Lista 6, Analiza Matematyczna II

1. Na jakie ułamki proste rozkłada się funkcja wymierna
$$\frac{1}{(x^2+x+1)^3(x-7)^3(x-1)}?$$
Podać jedynie postać ułamków, nie trzeba wyliczać stałych w licznikach.

2. Sprowadzić całkę
$$I_n = \int \frac{1}{(x^8+1)^n}\,dx$$
do całki I_{n-1}.

3. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych

a)
$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)\,dx,$$

b)
$$\int \sin^2(x)\cos^4(x)\,dx,$$

c)
$$\int \tan^3(x)\sec^3(x)\,dx,$$ [1]

d)
$$\int \sin(2x)\cos(3x)\,dx,$$

e)
$$\int \tan^2(x)\,dx,$$

f)
$$\int \frac{1}{1+\sin(x)}\,dx.$$

4. Obliczyć całki z funkcji wymiernych[2]

a)
$$\int \frac{x^2}{x^2-1}\,dx,$$

b)
$$\int \frac{x^2}{x(x-1)^2}\,dx,$$

c)
$$\int \frac{4x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx,$$

d)
$$\int \frac{x^3}{(x+1)^2}\,dx,$$

e)
$$\int \frac{x^3}{(x+1)^3}\,dx,$$

f)
$$\int \frac{1}{(1-x^2)^2}\,dx,$$

g)
$$\int \frac{1}{x^4+1}\,dx,$$

h)
$$\int \frac{x^2-1}{x^3+3x-4}\,dx,$$

i)
$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)^2}\,dx.$$

5. Pokazać, że
$$\int \sec(x)\,dx = \log(\sec(x)+\tan(x)) + C.$$

6. Używając wzorów trygonometrycznych wyznaczyć całkę
$$\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos(4x)}\,dx$$

---

[1] *Wskazówka:* $u = \sec(x)$

[2] Jeśli wiesz jak rozkładać funkcję na ułamki proste, to możesz użyć komputera do wyznaczenia stałych rozkładu.

7. Obliczyć całki z funkcji niewymiernych

ȧ)
$$\int \sqrt{x-x^2}\,dx,$$

ḃ)
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9x^2-1}}\,dx,$$

ċ)
$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+4}}\,dx,$$

ḋ)
$$\int \sqrt{x^2-4}\,dx,$$

ė)
$$\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx,$$

ḟ)
$$\int \sqrt{x^2+6x+5}\,dx,$$

ġ)
$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^{3/2}}\,dx,$$

ḣ)
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^7(x+1)^2}}\,dx,$$

i̇)
$$\int \frac{1}{x\sqrt{2x-4}}\,dx.$$

8̈. Udowodnić, że jeśli funkcje ciągłe f, g są rosnące na odcinku $[0,1]$, to

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 g(x)\,dx\right).$$

9̇. Udowodnić, że

$$\int_0^1 4x^2 e^{2x^2}\,dx \geq (e-1)^2.$$

1̈0. Udowodnić, że jeśli funkcja ciągła f spełnia

$$\int_x^{x+1} f(y)\,dy = 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$, to musi być okresowa.

1̈1. Rozstrzygnąć, czy całka

$$\int_1^2 \log_2(5^x+3)\,dx$$

jest większa czy mniejsza od 4.

1̈2. Udowodnić nierówność

$$\int_{1/4}^{1/2} x^{2x}\,dx < \frac{1}{8}.$$