Lista 4, Analiza Matematyczna II

i. Wykorzystując wzór Stirlinga, oszacować prawdopodobieństwo wyrzucenia dokładnie n orłów w $2n$ rzutach monetą w terminach $n \in \mathbb{N}$. Ile w przybliżeniu wynosi to prawdopodobieństwo dla $n = 100$ i $n = 10000$?

2. Wykorzystując wzór Stirlinga oszacować liczbę cyfr liczby 100!

3. Wiadomo, że dla parzystego n objętość n-wymiarowej kuli o promieniu 1 wynosi

$$V_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}$$

Udowodnić, że $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$.

$\dot{4}$. Udowodnić, że

$$\lim_{n\to\infty} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot \left(\frac{e}{2n}\right)^n = \sqrt{2}.$$

5. Znaleźć przedziały zbieżności szeregów potęgowych

$\dot{a}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n,$$

$\dot{b}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{4n}{n} \pi^{2n} x^{5n+1},$$

$\dot{c}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot n^n}{(2n)!} x^{n^2},$$

$\dot{d}$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} e^{n^2} x^{n!+n}.$$

6. Uzasadnij oszacowania całek

a)

$$\frac{21}{e^2} \leq \int_1^4 x^2 e^{-x^2}\, dx \leq \frac{21}{e},$$

b)

$$\frac{3}{5} \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+1}\, dx \leq 2,$$

$\dot{c}$)

$$\left| \int_{1/2025}^{2025} \frac{\sin(\pi x)}{\sqrt{x^2+\pi^2}}\, dx \right| \leq \frac{2}{3}.$$

$\dot{d}$)

$$\left| \int_{2\pi}^{2025} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx \right| \leq \frac{1}{4\pi^2+1},$$

$\ddot{7}$. [Nierówność Jensena] Funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$, a ϕ jest wypukła i ciągła na $\mathbb{R}$. Udowodnij, że $\phi \circ f$ jest całkowalna na $[a,b]$ oraz

$$\phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))\, dx.$$

8. Udowodnij, że jeśli w poprzednim zadaniu ϕ jest funkcją wklęsłą, to nierówność zachodzi w drugą stronę.

9. Używając dwóch poprzednich zadań udowodnić następujące oszacowania.

a)

$$\exp\left(\int_0^1 \log(f(x))\right)\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx,$$

ḃ)

$$e^{1/3} \leq \int_0^1 e^{x^2}\, dx,$$

ċ)

$$\frac{\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt{2}} \geq \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(x^3)\, dx.$$