Lista 5, Analiza Matematyczna II

1. Rozważmy ciąg funkcyjny:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{gdy } x \in [0, 1/n), \\ 0 & \text{gdy } x \in [1/n, 1], \end{cases}$$

Wyznacz: granicę punktową, $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$, $\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$. Czy ciąg funkcyjny f_n jest zbieżny jednostajnie na $[0, 1]$?

2. Rozważmy ciąg funkcyjny

$$f_n(x) = n\left(\left(x + \frac{1}{n}\right)^3 - x^3\right).$$

Obliczyć wartość $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx$ na dwa sposoby.

a) Obliczyć bezpośrednio.

ḃ) Znaleźć granicę $f_n(x)$ i uzasadnić, że jest to granica jednostajna. Następnie użyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

3̇. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1000\pi} e^{-x^3} \sin(nx)\,dx.$$

4̇. Przy użyciu twierdzenia o całkowaniu ciągu funkcyjnego obliczyć sumę szeregu[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}.$$

5. Rozważmy $f_n(t) = n^2 t e^{-nt}$. Sprawdź czy jest prawdą, że:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,dt.$$

6. Dany jest ciąg funkcyjny określony na $[0, 1]$. Zbadać, czy całka z granicy ciągu funkcyjnego jest równa granicy całek

a) $x(1 - x^n)$,

ḃ) $n^2 x(1 - x)^n$,

ċ) $x^n(1 - x^n)$,

ḋ) $\dfrac{nx}{1 + nx}$.

7̈. Obliczyć sumę

$$\frac{1}{1}\binom{n}{0} - \frac{1}{3}\binom{n}{1} + \frac{1}{5}\binom{n}{2} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{n}{n}$$

stosując do całki $\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$ podstawienie $x = \cos(\theta)$.

[1] *Wskazówka:* Rozważyć $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

8. Obliczyć następujące całki nieoznaczone stosując całkowanie przez części

a) $$\int x^2 \log(x)\, dx,$$

b) $$\int (\log(x))^2\, dx,$$

c) $$\int x^2 e^{4x}\, dx,$$

d) $$\int t2^t\, dt,$$

e) $$\int u \sin(u)\, du,$$

f) $$\int \arctan(s)\, ds,$$

g) $$\int \arccos(-7x)\, dx,$$

h) $$\int \sin(\log(x))\, dx,$$

i) $$\int x^n \log(x)\, dx.$$

9. Obliczyć następujące całki nieoznaczone stosując całkowanie przez podstawienie

a) $$\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}\, dx$$

b) $$\int x\sqrt{x-1}\, dx$$

c) $$\int x^2\sqrt{x+3}\, dx$$

d) $$\int \left(1-\frac{1}{x^3}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-3} dx$$

e) $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{(\sqrt[3]{x}+1)^5}\, dx$$

f) $$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

g) $$\int \frac{1}{e^x+1}\, dx$$

h) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{81-x^4}}$$

i) $$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$$

ï0. Obliczyć

$$\int_1^{2024} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2025-x}+\sqrt{x}}\, dx.$$

ï1. Obliczyć

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\tan^{2025}(x)}\, dx.$$

ï2. Obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-2025}^{2025} e^{-x^{2n}}\, dx.$$

ï3. Udowodnić, że[2]

$$\int_0^2 \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\ldots}}}}\, dx = \frac{19}{6}.$$

[2] *Wskazówka:* Wyrażenie pod całką należy rozumieć jako granicę punktową odpowiedniego ciągu funkcyjnego.