Algebra I, lista 4, (ćwiczenia 24.03.2025, deklaracje do godz. 11:00).

Teoria. Aksjomatyczne ujęcie funkcji det, "objętość zorientowana". Własności wyznacznika (liniowość na każdej współrzędnej). Wzór na wyznacznik macierzy (z permutacjami). Twierdzenie Cauchy'ego: $det(AB) = det(A)det(B)$. Wyznacznik macierzy 2×2 i 3×3 (wzór Sarrusa). $det(A) \neq 0 \iff$ macierz A jest odwracalna. Macierz transponowana A^T. $det(A^T) = det(A)$. Kolumny A są l.n $\iff$ wiersze A są l.n. ($\iff$ $det(A) \neq 0$). Operacje na wierszach i kolumnach macierzy zachowujące det, praktyczne obliczanie wyznacznika macierzy przez sprowadzanie do postaci górnotrójkątnej. Ciało: definicja, podstawowe własności. Przestrzeń liniowa nad ciałem F. Baza Hamela. Ciało liczb zespolonych. Płaszczyzna Gaussa. Postać algebraiczna i trygonometryczna liczby zespolonej. Moduł, argument (główny). Mnożenie l. zespolonych, wzór de Moivre'a. Sprzężenie jako automorfizm ciała $\mathbb{C}$. Arytmetyka modularna, ciała F_p.

Ćwiczenia.

1. Obliczyć wyznacznik następujących macierzy, sprowadzając je do postaci górnotrójkątnej (przy użyciu elementarnych operacji na wierszach lub kolumnach).

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Sprawdzić, że w ciele liczb zespolonych $\mathbb{C}$:
   (a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1 \cdot z_2|$
   (b) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
   (c) Sprzężenie $z \mapsto \bar{z}$ jest automorfizmem ciała $\mathbb{C}$.
   (d) $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ oraz $|\bar{z}| = |z|$.

3. Ile jest różnych prostych w przestrzeni liniowej F_p^n $(n \neq 1)$ nad ciałem F_p?

Zadania.

1. Dane są macierze A, B wymiaru $n \times n$. Udowodnić, że:
   (a) $(AB)^T = B^T A^T$.
   (b) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (wsk: skorzystać z (a)).

2. Załóżmy, że $*$ jest działaniem w zbiorze $X \neq \emptyset$.
   (i) Udowodnić, że w zbiorze X istnieje co najwyżej jeden element neutralny działania $*$ (tzn. elemet $e \in X$ taki, że dla każdego $x \in X$, $e * x = x * e = x$).
   (ii) Załóżmy, że działanie $*$ jest łączne oraz $e \in X$ jest elementem neutralnym działania $*$. Udowodnić, że dla każdego $x \in X$ istnieje co najwyżej jeden element odwrotny $x' \in X$ (tj. taki, że $x * x' = x' * x = e$).

3. Udowodnić, że w ciele F:
   (i) $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$.
   (ii) Jeśli $x \neq 0$ i $y \neq 0$, to $x \cdot y \neq 0$.

4. Udowodnić, że istnieje baza Hamela $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ taka, że
(a) $\mathcal{B} \subseteq [0,1]$.
(b)* Baza $\mathcal{B}$ jest zawarta w zbiorze Cantora $C \subseteq [0,1]$.
(uwaga: bez dowodu można przyjąć, że każdy zbiór generatorów $\mathbb{R}$ nad $\mathbb{Q}$ zawiera jakąś bazę Hamela.)

5. Załóżmy, że ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ jest podciałem ciała F takiego, że w F istnieje element i taki, że $i^2 = -1$. Niech
$$\mathbb{R}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq F.$$
Udowodnić, że
(a)– $\mathbb{R}[i]$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ (podprzestrzenią ciała F traktowanego jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$), zbiór $\{1, i\}$ jest bazą tej przestrzeni i $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}[i] = 2$.
(b) $\mathbb{R}[i]$ jest podciałem ciała F, izomorficznym z ciałem liczb zespolonych.

6. (a) Załóżmy, że punkty $P_1, \ldots, P_n$ ($n \geqslant 3$) są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg jednostkowy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ (o środku w zerze). Udowodnić, że $P_1 + \ldots + P_n = 0$.
(b)* Traktujemy $\mathbb{R}^2$ jako przestrzeń liniową nad $\mathbb{Q}$. Niech $V = Lin_{\mathbb{Q}}(P_1, \ldots, P_n)$. Obliczyć $\dim(V)$.

7. Załóżmy, że $F = (F, +, \cdot, 0, 1)$ jest ciałem. Jeśli istnieje $n > 0$ takie, że w ciele F:
$$n \cdot 1 := \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = 0,$$
to najmniejsze takie n nazywamy charakterystyką ciała F i oznaczamy przez $char(F)$. Jeśli takiego $n > 0$ nie ma, to przyjmujemy, ze $char(F) = 0$.
(a) Udowodnić, że jeśli $char(F) > 0$, to $char(F)$ jest liczbą pierwszą.
(b)*– Udowodnić, że jeśli $char(F) = p > 0$, to ciało F zawiera podciało izomorficzne z ciałem F_p.
(c)*– Udowodnić, że jeśli $char(F) = 0$, to ciało F zawiera podciało izomorficzne z ciałem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$.
(d)*– Udowodnić, że jeśli ciało F jest skończone i zawiera podciało izomorficzne z cialem F_p, to $|F| = p^n$ dla pewnego $n > 0$.

8. Niech $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Niech $C = Lin(b_1, b_2, b_3) < \mathbb{R}^5$.
(a) Uzasadnić, że $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ jest bazą C.
(b) Określić odwzorowanie liniowe f o dziedzinie $\mathbb{R}^5$, którego jądrem jest podprzestrzeń C.

9. Załóżmy, że W jest podprzestrzenią przestrzeni liniowej V, $v_1, \ldots, v_n \in V$, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ oraz dla każdego i mamy

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \in W.$$

Udowodnić, że jeśli macierz A jest odwracalna, to wszystkie wektory v_j należą do W.