

4.1 Wokół prawa Zero-Jedynkowego dla FO

- **Zadanie 4.1.** Pokaż, że obecność stałych w sygnaturze psuje prawo 0—1 dla FO.
- **Zadanie 4.2.** Wyjaśnij, w jaki sposób aksjomaty rozszerzenia mogą zostać uogólnione, aby udowodnić prawo 0—1 dla FO w dowolnych czysto relacyjnych sygnaturach (tj. bez stałych, tylko predykaty).
- **Zadanie 4.3.** Libkin w swojej książce definiuje k -ty aksjomat rozszerzenia następująco: „dla wszystkich parami różnych elementów x_1, x_2, \dots, x_{2k} istnieje inny element y taki, że y jest połączony przez E ze wszystkimi x_i dla $i \leq k$ oraz niepołączony przez E ze wszystkimi x_i dla $i > k$.” Dlaczego nasza teoria aksjomatów rozszerzenia \mathbb{EA} oraz teoria Libkina \mathbb{LIB} są „takie same”, tzn. udowodnij, że $\mathbb{EA} \models \mathbb{LIB}$ oraz $\mathbb{LIB} \models \mathbb{EA}$.
- **Zadanie 4.4.** Udowodnij, że każdy aksjomat rozszerzenia jest prawie na pewno spełniony. Jeśli nie potrafisz liczyć, możesz też zreferować dowód tego faktu z notatek Grädela.
- **Zadanie 4.5.** Pokaż, że logika drugiego rzędu nie spełnia prawa 0—1.

4.2 Alternatywne definicje grafu Rado

- **Zadanie 4.6.** Rozważ przeliczalny graf G , którego uniwersum to \mathbb{N} i istnieje krawędź nieskierowana między dowolnymi (i, j) , dla których $j < i$ i $\text{BIT}(i, j)$ jest **true** (tj. j -ty bit binarnej reprezentacji i wynosi 1). Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym.
- **Zadanie 4.7.** Definiujemy zbiór HF dziedzicznie skończonych zbiorów w następujący sposób. Zbiór pusty \emptyset należy do HF , a jeśli a_1, \dots, a_k należą do HF (dla jakiegoś $k \in \mathbb{N}$), to $\{a_1, \dots, a_k\} \in \text{HF}$. Rozważ przeliczalny graf G , którego dziedziną jest HF , a krawędź łączymy między dwoma wierzchołkami u, v wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in v$ lub $v \in u$. Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym.
- **Zadanie 4.8.** Rozważ przeliczalny graf G , którego uniwersum stanowi zbiór liczb pierwszych przystających do 1 modulo 4. Połącz krawędzią p i q , jeśli p jest resztą kwadratową modulo q .¹ Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym. **[Rozwiązanie].**

4.3 Obliczalność

- **Zadanie 4.9 ((2pkt)).** Niech $\mathcal{T} \subseteq \text{FO}$ będzie rekurencyjnie zupełną teorią, tj. istnieje program, który dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zwraca pierwsze n elementów \mathcal{T} . Pokaż, że następujący problem wynikania jest rozstrzygalny: „dla danej formuły pierwszego rzędu φ , czy zachodzi $\mathcal{T} \models \varphi$?”. Nie przejmuj się złożonością :)

¹ Liczba p jest resztą kwadratową modulo q , jeśli istnieje liczba x taka, że $x^2 \equiv p \pmod{q}$.