




# Logika 2: Wprowadzenie do skończonych modeli (Ostatnia aktualizacja 27.02.2025 11:10)

Bartosz Bednarczyk   

## 1 Tydzień 0

W poniższych dwóch zadaniach każdy podpunkt jest wart 0.5pkt.

► **Zadanie 1.1.** Wyraż poniższe własności grafów w FO:

- Graf zawiera wierzchołek izolowany.
- Graf ma przynajmniej dwa wierzchołki o stopniu wyjściowym 3.
- Każdy wierzchołek jest połączony krawędzią z wierzchołkiem o stopniu wyjściowym 3.

► **Zadanie 1.2.** Wyraż poniższe własności grafów w logice II-rzędu SO:

- Graf ma jądro, czyli taki zbiór wierzchołków  $X$  że pomiędzy żadnymi dwoma wierzchołkami z  $X$  nie ma krawędzi, i każdy wierzchołek spoza  $X$  jest połączony krawędzią z jakimś wierzchołkiem z  $X$ .
- Graf o  $n$  wierzchołkach ma zbiór niezależny  $X$  (i.e. żadne dwa wierzchołki z  $X$  nie są połączone krawędzią) o rozmiarze przynajmniej  $n/2$ .
- Graf ma parzystą liczbę wierzchołków.
- Istnieje skierowana ścieżka z wierzchołków  $a$  do  $b$ . Użyj tej formuły by napisać że graf jest spójny i Hamiltonowski.

Powiemy, że formuła jest *skończenie spełnialna* jeśli posiada skończony model.

► **Zadanie 1.3.** Czy prawdą jest, że każda spełnialna formuła jest skończenie spełnialna? Czy są skończenie spełnialne formuły, które mają tylko skończone modele?

► **Zadanie 1.4.** Przy pomocy indukcji pokaż, że jeśli  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$  to  $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ .

► **Zadanie 1.5.** Pokaż indukcyjnie, że nad pustą sygnaturą zachodzi  $\mathbb{N} \equiv \mathbb{R}$ , ale  $\mathbb{N} \not\equiv \mathbb{R}$ .

► **Zadanie 1.6.** Dla skończonej sygnatury  $\tau$  pokaż że elementarna równoważność skończonych struktur implikuje ich izomorficzność. Precyzyjniej, pokaż że jeśli skończone  $\tau$ -struktury  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  spełniają dokładnie te same FO[ $\tau$ ]-formuły to  $\mathfrak{A}$  i  $\mathfrak{B}$  są izomorficzne.

FO. Wskazówka: Pokaż najpierw jak opisać skończoną strukturę przy pomocy formuły w FO.

Przypomnijmy, że problem decyzyjny jest *rozstrzygalny* jeśli istnieje program komputerowy go rozwiązujący (i zupełnie nas nie obchodzi jak długo go działa i ile pamięci zużywa).

► **Zadanie 1.7.** W problemie model-checkingu dla FO dostajemy na wejściu formułę  $\varphi$  logiki I-wszego rzędu oraz skończoną strukturę  $\mathfrak{A}$ . Pytamy się czy  $\mathfrak{A} \models \varphi$ . Pokaż, że ten problem jest rozstrzygalny (możesz założyć dla wygody że  $\varphi$  jest w preneksowej postaci normalnej).

Poniższe zadanie jest dodatkowe i warte 2.5pkt. Nie wlicza się do progów punktowych.

► **Zadanie 1.8.** Powiemy, że (syntaktyczny) fragment  $L$  logiki pierwszego rzędu ma własność modelu skończonego (FMP) jeżeli każda spełnialna formuła z  $L$  ma skończony model. Niech  $L$  będzie właśnie takim fragmentem FO. Pokaż, że problem spełnialności (czy dana na wejściu formuła ma model) jest rozstrzygalny.

Powołaj się na dedukcję i prace Gödela (jego długi algorytm). (Nie zwracaj uwagi jak długo działa twój algorytm. Jego działanie ma po prostu się skończyć).