Lista gwiazdkowa (19.03.2025), Analiza Matematyczna II

401. Załóżmy, że f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[a,b]$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) \geq \delta$ na $[a,b]$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = 1/f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$[1].

402. Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemmana.

403. Niech $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{(a_n,b_n)}(x),$$ [2]

gdzie (a_n, b_n) są parami rozłącznymi przedziałami o długościach 2^{-n}. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemanna oraz oblicz wartość całki $\int_0^\pi f(x)\,dx$.[3]

404. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na odcinku $[0,1]$ o wartościach rzeczywistych. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1).$$

405. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

406. Załóżmy, że f jest ciągła, ściśle rosnąca z $[0,\infty)$ na $[0,\infty)$. Niech g oznacza funkcję odwrotną do f. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b > 0$ mamy

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geq ab$$

oraz zbadaj kiedy zachodzi równość.

407. Czy liczba $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\,dx$ jest dodatnia czy ujemna?

408. Udowodnić, że równanie

$$\int_0^a e^{-x} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{100}}{100!} \right) dx = 50$$

ma rozwiązanie a zawarte w przedziale $[50, 100]$.

409. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$ wykazać równość

$$\int_0^\pi x f(\sin(x))\,dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x))\,dx.$$

410. Udowodnić, że jeśli $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 to ciąg

$$a_n = \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{1}{2} f(n)$$

[1]Uwaga: bez założenia $f(x) \geq \delta > 0$ funkcja $g(x)$ nie byłaby ograniczona.
[2]χ_A oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1 na zbiorze A oraz zero poza nim.
[3]Pytanie dla dociekliwych: czy rozłączność przedziałów ma znaczenie?

jest ograniczony.

411. Wyznacz wartość całki

$$\int_1^2 \left(e^{1-\frac{1}{(x-1)^2}}+1\right)+\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-\log(x-1)}}\right)dx.$$

412. Wykorzystując oszacowania wykorzystane w dowodzie wzoru Stirlinga na wykładzie wyznaczyć liczbę cyfr liczb 1000!.

413. Niech $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x>0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t)\,dt\cdot\int_0^x f(t)\,dt \geq \left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2.$$

414. Załóżmy, że $f:[0,2\pi]$ spełnia warunek Lipshitza. Wykazać, że istnieje $C>0$, taka że dla $k\in\mathbb{N}$ spełnione jest szacowanie[4]:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,dx\right| \leq \frac{C}{k}.$$

415. (a) Uzasadnij, że

$$f_n(x)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

zbiega jednostajnie do e^{-x} na $[0,\infty)$.

(b) Oblicz (jeszcze raz) całkę

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx=\int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}dx.$$

[4] *Wskazówka:* Może pomóc zrobienie najpierw tego zadania dla funkcji klasy C^1 przy pomocy całkowania przez części. Jeśli nie założymy różniczkowalności można rozważać sumy Riemmana i zastosować odpowiednik całkowania przez części dla sum, czyli sumowanie Abela.