Algebra I (ISIM), lista 1 (ćwiczenia 3.03.2025, deklaracje do godz. 11:00).

V oznacza przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$, zaś V_1, V_2, V_3 są podprzestrzeniami V.

Teoria: Przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$: aksjomaty, własności, przykłady. Podprzestrzeń: definicja, własności, przykłady. Podprzestrzeń generowana przez podzbiór. Operator liniowego domknięcia Lin. Przestrzeń ilorazowa. Produkt przestrzeni. Liniowa niezależność układu wektorów i zbioru wektorów. Baza przestrzeni liniowej: istnienie, każde dwie bazy są równoliczne (tw. Steinitza). Wymiar przestrzeni $dim(V)$: definicja, własności (modularność).

Zadania oznaczone minusem nie będą omawiane na ćwiczeniach.

1. Dane są dwa różne punkty $P, Q \in \mathbb{R}^2$.
   (a)– Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty P, Q, w postaci wektorowej.
   (b) Udowodnić, że punkt $R = \frac{1}{2}(P + Q)$ jest środkiem odcinka o końcach P i Q.
   (c) Udowodnić, że w każdym równoległoboku Π przekątne przecinają się w połowie (wsk: dobrać układ współrzędnych w płaszczyźnie równoległoboku Π tak, by jeden z wierzchołków Π był początkiem tego układu).

2. Dowieść, że:
   (a)– $V_1 \cap V_2$ jest podprzestrzenią V.
   (b)– $V_1 + V_2 = Lin(V_1 \cup V_2)$.
   (c) Jeśli $V_1 \subseteq V_2$, to $V_2 \cap (V_1 + V_3) = (V_2 \cap V_1) + (V_2 \cap V_3)$.
   (d) Jeśli $V_2 \subseteq V_1$, to $V_1 + (V_2 \cap V_3) = (V_1 + V_2) \cap (V_1 + V_3)$.

3. Udowodnić, że dowolny zbiór wielomianów $\{W_n(X) : n \in N\} \subseteq \mathbb{R}[X]$, gdzie $deg(W_n) = n$,
   jest liniowo niezależny w przestrzeni $\mathbb{R}[X]$ i generuje tę przestrzeń (jest więc bazą).

4*. Załóżmy, że $W(x)$ jest wielomianem stopnia $n > 0$. Dowieść, że wielomiany $W(X)$, $W(X + 1), \ldots, W(X + n)$ są liniowo niezależne (w przestrzeni $\mathbb{R}[X]$).

5. Dowieść, że $dim(V_1 + V_2) + dim(V_1 \cap V_2) = dim(V_1) + dim(V_2)$ w przypadku, gdy $dim(V)$ jest skończony (równość jest jednak prawdziwa zawsze).

6. Załóżmy, że wektory niezerowe $v_1, \ldots, v_n \in V$ generują V. W ciągu wektorów $v_1, \ldots, v_n$ wykreślamy wszystkie te wektory, które są liniowymi kombinacjami wektorów wcześniejszych. Udowodnić, że wektory niewykreślone tworzą bazę V. (Uwaga: to zadanie dostarcza łatwego dowodu na istnienie bazy przestrzeni liniowej. Dowód na wykładzie był podany ze względów dydaktycznych.)

7. Niech $B \subseteq V$. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) B jest bazą V (tzn. B jest liniowo niezależnym zbiorem generatorów).
   (b) B jest minimalnym zbiorem generatorów V (tzn. żaden właściwy podzbiór

$B' \subset B$ nie generuje V).
(c) B jest maksymalnym zbiorem liniowo niezależnym w V (tzn. żaden właściwy nadzbiór $B' \supset B$ nie jest liniowo niezależny).

8. Załóżmy, że $V = \mathbb{R}^5$ oraz $dim(V_1) = dim(V_2) = 3$. Co można powiedzieć o $dim(V_1 \cap V_2)$ oraz $dim(V_1 + V_2)$? (dla wszystkich przypadków podać przykłady).

9. Uzasadnić, że jeśli $dim(V) = 3$ oraz zbiór $\{u, v, w\}$ jest bazą V, to również zbiór $\{u + v, u + 2v + w, w\}$ jest bazą V.

10. – Które z następujących zbiorów są podprzestrzeniami danej przestrzeni liniowej V?
$V = C(\mathbb{R})$; $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(7) = 0)\}$, $\{f \in C(\mathbb{R}) : f(12) \geqslant f(-12)\}$.
$V = \mathbb{R}^3$; podzbiory zadane równaniami:
$z^2 = x^2 + y^2$; $x + y + 2z = 0$; $x^2 + y^2 + z^2 = 0$
$V = \mathbb{R}[X]$; zbiór wielomianów stopnia 7, $\{W \in \mathbb{R}[X] : W'(2) = 0\}$, $\{W \in \mathbb{R}[X] : W(0) + W(1) = 0\}$, $\{W \in \mathbb{R}[X] : W(0)^2 + W(1) = 0\}$.

11*. Na płaskiej łące początkowo siedzi 6 żab, po jednej w każdym z wierzchołków pewnego sześciokąta foremnego o środku symetrii w punkcie O, w którym siedzi bocian. Co sekundę jedna z żab (siedząca w punkcie A) skacze ponad inną żabą (w punkcie B) do punktu C takiego, $2d(A, C) = 6d(A, B) = 3d(B, C)$ (tu $d(X, Y)$ oznacza odległość od X do Y). Czy po pewnej liczbie skoków któraś z żab może skoczyć do punktu O?

Zaliczenie przedmiotu następuje na podstawie zaliczenia ćwiczeń oraz zdania egzaminu pisemnego w sesji egzaminacyjnej. Do egzaminu dopuszczeni są wyłącznie studenci, którzy uzyskali zaliczenie ćwiczeń.

1. Zaliczenie ćwiczeń. W trakcie semestru odbędą się 3 kolokwia (60 minut, początek wykładu, 26.03, 23.04 i 4.06, 3 x 20 pkt). Ponadto można będzie uzyskać do 15 punktów za aktywność na ćwiczeniach. Progi na oceny z zaliczenia ćwiczeń: 3.0 — 28 pkt (w tym minimum 24 pkt z kolokwiów), 3.5 — 36 pkt, 4.0 — 44pkt 4.5 — 52pkt, 5.0 — 60 pkt.

2. Punkty za aktywność. Na każdych ćwiczeniach omawiana jest jedna lista zadań. Student składa deklaracje rozwiązań zadań z tej listy wpisując plusy przy zadaniach w tabelce deklaracji w plikach w zespole MS Teams, w podanym terminie (zazwyczaj w dniu ćwiczeń), po dopisaniu swojego nazwiska do listy w tabelce. W przypadku, gdy prezentowane rozwiązanie jest błędne, student może otrzymać do -6 plusów.

Plusy są przeliczane na punkty za aktywność wg kursu: 1 pkt za aktywność = 10 plusów.

Uwaga. W poniedziałek 24.02 zamiast ćwiczen będzie wykład. Pierwsze ćwiczenia odbędą się więc 3.03.

Wspólnie z dr. Tomaszem Elsnerem, wykładowcą na Algebrze Liniowej 2, ustaliliśmy następujące warunki przenoszenia z Algebry I na Algebrę Liniową 2 studentów, którzy nie dają sobie rady na Algebrze I:

1. Każdy ze studentów Algebry I może przenieść się na Algebrę Liniową 2 do 28.03.2025 (bez żadnych warunków), wypełniając Formularz B2 dostępny na stronie https://www.math.uni.wroc.pl/ogloszenia-dyrekcji. W razie problemów należy pisać do pani Anny Żmudy. Osoby przenoszące się w tym trybie zwolnione są na Algebrze liniowej 2 z kolokwium nr 1 (13.03) oraz z kolokwium nr 2 (27.03), chyba że przenoszą się przed którymś z tych kolokwiów. Przenoszący się studenci obowiązani są przystąpić do kolokwium nr 3 (10.04) na Algebrze liniowej 2.

2. Każdy ze studentów algebry I, który uzyskał z trzech kolokwiów na Algebrze I minimum 18 punktów, może przenieść się na Algebrę Liniową 2 w okresie 4-6.06.2025, wypełniając formularz jak w punkcie 1. Student taki obowiązany jest przystąpić do kolokwium nr 7 (12.06) na Algebrze liniowej 2. Zaliczenie ćwiczeń z Algebry liniowej 2 student taki uzyskuje na podstawie wyników tego kolokwium lub wyników tego kolokwium oraz wyników kolokwiów z Algebry I, w zależności od tego, który algorytm da korzystniejszy dla studenta wynik.

3. Kolokwia na Algebrze liniowej 2 odbywają się na konwersatoriach (co drugi czwartek, godz. 16-18), w związku z tym obecność na konwersatoriach jest obowiązkowa. Ewentualna kolizja z innymi zajęciami nie jest podstawą do zwolnienia z kolokwium.

4. Wszelkie materiały do wykładu Algebra liniowa 2 są dostępne w systemie Moodle (SKOS).