

Politechnika Warszawska

W Y D Z I A Ł M E C H A N I C Z N Y
E N E R G E T Y K I I L O T N I C T W A



Instytut Techniki Lotniczej i Mechaniki Stosowanej

Praca dyplomowa inżynierska

na kierunku Automatyka i Robotyka
w specjalności Robotyka

Analiza dynamiki mechanizmów płaskich we współrzędnych
kanonicznych Hamiltona

Wojciech Celej
Numer albumu 271248

promotor
dr inż. Paweł Małczyk

Warszawa, 2018

Streszczenie

Analiza dynamiki mechanizmów płaskich we współrzędnych kanonicznych Hamiltona

W niniejszej pracy przedstawiono problematykę analizy dynamiki mechanizmów płaskich we współrzędnych absolutnych (zależnych), których konsekwencją jest otrzymanie układu równań różniczkowo-algebraicznych (RRA). Przedstawiono wybrane podejścia w rozwiązywaniu tych równań i zaimplementowano cztery różne sformułowania. Każde kolejne sformułowanie stanowi rozwinięcie poprzedniego. Sformułowania te przetestowano na przykładzie podwójnego wahadła fizycznego, porównując wyniki otrzymane z symulacji z programem *Adams*.

Następnie zaimplementowano płaski mechanizm Andrews'a używając metody rozszerzonego lagnranżjanu i równań kanonicznych Hamiltona. Porównano użycie jawnej metody całkującej bazującej na metodach Rungego-Kutty z metodą niejawną trapezów. Omówiono wpływ doboru parametrów modelu i parametrów symulacji na stabilność rozwiązania pod kątem spełnienia równań więzów dla położeń i prędkości oraz pod kątem odchylenie energii całkowej. Wszystkie procedury zostały zaprogramowane w środowisku *Matlab*.

Słowa kluczowe: układy wieloczłonowe, rozszerzony lagranżjan, równania kanoniczne Hamiltona, równania różniczkowo-algebraiczne, RRA, mechanizm Andrews'a

Summary

Dynamic analysis of planar multibody systems based on Hamilton's canonical coordinates

The subject of the thesis is to present various aspects of dynamic analysis of planar multibody systems based on dependent coordinates. In consequence, a system of differential-algebraic equations (DAEs) has to be solved in order to predict the system state in the next time instant. Selected methods for DAE solution are presented in this thesis. Four approaches were implemented. Subsequent formulations are built on top of the previous one. Those four formulations were tested on double pendulum example. The collected results were compared against *Adams* multibody software.

Subsequently, Andrew's squeezer mechanism is implemented using augmented Lagrangian and Hamilton's canonical equations. Comparison between explicit integrator based on Runge-Kutta methods and implicit trapezoidal rule was shown as well. Moreover, a discussion is presented on the influence of the simulation settings and penalty parameters on the solution's stability and accuracy in the context of constraint violation errors and total energy conservation. All procedures were developed in *Matlab* software.

Keywords: multibody systems, augmented Lagrangian, Hamilton's canonical equations, differential-algebraic equations, DAEs, Andrew's squeezer mechanism

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że przedstawiona praca dyplomowa:

- została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami,
- nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego lub stopnia naukowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

.....
data

.....
podpis autora pracy

Oświadczenie

Wyrażam zgodę / nie wyrażam zgody⁽¹⁾ na udostępnianie osobom zainteresowanym mojej pracy dyplomowej. Praca może być udostępniana w pomieszczeniach biblioteki wydziałowej. Zgoda na udostępnienie pracy dyplomowej nie oznacza wyrażenia zgody na jej kopiowanie w całości lub w części.

Brak zgody nie oznacza ograniczenia dostępu do pracy dyplomowej osób:

- reprezentujących władze Politechniki Warszawskiej,
- członków Komisji Akredytacyjnych,
- funkcjonariuszy służb państwowych i innych osób uprawnionych, na mocy odpowiednich przepisów prawnych obowiązujących na terenie Rzeczypospolitej Polskiej, do swobodnego dostępu do materiałów chronionych międzynarodowymi przepisami o prawach autorskich.

Brak zgody nie wyklucza także kontroli tekstu pracy dyplomowej w systemie antyplagiatowym.

.....
data

.....
podpis autora pracy

¹niepotrzebne skreślić

Spis treści

1 Wstęp	9
1.1 Wprowadzenie	9
1.2 Przegląd piśmiennictwa	9
1.3 Cel pracy	10
2 Modelowanie układów płaskich we współrzędnych absolutnych	11
2.1 Sformułowanie więzów kinematycznych	11
2.2 Sformułowanie równań dynamiki	13
2.3 Sformułowanie równań dynamiki dla członów skrępowanych więzami z użyciem nieoznaczonych mnożników Lagrange'a	15
3 Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych (RRZ)	17
3.1 Podział algorytmów całkowania numerycznego	17
3.2 Sformułowanie problemu	17
3.3 Rodzaje stabilności numerycznej	19
3.4 Nieważny schemat Eulera	20
3.5 Metoda trapezów	20
3.6 Metody Rungego-Kutty	21
3.7 Krótkie omówienie metod wielokrokowych	22
3.8 Idea metod predyktor-korektor	23
4 Problematyka rozwiązywania równań RRA	25
4.1 Podstawowe pojęcia	25
4.2 Układy sztywne	25
4.3 Wybrane podejście w rozwiązywaniu RRA	26
5 Wybrane sformułowania zadania prostego dynamiki	29
5.1 Równania Newtona-Eulera wraz ze stabilizacją Baumgarte'a	29
5.2 Kanoniczne równania ruchu wraz ze stabilizacją	30
5.3 Sformułowanie oparte na rozszerzonym lagranżjanie i równaniach kanonicznych .	33
5.4 Sformułowanie oparte na równaniach kanonicznych z użyciem nieważnej metody trapezów i iteracjami Newtona-Raphsona	35
6 Implementacja, wyniki analiz	39
6.1 Walidacja sformułowań na przykładzie podwójnego wahadła i oprogramowania <i>Adams</i>	39
6.2 Implementacja mechanizmu Andrews'a	45
6.3 Wyniki symulacji	52
7 Podsumowanie i perspektywy	65
Spis piśmiennictwa	67
Załączniki	71

1 Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Analiza kinematyczna i dynamiczna układów wieloczłonowych jest stosunkowo nowym obszarem rozwijanym w mechanice. Rozwój mocy obliczeniowej współczesnych komputerów oraz specjalistycznego oprogramowania rozpowszechnił metodę układów wieloczłonowych zarówno w obszarze badań naukowych, jak i zastosowań komercyjnych (przemysł samochodowy, robotyka czy biomechanika). We wszystkich tych obszarach wymagane jest, aby solvery zastosowane do obliczeń układów wieloczłonowych były możliwie szybkie, uniwersalne i radziły sobie z trudnościami takimi jak:

- położenia osobliwe
- nieciągłości w działaniu sił
- układy z wysokimi częstotliwościami własnymi

W związku z rozwojem oprogramowania z graficznym interfejsem użytkownika (GUI) standardem staje się również budowa oprogramowania z interaktywnym interfejsem użytkownika (zamiast trybu wsadowego). Użytkownik powinien mieć możliwość wizualizacji przeprowadzanej symulacji (najlepiej w czasie rzeczywistym) oraz wpływania na przebieg symulacji (aplikowania kolejnych sił, kontroli nad stopniami swobody w trakcie symulacji, przerwania symulacji w razie wystąpienia pewnego zdarzenia). We wszystkich powyższych przypadkach niezbędnym jest, aby stan układu wieloczłonowego w kolejnych chwilach czasu był obliczony i wyświetlony na ekranie możliwie jak najszybciej.

Żeby to osiągnąć, wymagane jest zastosowanie odpowiedniego sformułowania zadania dynamiki oraz użycie odpowiedniej metody numerycznej do całkowania równań. Od doboru tych elementów zależyć będzie m.in. możliwy maksymalny krok całkowania, stabilność danego modelu i jego uniwersalność.

W ostatnich latach rozwinięto wiele nowych sformułowań zadania dynamiki dla układów wieloczłonowych. W niniejszej pracy przytoczone zostaną metody bazujące na użyciu zależnych współrzędnych absolutnych. Konsekwencją i istotną wadą użycia tych współrzędnych jest konieczność rozwiązywania układu równań różniczkowo-algebraicznych (RRA). Zaletą - uniwersalność i możliwość algorytmizacji.

1.2 Przegląd piśmiennictwa

Kolejne sformułowania opisane w pracy bazują na poprzednich i są ich udoskonaleniem. Fundamentalne prace, do których odwołują się pozostałe artykuły to [7] i [6]. Pierwsza praca dotyczy problemu stabilizacji, z kolei w drugiej po raz pierwszy zaproponowano nowe zmienne stanu do opisu układu mechanicznego, otrzymując kanoniczne równania ruchu. Praca [5] dla klasycznych równań wprowadza ogólną metodę kar, pozwalającą kontynuować symulację nawet w przypadku wystąpienia położen osobliwych. W pracy [9] zaaplikowano tę metodę do równań kanonicznych. Kolejnym udoskonaleniem jest zastosowanie metody rozszerzonego lagranżjanu,

czyli dodanie do ogólnej metody kar procesu iteracyjnego. Schemat postępowania i korzyści z takie podejścia (zarówno dla równań klasycznych i kanonicznych) pokazano w artykule [8]. Praca [10] rozszerza [8] o dodanie procesu iteracyjnego Newtona-Raphsona i zastosowanie metody trapezów jako procedury całkującej, co znaczaco poprawia stabilność i dokładność rozwiązania.

1.3 Cel pracy

Celem pracy jest porównanie różnych sformułowań zadania prostego dynamiki dla układów wieloczłonowych i stworzenie solvera uniwersalnego, zdolnego poradzić sobie z szeroką paletą problemów. Sformułowania które zostaną omówione to kolejno:

- klasyczne równania Newtona-Eulera (wraz ze stabilizacją, wykorzystujące nieoznaczone mnożniki Lagrange'a)
- kanoniczne równania ruchu (wyprowadzone z równania Hamiltona, wraz ze stabilizacją, wykorzystujące nieoznaczone mnożniki Lagrange'a)
- równania kanoniczne wraz z metodą rozszerzonego lagranżjanu i jawną metodą całkowania
- równania kanoniczne wraz z metodą rozszerzonego lagranżjanu i niejawną metodą całkowania (z iteracjami Newtona-Raphsona)

Jako przykład testowy do powyższych metod posłuży podwójne wahadło fizyczne. Parametrem, który posłuży do określenia stabilności każdej z metod, będzie energia całkowita układu. Każde kolejne sformułowanie jest rozwinięciem poprzedniego.

W kolejnym rozdziale zaprezentowane zostanie użycie sformułowań bazujących na rozszerzonym lagranżjanie do przeprowadzenia symulacji zadania prostego dynamiki mechanizmu Andrews'a (pochodzącemu z biblioteki [11]). Mechanizm ten nie nadaje się do całkowania standardowymi, jawnymi procedurami całkującymi (z racji wysokiej sztywności), stąd zastosowana zostanie procedura niejawną - *A-stabilna* metoda trapezów.

Wszystkie procedury dla poszczególnych sformułowań zostały zaprogramowane z użyciem środowiska *Matlab*.

2 Modelowanie układów płaskich we współrzędnych absolutnych

2.1 Sformułowanie więzów kinematycznych

Metodyka wyprowadzenia równań opisanych w tym rozdziale będzie zgodna z opisem zastosowanym podręcznikach [1] i [3].

Do modelowania układów dynamicznych można użyć 3 rodzajów współrzędnych:

- wsp. złączowe
- wsp. absolutne
- wsp. naturalne

Pokrótce omówione zostaną współrzędne absolutne. Należą one do współrzędnych bezwzględnych, czyli takich, które określają położenie i orientację lokalnego układu współrzędnych względem globalnego układu odniesienia. Aby w pełni opisać dany układ wieloczłonowy, z każdym członem trzeba związać jeden układ lokalny. Do pełnego opisu położenia członu w przestrzeni potrzeba 6 współrzędnych (3 współrzędne opisujące położenie i 3 opisujące orientacje). Na płaszczyźnie wystarczą 3 współrzędne (2 współrzędne opisujące położenie i 1 określająca orientację). Zatem dla każdego członu i mechanizmu możemy zdefiniować wektor współrzędnych absolutnych \mathbf{q}_i postaci:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Układ wieloczłonowy składający się z n członów zbudowany jest zatem z wektora współrzędnych uogólnionych absolutnych \mathbf{q} składającego się z $3n$ elementów postaci:

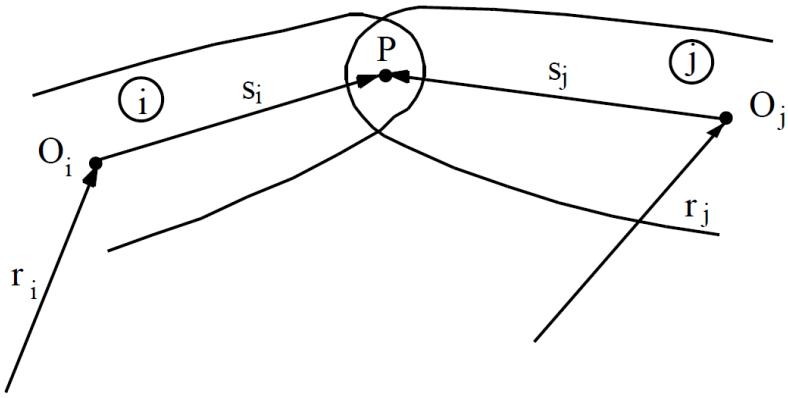
$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Tak skonstruowany wektor jednoznacznie określa położenie i orientację wszystkich członów mechanizmu. Zaletami stosowania współrzędnych absolutnych jest: łatwa rozszerzalność mechanizmu, prosta postać macierzy Jacobiego (podczas liczenia pochodnych cząstkowych w równaniu opisującym dany więz mogą wystąpić tylko współrzędne członów łączonych przez ten więz), możliwość budowy programu komputerowego dla mechanizmu o dowolnej budowie. Wadą powyższe sformułowania pozostaje fakt, że więzy te są zależne, nawet wtedy, gdy układ wieloczłonowy nie posiada zamkniętych pętli kinematycznych.

Równanie więzów niezależnych w sposób jawny od czasu można zapisać w postaci:

$$\Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

W dalszej części pracy będą rozpatrywane jedynie więzy holonomiczne postaci (2.3). Budowa przykładowego równania więzów zostanie przedstawiona dla pary obrotowej.



Rysunek 1: Schemat pary obrotowej

Wektorowe równanie więzów dla pary obrotowej przyjmuje postać:

$$\Phi^{po} = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i - (\mathbf{r}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j) = \mathbf{0} \quad (2.4)$$

Gdzie \mathbf{r}_i to wektor położenia układu i w układzie globalnym, \mathbf{R}_i to macierz transformacji układu i do układu globalnego, a \mathbf{s}_i to wektor wskazujący na parę obrotową w układzie lokalnym i . Powyższa para obrotowa łączy ze sobą człony i -ty z j -tym.

Macierz Jacobiego Φ_q dla układu wieloczłonowego powiązanego wieloma parami obrotowymi można zbudować z macierzy pochodnych cząstkowych, uzyskanych po zróżniczkowaniu równań więzów. Pochodne cząstkowe więzów Φ^{po} opisanych powyższym równaniem można obliczyć w postaci macierzowej:

$$\Phi_{\mathbf{r}_i}^{po} = \mathbf{I}_{2x2} \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\phi_i}^{po} = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\mathbf{r}_j}^{po} = -\mathbf{I}_{2x2} \quad (2.7)$$

$$\Phi_{\phi_j}^{po} = -\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \quad (2.8)$$

Gdzie macierz $\boldsymbol{\Omega}$ to:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Dla równań więzów (2.3) pierwszą pochodną po czasie można obliczyć ze wzoru:

$$\dot{\Phi} = \Phi_q \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (2.10)$$

Można zatem policzyć dla pary obrotowej (dla czytelności zapisu pominięto po w indeksie górnym):

$$\begin{aligned} \Phi_q \dot{\mathbf{q}} &= \Phi_{\mathbf{q}_i} \dot{\mathbf{q}}_i + \Phi_{\mathbf{q}_j} \dot{\mathbf{q}}_j = \Phi_{\mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i + \Phi_{\varphi_i} \dot{\varphi}_i + \Phi_{\mathbf{r}_j} \dot{\mathbf{r}}_j + \Phi_{\varphi_j} \dot{\varphi}_j = \\ &= \dot{\mathbf{r}}_i + \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \dot{\varphi}_i - \dot{\mathbf{r}}_j - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \dot{\varphi}_j \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dla więzów (2.3) zachodzi:

$$\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} = (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \quad (2.12)$$

Pochodna po czasie macierzy Jacobiego będzie niezbędna w sformułowaniu równań kanonicznych.

Różniczkując cząstkowo równanie (2.11) można otrzymać:

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_i} = \mathbf{0}_{2x2} \quad (2.13)$$

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\phi_i} = \Omega \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \dot{\varphi}_i = -\mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \dot{\varphi}_i \quad (2.14)$$

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_j} = \mathbf{0}_{2x2} \quad (2.15)$$

$$(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_j} = -\Omega \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \dot{\varphi}_j = \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \dot{\varphi}_j \quad (2.16)$$

Skorzystano z równania:

$$\Omega \Omega = -\mathbf{I}_{2x2} \quad (2.17)$$

Druga pochodna więzów (2.3) po czasie przyjmuje postać:

$$\ddot{\Phi} = \Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.18)$$

Powyższe równanie można zapisać w postaci:

$$\Phi_{\mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} = \Gamma \quad (2.19)$$

Gdzie:

$$\Gamma = -(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.20)$$

Wektor Γ niezbędny będzie w sformułowaniu klasycznych równań ruchu Newtona.

Dla pary obrotowej wektor Γ można policzyć ze wzoru:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -(\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_i} \dot{\mathbf{r}}_i - (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_i} \dot{\varphi}_i - (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{r}_j} \dot{\mathbf{r}}_j - (\Phi_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}})_{\varphi_j} \dot{\varphi}_j \\ &= -\Omega \Omega \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \dot{\varphi}_i^2 + \Omega \Omega \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \dot{\varphi}_j^2 = \mathbf{R}_i \mathbf{s}_i \dot{\varphi}_i^2 - \mathbf{R}_j \mathbf{s}_j \dot{\varphi}_j^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

2.2 Sformułowanie równań dynamiki

Równania dynamiki dla konkretnego i -tego członu w przestrzeni przyjmują postać (i -ty układ współrzędnych zaczepiony jest w środku masy i -tego członu>):

- Równanie Newtona, które opisuje ruch postępowy:

$$\mathbf{F}_i = m_i \ddot{\mathbf{r}}_c \quad (2.22)$$

Gdzie:

- \mathbf{F}_i to wektor siły wypadkowej przyłożonej do i -tego członu
- m_i jest masą i -tego członu
- wektor $\ddot{\mathbf{r}}_c$ jest wektorem wodzącym i -tego układu współrzędnych w układzie globalnym (inercjalnym)

- Równanie Eulera, opisujące ruch obrotowy i -tego członu sztywnego:

$$\mathbf{M}^i = \mathbf{J}_c^i \dot{\boldsymbol{\omega}}_{0,i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{0,i} \mathbf{J}_c^i \boldsymbol{\omega}_{0,i} \quad (2.23)$$

Gdzie:

- \mathbf{M}^i oznacza całkowity moment przyłożony do i -tego członu
- \mathbf{J}_c^i oznacza macierz bezwładności i -tego członu liczoną względem środka masy i w kierunku osi i -tego układu współrzędnych
- $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{0,i}$ to macierz stwarzyszona z wektorem prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}_{0,i}$ i -tego układu współrzędnych względem układu globalnego

Wszystkie wielkości zapisane są w i -tym układzie związanym z członem, dzięki czemu macierz \mathbf{J}_c^i jest stała.

Rozważane dalej będą płaskie układy wieloczłonowe, dlatego powyższe równania przyjmą prostszą postać. W dalszych rozważaniach przyjęto, że ruch układu odbywać będzie się w płaszczyźnie XY oraz że siły czynne przyłożone będą w płaszczyźnie XY. Oznacza to, że:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_i \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

Podstawiając powyższe do równania Newtona (2.22) otrzymać można:

$$m \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Z kolei równanie Eulera (2.23) można zapisać w postaci:

$$\begin{bmatrix} -J_{xz}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2 \\ -J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{xz}\dot{\varphi}^2 \\ J_{zz}\ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Pierwsze dwa równania nie są spełnione tożsamościowo. Źeby tak się stało, to oba momenty dewiacyjne $J_{xz} = J_{yz} = 0$. Wynika z tego fakt, że człon płaski w ogólnym przypadku nie porusza się ruchem płaskim pod wpływem płaskiego układu sił i momentów. Płaski ruch członu wynika z więzów narzuconych przez pary kinematyczne. W momencie, kiedy nie jest spełnione powyższe równanie lub środek masy członu nie leży w płaszczyźnie ruchu, to pojawią się siły reakcji działające poza płaszczyzną ruchu. Siły te jednak w przypadku braku tarcia nie mają wpływu na rozwiązywanie zadania dynamiki, dlatego w dalszej części będą pomijane.

Wobec powyższych faktów równanie ruchu i -tego członu płaskiego można zapisać w formie:

$$\begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c \\ \ddot{y}_c \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{x_i} \\ F_{y_i} \\ M_{z_i} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i \quad (2.27)$$

Dla n członów płaskich równanie dynamiki można zapisać w wektorowej formie:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Q}_n \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.29)$$

Gdzie \mathbf{M} to macierz masowa układu, \mathbf{q} to wektor współrzędnych uogólnionych, \mathbf{Q} to wektor sił uogólnionych.

2.3 Sformułowanie równań dynamiki dla członów skrępowanych więzami z użyciem nieoznaczonych mnożników Lagrange'a

Wektor sił wypadkowych można rozłożyć na siły aktywne \mathbf{Q}^A i siły reakcji pochodzące od więzów \mathbf{Q}^R zgodnie ze wzorem:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^A + \mathbf{Q}^R \quad (2.30)$$

Wektor $\delta\mathbf{q}$ to wektor przesunięć wirtualnych (zgodnych z więzami). Licząc różniczkę zupełną równania więzów (2.3) otrzymamy można:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Dla więzów idealnych (beza tarcia) zachodzi:

$$\delta\mathbf{q}^T \mathbf{Q}^R = 0 \quad (2.32)$$

Oznacza on, że wektor sił reakcji jest ortogonalny do wektora przesunięć wirtualnych (praca sił reakcji jest zerowa). Równanie (2.29) po przeniesieniu na lewą stronę i pomnożeniu lewostronnie przez $\delta\mathbf{q}^T$ przyjmuje postać:

$$\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}) = 0 \quad (2.33)$$

Po uwzględnieniu równań (2.30) i (2.32) w równaniu (2.33) można zapisać:

$$\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^A) = 0 \quad (2.34)$$

Transponując równanie (2.31) można zapisać:

$$(\Phi_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{q})^T = \delta\mathbf{q}^T \Phi_{\mathbf{q}}^T = \mathbf{0}^T \quad (2.35)$$

Można wprowadzić wektor $\boldsymbol{\lambda}$, który będzie oznaczać wektor nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Mnożąc powyższe równanie prawostronnie przez wektor $\boldsymbol{\lambda}$ otrzymać można:

$$\delta\mathbf{q}^T \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = 0 \quad (2.36)$$

Dodając powyższe równanie do równania (2.34) zachodzi:

$$\delta\mathbf{q}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{Q}^A + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}) = 0 \quad (2.37)$$

Wektor $\delta\mathbf{q}$ jest niezerowy, zatem z powyższego równania wynika, że zerowy musi być drugi wektor powyższego iloczynu, co prowadzi do:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q}^A \quad (2.38)$$

Równanie to opisuje dynamikę układu n członów sklepionych więzami, gdzie składnik $\Phi_q^T \lambda$ można interpretować jako siły reakcji.

W powyższym równaniu niewiadomymi są wektory $\ddot{\mathbf{q}}$ i λ . W celu uzyskania pełnego opisu ruchu, należy doliczyć do powyższego równania równanie więzów (2.3) otrzymując:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \lambda = \mathbf{Q}^A \\ \Phi(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (2.39)$$

Zgodnie z [1] (s.262-263) powyższe sformułowanie to układ równań różniczkowo-algebraicznych (RRA) o indeksie 3. Sformułowanie to będzie punktem wyjściowym dla dalszych sformułowań.

3 Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych (RRZ)

3.1 Podział algorytmów całkowania numerycznego

Zgodnie z [1] (s.243-247) metody całkowania można podzielić według różnych kryteriów:

1. rzędu metody
2. liczby odwołań do przeszłości:
 - metody jednokrokowe - rozwiązanie w następnym kroku zależy od wartości funkcji prawej strony f w kroku bieżącym - metody te są samostartujące
 - metody wielokrokowe - wykorzystywane są wartości rozwiązania (i/lub wartości funkcji prawej strony f) z kilku poprzednich kroków - metody te nie są samostartujące
3. jawności:
 - metody jawne - w kroku $k + 1$ nie odwołują się do wielkości wyznaczanej
 - metody niejawne - w kroku $k + 1$ odwołują się w sposób uwikłany do wielkości wyznaczanej y_{k+1}

3.2 Sformułowanie problemu

Układ równań różniczkowych zwyczajnych można zapisać w formie:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \quad (3.1)$$

Wraz z zadaną wartością \mathbf{y}_0 powyższe równanie służy do obliczenia wartości wektora pochodnej funkcji wektorowej $\dot{\mathbf{y}}$ w chwili t dla znanych wartości \mathbf{y} .

Niech t_k oznacza chwilę czasu t w kroku k . Wtedy $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ oraz $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(\mathbf{t}_k)$. Założymy, że funkcja \mathbf{f} jest różniczkowalna odpowiednią liczbę razy względem t i \mathbf{y} . W celu aproksymacji wartości funkcji $\mathbf{y}(t_{k+1})$ można posłużyć się wzorem Taylora:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \Delta t \mathbf{y}_k^{(1)} + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{y}_k^{(2)} + \dots \quad (3.2)$$

Gdzie:

$$\mathbf{y}^{(1)} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{y}^{(2)} = \dot{\mathbf{f}} = \mathbf{f}_t + \mathbf{f}_y \mathbf{f}$$

⋮

Zauważać można, że powyższe wyrażenie można zapisać w zależności od funkcji \mathbf{f} i jej kolejnych pochodnych. Dla dostatecznie małego kroku całkowania $h = \Delta t$ wyższych rzędów mogą zostać zaniedbane. Otrzymana w ten sposób formuła jest najprostszym schematem całkowania, powszechnie znanym jako jawny schemat Eulera:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h \mathbf{f}_k \quad (3.4)$$

Na podstawie powyższej metody całkowania omówione zostaną podstawowe problemy spotykane podczas rozwiązywania RRZ metodami przybliżonymi. Przyjąć można, że funkcja $y(t)$ będzie od teraz funkcją jednej zmiennej.

1. *Zgodność* - dotyczy różnicy pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym w chwili $t = t_{k+1}$. Założmy, że y_k jest rozwiązaniem dokładnym. Różnicę $e(h)$ pomiędzy rozwiązaniem ścisłym i przybliżonym popełnianym w k -tym kroku nazywa się lokalnym błędem całkowania. Metoda całkowania jest zgodna wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} e(h) = 0 \quad (3.5)$$

Dla metody jawnej Eulera $e(h) = \frac{1}{2}h^2 y''(t_k + \theta)$, gdzie $\theta \in (t_k; t_{k+1})$. Widać, że spełnione jest powyższy warunek.

2. *Rząd dokładności* - oznaczany przez r . Metoda całkowania jest r rzędu wtedy i tylko wtedy gdy:

$$e(h) = Ch^{r+1} + o(h^{r+1}), \quad C \neq 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^{r+1})}{h^{r+1}} = 0 \quad (3.6)$$

Zauważać można, że metoda Eulera jest 1. rzędu. Rząd metody wpływa na dokładność oszacowań wartości funkcji $y(t)$ w kolejnych krokach.

3. *Zbieżność* - można ją zdefiniować jako własność metody, która gwarantuje, że największe występujące odchylenie rozwiązania przybliżonego od rozwiązania ścisłego może być dośćcznie małe (a w granicy dążyć do 0) przy odpowiednim dobiorze kroku całkowania h . Innymi słowy - nie następuje kumulacja błędów popełnianych w każdym kolejnym kroku całkowania.

Równanie $\dot{y} = f(t, y)$ będzie rozwiązywane w przedziale $t \in (t_0; t_0+T)$. Jako $E(h)$ oznaczyć można globalny błąd całkowania:

$$E(h) = \max_{0 < k \leq n} |y(t_0 + kh) - y_k| \quad (3.7)$$

Metoda jest z definicji zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0 \quad (3.8)$$

4. *Stabilność* - prawdziwe jest stwierdzenie, że zgodność + stabilność = zbieżność.

Stabilność poszczególnych metod bada się rozwiązywając problem testowy:

$$f(t, y) = \dot{y} = \lambda y, \quad y(0) = Y_0 \quad (3.9)$$

Gdzie $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ jest liczbą zespoloną. Rozwiązanie analityczne powyższego problemu prezentuje się następująco:

$$y(t) = Y_0 e^{\lambda t} = Y_0 e^{\lambda_R t} (\cos \lambda_I t + i \sin \lambda_I t) \quad (3.10)$$

Jeżeli:

$$\lambda_r < 0 \quad \text{to} \quad \lim_{h \rightarrow 0} |y(t)| = 0 \quad (3.11)$$

3.3 Rodzaje stabilności numerycznej

Zagadnienie testowe determinuje rodzaj stabilności danego algorytmu całkowania. Wyróżnić można 2 rodzaje stabilności. Każdy rodzaj stabilności będzie przedstawiony na przykładzie konkretnych metod całkowania.

1. *Stabilność warunkowa* - najmniej restrykcyjny rodzaj stabilności. Metoda całkowania jest warunkowo stabilna, jeżeli jest stabilna dla pewnego zakresu wartości $h\lambda$. W takich metodach, krok czasowy h powinien być dobrany w zależności od problemu, scharakteryzowanego przez parametr λ . Metody stabilne mogą być zatem używane, jeżeli *a priori* znany jest zakres wielkości λ dla konkretnego problemu. Co ciekawe, istnieją metody stabilne warunkowo, dla których zmniejszenie kroku całkowania h powoduje wypadnięcie z obszaru stabilności (metody BDF3+). Pokazać można, że schemat jawnego Eulera jest warunkowo stabilny. Stosując go do rozwiązania problemu testowego (3.9) otrzymuje się ciąg liczb zespolonych opisanych regułą:

$$y_{k+1} = y_k + hf_k = y_k + h\lambda y_k = y_k(1 + h\lambda) \quad (3.12)$$

Zatem kolejne wartości opisane są wzorem:

$$y_k = Y_0(1 + h\lambda)^k \quad (3.13)$$

Otrzymany ciąg w odpowiedni sposób odwzoruje zachowanie rozwiązania dokładnego (3.11), gdy jego granica będzie wynosić 0 dla $k \rightarrow \infty$. Warunek ten będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $|1 + h\lambda| < 1$, co oznacza, że liczba zespolona $h\lambda$ musi na płaszczyźnie zespolonej należeć do wnętrza okręgu o promieniu 1 i środku w punkcie $(-1, 0)$.

2. *Stabilność absolutna (A-stabilność)* - są to algorytmy, których rozwiązanie numeryczne problemu (3.9) zbiega do zera, gdy spełniony jest warunek (3.11), co oznacza, że rozwiązanie numeryczne dąży do zera jeśli tylko odpowiadające mu rozwiązanie ścisłe dąży do zera. Obszar stabilności algorytmów *A-stabilnych* na płaszczyźnie zespolonej musi obejmować lewą półpłaszczyznę, wraz z osią urojoną Im .

Najważniejszą cechą algorytmów *A-stabilnych* jest brak wpływu doboru kroku całkowania h na stabilność procesu całkowania. Cecha ta jest niezmiernie ważna przy całkowaniu równań dynamiki układów wieloczłonowych, ponieważ jedynym kryterium przy doborze kroku całkowania h pozostaje wtedy zapewnienie wystarczającej dokładności. Metody *A-stabilne* są niezastąpione przy całkowaniu układów sztywnych, dla których oś urojona Im musi być częścią obszaru zbieżności.

Zgodnie z teorią, liniowa niejawną metodą *A-stabilną* może być co najwyżej 2. rzędu. W dalszej części omówione zostaną 2 metody *A-stabilne*:

- niejawny schemat Eulera
- metoda trapezów

3.4 Niejawny schemat Eulera

Niejawny schemat Eulera przedstawia się następująco

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}) \quad (3.14)$$

Warto zauważyć, że algorytm ten odwołuje się w sposób uwikłany do wielkości wyznaczanej y_{k+1} , zatem jeżeli funkcja $f(t, y)$ jest nielinowa, konieczne w każdym kroku staje się znajdowanie rozwiązania w procesie iteracyjnym (np. Newtona-Raphsona). Niejawny schemat Eulera jest również 1. rzędu.

Niejawny schemat Eulera zastosowany do problemu testowego stabilności (3.9) zwraca ciąg rekurencyjny:

$$y_{k+1} = y_k + h \lambda y_{k+1} \quad (3.15)$$

Po przekształceniach można zapisać wzór jawnego na kolejne wartości:

$$y_{k+1} = \frac{1}{(1 - h\lambda)^k} Y_0 \quad (3.16)$$

Otrzymany ciąg w odpowiedni sposób odwzoruje zachowanie rozwiązania dokładnego (3.11), gdy jego granica będzie wynosić 0 dla $k \rightarrow \infty$. Warunek ten będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1}{|1 + h\lambda|} \leq 1$, co jest tożsame $|h\lambda - 1| \geq 1$.

Warunek ten oznacza, że liczba zespolona $h\lambda$ musi na płaszczyźnie zespolonej leżeć poza okręgiem o promieniu 1 i środku w punkcie $(1, 0)$. Zatem niejawny schemat Eulera jest *A-stabilny*, ponieważ do obszaru zbieżności (3.16) należy lewa półpłaszczyzna zespolonej wraz z osią Im .

3.5 Metoda trapezów

Metoda trapezów (zwana również metodą Cranka-Nicholsona) przedstawia się wzorem:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f_k + f_{k+1}) \quad (3.17)$$

Metoda trapezów jest metodą 2. rzędu. Można o niej myśleć, jak o średniej arytmetycznej jawnego i niejawnego schematu Eulera. Zastosowana do problemu (3.9) daje rezultat:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \lambda (y_k + y_{k+1}) \quad (3.18)$$

Po przekształceniu wzór jawnego na kolejne wartości ma postać:

$$y_{k+1} = \left(\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \right)^k Y_0 \quad (3.19)$$

Otrzymany ciąg w odpowiedni sposób odwzoruje zachowanie rozwiązania dokładnego (3.11), gdy jego granica będzie wynosić 0 dla $k \rightarrow \infty$. Warunek ten będzie spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{1 + \frac{h\lambda}{2}}{1 - \frac{h\lambda}{2}} \leq 1$, co jest tożsame $|h\lambda + 2| \leq |h\lambda - 2|$.

Warunek ten oznacza, że liczba zespolona $h\lambda$ musi na płaszczyźnie zespolonej leżeć w odległości mniejszej bądź równej punktowi $(-2, 0)$ niż punktowi $(2, 0)$. Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest lewa półpłaszczyzna zespolona, zatem metoda trapezów jest *A-stabilna*.

Dzięki temu, że metoda obejmuje oś urojoną Im , jest odpowiednia do całkowania układów oscylacyjnych bez tłumienia. Ponadto zgodnie z [1] metoda trapezów jest najbardziej dokładną metodą *A-stabilną* z rodziny algorytmów Newmark'a. Jej ważną własnością jest zachowywanie energii całkowej układu liniowego (takiego którego równania stanu mają postać $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Ay}$ gdzie macierz \mathbf{A} jest stała).

Metoda trapezów dla układów nieliniowych może utracić *A-stabilność*. W [1] (s.257-258) dowiedziono, że dzieje się tak dla nieliniowego równania skalarnego $\dot{y} = \lambda(y)y$. Gdy $\lambda_k > \lambda_{k+1}$ metoda trapezów staje się warunkowo stabilna z warunkiem $h \leq \frac{4}{\lambda_k - \lambda_{k+1}}$. Sposobem na rozwiązanie tego problemu może być:

- zastosowanie metody punktu środkowego: $t_{k+\frac{1}{2}} = t_k + \frac{h}{2}$, $y_{k+1} = y_k + hf_{k+\frac{1}{2}}$
- wprowadzenie więzów na energię
- wprowadzenie sztucznego tłumienia w trakcie procesu całkowania

3.6 Metody Runego-Kutty

Są to jawne (ERK) lub niejawne (IRK) metody jednokrokowe. Aby osiągnąć wyższy rząd zgodnie ze wzorem (3.2) należałoby w każdej chwili czasu obliczać funkcję $f(t, y)$ wraz z jej pochodnymi zgodnie z (3.3). Główną ideą metod RK jest osiągnięcie wymaganego rzędu metody poprzez wielokrotne wywoływanie funkcji prawych stron f . Wyprowadzenie metod poszczególnych rzędów bazuje na wzorze Taylora (3.2). Oszczędza się w ten sposób czasochłonnego wyliczania pochodnych wysokich rzędów funkcji f . Najbardziej popularny wariantem powyższych metod jest metoda 4.rzdu znana jako RK4 postaci:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 &= hf(t_k, y_k) \\ K_2 &= hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}K_1) \\ K_3 &= hf(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{1}{2}K_2) \\ K_4 &= hf(t_k + h, y_k + K_3) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Zgodnie z powyższym funkcja prawej strony $f(t, y)$ obliczana jest 4 razy. W metodach rzędów większych od 4 liczba wywołań funkcji f jest większa od rzędu (np. dla RK5 jest to 6 wywołań). Bardzo popularną procedurą całkującą z adaptacją rzędu, bazującą na rodzinie metod Runego-Kutty, jest procedura *Matlaba ode45*, która zostanie wykorzystana w dalszej części pracy.

Widać, że kolejne wyrażenia K_i mogą być obliczone jawnie w każdym kroku. W przypadku schematu niejawnego równania na kolejne współczynniki przyjmują postać:

$$\begin{aligned} K_i &= f(t_k + c_i h, y_k + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} K_j) \\ y_{k+1} &= y_k + h \sum_{i=1}^r \beta_i K_i \end{aligned} \tag{3.21}$$

Niejawne metody Rungego-Kutty są stabilniejsze i dokładniejsze od jawnych odpowiedników (metody $2r$ rzędu są *A-stabilne*). Jednakże (z wyjątkiem metody trapezów), są dużo trudniejsze w implementacji i kosztowniejsze w użyciu.

3.7 Krótkie omówienie metod wielokrokowych

Główym celem użycia metod wielokrokowych jest zwiększenie rzędu metody (a więc i dokładności) poprzez sięganie w k -tym kroku do p kroków wstecz. Współczynniki α_i i β_i wyprowadzane są metodą interpolacji (AM) lub ekstrapolacji (AB) wielomianowej, bądź nieoznaczonych współczynników (na podstawie wzoru Taylora 3.2). Ogólny wzór tych metod wygląda następująco:

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^p \alpha_i y_{k-i} + h \sum_{i=-1}^p \beta_i f_{k-i} \quad (3.22)$$

Jeżeli $\beta_{-1} = 0$, to metoda jest jawną. Główne rodziny metod wielokrokowych to:

1. Metody Adamsa-Bashfortha - metody jawnie:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=0}^p \beta_i f_{k-i} \quad (3.23)$$

Warto zauważyć, że metoda AB 1. rzędu to schemat jawnego Eulera.

2. Metody Adamsa-Moultona - metody niewjawne:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=-1}^p \beta_i f_{k-i} \quad (3.24)$$

Analogicznie można zauważyć, że metoda AM 1. rzędu to schemat niewjawnego Eulera. Z kolei metoda AM 2. rzędu to metoda trapezów.

3. Metody wstecznego różniczkowania (BDF) - również metody niewjawne

$$y_{k+1} = \sum_{i=0}^p \alpha_i y_{k-i} + h f_{k+1} \quad (3.25)$$

Metody BDF są przeznaczone do całkowania układów sztywnych z powodów numerycznych (wysokie częstotliwości własne są szybko wytłumiane, drgania o niskich częstotliwościach trwają dużo dłużej). Metody BDF są *L-stabilne* - czyli takie, których obszar stabilności zawiera obszar $Re(h\lambda) < -\eta$, gdzie $\eta > 0$.

Istotnymi zaletami metod wielokrokowych jest ich prostota i szybkość (uzyskanie wysokiego rzędu jest obliczeniowo tanie w porównaniu z metodami RK). Wadami jest konieczność zainicjowania, problemy ze zmianą kroku całkowania w trakcie procesu całkowania oraz warunkowa stabilność (ponadto obszar stabilności pomniejsza się wraz ze wzrostem rzędu metody).

3.8 Idea metod predyktor-korektor

Jeśli problem nie jest sztywny, dobrym pomysłem okazuje się połączenie jawnych metod AB z niejawnymi AM o tym samym rzędzie. Za pomocą metody jawnej przewiduje się rozwiązanie w kroku $k + 1$, które następnie aplikuje się w metodzie niejawnnej. Dla schematu Eulera wygląda to następująco:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{k+1} &= y_k + h f(t_k, y_k) && - \text{predykcja} \\ y_{k+1} &= y_k + h(f, t_{k+1}, \hat{y}_{k+1}) && - \text{korekcja}\end{aligned}\quad (3.26)$$

Etap korekcji można zamknąć w procesie iteracyjnym, jednakże zbieżność tego procesu jest liniowa. Zastosowanie predyktora liniowego jako przybliżenia startowego dla procesu Newtona-Raphsona, który ma zbieżność kwadratową, jest lepszym rozwiązaniem.

Na rysunku poniżej przedstawiono zestawienie algorytmów całkowania numerycznego obecnych w *Matlabie*:

Solver	Problem Type	Accuracy	When to Use
ode45	Nonstiff	Medium	Most of the time. ode45 should be the first solver you try.
ode23		Low	ode23 can be more efficient than ode45 at problems with crude tolerances, or in the presence of moderate stiffness.
ode113		Low to High	ode113 can be more efficient than ode45 at problems with stringent error tolerances, or when the ODE function is expensive to evaluate.
ode15s	Stiff	Low to Medium	Try ode15s when ode45 fails or is inefficient and you suspect that the problem is stiff. Also use ode15s when solving differential algebraic equations (DAEs).
ode23s	Stiff	Low	ode23s can be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances. It can solve some stiff problems for which ode15s is not effective. ode23s computes the Jacobian in each step, so it is beneficial to provide the Jacobian via odeset to maximize efficiency and accuracy. If there is a mass matrix, it must be constant.
ode23t		Low	Use ode23t if the problem is only moderately stiff and you need a solution without numerical damping. ode23t can solve differential algebraic equations (DAEs).
ode23tb		Low	Like ode23s, the ode23tb solver might be more efficient than ode15s at problems with crude error tolerances.
ode15i	Fully implicit	Low	Use ode15i for fully implicit problems $f(t,y,y') = 0$ and for differential algebraic equations (DAEs) of index 1.

Rysunek 2: Metody całkowania numerycznego zaimplementowane w środowisku *Matlab*

4 Problematyka rozwiązywania równań RRA

4.1 Podstawowe pojęcia

Zgodnie z równaniem (2.39) konsekwencją użycia współrzędnych zależnych w modelowaniu układów wieloczłonowych jest konieczność rozwiązywania układu równań różniczkowo-algebraicznych (RRA). Wyróżnia się dwie postacie równań RRA:

- postać niejawną:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \quad (4.1)$$

Gdzie macierz \mathbf{F}_{ij} może być osobliwa.

- postać półjawną:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{Z}_0, \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Równanie (2.39) jest w postaci półjawnnej.

Teoria rozwiązywania równań RRA, w przeciwieństwie do równań różniczkowych zwyczajnych (RRZ), nie jest kompletna i wciąż pozostaje tematem badań. Rozwiązywanie RRA może nie istnieć, a jeżeli istnieje może nie być jedynym rozwiązaniem. Ciężko też znaleźć solvery ogólnego przeznaczenia, które byłyby odpowiednie od szerokiej klasy problemów.

W przypadku równań RRA bardzo ważnym pojęciem jest *indeks różniczkowy RRA*. Jest to liczba różniczkowań względem czasu równania (4.1) jakie trzeba wykonać aby otrzymać układ równań różniczkowych zwyczajnych postaci (3.1). Im wyższy jest indeks równania, tym więcej problemów sprawia całkowanie numeryczne tego równania. W osobnym podrozdziale zostaną omówione najbardziej intuicyjne metody rozwiązywania równań RRA.

4.2 Układy sztywne

Układy sztywne (inaczej źle uwarunkowane) opisane są przez równania różniczkowe zawierające człony wpływające na szybką zmienność rozwiązania. Rozwiązywanie tych równań standardowymi metodami (nawet pomimo zastosowania małego kroku całkowania) może być niestabilne.

Dany jest układ fizyczny scharakteryzowany poprzez zmienne stanu \mathbf{y} . Układ ten (liniowy jednorodny) jest opisany w zmiennych stanu równaniem:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (4.3)$$

Gdzie \mathbf{A} to macierz o stałych współczynnikach, którą można przedstawić w pewnej bazie w postaci:

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}\boldsymbol{\lambda}\mathbf{C}^{-1} \quad (4.4)$$

Gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ to macierz diagonalna wartości własnych układu:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Oznaczyć można $\lambda(\mathbf{A}) = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ jako zbiór wartości własnych macierzy \mathbf{A} . Układ fizyczny jest sztywny z powodów fizycznych gdy:

$$\begin{aligned} Re\lambda(\mathbf{A}) &\subset \{a : a < 0\} \\ \frac{\max(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)}{\min(|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|)} &\gg 1 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Układy RRA wykazują właściwości RRZ źle uwarunkowanych. Do całkowania układów sztywnych wskazane są metody *A-stabilne*. Do całkowania układów źle uwarunkowanych, ale przy tym o dużym tłumieniu ($Re(\lambda) \ll 0$) dedykowane są algorytmy *L-stabilne* (np. BDF).

4.3 Wybrane podejścia w rozwiązywaniu RRA

1. Rozwiązywanie bezpośrednie równań o indeksie 3.

Polega na zaaplikowaniu niejawnych schematów całkowania Rungego-Kutty (3.21) bądź schematów BDF (3.25) do równania (2.39).

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}} \quad (4.7)$$

- Użycie schematu BDF

Można przekształcić równanie (3.25) w celu wyznaczenia pochodnych w kroku k :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{k+1} &= \frac{1}{h\beta_0}(\mathbf{q}_{k+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{q}_{k-i}) \\ \dot{\mathbf{v}}_{k+1} &= \frac{1}{h\beta_0}(\mathbf{v}_{k+1} - \sum_{i=0}^p \alpha_i \mathbf{q}_{k-i}) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Powyższe formuły można teraz bezpośrednio wstawić do równań (2.39) otrzymując nieliniowy układ równań algebraicznych, który można rozwiązać używając np. metody Newtona-Raphsona. Udowodniono, że metody BDF k -krokowe, o stałym kroku h , są zbieżne i stabilne do rzędu $o(h^k)$ jeżeli wartości początkowe są wystarczająco dokładne. W rozwiązywaniu takiego sformułowania występują jednak znaczące trudności numeryczne:

- Macierz użyta w iteracjach Newtona-Raphsona staje się źle uwarunkowana dla małego kroku czasowego h .
- Nagłe zmiany w zmiennych i więzach mogą skutkować niestabilnością rozwiązania (metoda BDF próbuje dopasować wielomian w punkcie takiej nieciągłości). Krok czasowy h musi zostać wtedy zmniejszony, co z kolei skutkuje poprzednim problemem. Nieciągłości mogą zostać ominięte, poprzez reinitializację procesu całkowania ze spójnymi warunkami początkowymi, uzyskanymi ze zróżniczkowania równania więzów (2.3). Reinitializacja jest bardzo kosztowna czasowo.
- Metody wielokrokowe nie są samostartujące. Metoda k -krokowa wymaga $k - 1$ wystarczająco dokładnych rozwiązań, które muszą być uzyskane inną metodą. Metoda wielokrokowa jest zatem silnie wrażliwa od dokładności metody inicjującej.

- Użycie schematu IRK

Równania (3.21) można zaaplikować do równania dynamiki (2.39):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q}_k + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \mathbf{K}_j) \mathbf{L}_i &= \mathbf{Q}_{k+1} - \Phi_{\mathbf{q}}^T(\mathbf{q}_k + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \mathbf{K}_j) \boldsymbol{\lambda}_{k+1} & (4.9) \\ \Phi(tk + c_i h, \mathbf{q}_k + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \mathbf{K}_j) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_i &= v_k + h \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} \mathbf{L}_j \\ i &= 1, \dots, r \end{aligned}$$

Gdzie \mathbf{L}_i to pochodne pośrednie prędkości $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}$. Niewiadomymi w powyższym wyrażeniu są \mathbf{K}_i , \mathbf{L}_i oraz $\boldsymbol{\lambda}$.

Takie podejście w rozwiązywaniu równania dynamiki RRA (2.39):

- Lepiej radzi sobie z nieciągłościami współrzędnych i więzów, ponieważ metoda IRK jest jednokrokowa.
- Schemat IRK jest samostartujący, wystarczą warunki początkowe w chwili t_0 .
- Zmniejszenie kroku czasowego nie powoduje złego uwarunkowania macierzy używanej w iteracjach N-R

Niestety otrzymany układ równań jest większy, bardziej skomplikowany, a macierz używana w iteracjach N-R trudniejsza do policzenia.

2. Obniżenie indeksu RRA

Obniżyć indeks równań dynamiki RRA można uzyskać poprzez zróżniczkowanie równania więzów (2.3):

- jednokrotne (2.10) - otrzymując RRA o indeksie 2.
- dwukrotne (2.19) - otrzymując RRA o indeksie 1.

Równanie dynamiki o indeksie 1. można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Gamma \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Powyzsze równanie można rozwiązywać algorytmami dedykowanymi dla RRZ. Niestety, przy takim sformułowaniu występuje efekt naruszenia więzów dla prędkości i położień. Potrzebny jest mechanizm utrzymujący więzy dla położień i prędkości pod kontrolą - tym mechanizmem jest stabilizacja więzów.

3. Redukcja do współrzędnych niezależnych

Pomysł bazuje na użyciu macierzy transformacji \mathbf{R} i uzyskaniu minimalnej liczby współrzędnych uogólnionych niezależnych. Zgodnie z równaniem (2.10) wektor $\dot{\mathbf{q}}$ należy do jądra przekształcenia liniowego opisanego przez macierz Jacobiego $\Phi_{\mathbf{q}}$. Rozmiar podprzestrzeni jądra wynosi f .

$$\dim(Ker(\Phi_{\mathbf{q}})) = f \quad (4.11)$$

Gdzie f to również liczba stopni swobody mechanizmu. Wektor $\dot{\mathbf{q}}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów podprzestrzeni jądra w postaci:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{z}} \quad (4.12)$$

Gdzie kolumny macierzy \mathbf{R} to wektory bazowe podprzestrzeni jądra macierzy Jacobiego $\Phi_{\mathbf{q}}$. Zgodnie z tym zachodzi równanie:

$$\Phi_{\mathbf{q}}\mathbf{R} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}^T\Phi_{\mathbf{q}}^T = \mathbf{0}^T \quad (4.13)$$

Macierz \mathbf{R} można uzyskać z macierzy Jacobiego $\Phi_{\mathbf{q}}$ poprzez faktoryzację LU, dekompozycję z macierzą diagonalną zgodnie z (4.4) lub poprzez rozkład QR. Podstawienie równania (4.12) do pierwszego równana (2.39) i pomnożenie lewostronne przez \mathbf{R}^T prowadzi do:

$$\mathbf{R}^T\mathbf{M}\mathbf{R}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q} \quad (4.14)$$

5 Wybrane sformułowania zadania prostego dynamiki

5.1 Równania Newtona-Eulera wraz ze stabilizacją Baumgarte'a

Równania te oparte są na przyspieszeniach $\ddot{\mathbf{q}}$. Konsekwencją tego, jest konieczność dwukrotnego różniczkowania równania więzów (2.3). Zamiast rozpatrywać równanie więzów postaci $\ddot{\Phi} = \mathbf{0}$, można rozpatrywać równanie postaci:

$$\ddot{\Phi} + 2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

Pomysł pochodzi z pracy [7]. Powyższe równanie jest analogiczne do liniowego równania drgań tłumionych. Układ równań (4.10) przyjmuje teraz postać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_{\mathbf{q}}^T \\ \Phi_{\mathbf{q}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \Gamma - 2\xi\omega\Phi_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} - \omega^2\Phi \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Gdzie wektor \mathbf{q} ma rozmiar n , a wektor λ ma rozmiar m .

Algorytm rozwiązywania zadania prostego dynamiki

1. Zadanie warunków początkowych (wektorów \mathbf{q}_0 i $\dot{\mathbf{q}}_0$) spełniających równania więzów dla położen (2.3) i prędkości (2.10).
2. Konstrukcja wektora:

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \dot{\mathbf{q}}_0 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

3. Stworzenie funkcji \mathbf{H} takiej że:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) \quad (5.4)$$

Powyższa funkcja działa następująco:

- Wczytanie aktualnego czasu i wektora \mathbf{Y}
- Obliczenie macierzy i wektorów występujących w (5.2) i rozwiązywanie tego układu równań o rozmiarze $m + n$. Do rozwiązywania powyższego układu równań dobrze jest użyć algorytmów dedykowanych dla macierzy rzadkich.
- Podstawienie:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

4. Użycie wybranej jawnnej procedury całkującej.

Do rozwiązywania wszystkich układów równań liniowych postaci $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ użyto polecenia *Matlaba* postaci $\mathbf{x} = \mathbf{A}\backslash\mathbf{b}$. Do całkowania powyższego równania zastosowano procedure *ode45*. Zapewnia ona dość dobrą dokładność przy odpowiednio małym kroku. Nie należy jej jednak używać bez stabilizacji więzów, ponieważ nie zabezpiecza ona przed niekontrolowanym przyrostem energii całkowej.

Powyższe sformułowanie jest proste i skuteczne, jednak nie radzi sobie z problemami, z którymi radzić będą kolejne sformułowania. Ponadto stabilizacja odbywa się kosztem niedokładności w więzach dla przyspieszeń.

5.2 Kanoniczne równania ruchu wraz ze stabilizacją

Funkcja Lagrange'a L dla układu mechanicznego przyjmuje postać:

$$L = T - V \quad (5.6)$$

Gdzie T to energia kinetyczna układu, a V to energia potencjalna. Równania ruchu Lagrange'a można przedstawić w postaci:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{P} \quad (5.7)$$

Gdzie \mathbf{P} to wektor sił niezachowawczych czynnych. Powyższe równania w ogólności są tożsame pierwszemu równaniu z (2.39).

Funkcja Hamiltona H dla układu mechanicznego przyjmuje postać:

$$H = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - L \quad (5.8)$$

Gdzie \mathbf{p} to wektor pędów uogólnionych. Kanoniczne równania ruchu zdefiniowane są jako:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right)^T \\ -\dot{\mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \mathbf{P} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Można powyższe równania zapisać w formie:

$$\begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} = L_{\mathbf{q}}^T + \mathbf{P} - \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \quad (5.10)$$

Powyższe równania wraz z równaniem więzów (2.3) prowadzą do układu równań różniczkowo-algebraicznych o wymiarze $2n+m$. Zadanie to jest większe od sformułowania klasycznego, jednak wyjściowy indeks RRA w tym wypadku ma indeks 2, co jest korzystniejsze z numerycznego punktu widzenia.

Zgodnie z pomysłem z [6] wprowadzić można zmodyfikowaną funkcję Lagrange'a, uwzględniając w niej więcej na prędkości:

$$\hat{L} = L + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5.11)$$

Zmodyfikowane równanie Hamiltona przedstawia się teraz następująco:

$$\hat{H} = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{q}} - \hat{L} \quad (5.12)$$

Nowe pędy uogólnione $\hat{\mathbf{p}}$ przyjmują postać:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\sigma} \\ \hat{\mathbf{p}} = L_{\mathbf{q}}^T + \mathbf{P} + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (5.13)$$

Ze zróżniczkowania pierwszego z powyższych równań można pokazać, że:

$$\boldsymbol{\lambda} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.14)$$

Równania (5.13) należy rozpatrywać wraz z równaniami więzów dla położień (ze stabilizacją więzów dla położień):

$$\dot{\Phi} + \gamma\Phi = \Phi_q \dot{q} + \gamma\Phi = \mathbf{0} \quad (5.15)$$

Można również dodać dodatkowy warunek całkowy otrzymując:

$$\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau = \mathbf{0} \quad (5.16)$$

W każdym kroku czasowym konieczne jest rozwiązywanie układu równań postaci:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}} \\ -2\xi\omega\Phi - \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

Mimo, że w sformułowaniu równań kanonicznych występuje $2n + m$ niewiadomych, to rozwiązywany układ równań jest wciąż rozmiaru $n + m$.

Od tego momentu nowe pędy uogólnione będą oznaczane \mathbf{p} zamiast $\hat{\mathbf{p}}$. Ponadto wektor sił uogólnionych \mathbf{Q} oznaczać będzie:

$$\mathbf{Q} = L_q^T + \mathbf{P} \quad (5.18)$$

Algorytm rozwiązywania zadania prostego dynamiki

1. Podanie warunków początkowych (wektorów \mathbf{q}_0 i $\dot{\mathbf{q}}_0$) spełniających równania więzów dla położień (2.3) i prędkości (2.10).
2. Policzenie wektora \mathbf{p}_0 ze wzoru:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (5.19)$$

3. Konstrukcja wektora:

$$\mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

4. Konstrukcja funkcji H zgodnie z (5.4). Powyższa funkcja działa następująco:

- Wczytanie aktualnego czasu i wektora \mathbf{Y}
- Obliczenie macierzy i wektorów występujących w (5.17) i rozwiązywanie tego układu równań. Po rozwiązaniu powyższego układu znany jest wektor prędkości $\dot{\mathbf{q}}$. Pochodna pędów $\dot{\mathbf{p}}$ może być policzona ze wzoru:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} + \dot{\Phi}_q^T \boldsymbol{\sigma} \quad (5.21)$$

- Podstawienie:

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

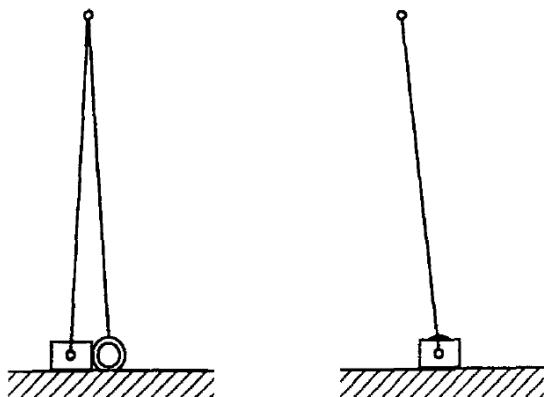
5. Użycie jawnej procedury całkującej.

Do scałkowania powyższego problemu również użyto procedury *ode45*.

Sformułowanie zadania dynamiki w postaci równań kanonicznych ma wiele zalet w porównaniu do sformułowania z 5.1 (wg [6]):

- Konieczność jednokrotnego różniczkowania równania więzów (zamiast dwukrotnego).
- Mniejsze naruszenie równań więzów przez procedurę całkującą.
- Gdyby nie stosować stabilizacji, w sformułowaniu Newtona-Eulera 5.1 występuje liniowe narastanie błędu więzów dla położen. W sformułowaniu równań kanonicznych błąd dla położen pozostaje stały, zatem uzyskane rozwiązania są dokładniejsze.
- Prędkości są zmiennymi stanu związanymi jedynie z danymi członami, podczas gdy pędy uogólnione występujące w równaniach kanonicznych zawierają składnik związany z więzami. Dzięki temu, mniej prawdopodobne jest uzyskanie w rozwiązaniu odpowiedzi z wysokimi częstotliwościami
- Sformułowanie w równaniach kanonicznych jest ponadto zalecane do modelowania zjawisk nieciągłych (zderzeń), podczas których spełniona jest zasada zachowania pędu.

Problemy klasycznych sformułowań



Rysunek 3: Mechanizm korbowo-wodzikowy - możliwe ruchy w punkcie bifurkacji

Klasyczne sformułowania opisywane do tej pory zawodzą, gdy mechanizm osiągnie położenie osobliwe. Położenie osobliwe mechanizmu wiąże się z nagłą zmianą stopni swobody mechanizmu. Dla przykładu: rysunek powyżej prezentuje mechanizm korbowo-wodzikowy z korbą i wahaczem o równej długości. Kiedy korba i wahacz ustawią się w linii pionowej, mechanizm ma dwa możliwości ruchu:

- dalej jako mechanizm korbowo-wodzikowy (rysunek po lewej)
- jako pojedyncze wahadło (rysunek po prawej)

Punkt, w którym mechanizm zyskuje dodatkowy stopień swobody, nazywa się punktem bifurkacji. Jest on natychmiastowo wykrywany, gdy macierz Jacobiego Φ_q traci rząd. W takim wypadku symulacja zatrzymuje się, co jest spowodowane niedoskonałością modelu matematycznego.

Jeżeli wszystkie więzy są niezależne, to zachodzi:

$$m = n - f \quad (5.23)$$

Gdzie m to liczba narzuconych więzów, n to liczba współrzędnych uogólnionych, a f to ru-
chliwość mechanizmu (lub rozmiar przestrzeni jądra macierzy R z podrozdziału 4.3). Macierze
występujące w (5.2) i (5.17) mają wtedy rząd $n + m$. Ponieważ macierz Jacobiego Φ_q staje się
osobliwa, to degenerują się również macierze stojące przy tych równaniach. Nie można przez to
jednoznacznie wyznaczyć przyspieszeń (bądź prędkości w sformułowaniu (5.17)). Również sfor-
mułowanie we współrzędnych niezależnych nie radzi sobie w tej sytuacji (nie można wyznaczyć
macierzy \mathbf{R}).

Problemem jest nie tylko dokładne osiągnięcie położenia osobliwego, ale też zbliżenie się
do niego. Odpowiednie macierze (zanim stracą rząd) stana się źle uwarunkowane, co prowadzi
do narastania błędu więzów i spadku dokładności rozwiązania.

Warto podkreślić, że położenie osobliwe zawsze pociąga za sobą osobliwość macierzy Jacobiego Φ_q . Jednakże osobliwość macierz Jacobiego może być również spowodowana gdy występujące
więzy są zależne bądź wybór współrzędnych niezależnych nie został dokonany poprawnie.

5.3 Sformułowanie oparte na rozszerzonym lagranżjanie i równaniach kanonicznych

5.3.1 Wersja podstawowa

Niniejsze sformułowanie pochodzi z pracy [5]. Metoda ta polega na wygenerowaniu mnożników Lagrange'a z równań więzów, które stają się funkcjami kar za niespełnienie tychże więzów
oraz na dodaniu do lagranżjanu (5.6) dwóch dodatkowych składników zależnych od spełnienia
równań więzów (fikcyjną energię potencjalną i kinetyczną). Zdefiniować tak można nową funkcję
Lagrange'a postaci:

$$\tilde{L} = L + \frac{1}{2}\dot{\Phi}^T \alpha \dot{\Phi} - \frac{1}{2}\Phi^T \alpha \omega^2 \Phi + \dot{\Phi} \tilde{\sigma} \quad (5.24)$$

W granicy, gdy równania więzów są spełnione, fikcyjne człony znikają i $\tilde{\sigma} = \sigma$. Do układu
dodane są również siły dyssypacyjne (związane z więzami dla prędkości) Rayleigh'a postaci:

$$G_k = -2\alpha\xi\omega\dot{\Phi} \quad (5.25)$$

Pędy uogólnione dla takiego sformułowania przybiorą postać:

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_q^T \alpha \dot{\Phi} + \Phi_q^T \tilde{\sigma} \quad (5.26)$$

Użycie zmodyfikowanego równania Hamiltona (5.12), równań kanonicznych z (5.9) i sił Ray-
leigh'a (5.25) prowadzi do kompletnego układu równań kanonicznych:

$$(\mathbf{M} + \Phi_q^T \alpha \Phi_q)\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \Phi_q^T \tilde{\sigma} \quad (5.27)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} + \dot{\Phi}_q^T \alpha \dot{\Phi} - \Phi_q^T \alpha (2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi) + \dot{\Phi}_q^T \tilde{\sigma} \quad (5.28)$$

Jest to układ $2n$ równań różniczkowych zwyczajnych, jednakże w każdym kroku czasowym
musi być rozwiązywany układ równań liniowych o wymiarze n , gdyż pochodzi pędów uogólnionych
zadana jest w jawnej formie. Niestety, takie sformułowanie powoduje, że większość składników
funkcji kar koncentruje się w równaniu (5.28), co powoduje dużą sztywność numeryczną
powyższego sformułowania. W pracy [8] zaproponowano dodatkową stabilizację.

Warto wspomnieć, że obok sformułowania opartego na rozszerzonych mnożnikach Lagrange'a i równaniach kanonicznych istnieje analogiczne sformułowanie oparte na klasycznych równaniach Newtona-Eulera (opartych na przyspieszeniach) postaci:

$$(\mathbf{M} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha (\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + 2\xi\omega\dot{\Phi} + \omega^2\Phi) - \Phi_{\mathbf{q}}^T \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \quad (5.29)$$

5.3.2 Wersja rozszerzona

Pomysł pochodzi z pracy [8]. W celu zapewnienia lepszej stabilizacji równania (5.27) dodano dwa dodatkowe składniki kar: składnik proporcjonalny do więzów dla położeń oraz składnik proporcjonalny do całki z więzów dla położen. Zgodnie z tym, momenty uogólnione są obliczane ze wzoru:

$$\mathbf{p} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) + \Phi_{\mathbf{q}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.30)$$

Zmodyfikowany układ równań kanonicznych wygląda teraz następująco (drugie równanie uzyskano poprzez zróżniczkowanie poprzedniego równania i wstawienie do równania (5.29)):

$$(\mathbf{M} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} - \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) - \Phi_{\mathbf{q}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.31)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{Q} + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) + \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (5.32)$$

Gdzie niewiadomymi są wektory $\dot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{p}}$ i $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$. Powyższe równania w przeciwieństwie do (5.27) i (5.28) nie są sztywne, przez co rozwiązania są dokładniejsze i zapewniają satysfakcyjną stabilizację więzów.

Zalety wynikające z zastosowaniu równań kanonicznych w porównaniu ze sformułowaniem opartym na przyspieszeniach są w tym przypadku podobne do omawianych w (5.2). W pracy [8] pokazano też, że sformułowanie to lepiej radzi sobie w symulacji mechanizmów wielokrotnie osiągających położenie osobliwe w czasie symulacji.

Macierz $\mathbf{M} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}}$ układu równań liniowych ma wiele zalet. Macierz ta jest dodatnio określona i nie staje się osobliwa w położeniu osobliwym mechanizmu (macierz w równaniu (5.17) jest dodatnio pół- określona oraz staje się osobliwa w położeniu osobliwym mechanizmu). Dzięki dodatniej określoności powyższa macierz może podlegać faktoryzacji, nawet w położeniach osobliwych i z występującymi więzami zależnymi.

Mnożniki Lagrange'a $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ pełnią rolę składników korygujących. Jeżeli w granicy równania więzów są spełnione, to wtedy $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cong \boldsymbol{\sigma}$. Na podstawie równań (5.17) i (5.31) można pokazać że:

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} + \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) \quad (5.33)$$

Wektor $\boldsymbol{\sigma}$ nie jest znany a priori, ale można go wyznaczyć iteracyjnie zgodnie z równaniem:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_i + \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right)_{i+1}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.34)$$

Gdzie można przyjąć $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \mathbf{0}$. Proces iteracyjny można zaaplikować bezpośrednio do równania (5.31) otrzymując:

$$(\mathbf{M} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \Phi_{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}_{i+1} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_i - \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (5.35)$$

Warto wspomnieć, że równanie (5.27) może być rozpatrywane jako ogólna metoda kar (zaimplementowana w [9]) z dodanymi mnożnikami Lagrange'a $\tilde{\sigma}$. Jak pokazano w pracy [5] sformułowanie z wykorzystaniem iteracji (5.34) rozszerza zakres dopuszczalnych parametrów stabilizacji α , β i ω , dla których osiągana jest zbieżność rozwiązania. Ogólna metoda kar jest szybsza, jednakże wymaga większych niedokładności w spełnieniu równań więzów, ponieważ wektor nieoznaczonych współczynników Lagrange'a przyjmuje wtedy wprost postać:

$$\sigma = \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) \quad (5.36)$$

Powyższe równanie jest tożsame równaniu (5.34) dla którego wykonano jedną iterację.

5.3.3 Algorytm rozwiązania

1. Podanie warunków początkowych \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ i σ_0 .
2. Policzenie wektora pędów \mathbf{p}_0 z równania (5.19).
3. Konstrukcja wektora \mathbf{Y}_0 z równania (5.20).
4. Konstrukcja funkcji \mathbf{H} zgodnie z (5.4):
 - Wczytanie aktualnego czasu i wektora \mathbf{Y} .
 - Obliczenie wektora startowego $\dot{\mathbf{q}}_0$ z równania (5.19).
 - Iteracyjne wyliczenie wektora $\dot{\mathbf{q}}$ zgodnie z równaniem (5.35). Konieczne jest rozwiązanie układu równań o rozmiarze n w każdej iteracji.
 - Na koniec każdej iteracji wyliczenie wektora $\tilde{\sigma}$ zgodnie z (5.34). Kryterium stopu iteracji może być przyjęte jako:

$$|\dot{\mathbf{q}}_{i+1} - \dot{\mathbf{q}}_i| < \varepsilon \quad (5.37)$$

Gdzie ε to zadana dokładność. Dodatkowo należy dodać dodatkowy warunek ograniczający maksymalną liczbę iteracji.

- Jawne wyliczenie wektora $\dot{\mathbf{p}}$ zgodnie ze wzorem (5.32).
- 5. Wywołanie jawnej procedury całkującej.

5.4 Sformułowanie oparte na równaniach kanonicznych z użyciem niejawnej metody trapezów i iteracjami Newtona-Raphsona

5.4.1 Wyprowadzenie wzorów

Jak opisano w podrozdziale (3.5), metoda trapezów posiada wiele zalet (A-stabilność, dokładność 2. rzędu, szybkość). Metodę trapezów można zaaplikować do równań (5.31) i (5.32), a otrzymany układ równań nielinijowych rozwiązać metodą iteracji Newtona-Raphsona, gdzie niewiadomymi będą wektory \mathbf{q} i \mathbf{p} . Pomysł pochodzi z pracy [10].

Równania schematu trapezów (3.17) można zaaplikować do wektorów \mathbf{q} i \mathbf{p} , przekształcając je w celu uzyskania wyrażeń na pochodne tychże wektorów:

$$\dot{\mathbf{q}}_{k+1} = \frac{2}{h}(\mathbf{q}_{k+1} - \mathbf{q}_k) - \dot{\mathbf{q}}_k \quad (5.38)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_{k+1} = \frac{2}{h}(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) - \dot{\mathbf{p}}_k \quad (5.39)$$

Powyzsze równania można wstawić do równań (5.31) i (5.32). Zakładając spełnienie tych równań w kroku $k + 1$ można otrzymać układ równań nieliniowych postaci:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\mathbf{y}) \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{y}) \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \text{gdzie } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Gdzie:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{h}{2} \left[\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\sigma} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) \right] \quad (5.41)$$

$$\mathbf{g}_2 = \frac{h}{2} \left[\dot{\mathbf{p}} - \mathbf{Q} - \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\sigma} - \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \alpha \left(\dot{\Phi} + 2\xi\omega\Phi + \omega^2 \int_{t_0}^t \Phi d\tau \right) \right] \quad (5.42)$$

(dla uproszczenia zapisu od teraz $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$)

Schemat iteracyjny Newtona-Raphsona przyjmuje postać:

$$\left[\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \right]_i \Delta \mathbf{y}_{i+1} = -\mathbf{g}(\mathbf{y}) \quad (5.43)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta \mathbf{y}_{i+1}$$

Gdzie $\left[\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \right]_i$ to macierz Jacobiego rozwiązywana w i -tej iteracji Newtona-Raphsona, którą uzyskuje się poprzez policzenie pochodnych cząstkowych równania (5.40) po wektorze \mathbf{y} . Macierz ta może być przedstawiona w postaci:

$$\left[\frac{d\mathbf{g}(\mathbf{y})}{d\mathbf{y}} \right] = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}} & \frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{y})}{d\mathbf{p}} \\ \frac{d\mathbf{g}_2(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}} & \frac{d\mathbf{g}_2(\mathbf{y})}{d\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Podczas liczenia członów $\frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}}$ i $\frac{d\mathbf{g}_2(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}}$ pominięto wyrażenia $(\Phi_{\mathbf{q}} \dots)_{\mathbf{q}}$ oraz $(\dot{\Phi}_{\mathbf{q}} \dots)_{\mathbf{q}}$, ponieważ ich wpływ jest pomijalnie mały w porównaniu z innymi składnikami. Ponadto założono, że wektor nieoznaczonych mnożników $\boldsymbol{\sigma}$ jest niezależny od wektora \mathbf{y} . Zgodnie z powyższymi założeniami można powyższe wyrażenia przedstawić jako:

$$\frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}} = \mathbf{M} + \Phi_{\mathbf{q}}^T \alpha \left[(1 + h\xi\omega)\Phi_{\mathbf{q}} + \frac{h\omega^2}{2} \left(\int_{t_0}^t \Phi d\tau \right)_{\mathbf{q}} \right] \quad (5.45)$$

$$\frac{d\mathbf{g}_1(\mathbf{y})}{d\mathbf{p}} = -\frac{h}{2} \mathbf{I}_{nxn} \quad (5.46)$$

$$\frac{d\mathbf{g}_2(\mathbf{y})}{d\mathbf{q}} = -\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{q}} - \dot{\Phi}_{\mathbf{q}}^T \alpha \left[(1 + h\xi\omega)\Phi_{\mathbf{q}} + \frac{h\omega^2}{2} \left(\int_{t_0}^t \Phi d\tau \right)_{\mathbf{q}} \right] \quad (5.47)$$

$$\frac{d\mathbf{g}_2(\mathbf{y})}{d\mathbf{p}} = \mathbf{I}_{nxn} \quad (5.48)$$

Gdzie całkę z macierzy Jacobiego można zapisać jako:

$$\left(\int_{t_0}^t \Phi d\tau \right)_{\mathbf{q}} = \int_{t_0}^t \Phi_{\mathbf{q}} d\tau \cong \sum_{j=0}^{k+1} h \Phi_{\mathbf{q}_j} \quad (5.49)$$

Układ równań rozwiązywany w każdej iteracji (5.43) ma rozmiar $2n$. Wektor $\Delta \mathbf{q}_{i+1}$ można obliczyć jako:

$$\left[\frac{d\mathbf{g}_1}{d\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{g}_1}{d\mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{p}} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{q}} \right] \Delta \mathbf{q}_{i+1} = -\mathbf{g}_1 + \frac{d\mathbf{g}_1}{d\mathbf{p}} \left(\frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{p}} \right)^{-1} \mathbf{g}_2 \quad (5.50)$$

Ponieważ znany jest wektor $\Delta \mathbf{q}_{i+1}$ można obliczyć wektor $\Delta \mathbf{p}_{i+1}$:

$$\Delta \mathbf{p}_{i+1} = \left(\frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{p}} \right)^{-1} \left(-\mathbf{g}_2 - \frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}_{i+1} \right) \quad (5.51)$$

Zgodnie z równaniami (5.46) i (5.48) powyższe równania mogą być uproszczone do postaci:

$$\left(\frac{d\mathbf{g}_1}{d\mathbf{q}} + \frac{h}{2} \frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{q}} \right) \Delta \mathbf{q}_{i+1} = -\mathbf{g}_1 - \frac{h}{2} \mathbf{g}_2 \quad (5.52)$$

$$\Delta \mathbf{p}_{i+1} = -\mathbf{g}_2 - \frac{d\mathbf{g}_2}{d\mathbf{q}} \Delta \mathbf{q}_{i+1} \quad (5.53)$$

Zgodnie z powyższymi wzorami, w każdym k -tym kroku zachodzi konieczność iteracyjnego rozwiązywania problemu $2n$ równań nielinowych. Jednak dzięki takiemu podziałowi zmiennych w każdej i -tej iteracji zachodzi konieczność rozwiązywania układu równań liniowych o rozmiarze n . W celu poprawienia zbieżności procesu w każdej iteracji należy aktualizować wektor σ zgodnie ze wzorem (5.34).

5.4.2 Algorytm rozwiązania

1. Podanie warunków początkowych \mathbf{q}_0 , $\dot{\mathbf{q}}_0$ i σ_0 .
2. Policzenie wektora pędów \mathbf{p}_0 z równania (5.19).
3. Wprowadzenie wektora \mathbf{I}^Φ reprezentującego wyrażenie $\int_{t_0}^t \Phi d\tau$. Wyzerowanie tego wektora (wymagane jest aby równanie więzów dla położen było spełnione przez wektor \mathbf{q}_0).
4. Wprowadzenie macierzy \mathbf{I}^{Φ_q} dla wyrażenia $\int_{t_0}^t \Phi_q d\tau$. Wyzerowanie tej macierzy. Macierz ta jest wymiaru $m \times n$.
5. W kroku $k = 0$ konieczne jest wyliczenie wektorów pochodnych $\dot{\mathbf{q}}_0$ i $\dot{\mathbf{p}}_0$. Użyto do tego procedury \mathbf{H} zdefiniowanej w podrozdziale (5.3.3).
6. Dla każdego $k + 1$ kroku:
 - Wczytanie wektorów \mathbf{y}_k i $\dot{\mathbf{y}}_k$. Wektor \mathbf{y} zbudowany jest zgodnie z (5.40).
 - Aktualizacja wektora \mathbf{I}^Φ zgodnie z jawnym schematem Eulera (3.4):

$$\mathbf{I}_{new}^\Phi = \mathbf{I}_{old}^\Phi + h \Phi(\mathbf{q}_k) \quad (5.54)$$

- Aktualizacja macierzy \mathbf{I}_q^Φ zgodnie z jawnym schematem Eulera i równaniem (5.49):

$$\mathbf{I}_{new}^{\Phi_q} = \mathbf{I}_{old}^{\Phi_q} + h\Phi_q(\mathbf{q}_k) \quad (5.55)$$

- Predykcja wektora $\mathbf{y}_{k+1}^{i=0}$ zgodnie z jawnym schematem Eulera:

$$\mathbf{y}_{k+1}^0 = \mathbf{y}_k + h\dot{\mathbf{y}}_k \quad (5.56)$$

- Podstawienie dla wektora $\dot{\mathbf{y}}_{k+1}^{i=0}$:

$$\dot{\mathbf{y}}_{k+1}^0 = \dot{\mathbf{y}}_k \quad (5.57)$$

- Podstawienie dla wektora $\sigma_{k+1}^{i=0}$:

$$\sigma_{k+1}^0 = \sigma_k \quad (5.58)$$

- Uruchomienie iteracji Newtona-Raphsona zgodnie ze wzorem (5.43). W każdej $i + 1$ iteracji (tam gdzie pominięto indeks dolny dla poprawy czytelności jest $k + 1$):

- Wyliczenie wyrażeń (5.41), (5.42) i (5.45)-(5.48) dla aktualnych wartości wektorów \mathbf{q}^i i $\dot{\mathbf{q}}^i$.
- Rozwiążanie układu równań (5.52) i wyznaczenie $\Delta\mathbf{q}^{i+1}$. Następnie wyznaczenie $\Delta\mathbf{p}^{i+1}$ ze wzoru (5.53).
- Aktualizacja wektora \mathbf{y}^{i+1} zgodnie z (5.43). Następnie zgodnie ze schematem trapezów (3.17) wyznaczenie wektora $\dot{\mathbf{y}}^{i+1}$:

$$\dot{\mathbf{y}}_{k+1}^{i+1} = \frac{2}{h}(\mathbf{y}_{k+1}^{i+1} - \mathbf{y}_k) - \dot{\mathbf{y}}_k \quad (5.59)$$

- Wyliczenie wektora σ^{i+1} ze wzoru (5.34).

- Sprawdzenie kryterium stopu:

$$|\Delta\mathbf{y}^{i+1}| < \varepsilon \quad (5.60)$$

Dodatkowo ograniczyć można maksymalną liczbę iteracji. Jeżeli warunki są spełnione, powrót do podpunktu a.

- Aktualizacja czasu $t_{k+1} = t_k + h$ Jeżeli nie przekroczeno czasu końcowego, powrót do punktu 6.

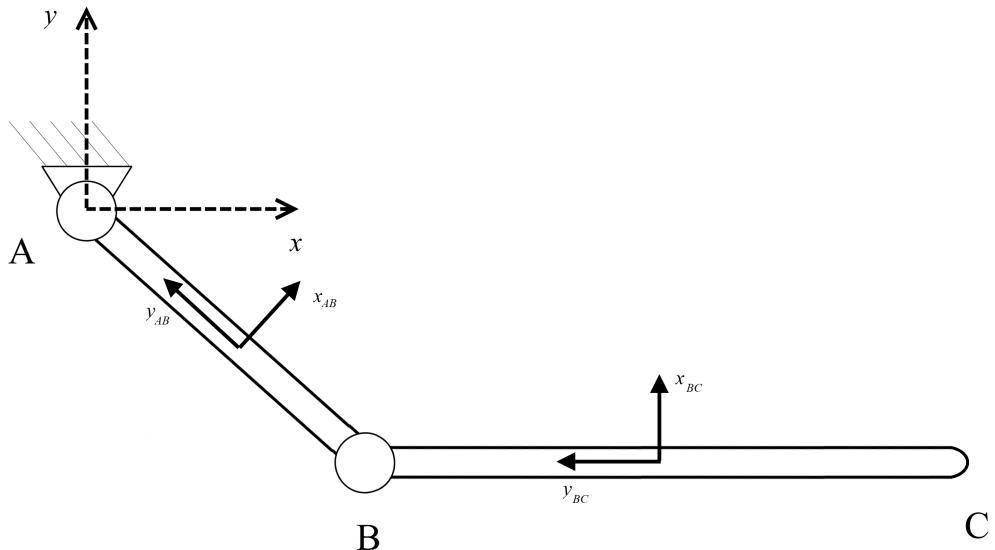
6 Implementacja, wyniki analiz

6.1 Walidacja sformułowań na przykładzie podwójnego wahadła i oprogramowania *Adams*

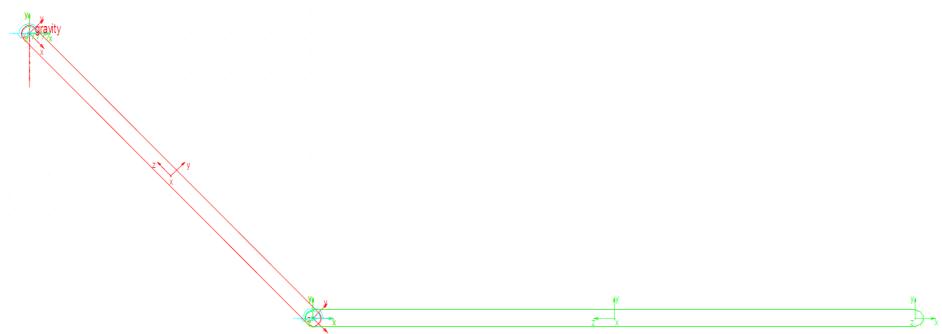
Podstawy teoretyczne i implementacyjne zostały omówione w poprzednim rozdziale. Widać, że każde kolejne sformułowanie jest udoskonaleniem poprzedniego. Celem tego rozdziału jest walidacja zastosowanych procedur, porównanie wyników pod kątem spełnienia równań więzów dla położień i prędkości wraz z jednoczesną kontrolą całkowitej energii mechanicznej. Każde sformułowanie zostanie przetestowane na przykładzie podwójnego wahadła fizycznego.

6.1.1 Budowa

Podwójne wahadło fizyczne zbudowane jest z $N = 2$ członów płaskich powiązanych za pomocą 2 par obrotowych. Liczba współrzędnych uogólnionych użyta do jego opisu wynosi $n = 3N = 6$. Liczba równań więzów wynosi $m = 4$, liczba stopni swobody $f = n - m = 2$. Budowa mechanizmu jest przedstawiona na rysunku poniżej:



Rysunek 4: Podwójne wahadło fizyczne: globalny układ odniesienia, układy lokalne. Położenie początkowe



Rysunek 5: Podwójne wahadło fizyczne: Model zbudowany w programie *Adams*

Wymiary, parametry masowe i układy współrzędnych w programie *Adams* są tożsame tym przyjętym w programie *Matlab*. Z każdym członem związano układ współrzędnych zaczepiony w środku masy członu. Środek masy znajduje się w połowie długości członu.

Lp.	Człon	Masa[kg]	$I_z[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	Długość[m]	φ_0
1	$A-B$	6	1.0	1.0	$\frac{\pi}{4}$
2	$B-C$	10	1.6	1.5	$\frac{\pi}{2}$

Tabela 1: Wymiary, parametry masowe, kąty początkowe podwójnego wahadła

Budowa modelu matematycznego będzie szczegółowo opisana w rozdziale 6.2.2. Różnica będzie polegać na policzeniu energii potencjalnej V . Jedynymi siłami działającymi na człony jest siła grawitacji o wartości $\mathbf{F}_{gi} = m_i \cdot \mathbf{g}$, zatem siła potencjalna dla i -tego członu wynosi:

$$U_i = -m_i \mathbf{g}^T \mathbf{r}_i \quad (6.1)$$

Gdzie:

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -9.81 \end{bmatrix}$$

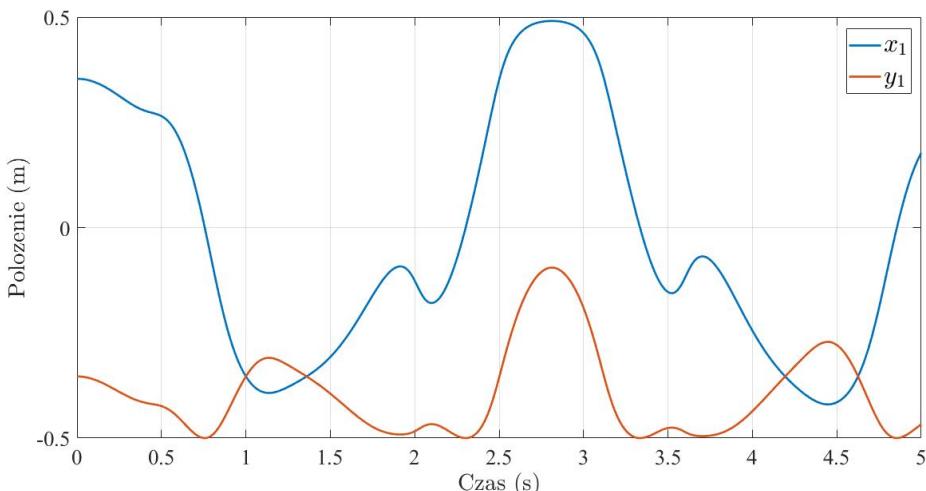
Calkowita energia potencjalna U przedstawia się wzorem:

$$U = \sum_{i=1}^N U_i \quad (6.2)$$

6.1.2 Wyniki symulacji

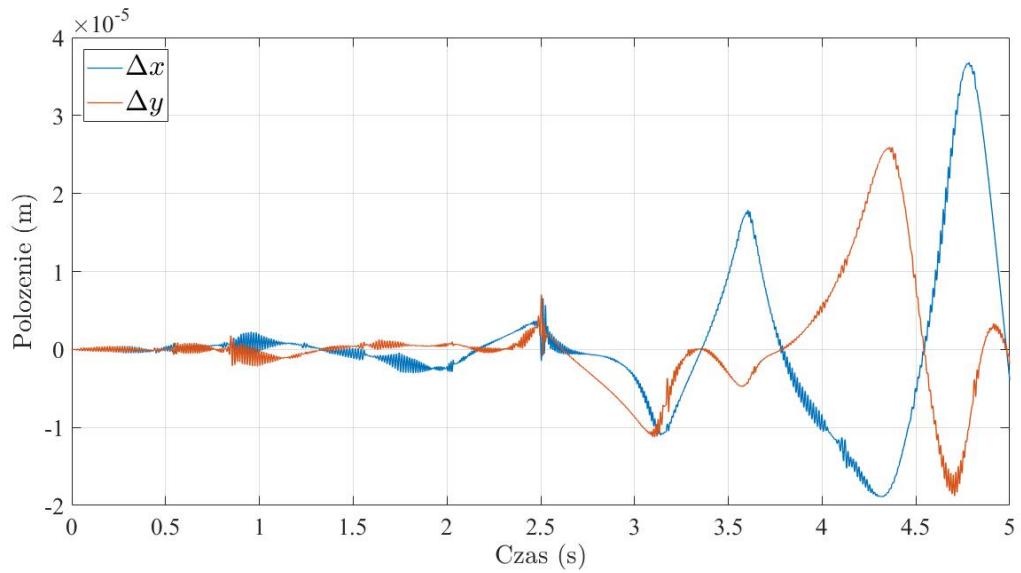
Walidacja modeli

Walidacja kolejnych sformułowań zostanie przeprowadzona na podstawie pomiaru różnicy położeń x_1 i y_1 środka masy członu $A-B$ pomiędzy rozwiązaniem uzyskanym w *Adamsie*, a tym uzyskanym w *Matlabie*. Symulacja będzie przeprowadzona przez 5 s, z krokiem czasowym $h = 10^{-3}s$. W programie *Adams* użyto integratora GSTIFF, sformułowanie I3, błąd ograniczony do 10^{-8} . Parametry dla poszczególnych sformułowań zostały dobrane metodą prób i błędów, w oparciu o [8] i [9].



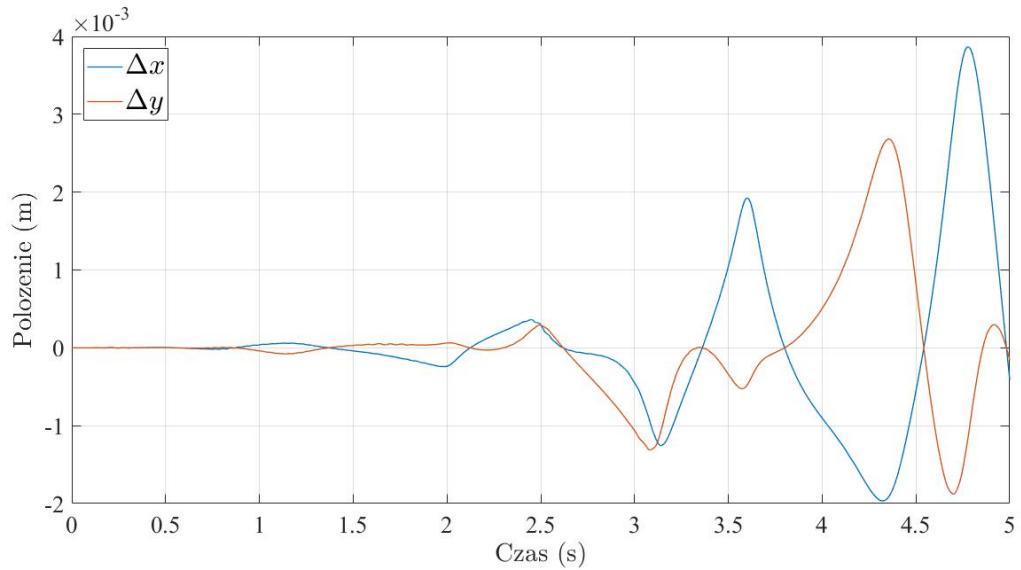
Rysunek 6: Położenie środka masy członu $A-B$ w układzie globalnym uzyskane w programie *Adams*

1. Równania klasyczne (opisane w 5.1), stabilizacja: $\xi = 10$, $\omega = 10$



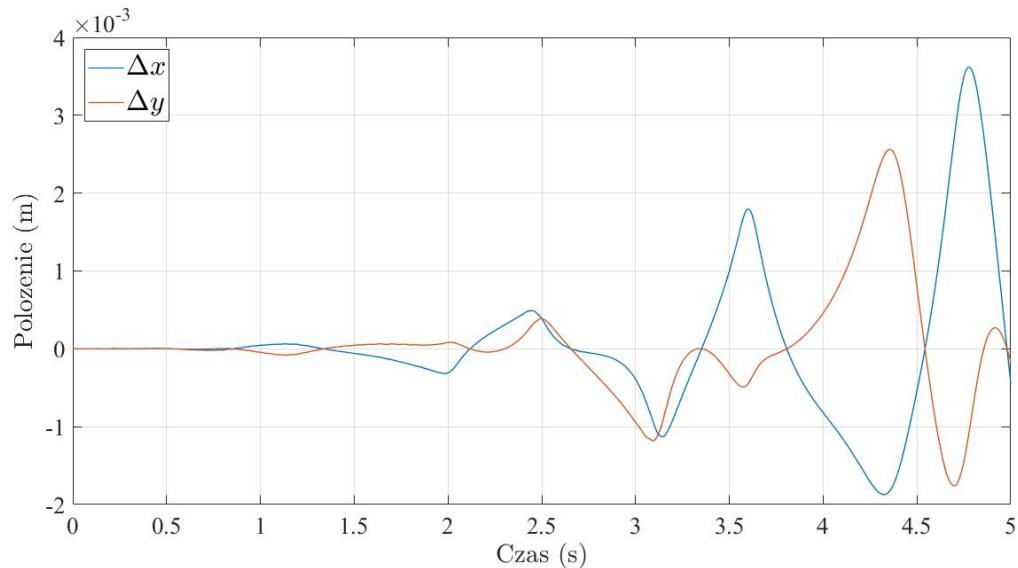
Rysunek 7: Różnica rozwiązań *Adamsa* i *Matlaba*, równania klasyczne

2. Równania kanoniczne (opisane w 5.2), stabilizacja: $\xi = 10$, $\omega = 1$



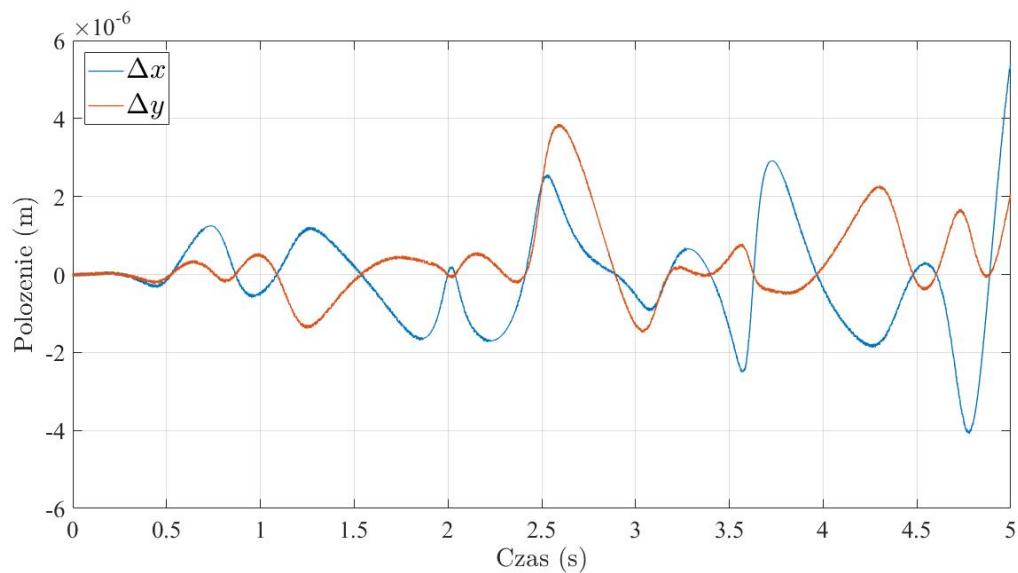
Rysunek 8: Różnica rozwiązań *Adamsa* i *Matlaba*, równania kanoniczne

3. Rozszerzony lagranżjan, równania kanoniczne, *ode45* (opisane w 5.3), stabilizacja: $\alpha = 10^7$, $\xi = 1$, $\omega = 10$



Rysunek 9: Różnica rozwiązań Adamsa i Matlaba, rozszerzony lagranżjan, *ode45*

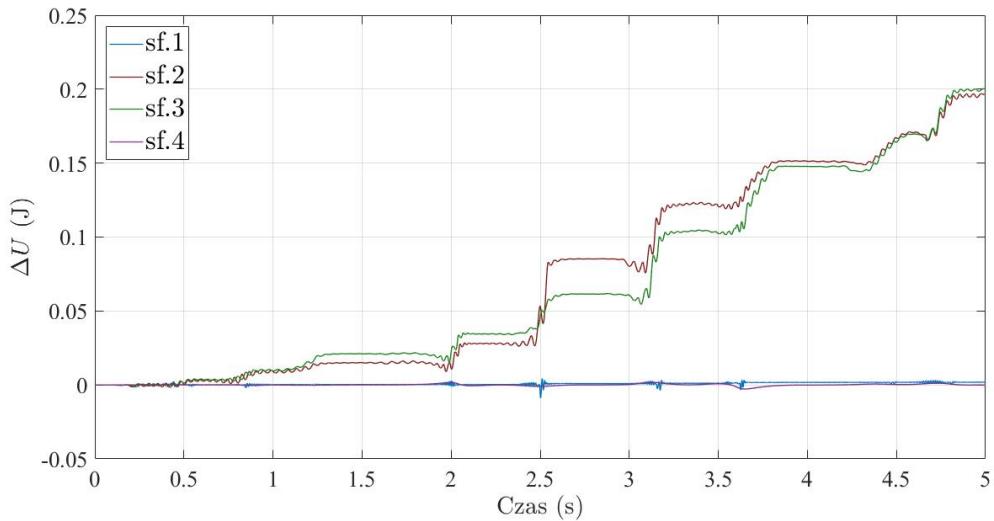
4. Rozszerzony lagranżjan, równania kanoniczne, metoda trapezów (opisane w 5.4), stabilizacja: $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$, $\omega = 1$



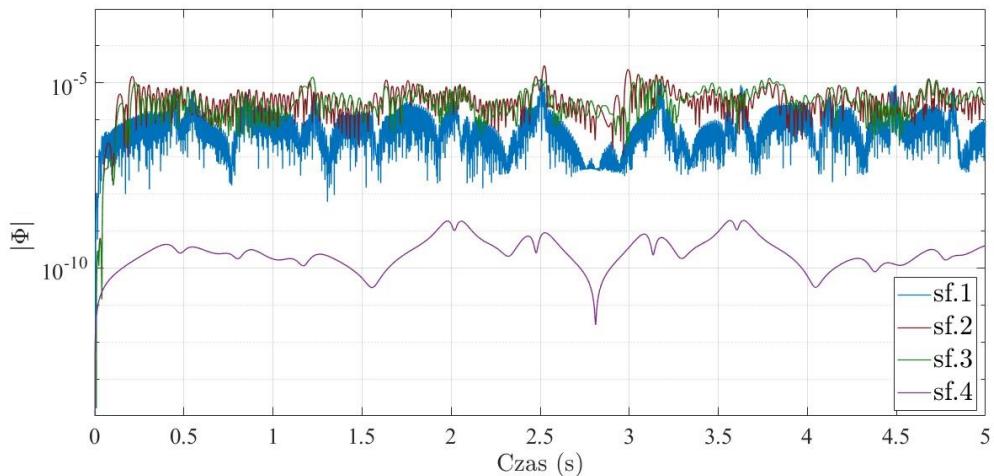
Rysunek 10: Różnica rozwiązań Adamsa i Matlaba, rozszerzony lagranżjan, metoda trapezów

Porównanie modeli

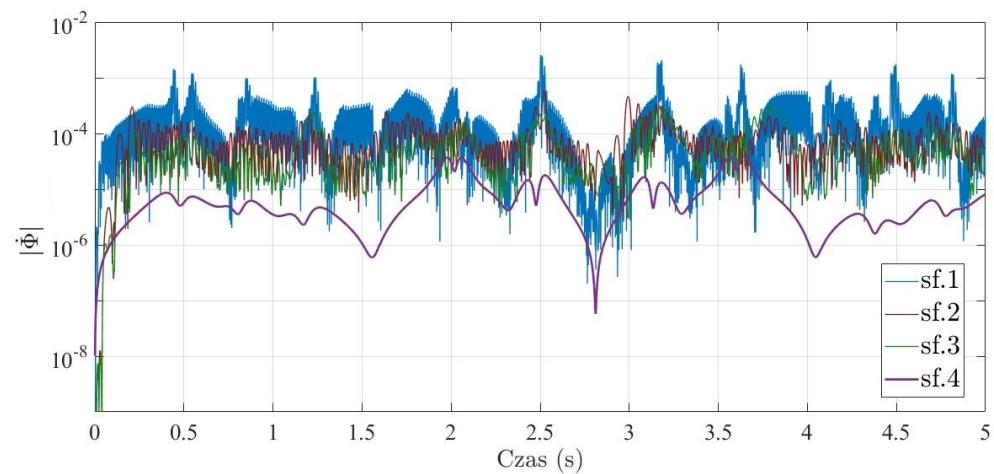
Na kolejnych wykresach przedstawione zostanie porównanie spełnienia równań więzów dla położień, prędkości oraz odchylenia energii całkowitej. Warunki symulacji oraz parametry dla poszczególnych sformułowań zostały przyjęte tak jak poprzednio.



Rysunek 11: Odchylenie energii całkowitej dla 4 sformułowań



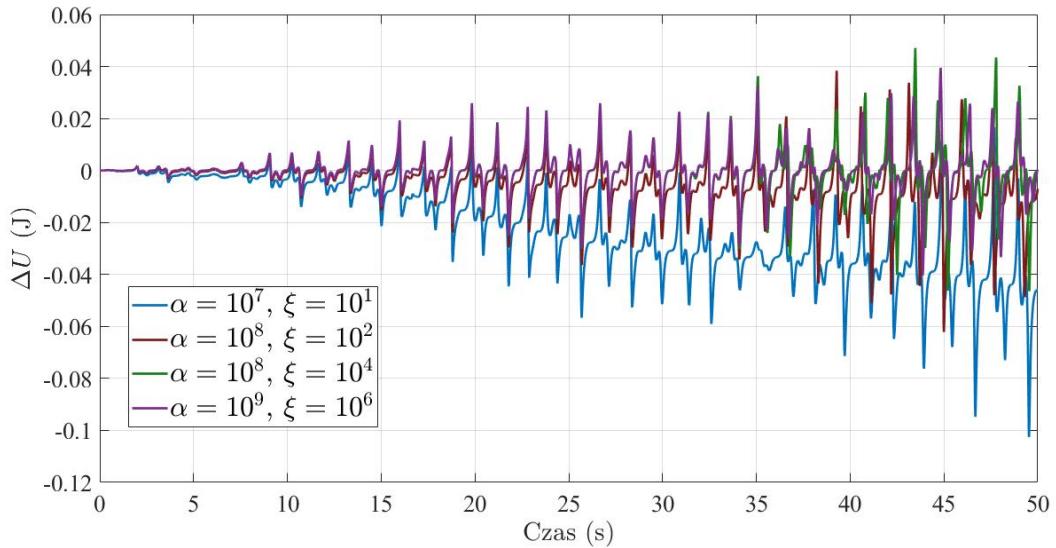
Rysunek 12: Spełnienie więzów na położenia dla 4 sformułowań (skala logarytmiczna)



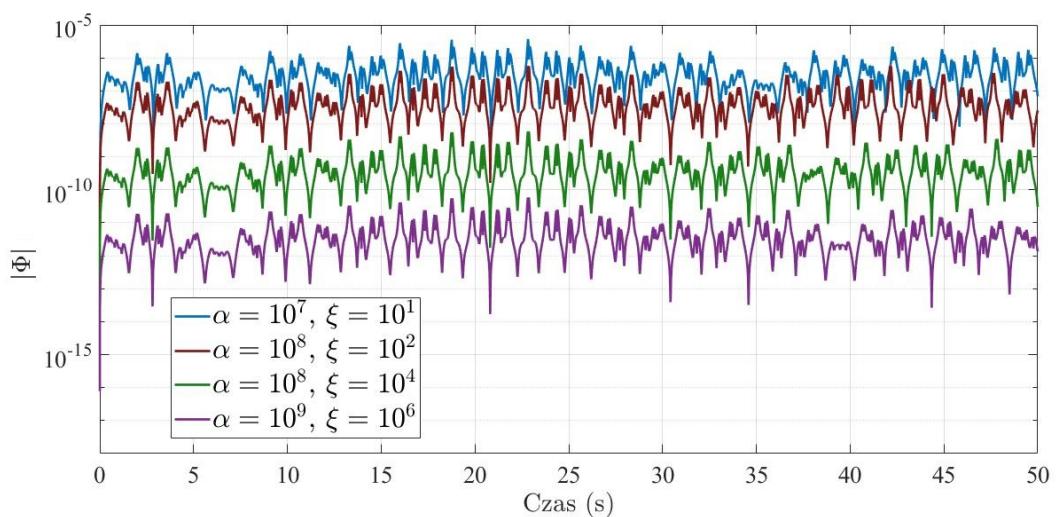
Rysunek 13: Spełnienie więzów na prędkości dla 4 sformułowań (skala logarytmiczna)

Porównanie rozszerzonego lagranżjanu z metodą trapezów dla różnych parametrów

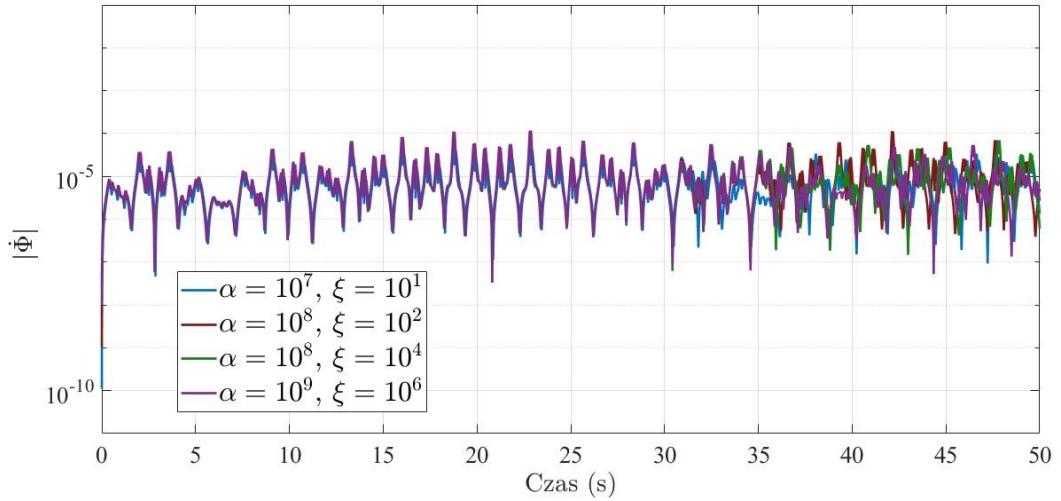
Na kolejnych wykresach przedstawione zostanie porównanie spełnienia równań więzów dla położień, prędkości oraz odchylenia energii całkowitej dla różnych parametrów α i ξ , $\omega = 1$. Symulacja trwać będzie 50 s, krok czasowy $h = 10^{-3}$ s, dokładność $\epsilon = 10^{-10}$, maksymalną liczbę iteracji ograniczono do 10.



Rysunek 14: Odchylenie energii całkowitej dla 4 zestawów parametrów



Rysunek 15: Spełnienie więzów na położenia dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna)



Rysunek 16: Spełnienie więzów na prędkości dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna)

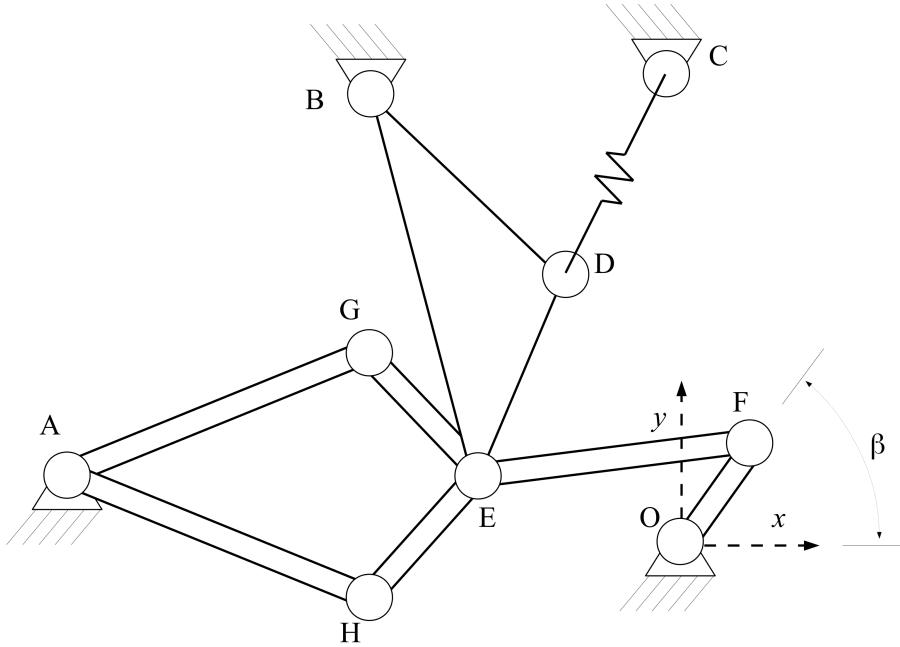
Wnioski

- Wszystkie sformułowania zaimplementowano poprawnie, najlepsze rezultaty w porównaniu z *Adamsem* otrzymano używając sformułowania 4.
- Używając sformułowania 4. osiągnięto najlepsze spełnienie więzów dla położień i przyspieżeń oraz zapewniono stabilność energii całkowitej.
- Dla wydłużonego czasu symulacji więzy dla położień i prędkości zachowują się stabilnie, amplituda oscylacji odchylenia energii narasta, jednak wartość średnia pozostaje równa 0.
- Zwiększenie parametru ξ poprawia dokładność spełnienia więzów dla położień.

6.2 Implementacja mechanizmu Andrews'a

6.2.1 Budowa mechanizmu

Mechanizm (zgniatarka) Andrews'a to płaski mechanizm zbudowany z $N = 7$ członów płaskich powiązanych za pomocą 10 par obrotowych. Liczba współrzędnych uogólnionych użyta do jego opisu wynosi $n = 3N = 21$. Liczba równań więzów wynosi $m = 20$, zatem liczba stopni swobody $f = n - m = 1$. Do mechanizmu doczepiona jest ponadto nieważka sprężyna o wysokiej sztywności. Szczegółowy opis tego mechanizmu można znaleźć w [2]. Mechanizm ten wymaga całkowania z krokiem poniżej 1 ms z racji wysokich częstotliwości własnych (iloraz sztywności i masy jest duży). Mechanizm Andrews'a jest ponadto sztywny w rozumieniu przedstawionym w rozdziale 4.2 (z powodu różnicy poszczególnych mas członów o rząd wielkości).



Rysunek 17: Mechanizm Andrews'a

Zgodnie z formalizmem przedstawionym w rozdziale 2.1 z każdym członem związany jest układ współrzędnych. Wymiary mechanizmu podane zostaną zgodnie z [11]. Wymiary zostały podane w lokalnych układach współrzędnych, które zaczepione zostały w punktach startowych odcinków reprezentujących człony. Wyjątkiem jest człon $E-B-D$ w kształcie trójkąta, gdzie układ współrzędnych zaczepiono w punkcie E , a oś y jest wspólniowa z odcinkiem $E-B$. Globalny układ współrzędnych bierze początek w punkcie O .

Lp.	Człon	Punkt	x[m]	y[m]
1	$O-F$	O	0.0	0.0
		F	0.007	0.0
2	$E-F$	E	0.0	0.0
		F	0.028	0.0
3	$H-E$	H	0.0	0.0
		E	0.02	0.0
4	$G-E$	G	0.0	0.0
		E	0.02	0.0

Lp.	Człon	Punkt	x[m]	y[m]
5	$A-G$	A	0.0	0.0
		G	0.04	0.0
6	$A-H$	A	0.0	0.0
		H	0.04	0.0
7	$E-B-D$	E	0.0	0.0
		B	0.0	0.035
		D	0.02	0.017

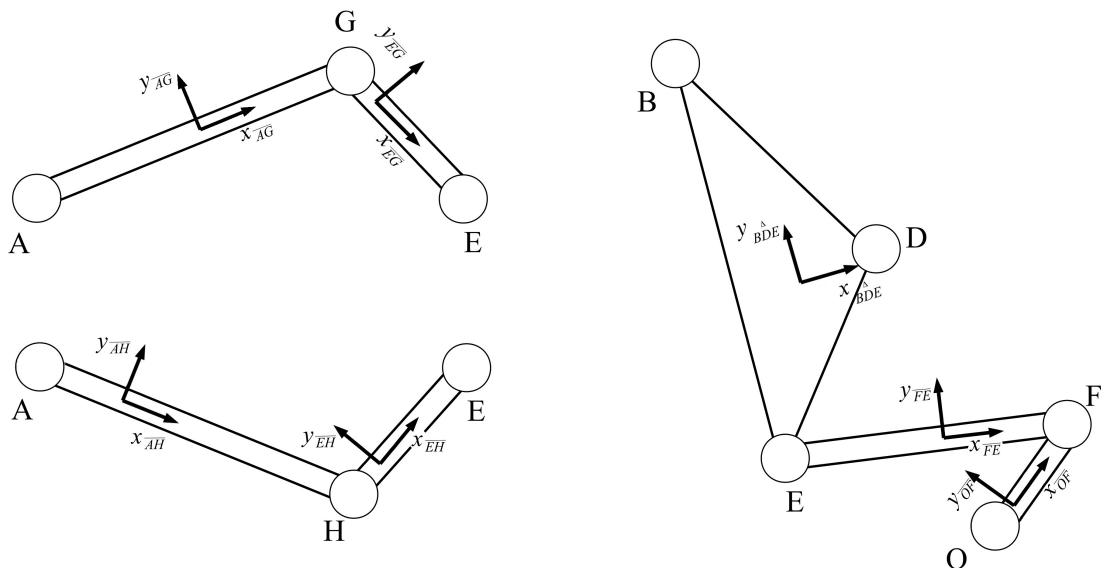
Tabela 2: Lokalne współrzędne punktów mechanizmu

Masy i momenty bezwładności poszczególnych członów mechanizmu zaprezentowane są w tabeli 3. Pozycja środka masy wyrażona jest w układzie lokalnym związanym z danym członem. Moment bezwładności I_z policzony został względem środka masy. Tabela 4 prezentuje współrzędne punktów mocowania mechanizmu w układzie globalnym.

Lp.	Cz³on	Masa[kg]	$x_g[m]$	$y_g[m]$	$I_z[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$
1	$O-F$	0.04325	0.00092	0.0	$2.194 \cdot 10^{-6}$
2	$E-F$	0.00365	0.0165	0.0	$4.410 \cdot 10^{-7}$
3	$H-E$	0.00706	0.00579	0.0	$5.667 \cdot 10^{-7}$
4	$G-E$	0.00706	0.00579	0.0	$5.667 \cdot 10^{-7}$
5	$A-G$	0.07050	0.02308	0.00916	$1.169 \cdot 10^{-5}$
6	$A-H$	0.05498	0.01228	-0.00449	$1.912 \cdot 10^{-5}$
7	$E-B-D$	0.02373	0.01043	0.01626	$5.255 \cdot 10^{-6}$

Tabela 3: W³asno¶ci masowe cz³onów mechanizmu Andrews'a

Zgodnie z rozumowaniem przedstawionym w podrozdziale 2.2 wygodniej jest lokalne uk³ady wspó³rzêdnych zaczepiæ w srodkach masy. Wymaga to przesunięcia uk³adów tak jak przedstawiono na rysunku poniżej:



Rysunek 18: Lokalne uk³ady wspó³rzêdnych zaczepione w srodkach masy

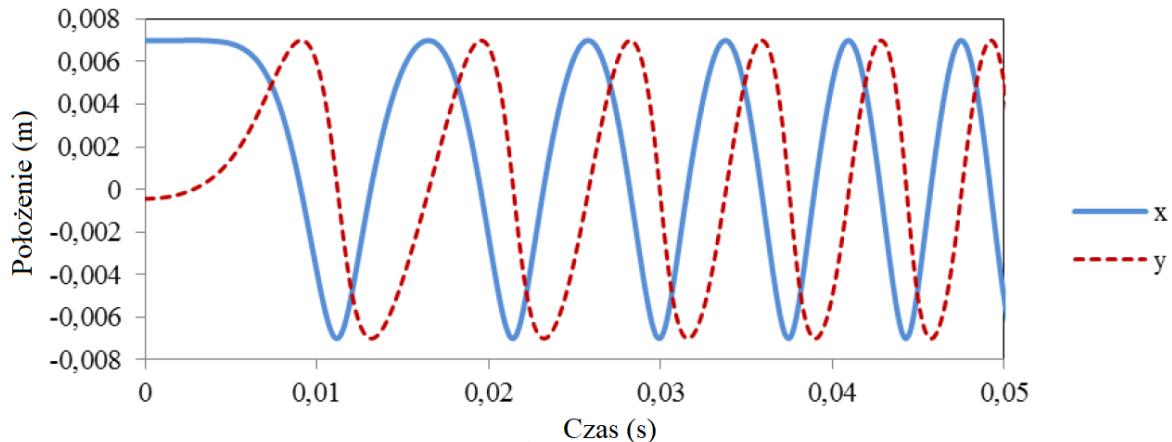
Dla uk³adów lokalnych zdefiniowanych w ten sposób nowa tabela lokalnych punktów mechanizmu wygl¹da nastêpuj±co:

Lp.	Cz³on	Punkt	$x[m]$	$y[m]$
1	$O-F$	O	-0.00092	0.0
		F	0.00608	0.0
2	$E-F$	E	-0.0165	0.0
		F	0.0115	0.0
3	$H-E$	H	-0.00579	0.0
		E	0.01421	0.0
4	$G-E$	G	-0.00579	0.0
		E	0.01421	0.0

Lp.	Cz³on	Punkt	$x[m]$	$y[m]$
5	$A-G$	A	-0.02308	-0.00916
		G	0.01692	-0.00916
6	$A-H$	A	-0.01228	0.00449
		H	0.02772	0.00449
7	$E-B-D$	E	-0.01043	-0.01626
		B	-0.01043	0.01874
		D	0.00957	0.00074

Tabela 5: Wspó³rzêdne punktów mechanizmu zapisane w uk³adach zaczepionych w srodkach mas

Sztywność sprężyny $k = 4530 \frac{N}{m}$, jej długość swobodna $l_0 = 0.07785$ m. Na człon $E-F$ działa stały moment o wartości $\tau = 0.033$ Nm. Mechanizm nie podlega działaniu siły grawitacji. Wartość początkowa kąta to $\beta_0 = -0.062$ rad. W chwili początkowej mechanizm jest nieruchomy. Całkowity czas symulacji wynosi 0.05 s. Rysunek poniżej prezentuje współrzędne x i y punktu F mechanizmu dostarczone przez [11]:



Rysunek 19: Przebieg położenia punktu F w czasie 0.05 s

6.2.2 Sformułowanie modelu matematycznego

Wprowadzenie współrzędnych

Do opisu mechanizmu użyto współrzędnych absolutnych. Dla każdego i -tego członu zdefiniowano wektor:

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_i \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Gdzie zgodnie z (2.1):

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Globalny wektor \mathbf{q} ma wymiar 21 i zbudowany jest zgodnie z (2.2).

Równania więzów

Równanie więzów postaci (2.3) uzyskać można poprzez złożenie 10 równań więzów dla par obrotowych postaci (2.4). Wektory \mathbf{s}_i i \mathbf{s}_j dla konkretnej pary obrotowej zapisane są w tabeli 5. Warto zauważyć, że w punkcie E znajdują się de facto 3 pary obrotowe (związane są tutaj ze sobą 4 czlonów). Związano ze sobą odpowiednio czlon 2 z 3, 2 z 4 i 2 z 7.

Macierz Jacobiego, pochodna Macierzy Jacobiego i macierz masowa

Globalną macierz Jacobiego $\Phi_{\mathbf{q}}$ obliczono wstawiając w odpowiednich miejscach macierze pochodnych cząstkowych więzów postaci (2.5)-(2.8). Analogicznie, pochodną po czasie z macierzy Jacobiego policzono ze wzoru (2.12) w odpowiednie miejsca wstawiając wyrażenia (2.13)-(2.16).

Globalną macierz masową zbudowano z macierzy masowych dla poszczególnych członów w oparciu o wzory (2.27) i (2.28).

Model sprężyny

Sprzęyna w Mechanizmie Andrews'a łączy punkty D i C . Wektor \mathbf{d} łączący te punkty można zapisać jako:

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_7 - \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D \quad (6.5)$$

Gdzie \mathbf{r}_C to wektor wskazujący na punkt C w układzie globalnym, a \mathbf{s}_D to wektor wskazujący na punkt D w układzie związanym z członem $E-B-D$.

Wartość siły w sprężynie F_s oblicza się ze wzoru:

$$F_s = k(d - l_0) \quad (6.6)$$

Gdzie $d = |\mathbf{d}| = \sqrt{\mathbf{d}^T \mathbf{d}}$.

Kierunek działania powyższej siły zgodny jest z kierunkiem wektora \mathbf{d} . Wersor \mathbf{v} tego wektora przedstawia się następująco:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{d} \mathbf{d} \quad (6.7)$$

Wektor siły uogólnionej \mathbf{Q}_s pochodzącej od sprężyny można zapisać jako:

$$\mathbf{Q}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{M}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2x2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D)^T \end{bmatrix} \mathbf{v} F_s = k \left(1 - \frac{l_0}{d}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2x2} \\ (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D)^T \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad (6.8)$$

Istnieje również konieczność wyprowadzenia wyrażenia $\frac{d\mathbf{Q}}{dq}$ występującego w (5.47). Wyrażenie to można przedstawić w postaci (dla wygody zapisu pominięto indeks dolny):

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dq} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{F}}{dr} & \frac{d\mathbf{F}}{d\varphi} \\ \frac{d\mathbf{M}}{dr} & \frac{d\mathbf{M}}{d\varphi} \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Gdzie poszczególne członu przyjmują postać:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dr} = k \left[\left(\frac{l_0}{d} - 1 \right) \mathbf{I} - \frac{l_0}{d} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \right] \quad (6.10)$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{d\varphi} = k \left[\left(\frac{l_0}{d} - 1 \right) \mathbf{I} - \frac{l_0}{d} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \right] \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D \quad (6.11)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{dr} = k (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D)^T \left[\left(\frac{l_0}{d} - 1 \right) \mathbf{I} - \frac{l_0}{d} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \right] \quad (6.12)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{d\varphi} = k \left[(\boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D)^T \left[\left(\frac{l_0}{d} - 1 \right) \mathbf{I} - \frac{l_0}{d} \mathbf{d} \mathbf{d}^T \right] \boldsymbol{\Omega} \mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D + \left(\frac{l_0}{d} - 1 \right) (\mathbf{R}_7 \mathbf{s}_D)^T \mathbf{d} \right] \quad (6.13)$$

Obliczenie energii

Energia całkowita układu E może być policzona jako suma energii kinetycznej T i potencjalnej V :

$$E = T + V \quad (6.14)$$

Energia kinetyczna T może być obliczona jako:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} \quad (6.15)$$

Energia potencjalna V pochodzi od sprężyny można obliczyć ze wzoru:

$$V = \frac{k}{2} (d - l_0)^2 \quad (6.16)$$

Przyrost energii całkowitej kosztem praca wykonanej przez moment τ nad mechanizmem Andrews'a może być przedstawiony w postaci:

$$E - E_0 = \tau(\beta - \beta_0) \quad (6.17)$$

Gdzie E_0 to energia całkowita w chwili początkowej $t = 0$.

Odchylenie numeryczne energii całkowitej to różnica między wartością obliczoną numerycznie E_{num} a wartością rzeczywistą E_{real} . Oznaczono je jako ΔU (dla idealnej symulacji powinno wynosić tożsamościowo 0):

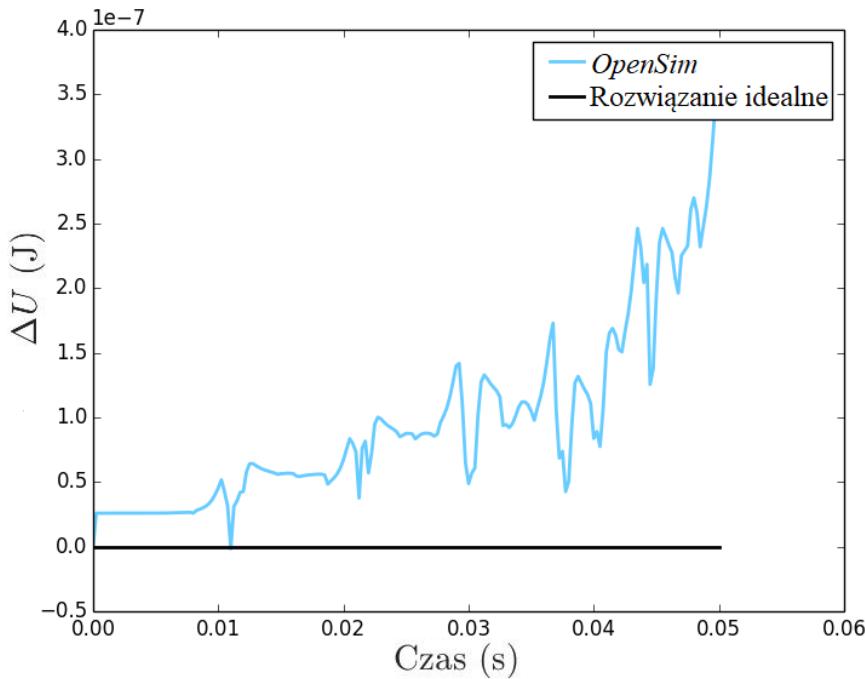
$$\Delta U = E_{num} - E_{real} \quad (6.18)$$

Zbierając powyższe wzory można zapisać ostateczną formułę na odchylenie od energii całkowitej:

$$\Delta U = T + V - E_0 - \tau(\beta - \beta_0) \quad (6.19)$$

Zgodnie z zaleceniami przedstawionymi w [11] odchylenie nie powinno być większe niż 10^{-5} J.

Na rysunku 20 przedstawiono odchylenie energii uzyskane w [12] z zastosowaniem biblioteki *OpenSim*, (jest to biblioteka open source przeznaczona do analizy modeli mięśniowo-szkieletowych i symulacji dynamicznej mechanizmów).



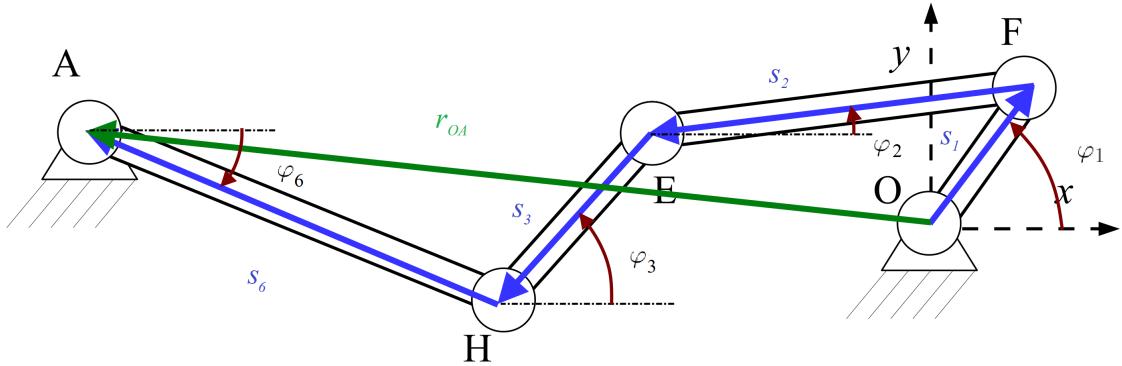
Rysunek 20: Odchylenie energii dla symulacji wykonanej z wykorzystaniem biblioteki *OpenSim*

Wyznaczenie warunków początkowych

Zgodnie z danymi o strukturze mechanizmu zawartymi w tabeli 4 lokalizacje poszczególnych punktów przedstawione są w układach lokalnych. Wymagana jest wiedza o lokalizacji środków mas i kątach jakie tworzą lokalne układy współrzędnych w układzie globalnym. Wymagane jest w tym celu rozwiązanie zadania kinematyki dla położień. Problem ten został rozwiązany dwuetapowo (aby zagwarantować zbieżność do poprawnego rozwiązania):

1. Rozwiązywanie zadania dla współrzędnych złączowych absolutnych

W mechanizmie Andrews'a znajdują się 3 pętle kinematyczne. Równanie więzów dla współrzędnych złączowych absolutnych przedstawione zostanie na podstawie pętli z rysunku poniżej:



Rysunek 21: Przykładowa pętla kinematyczna

Równanie więzów Φ^{pk} dla jednej pętli przedstawia się następująco:

$$\Phi^{pk} = \mathbf{R}(\varphi_1)\mathbf{s}_1 + \mathbf{R}(\varphi_2)\mathbf{s}_2 + \mathbf{R}(\varphi_3)\mathbf{s}_3 + \mathbf{R}(\varphi_6)\mathbf{s}_6 - \mathbf{r}_{OC} = \mathbf{0} \quad (6.20)$$

Gdzie macierz $\mathbf{R}(\vartheta)$ to:

$$\mathbf{R}(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Wektory \mathbf{s}_i zapisane są w lokalnych układach współrzędnych zgodnie z tabelą 4.

Tak zestawione równania dla 3 pętli i zadanego kąta $\varphi_1 = \beta_0$ rozwiązano przy pomocy procedury *fsolve* dedykowanej dla układów nieliniowych. Jako wartość startową dla iteracji przyjęto wektor φ_{7x1}^0 o wartościach:

$$\varphi^0 = [-0.062 \quad -0.062 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad 0.5 \quad -0.5 \quad 0]^T \quad (6.22)$$

Tak uzyskane kąty φ_{0i} zostały użyte jako przybliżenie początkowe dla obliczeń we współrzędnych absolutnych.

2. Rozwiązywanie zadania dla współrzędnych absolutnych

Schemat postępowania przedstawiono w rozdziale 2.1. Dane do budowy równań więzów zaczerpnięto z tabeli 5. Jako przybliżenie początkowe dla i -tego członu przyjęto wektor:

$$\mathbf{q}_i^0 = [0 \quad 0 \quad \varphi_{0i}]^T \quad (6.23)$$

Rozwiązyując powyższy problem procedurą *fsolve* otrzymać można wektor \mathbf{q}_0 wymagany w zadaniu prostym dynamiki.

6.3 Wyniki symulacji

Symulację przeprowadzono dla różnych kroków całkowania i parametrów stabilizacji.

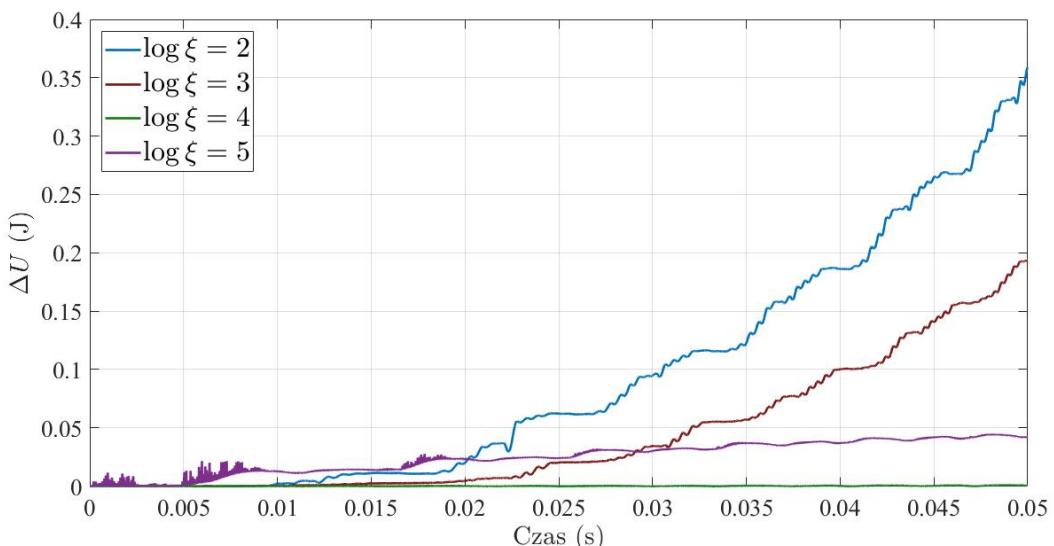
Zgodnie z pracami [9] i [10] parametry α , ξ i ω występujące w (5.33) powinny być dobrane we właściwy sposób:

- α - im większe, tym szybsza zbieżność procesu iteracyjnego, jednakże za duże może spowodować złe uwarunkowanie macierzy stojącej w równaniu (5.35). Parametr ten powinien być rzędu $<10^6; 10^9>$.
- ξ - im większy, tym dokładniej spełnione są więzy dla położień (kosztem więzów dla prędkości). Parametr ten powinien być większego rzędu niż 10^3 , aby zapewnić stabilność energii.
- ω - parametr ten może być przyjęty jako 1.

6.3.1 Użycie jawnej procedury całkującej

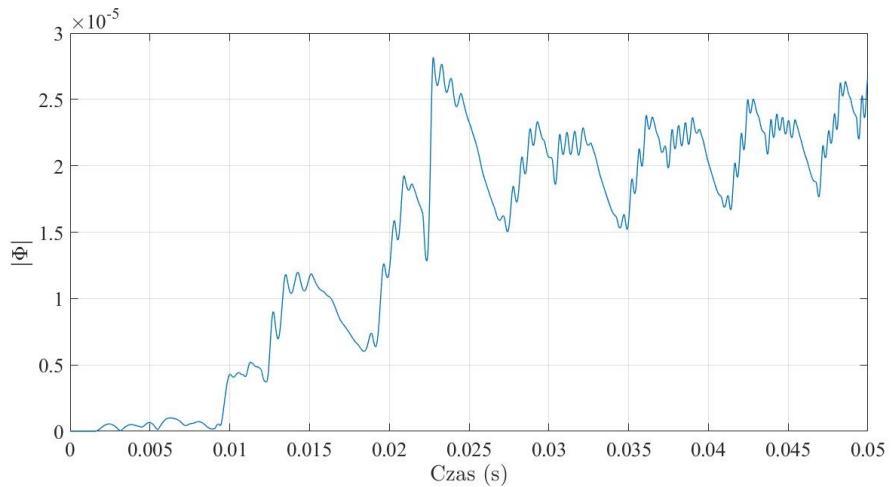
Sformułowanie opisano w podrozdziale 5.3. Dokładność z równania (5.37) ustalono na $\varepsilon = 10^{-10}$. Maksymalną liczbę iteracji ograniczono do 10. Krok czasowy został przyjęty jako $h = 10^{-5}$ s. Co istotne, zmniejszenie kroku czasowego (do rzędu 10^{-6} s) nie powodowało poprawy zachowania rozwiązania. Jako procedury całkującej użyto procedury *ode45*. Pokazany zostanie wpływ doboru parametru ξ na możliwe zachowania rozwiązania.

Wykresy

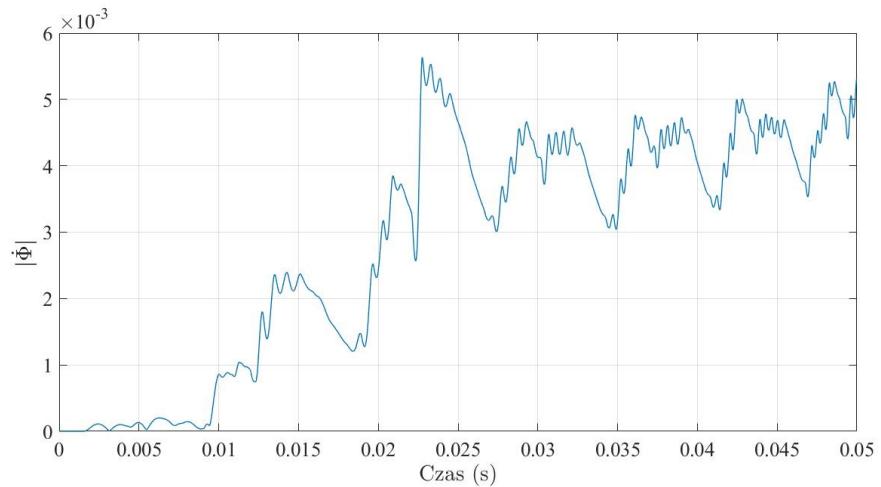


Rysunek 22: Porównanie odchylenia energii dla $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$

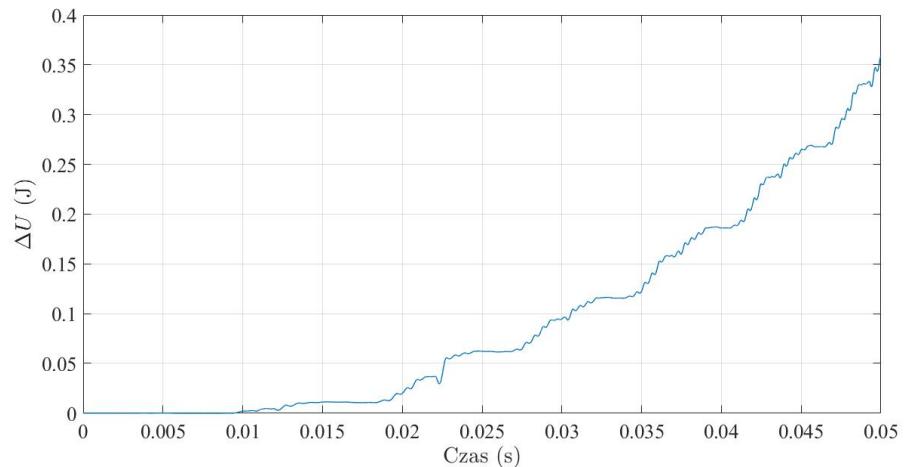
1. $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$, $\omega = 1$



Rysunek 23: Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$

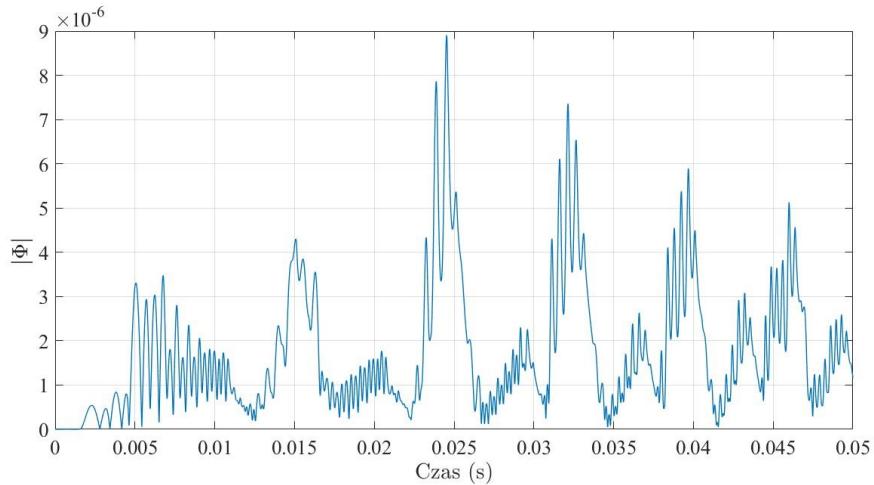


Rysunek 24: Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$

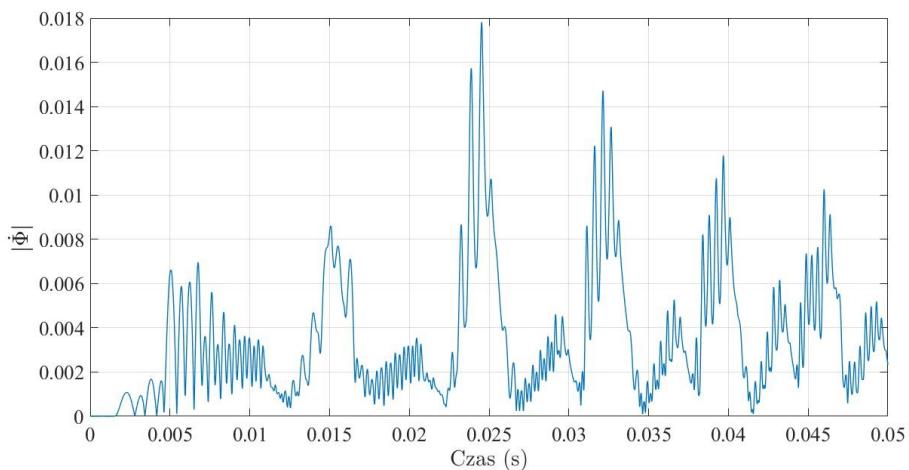


Rysunek 25: Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$

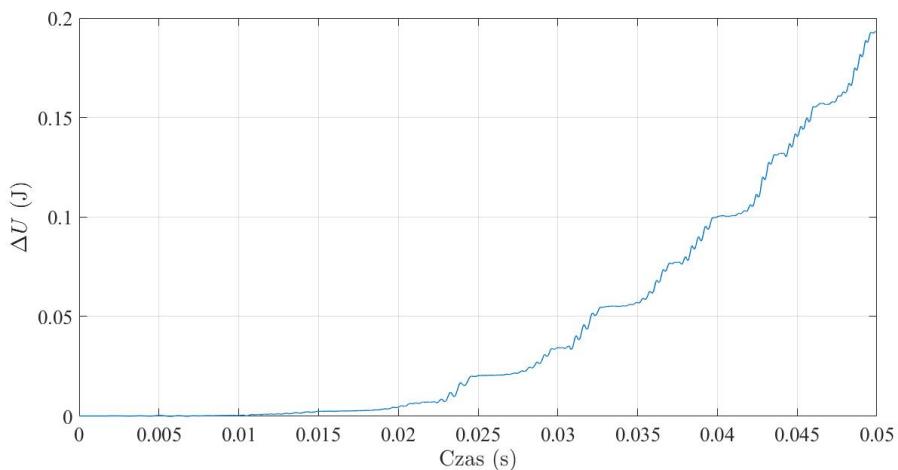
2. $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$, $\omega = 1$



Rysunek 26: Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$

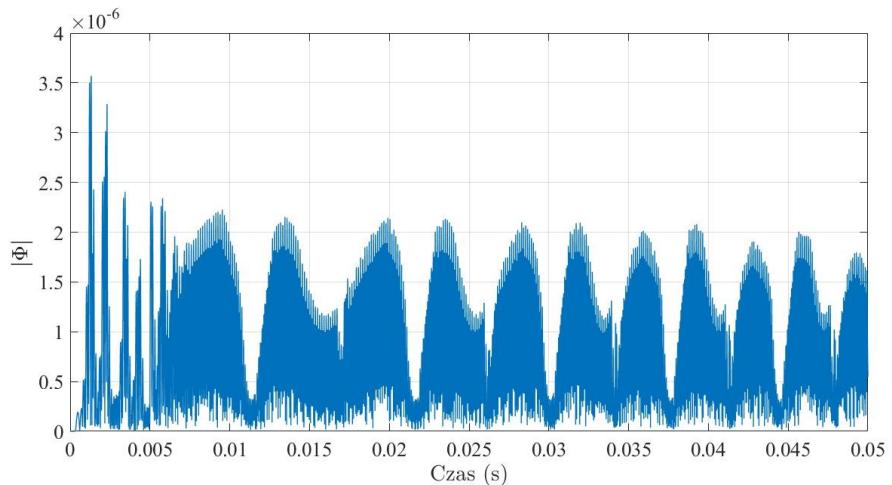


Rysunek 27: Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$

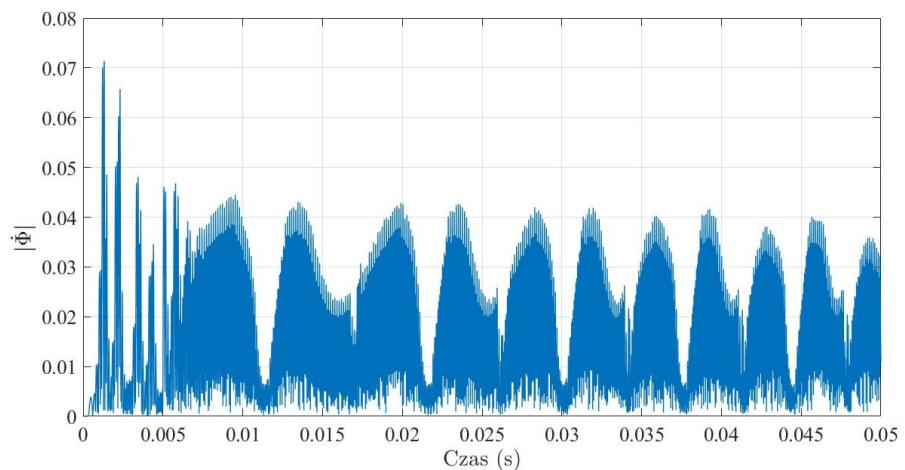


Rysunek 28: Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$

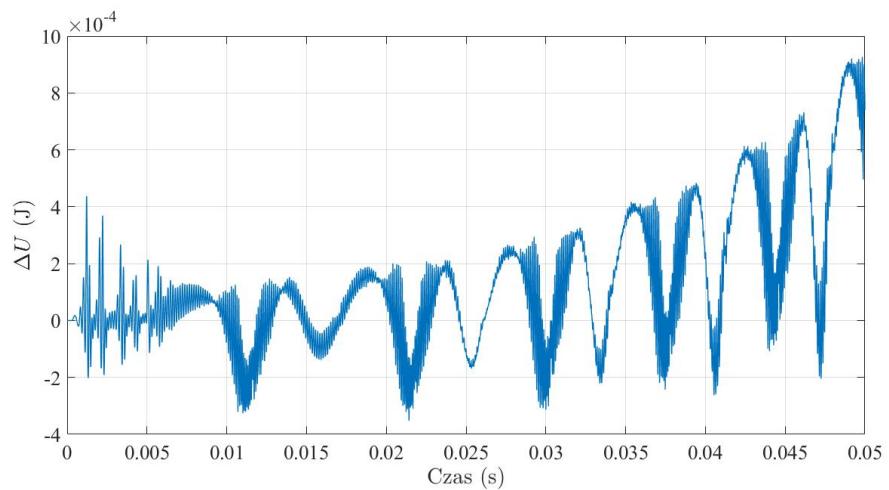
3. $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$, $\omega = 1$



Rysunek 29: Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$

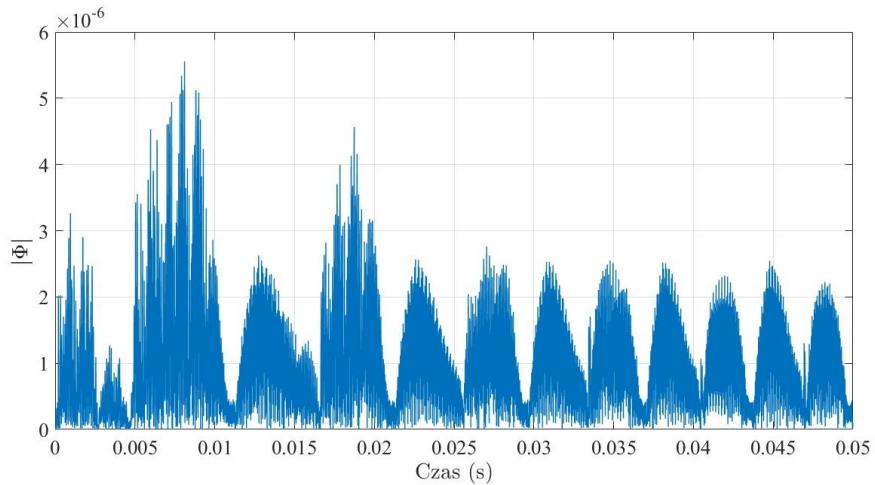


Rysunek 30: Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$

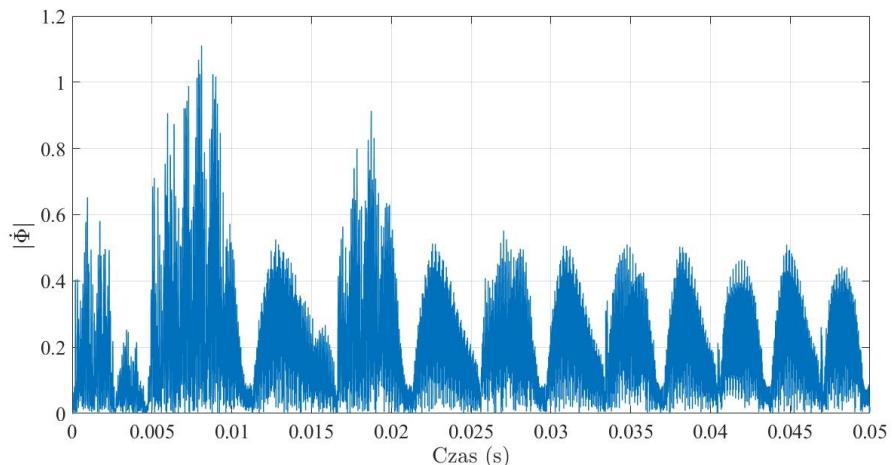


Rysunek 31: Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$

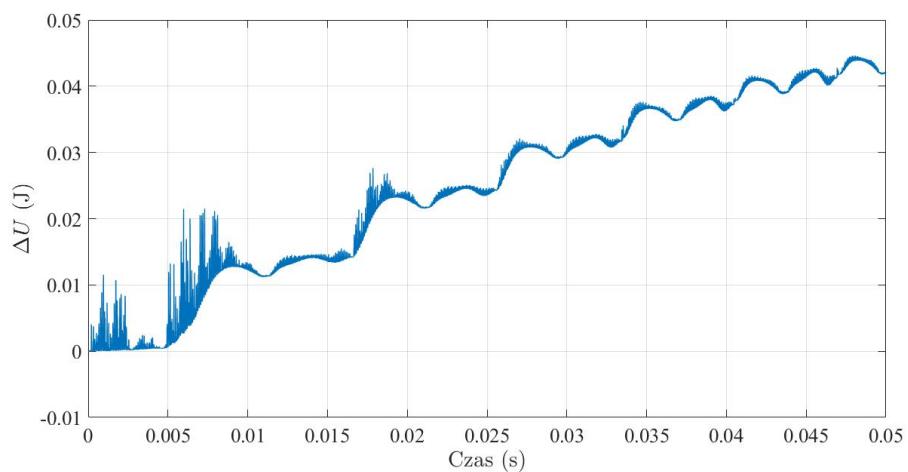
4. $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$, $\omega = 1$



Rysunek 32: Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$



Rysunek 33: Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$



Rysunek 34: Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$

Wnioski

- W żadnym przypadku nie udało się spełnić warunku na maksymalne odchylenie energii rzędu 10^{-5} J.
- Użycie procedury *ode45* bazującej na metodach RK (rozdz. 3.6) powoduje narastanie energii całkowitej. Przy nieodpowiednim doborze parametru ξ energia może narastać bardzo szybko w sposób niekontrolowany.
- Odchylenie energii jest akceptowalne dla $\xi = 10^4$.
- Zwiększenie parametru ξ prowadzi do coraz gorszego spełnienia równań więzów dla prędkości.
- Więzy dla położeń są spełniane z coraz większą dokładnością w pewnym zakresie zwiększania ξ . Dla $\xi = 10^5$ więzy dla położień zachowują się gorzej niż dla $\xi = 10^4$.
- Dla parametru ξ rzędu 10^6 nie osiągnięto zbieżności.

6.3.2 Użycie metody trapezów

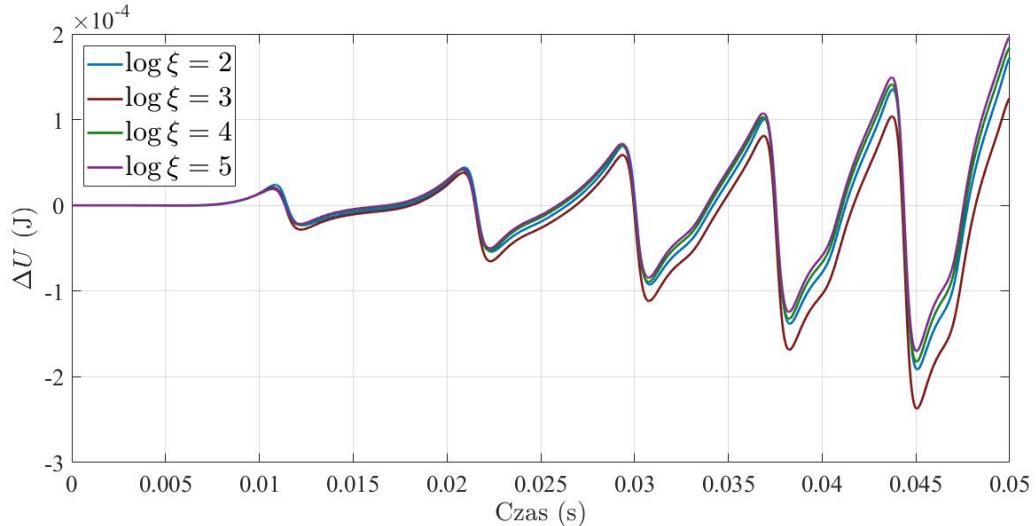
Sformułowanie opisano w podrozdziale 5.4. Dokładność z równania (5.60) ustalono na $\varepsilon = 10^{-10}$. Maksymalną liczbę iteracji ograniczono do 10.

Porównanie z metodami jawnymi

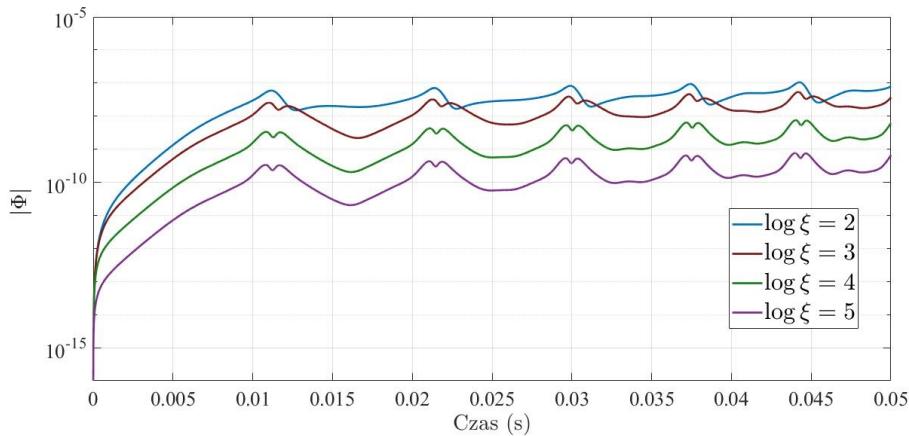
Krok czasowy ustalono na $h = 10^{-5}$ s. Symulacja z użyciem metody trapezów zostanie przeprowadzona dla takiego samego zestawu parametrów jak poprzednio.

Wykresy

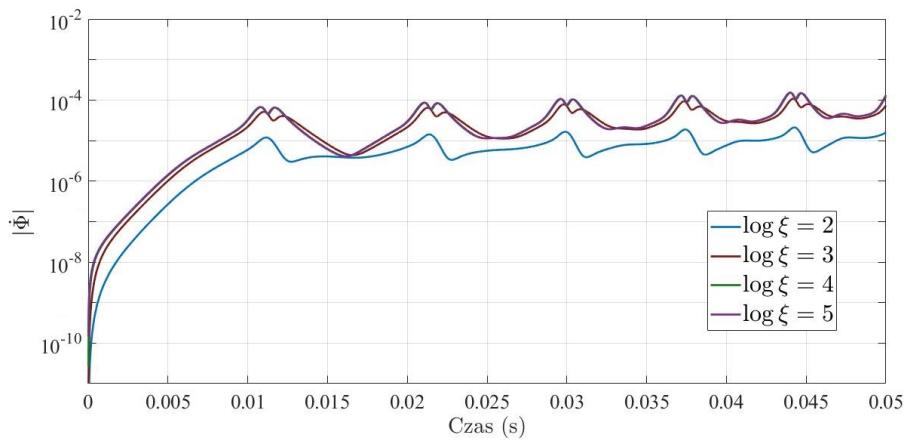
Kolejne 3 wykresy przedstawiają wyniki symulacji dla kolejnych wartości ξ takich jak w podrozdziale 6.3.1.



Rysunek 35: Porównanie odchylenia energii dla $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$

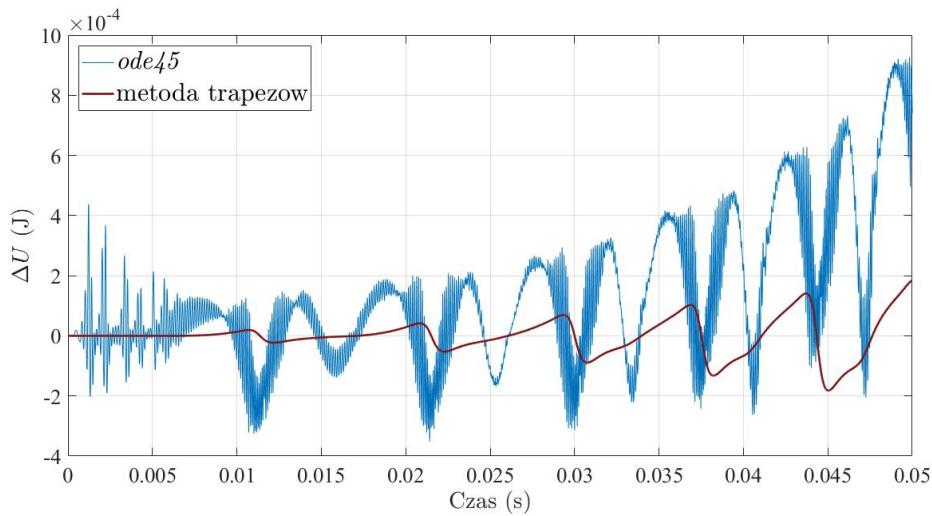


Rysunek 36: Spełnienie więzów na położenia dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna), $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$

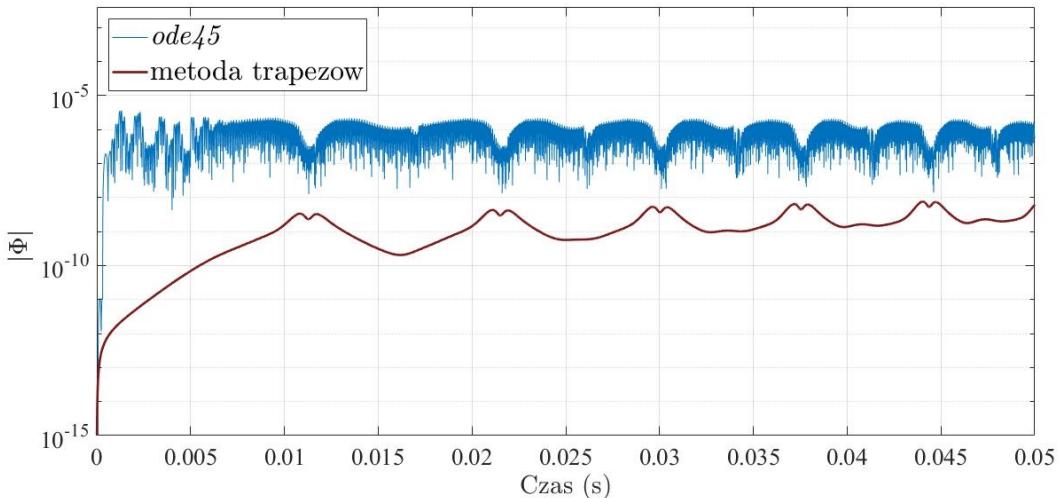


Rysunek 37: Spełnienie więzów na prędkości dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna), $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$

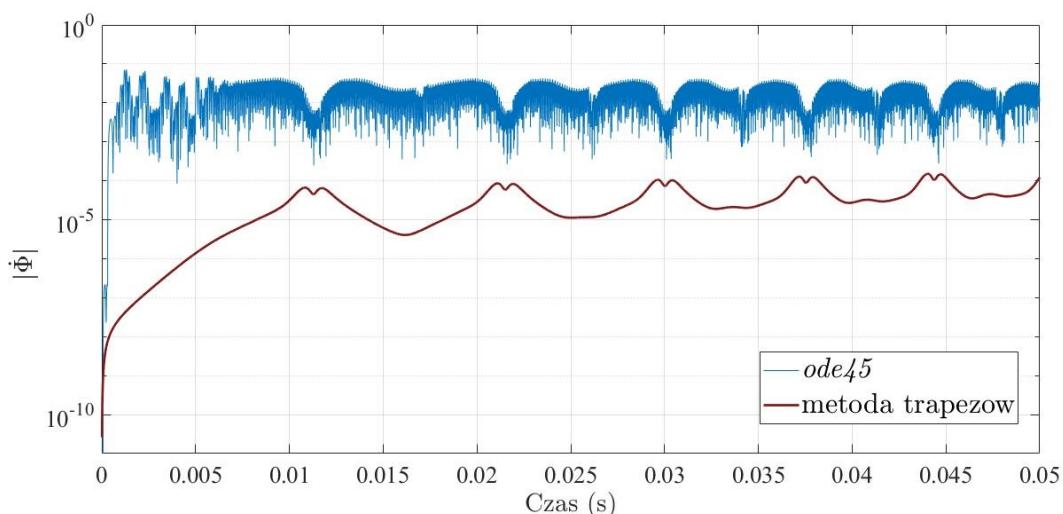
Na kolejnych 3 wykresach zestawione zostaną wyniki uzyskane w rozdziale 6.3.1 z tymi uzyskanymi za pomocą metody trapezów, $\xi = 10^4$.



Rysunek 38: Porównanie odchylenia energii dla 2 algorytmów całkowania



Rysunek 39: Spełnienie więzów na położenia dla 2 algorytmów całkowania (skala logarytmiczna)



Rysunek 40: Spełnienie więzów na prędkości dla 2 algorytmów całkowania (skala logarytmiczna)

Wnioski

- Energia całkowita jest zachowywana (niezależnie od doboru parametrów wartość odchylenia energii oscyluje wokół zera). Istnieje sposób, aby zapobiec narastaniu energii. Zachowywanie energii jest własnością metody trapezów, o czym było wspomniane w podrozdziale 3.5.
- Zwiększenie parametru ξ powoduje poprawę spełnienia równań więzów dla położeń, jednak kosztem pogorszenia więzów dla prędkości.
- W przeciwnieństwie do całkowania metodą jawną, gdzie bardzo ważny był dobór parametrów stabilizacji, przy całkowaniu metodą *A-stabilną* zakres parametrów ξ dla których osiągnięto zadowalające rozwiązanie jest szerszy (dla metody trapezów zbieżne było rozwiązanie również dla $\xi = 10^6$). Jest to pożądana własność z punktu widzenia łatwości algorytmizacji.

- Dla tych samych parametrów α , ξ i ω dokładność spełnienia równań więzów jest o 2 rzędy wyższa zarówno dla położień i prędkości na korzyść metody trapezów. Nie występuje też narastanie wartości średniej odchylenia energii (jak przy całkowaniu *ode45*).
- Jak będzie pokazane w dalszych punktach, zmniejszenie kroku czasowego pozytywnie wpływa na odwzorowanie energii i spełnienie więzów.

Podsumowując, rozwiązanie uzyskane za pomocą metody trapezów jest stabilniejsze, dokładniejsze, mniej podatne na dobór parametrów stabilizacji.

6.3.3 Spełnienie warunku na energię

W celu spełnienia warunku na energię postawionego w [11] ustawiono dokładność $\varepsilon = 10^{-12}$. Krok czasowy zmniejszono do $h = 10^{-6}$ s. Na początku porównane zostanie zachowanie rozwiązania w wyniku zmniejszenia kroku czasowego. Następnie Symulacja zostanie przeprowadzona dla zwiększonych parametrów stabilizacji.

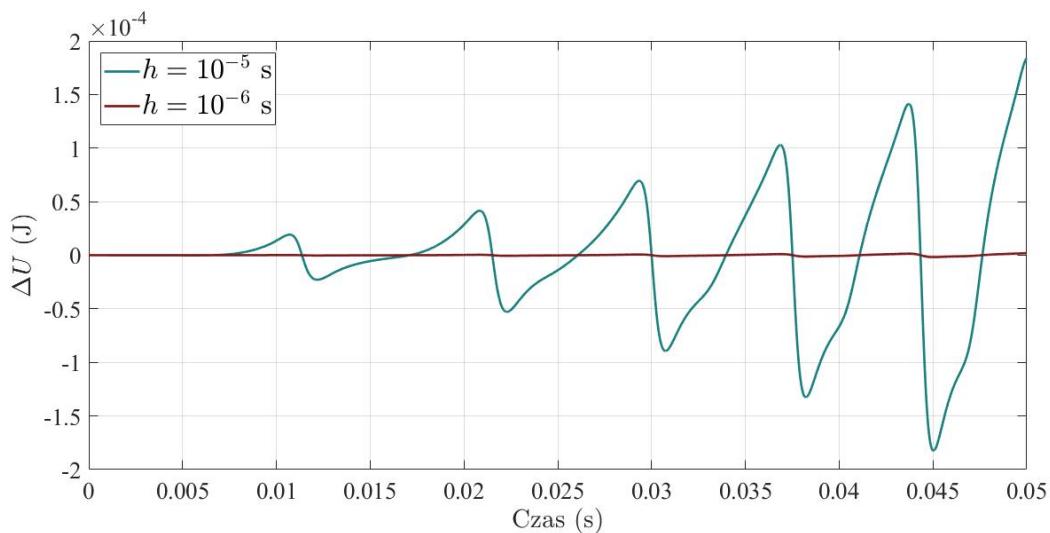
Wykresy

Zestaw 3 pierwszych wykresów wykonano dla $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$, $\omega = 1$. Zestawiono ze sobą 2 rozwiązania:

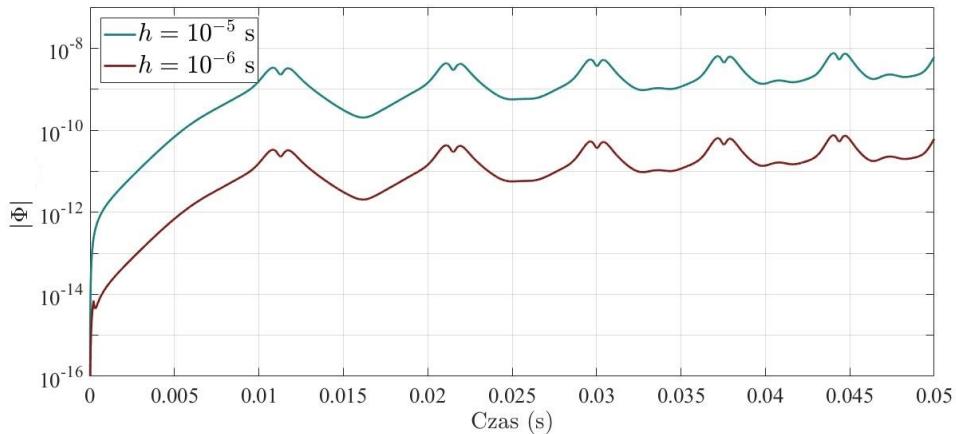
1. krok czasowy $h = 10^{-5}$
2. krok czasowy $h = 10^{-6}$

Kolejne 3 wykresy zestawiają ze sobą 2 rozwiązania dla kroku czasowego $h = 10^{-6}$:

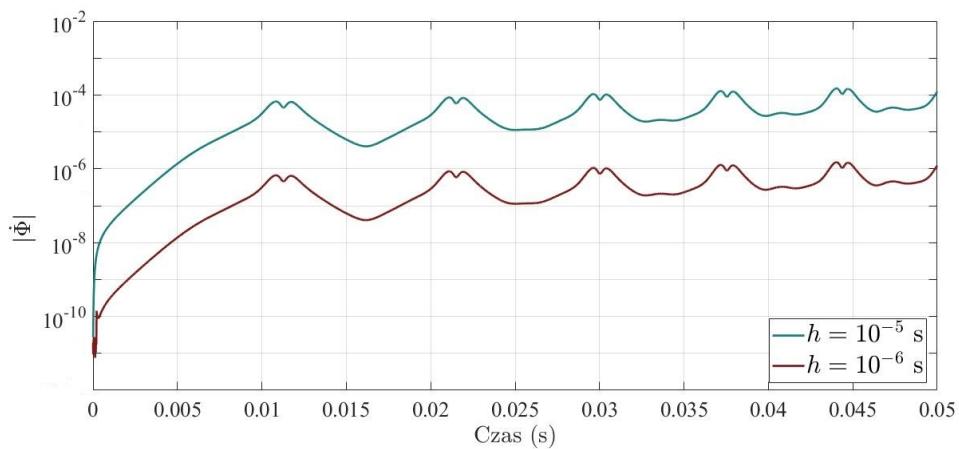
1. $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$, $\omega = 1$
2. $\alpha = 10^9$, $\xi = 10^6$, $\omega = 1$



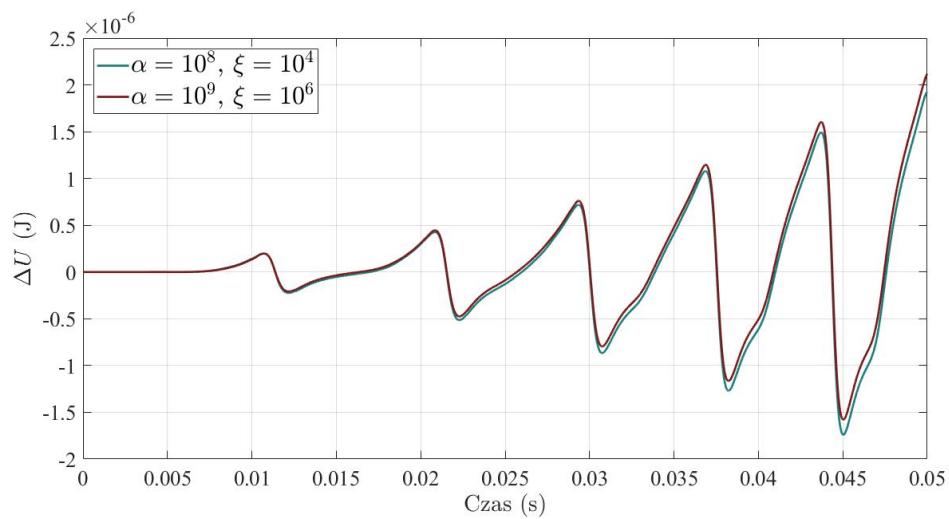
Rysunek 41: Porównanie odchylenia energii dla różnych kroków czasowych



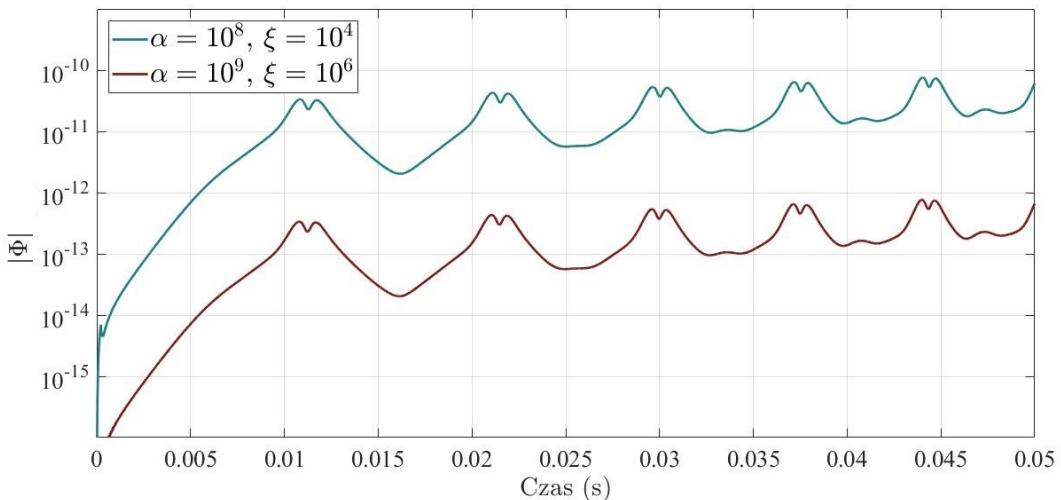
Rysunek 42: Spełnienie więzów na położenia dla różnych kroków czasowych (skala logarytmiczna)



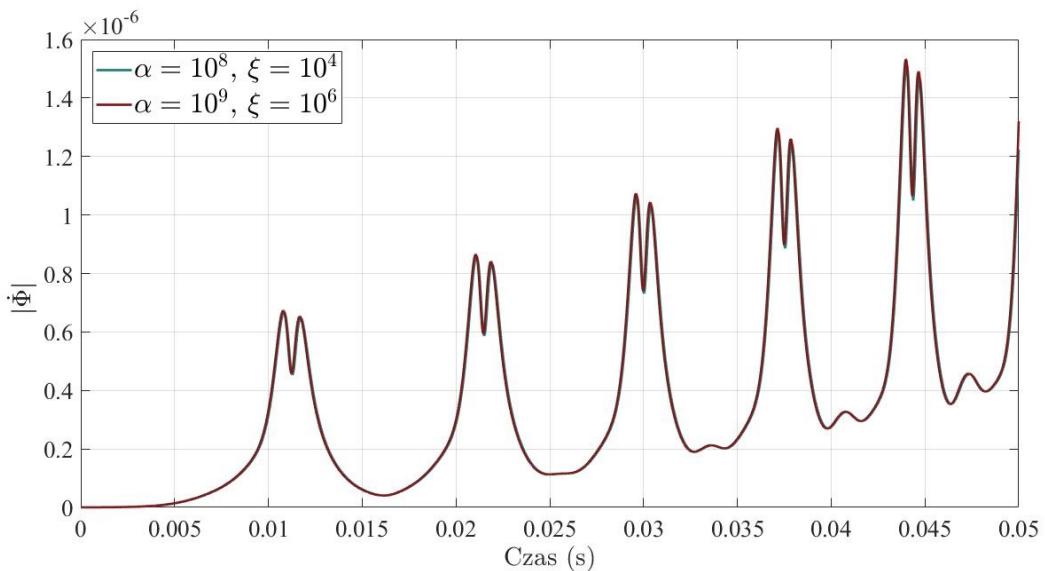
Rysunek 43: Spełnienie więzów na prędkości dla różnych kroków czasowych (skala logarytmiczna)



Rysunek 44: Porównanie odchylenia energii dla 2 zestawów parametrów stabilizacji



Rysunek 45: Spełnienie więzów na położenia dla 2 zestawów parametrów stabilizacji (skala logarytmiczna)



Rysunek 46: Spełnienie więzów na prędkości dla 2 zestawów parametrów stabilizacji

Wnioski

- Zmniejszenie kroku czasowego o 1 rząd wielkości w istotny sposób poprawia zachowanie energii. Więzy dla położień i prędkości są spełniane z dokładnością o 2 rzędy większą.
- Udało się, poprzez zwiększenie parametrów stabilizacji, uzyskać o 2 rzędy dokładniejsze spełnienie więzów dla położień, bez istotnego wpływu na zachowanie energii i więzów dla prędkości.
- Udało się spełnić wymaganie na maksymalne odchylenie energii całkowitej. Maksymalne odchylenie było rzędu $\Delta U = 2 \cdot 10^{-6}$ J.

6.3.4 Problematyka wektora σ

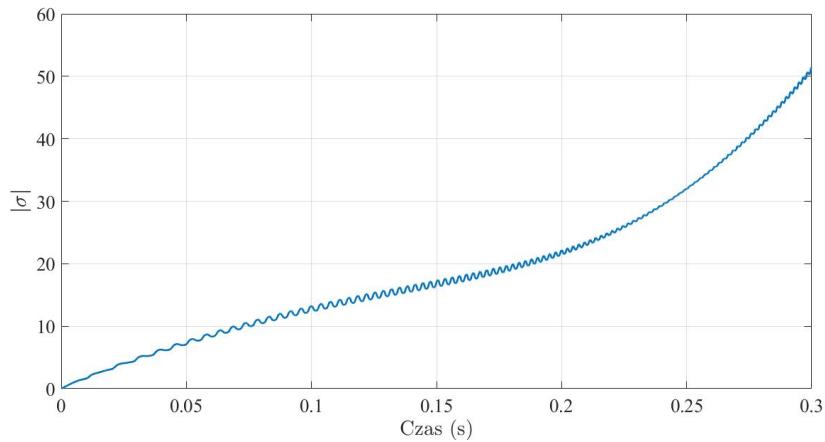
Zgodnie z równaniem (5.14) zachodzi:

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\lambda} d\tau \quad (6.24)$$

Zgodnie z równaniem (2.38) wektor $\boldsymbol{\lambda}$ reprezentuje siły reakcji związane z odpowiednimi więzami. Niesie to dwie ważne konsekwencje:

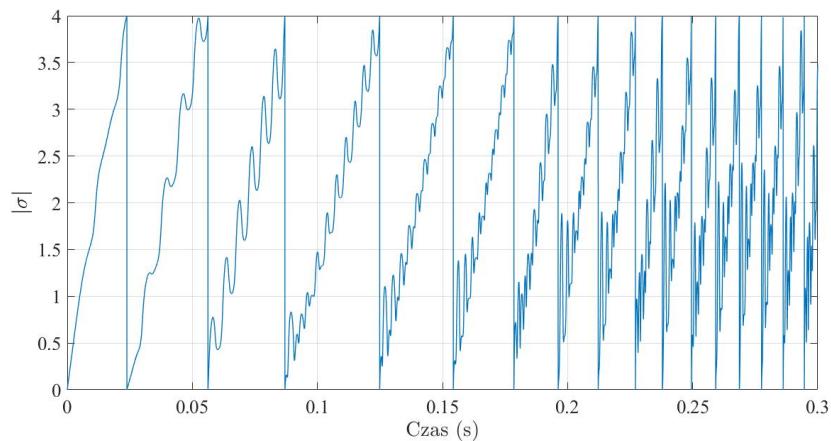
1. Wartość wektora $\boldsymbol{\sigma}$ w chwili początkowej $t_0 = 0$ może być ustawiona arbitralnie (np. na wektor zerowy, jak czyniono do tej pory).
2. Niektóre składniki wektora $\boldsymbol{\sigma}$ mogą w sposób niekontrolowany rosnąć, jeżeli odpowiednie składowe wektora $\boldsymbol{\lambda}$ nie zmieniają znaku. Taki stan może spowodować pogorszenie zbieżności rozwiązania i doprowadzić do przerwania symulacji. Problem rozwiązać można przerywając proces całkowania, zerując wektor $\boldsymbol{\sigma}$, a następnie wyliczając odpowiadające wartości momentów uogólnionych \mathbf{p} i ich pochodnych $\dot{\mathbf{p}}$ ze wzorów (5.30) i (5.32).

Przedstawiony zostanie wpływ tego zjawiska na zbieżność procesu. Parametry symulacji ponownie ustawiono na $\epsilon = 10^{-12}$, maksymalną liczbę iteracji ustawiono na 10, a krok czasowy $h = 10^{-5}$ s. Czas symulacji wyniósł 0.3 s. Wykres poniżej prezentuje zachowanie normy z wektora $\boldsymbol{\sigma}$.



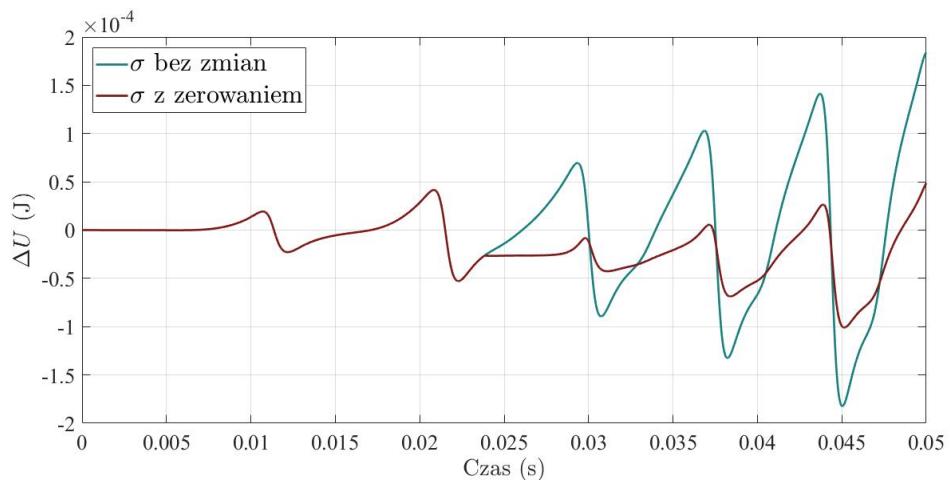
Rysunek 47: Norma z wektora σ w czasie 0.3 s symulacji

Zaproponowano rozwiązanie, polegające na sprawdzaniu w każdym kroku czasowym k , czy wartość $|\sigma_k| < 4$. Jeżeli tak, następuje zerowanie tego wektora. Efekt tego działania prezentuje wykres poniżej.

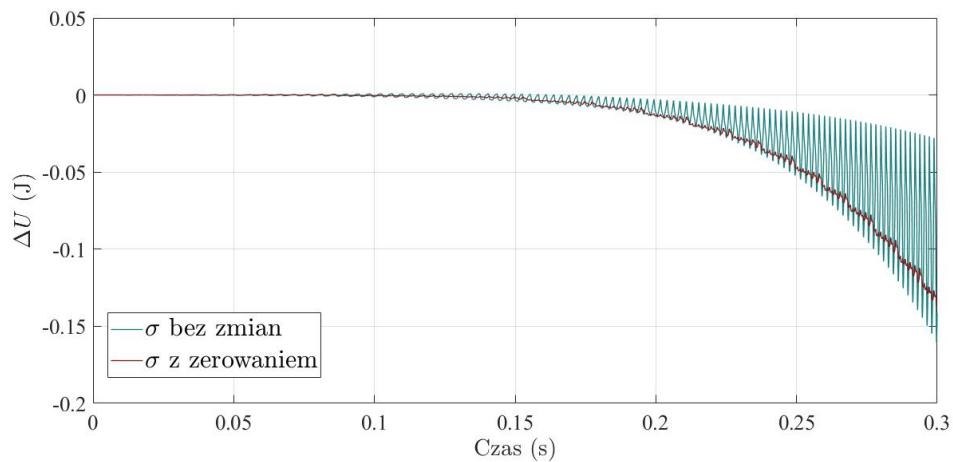


Rysunek 48: Norma z wektora σ w czasie 0.3 s symulacji z okresowym zerowaniem w trakcie trwania symulacji

Zastosowanie takiego zabiegu nie wpłynęło na dokładność spełnienia więzów, jednakże ustabilizowało odchyłki energii, co zaprezentowano na wykresie poniżej.



Rysunek 49: Odchylenia energii całkowitej w czasie 0.05 s przed i po zastosowaniu kontroli dla σ



Rysunek 50: Odchylenia energii całkowitej w czasie 0.3 s przed i po zastosowaniu kontroli dla σ

7 Podsumowanie i perspektywy

Konsekwentnie starano się przedstawić wyższość niejawnych metod całkowania, a w szczególności metody trapezów. Metoda ta, pomimo niższego rzędu od metod RK45, wykazuje lepsze właściwości w zastosowaniu do równań różniczkowo-algebraicznych. Stwierdzić można też, że sformułowanie równań kanonicznych Hamiltona opartych na rozszerzonym lagranżjanie zwraca zadowalające rezultaty niezależnie od parametrów stabilizacji, co umożliwia zalgorytmizowanie dowolnego problemu.

Perspektywy rozwoju problematyki opisanej w niniejszej pracy obejmują:

1. Przetestowanie równań kanonicznych w zjawiskach nieciągłych (zderzenia).
2. Przetestowanie metod opartych na rozszerzonym lagranżjanie na mechanizmach osiągających położenia osobliwe. Przeprowadzenie symulacji w sytuacji kiedy położenie osobliwe jest osiągane wielokrotnie.
3. Zaimplementowanie modelu pozwalającego symulować mechanizmy przestrzenne we współrzędnych absolutnych (3 współrzędne liniowe, 4 parametry Eulera).
4. Implementacja wszystkich procedur w języku *C++*, profilowanie uzyskanej aplikacji pod kątem doboru kroku całkowania, doboru parametrów stabilizacji.

Spis piśmiennictwa

- [1] Bayo E., Jalón J.G.: *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems: The Real-Time Challenge*. Springer-Verlag, 1994
- [2] Schiehlen W.: *Multibody Systems Handbook* Springer-Verlag, 1990
- [3] Frączek J., Wojtyra M.: *Dynamika układów wieloczłonowych. Treść wykładu.* 2009
- [4] Frączek J., Wojtyra M.: *Metoda układów wieloczłonowych w dynamice mechanizmów. Ćwiczenia z zastosowaniem programu ADAMS*. OWPW, 2007
- [5] Bayo E., Garcia de Jalón N., Serna M.A.: *A modified Lagrangian formulation for the dynamic analysis of constrained mechanical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988
- [6] Lankarani H.M., Nikravesh P.E.: *Application of the canonical equations of motion in problems of constrained multibody systems with intermittent motion*. Advances in Design Automation, 1988
- [7] Baumgarte J.: *Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972
- [8] Bayo E., Avello A.: *Singularity-free augmented Lagrangian algorithms for constrained multibody dynamics*. Nonlinear Dyn., 1994
- [9] Bayo E., Jiménez J.M., Serna M.A., Bastero J.M.: *Penalty based Hamiltonian equations for the dynamic analysis of constrained mechanical systems*. Mech. Mach. Theory, 1993
- [10] Cuadrado J., Dopico D., González F., Pastorino R.: *Behaviour of augmented Lagrangian and Hamiltonian methods for multibody dynamics in the proximity of singular configurations*. Springer Science+Business Media, 2016
- [11] IFToMM Technical Committee for Multibody Dynamics: *Library of computational benchmark problems (2015)*. <https://www.iftomm-multibody.org/benchmark/>
- [12] Multi-Body Systems Benchmark in OpenSim: *MBS Benchmark A03: Andrew's Squeezer Mechanism* http://rehabenggroup.github.io/MBSbenchmarksInOpenSim/benchmarks/A03_AndrewsMechanism.html

Spis rysunków

1	Schemat pary obrotowej	12
2	Metody całkowania numerycznego zaimplementowane w środowisku <i>Matlab</i>	23
3	Mechanizm korobowo-wodzikowy - możliwe ruchy w punkcie bifurkacji	32
4	Podwójne wahadło fizyczne: globalny układ odniesienia, układy lokalne. Położenie początkowe	39
5	Podwójne wahadło fizyczne: Model zbudowany w programie <i>Adams</i>	39
6	Położenie środka masy członu <i>A-B</i> w układzie globalnym uzyskane w programie <i>Adams</i>	40
7	Różnica rozwiązań <i>Adamsa</i> i <i>Matlaba</i> , równania klasyczne	41
8	Różnica rozwiązań <i>Adamsa</i> i <i>Matlaba</i> , równania kanoniczne	41
9	Różnica rozwiązań <i>Adamsa</i> i <i>Matlaba</i> , rozszerzony lagranżjan, <i>ode45</i>	42
10	Różnica rozwiązań <i>Adamsa</i> i <i>Matlaba</i> , rozszerzony lagranżjan, metoda trapezów	42
11	Odchylenie energii całkowitej dla 4 sformułowań	43
12	Spełnienie więzów na położenia dla 4 sformułowań (skala logarytmiczna)	43
13	Spełnienie więzów na prędkości dla 4 sformułowań (skala logarytmiczna)	43
14	Odchylenie energii całkowitej dla 4 zestawów parametrów	44
15	Spełnienie więzów na położenia dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna)	44
16	Spełnienie więzów na prędkości dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna)	45
17	Mechanizm Andrews'a	46
18	Lokalne układy współrzędnych zaczepione w środkach masy	47
19	Przebieg położenia punktu <i>F</i> w czasie 0.05 s	48
20	Odchylenie energii dla symulacji wykonanej z wykorzystaniem biblioteki <i>OpenSim</i>	50
21	Przykładowa pętla kinematyczna	51
22	Porównanie odchylenia energii dla $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$	52
23	Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$	53
24	Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$	53
25	Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^2$	53
26	Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$	54
27	Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$	54
28	Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^3$	54
29	Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$	55
30	Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$	55
31	Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^4$	55
32	Więzy na położenia, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$	56
33	Więzy na prędkości, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$	56
34	Odchylenie energii całkowitej, $\alpha = 10^8$, $\xi = 10^5$	56
35	Porównanie odchylenia energii dla $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$	57
36	Spełnienie więzów na położenia dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna), $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$	58
37	Spełnienie więzów na prędkości dla 4 zestawów parametrów (skala logarytmiczna), $\alpha = 10^8$, $\omega = 1$	58

38	Porównanie odchylenia energii dla 2 algorytmów całkowania	58
39	Spełnienie więzów na położenia dla 2 algorytmów całkowania (skala logarytmiczna)	59
40	Spełnienie więzów na prędkości dla 2 algorytmów całkowania (skala logarytmiczna)	59
41	Porównanie odchylenia energii dla różnych kroków czasowych	60
42	Spełnienie więzów na położenia dla różnych kroków czasowych (skala logarytmiczna)	61
43	Spełnienie więzów na prędkości dla różnych kroków czasowych (skala logarytmiczna)	61
44	Porównanie odchylenia energii dla 2 zestawów parametrów stabilizacji	61
45	Spełnienie więzów na położenia dla 2 zestawów parametrów stabilizacji (skala logarytmiczna)	62
46	Spełnienie więzów na prędkości dla 2 zestawów parametrów stabilizacji	62
47	Norma z wektora σ w czasie 0.3 s symulacji	63
48	Norma z wektora σ w czasie 0.3 s symulacji z okresowym zerowaniem w trakcie trwania symulacji	64
49	Odchylenia energii całkowitej w czasie 0.05 s przed i po zastosowaniu kontroli dla σ	64
50	Odchylenia energii całkowitej w czasie 0.3 s przed i po zastosowaniu kontroli dla σ	64

Spis tabel

1	Wymiary, parametry masowe, kąty początkowe podwójnego wahadła	40
2	Lokalne współrzędne punktów mechanizmu	46
3	Własności masowe członów mechanizmu Andrews'a	47
4	Globalne współrzędne punktów mocowań A , B i C	47
5	Współrzędne punktów mechanizmu zapisane w układach zaczepionych w środkach mas	47

Załączniki

Flowchart diagram dla algorytmu 5.4.2

