i obserwowania układu wygenerowano kolejne zestawy danych. Pierwszy z nich posłuży w późniejszych etapach do utworzenia modelu matematycznego układu:



Rysunek 2. Wykres zestawu danych na którym oparte zostało utworzenie modelu układu.

A drugi stanowi zestaw danych na podstawie którego możemy określić parametry statystyczne układu:



Rysunek 3. Dane otrzymane przy sprawdzaniu wielokrotnie tego samego punktu.

Z rys. 2 odczytać możemy istotne dane dla eksperymentu właściwego:

— Zakres badany: $\langle 1; 360 \rangle$
— Ilość węzłów: 20
— Lokalne maksimum: $V_{max} = 22.596$ V
— Lokalne minimum: $V_{min} = 10.153$ V

Z rys. 3 odczytać możemy istotne dane dla badań wstępnych:

— Czas pomiaru: 170 s
— Wartość minimalna: 21.223 V
— Wartość maksymalna: 21.952 V

2.3. Parametry statystyczne układu

Na podstawie danych przedstawionych na rys. 3 możemy wyznaczyć pewne parametry statystyczne układu.

Ilość powtórzeń wynosi 50.
Średnia wyznaczona na podstawie wzoru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 21.5321 \text{ V}$$

Mediana wynosi 21.5341 V
Wariancja wyznaczona na podstawie wzoru:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 0.02648$$

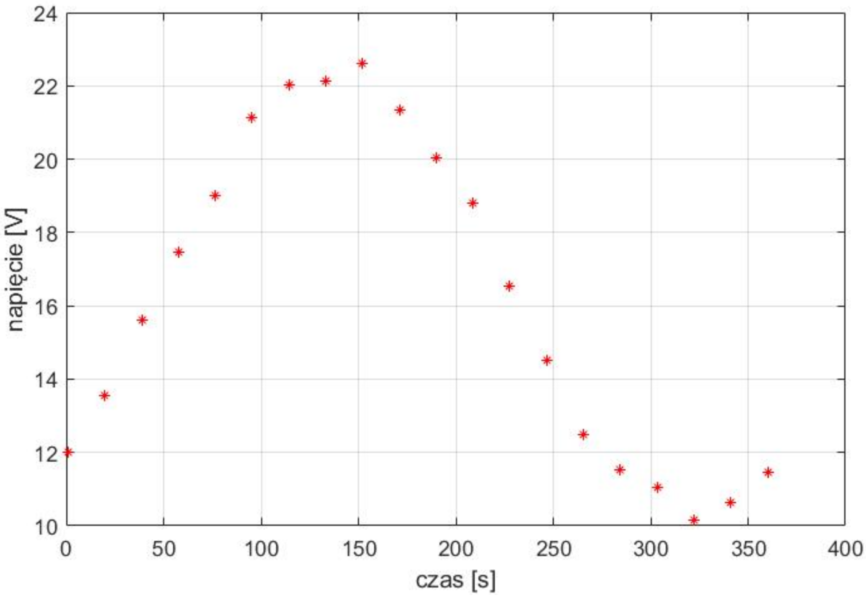
Odchylenie standardowe wyznaczone na podstawie wzoru:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = 0.16272$$

Histogram :

3. Eksperyment właściwy

Dane wejściowe do eksperymentu właściwego przedstawione są na wykresie:



Rysunek 4. Wykres danych zmiennych wejściowych dla eksperymentu właściwego

3.1. Standaryzacja zmiennych wejściowych

Pierwszym krokiem eksperymentu właściwego jest przeskalowanie (standaryzacja) danych do przedziału $\langle -1; 1 \rangle$. Wykonano to za pomocą obliczenia:

średniej ze wzoru:

$$\bar{x} = \frac{x_{i,min} + x_{i,max}}{2}$$

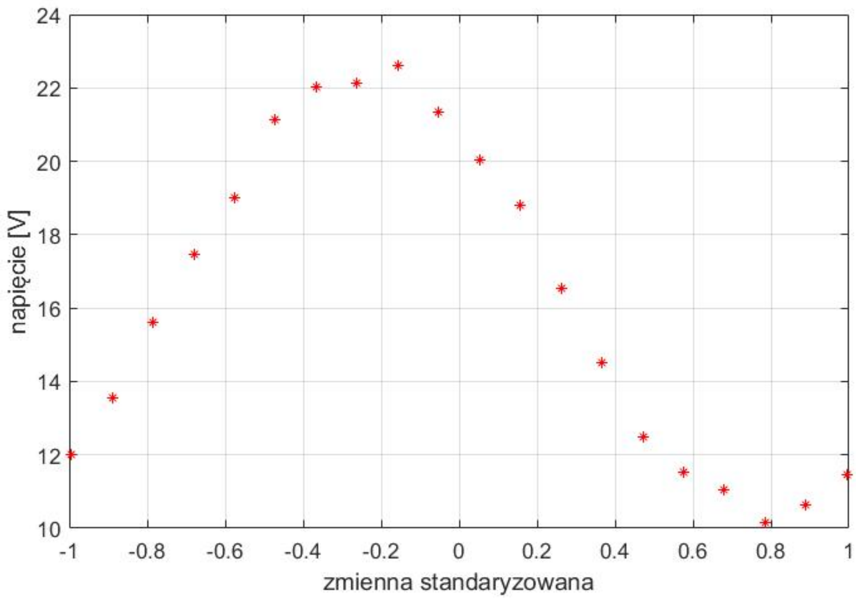
jednostki zmienności ze wzoru:

$$\Delta x = \frac{x_{i,max} + x_{i,min}}{2}$$

Oraz podstawienia powyższych wraz z kolejnymi wartościami x_i do wzoru:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\Delta x}$$

A więc dane z rys. 4 przedstawione wobec nowej osi zmiennej standaryzowanej prezentują się następująco:



Rysunek 5. Zmienne wejściowe przedstawione wobec osi x standaryzowanej

3.2. Opracowanie modelu badań

Model układu utworzony zostanie poprzez wykorzystanie aproksymacji średniokwadratowej. Uogólniony wzór funkcji aproksymującej wyglada w następujący sposób:

$$Q(x) = a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) + \ldots + a_j q_j(x) + \ldots a_m q_m(x) = \sum_{j=1}^{m} a_j q_x(x)$$

gdzie $q_j(x)$ jest obraną funkcją bazową, a współczynniki a_i wyznaczać będziemy ze wzoru macierzowego:

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}$$

3.2.1. Aproksymacja funkcją wielomianową

Wzór ogólny dla aproksymacji funkcjami wielomianowymi wygląda następująco:

$$Q(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \cdots + a_n x^{n-1}$$

I w celu określenia dobrego modelu dla układu można sprawdzać różne stopnie n, na przykład $n = 0$, co da nam funkcję stałej, $n = 1$ co da nam prostą, $n = 7$ co dam nam nam wielomian siódmego stopnia.

Macierze aproksymacji wyglądać będą więc w następujący sposób:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Aproksymacja wielomianem 1-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**, wyliczona w oparciu o oś X wejściową:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 19.641 \\ -0.019 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 19.641 - 0.019x$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**, wyliczona w oparciu o oś T standaryzowaną:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16.204 \\ -3.437 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 16.204 - 3.437x$$

Aproksymacja wielomianem 2-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13.503 \\ 0.088 \\ -0.001 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 13.503 + 0.088x - 0.001x^2$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 19.723 \\ -3.437 \\ -9.656 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 19.723 - 3.437x - 9.656x^2$$

Aproksymacja wielomianem 7-go stopnia Otrzymana ze skryptu macierz **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 11.907 \\ 0.084 \\ 1 \cdot 10^{-4} \\ 6 \cdot 10^{-6} \\ -1.015 \cdot 10^{-7} \\ 5 \cdot 10^{-10} \\ 0 \\ 5.286 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca (w przybliżeniu):

$$Q(x) \approx 11.907 + 0.084x + 5.286x^7$$

Otrzymana ze skryptu macierz **B**:

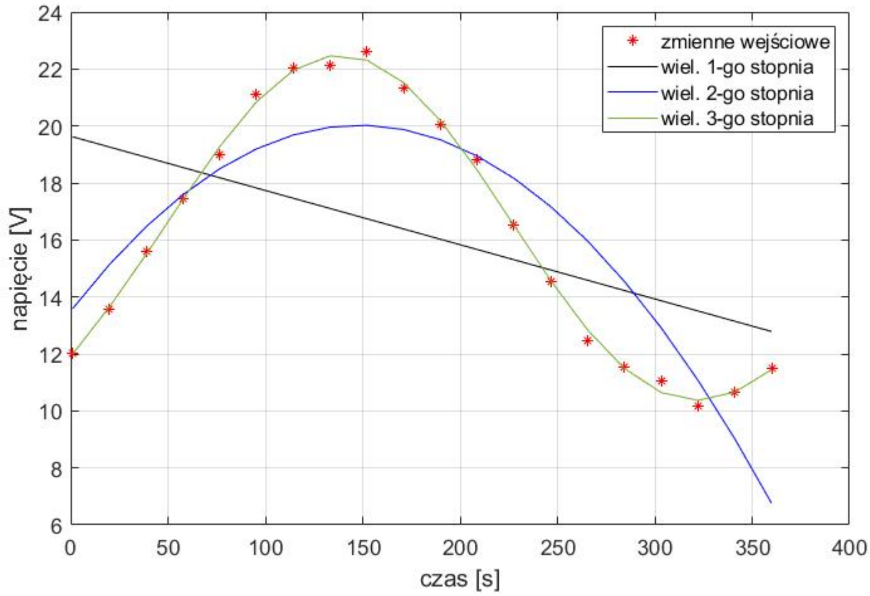
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 20.911 \\ -12.849 \\ -22.03 \\ 22.272 \\ 17.803 \\ -12.926 \\ -4.981 \\ 3.3 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 20.911 - 12.849x - 22.03x^2 + 22.272x^3 + 17.803x^4 - 12.926x^5 - 4.981x^6 + 3.3x^7$$

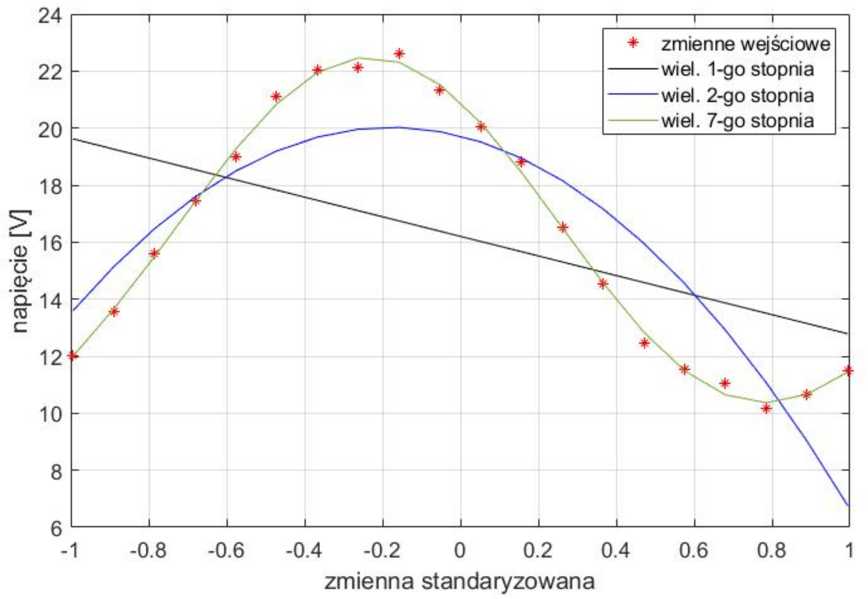
Otrzymane funkcje prezentują się w następujący sposób:

Dla zmiennej wejściowej (na podstawie funkcji o współczynnikach macierzy **A**):



Rysunek 6. Wyniki aproksymacji wielomianami wobec osi zmiennych wejściowych

Dla zmiennej standaryzowanej (na podstawie funkcji o współczynnikach macierzy **B**):



Rysunek 7. Wyniki aproksymacji wielomianami wobec osi zmiennych standaryzowanych

3.2.2. Aproksymacja funkcją logarytmu naturalnego

Wzór uogólniony aproksymacji jest następujący:

$$Q(x) = a_1 + a_2 \ln(x) + a_3 \ln^2(x) + \cdots + a_n \ln^{n-1}(x)$$

A macierze aproksymacji prezentują się w następujący sposób:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \ln(x_1) & \cdots & \ln^{n-1}(x_1) \\ 1 & \ln(x_2) & \cdots & \ln^{n-1}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \ln(x_n) & \cdots & \ln^{n-1}(x_n) \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Na tym etapie należy zaznaczyć, że niemożliwe jest aproksymowanie funkcją logarytmu naturalnego w oparciu o zmienne standaryzowane, gdyż nie istnieje logarytm z wartości ujemnej.

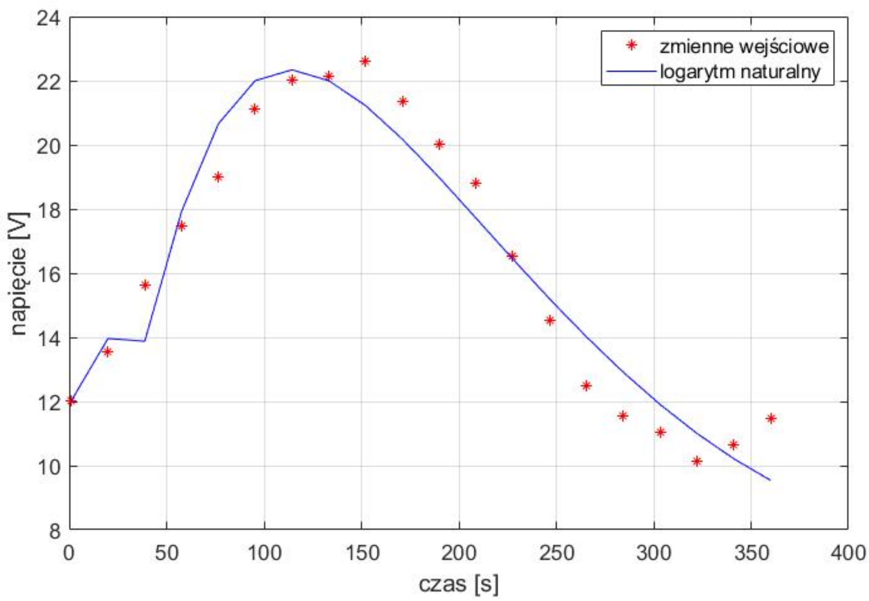
Macierz **A** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12.015 \\ 254.938 \\ -238.544 \\ 81.3 \\ -11.922 \\ 0.636 \end{bmatrix}$$

A więc funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = 12.015 + 254.938 \ln(x) - 238.544 \ln^2(x) + 81.3 \ln^3(x) - 11.922 \ln^4(x) + 0.636 \ln^5(x)$$

I jej wykres:



Jak widać przy programowaniu skryptu zdecydowano się na przyjęcie stopnia $n = 6$. Wybór ten wynika z nieadekwatności modelu do układu - dalsze zwiększanie współczynnika dawało niewiele lepsze rezultaty.

3.2.3. Aproksymacja funkcją wymierną

Wzór uogólniony funkcji jest następujący:

$$Q(x) = a_1 + a_2\left(\frac{1}{x}\right) + a_3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + a_n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}$$

A macierze aproksymujące są następujące:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{x_1} & \cdots & \left(\frac{1}{x_1}\right)^{n-1} \\ 1 & \frac{1}{x_2} & \cdots & \left(\frac{1}{x_2}\right)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{1}{x_n} & \cdots & \left(\frac{1}{x_n}\right)^{n-1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Macierz **A** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7.576 \\ 8.137 \cdot 10^3 \\ -7.208 \cdot 10^5 \\ 2.345 \cdot 10^7 \\ -2.536 \cdot 10^8 \\ 2.309 \cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

$$Q(x) = -7.576 + 8.137 \cdot 10^3 \cdot \frac{1}{x} - 7.208 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 2.345 \cdot 10^7 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2.536 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2.309 \cdot 10^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

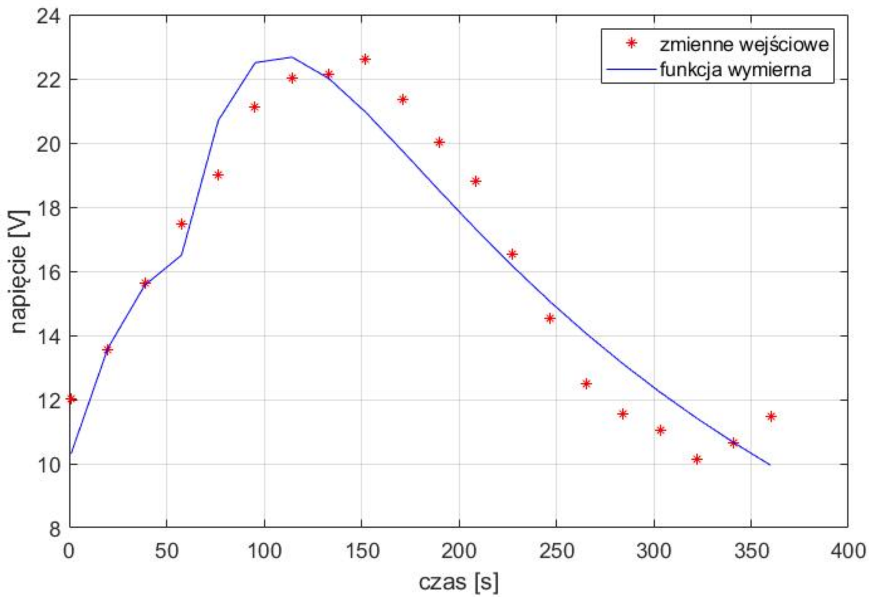
Macierz **B** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13.906 \\ -1.694 \\ 0.227 \\ 0.039 \\ -5.724 \cdot 10^{-4} \\ -9.551 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Funkcja aproksymująca:

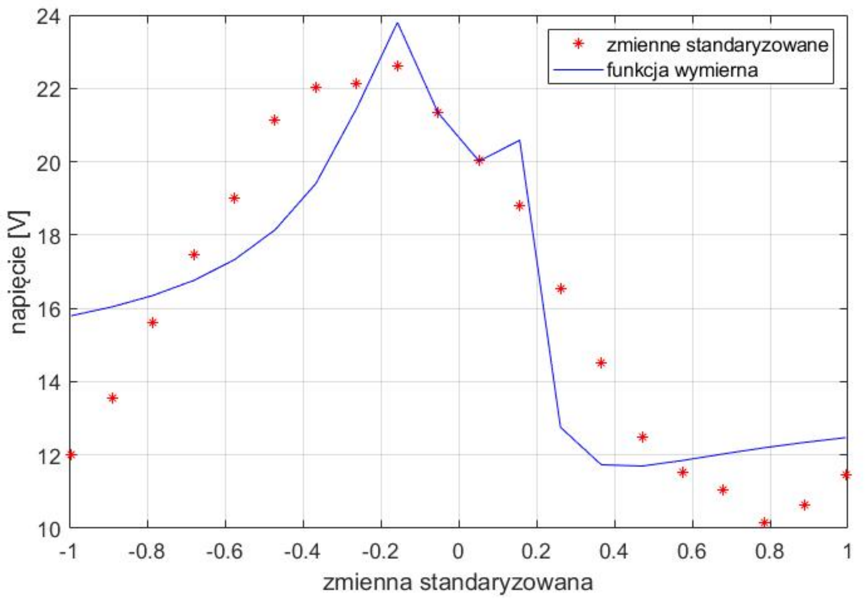
$$Q(x) = 13.906 - 1.694 \cdot \frac{1}{x} + 0.227 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2 + 0.039 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 5.724 \cdot 10^{-4} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^4 - 9.551 \cdot 10^{-5} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^5$$

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych wejściowych **x**:



Rysunek 8. Wykres aproksymacji funkcją wymierną na zmiennych wejściowych

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych standaryzowanych **t**:



Rysunek 9. Wykres aproksymacji funkcją wymierną na zmiennych standaryzowanych

3.2.4. Aproksymacja funkcją trygonometryczną

Wzór uogólniony wybranej funkcji ma następującą postać:

$$Q(x) = a_1 + a_2 \cos(c \cdot x) + a_3 \sin(c \cdot x) + a_4 \cos(c \cdot 2x) + a_5 \sin(c \cdot 2x) + \cdots + a_n \cos(c \cdot \frac{n}{2}x) + a_{n+1} \sin(c \cdot \frac{n}{2}x)$$

Gdzie c to zmienna mająca wpływ na okres funkcji aproksymowanej; podczas prób aproksymacji dobierana była empirycznie.

Macierz aproksymacji **X** przyjmie postać:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos(c\cdot x_1) & \sin(c\cdot x_1) & \cdots & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_1) & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_1) \\ 1 & \cos(c\cdot x_2) & \sin(c\cdot x_2) & \cdots & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_2) & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(c\cdot x_n) & \sin(c\cdot x_n) & \cdots & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_n) & \cos(c\cdot \frac{n}{2}x_n) \end{bmatrix}$$

Podczas aproksymacji w oparciu o zmienne wejściowe x wybrano współczynnik $c = 0.003\cdot\pi$. Macierz **A** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 15.116 \\ 0.746 \\ 2.758 \\ -3.881 \\ 2.309 \end{bmatrix}$$

Postać funkcji aproksymującej:

$$Q(x) = 15.116 + 0.746\cos(c\cdot x) + 2.758\sin(c\cdot x) - 3.881\cos(c\cdot 2x) + 2.309\sin(c\cdot 2x)$$

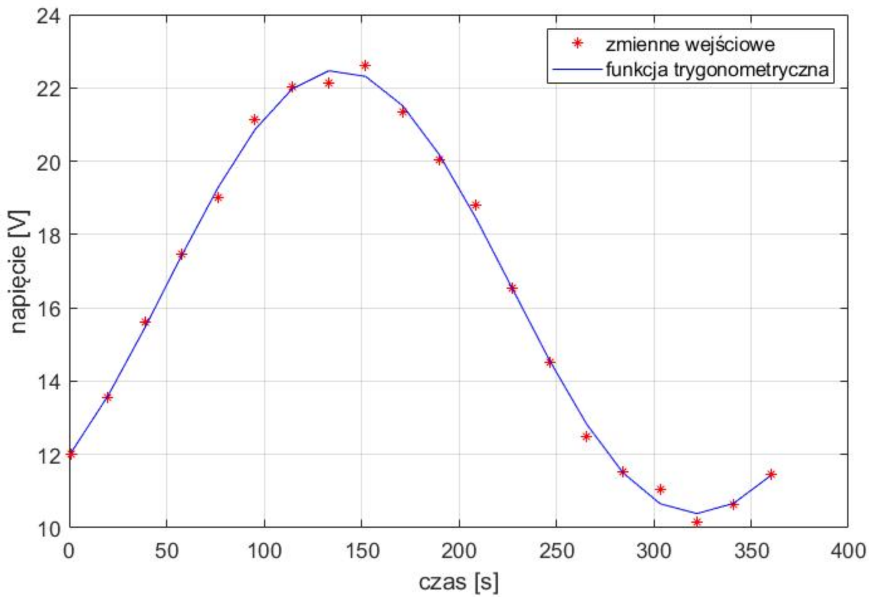
Podczas aproksymacji w oparciu o zmienne standaryzowane t wybrano współczynnik $c = \pi$. Macierz **B** otrzymana ze skryptu:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 16.409 \\ 4.531 \\ -4.048 \\ -0.0442 \\ 0.0145 \end{bmatrix}$$

Postać funkcji aproksymującej:

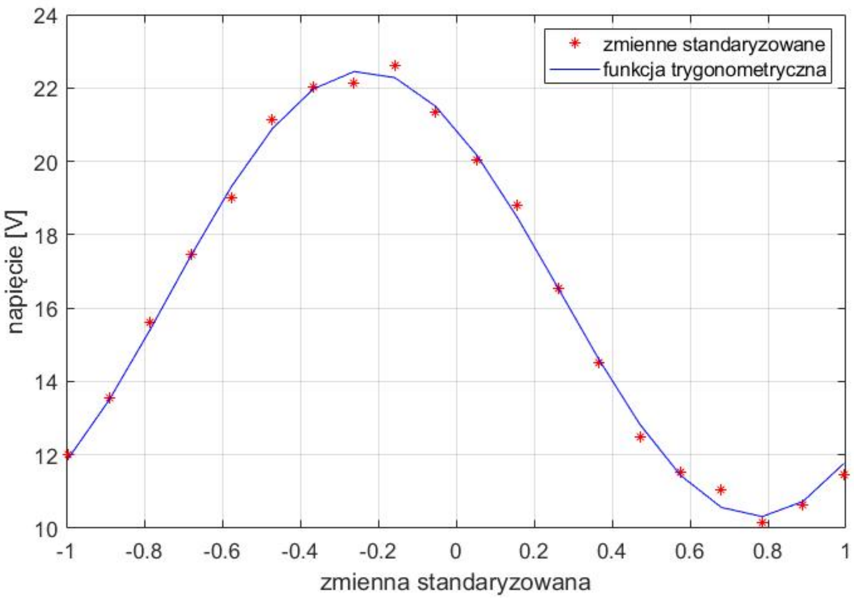
$$Q(x) = 16.409 + 4.531\cos(c\cdot x) - 4.048\sin(c\cdot x) - 0.0442\cos(c\cdot 2x) + 0.0145\sin(c\cdot 2x)$$

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych wejściowych x:



Rysunek 10. Wykres aproksymacji funkcją trygonometryczną na zmiennych wejściowych

Wykres funkcji aproksymującej na podstawie współczynników otrzymanych w oparciu o oś zmiennych standaryzowanych t:



Rysunek 11. Wykres aproksymacji funkcją trygonometryczną na zmiennych standaryzowanych