

### Lista 3, Analiza Matematyczna II

---

1. Obliczyć całki stosując całkowanie przez podstawienie.

a)

$$\int_0^1 2x(x^2 + 2)^{2025} dx,$$

c)

$$\int_2^3 x\sqrt{2x+1} dx,$$

b)

$$\int_0^1 t^9 \sin(t^{10}) dt,$$

d)

$$\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{10}} x\sqrt{x^2-1} dx.$$

2. Stosując całkowanie przez części wyznaczyć następujące całki:

a)

$$\int_0^\pi x \sin(x) dx,$$

c)

$$\int_1^2 x \log(x) dx,$$

b)

$$\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx,$$

d)

$$\int_0^\pi e^x \sin(x) dx.$$

3. Uzasadnij, że<sup>1</sup>

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi.$$

4. Udowodnij, że dla dowolnej funkcji ciągłej  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  zachodzi

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(x)) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos(x)) dx.$$

5. Wyznaczyć następującą całkę nieoznaczoną:

$$\int \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + x}}} dx.$$

6. Niech  $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$  i niech  $f_{n+1}(x) = f_n(f_1(x))$ . Wyznaczyć

$$\int_0^{10} f_5(x) dx.$$

7. Obliczyć całkę<sup>2</sup>

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos(x)^2} dx.$$

---

<sup>1</sup>Wskażówka: Ile wynosi suma tych całek?

<sup>2</sup>Wskażówka: Podzielić przedział całkowania na dwie połówki i w jednej z całek podstawić  $x = t - \pi$ .

8. Obliczyć pochodne następujących funkcji:

a)

$$f(t) = \int_{\log(t)}^{e^{-t}} \cos(u^2) du,$$

b)

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^4} \sqrt{1+y^2} dy.$$

9. Funkcja  $f$  jest dodatnia i ciągła dla  $x \geq 0$ . Udowodnić, że funkcja

$$g(x) = \left( \int_0^x f(y) dy \right)^{-1} \left( \int_0^x y f(y) dy \right)$$

jest rosnąca.<sup>3</sup>

10. Wyznaczyć granice.

a)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \int_0^t e^{2x^2} dx \right)^{-1} \left( \int_0^t e^{x^2} dx \right)^2,$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2xe^{-x^2} \right) \int_0^x e^{t^2} dt.$$

11. Dla funkcji  $f, g$  całkowalnych na odcinku  $[a, b]$  udowodnić następującą nierówność:

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right).$$

12. W zależności od  $n, m \in \mathbb{Z}$  obliczyć całki:

a)

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx,$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx,$$

c)

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx.$$

13. Wyrazić  $I_n$  przez  $I_{n-1}$  lub  $I_{n-2}$ :

a)

$$I_n = \int x^n e^x dx,$$

c)

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 4)^n} dx,$$

b)

$$I_n = \int x^n \sin(x) dx,$$

d)

$$I_n = \int (\log x)^n dx.$$

---

<sup>3</sup>Wskazówka: Obliczyć pochodną ilorazu i zapisać licznik pod jedną całką.