Lista 2 - Topologia 2025

Zad. 1 Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Załóżmy, że $\mathcal{B}$ jest taką rodziną zbiorów otwartych Y, że każdy zbiór otwarty $U \subseteq Y$ jest sumą elementów $\mathcal{B}$. Pokaż, że następujące warunki są równoważne ciągłości funkcji $f\colon X \to Y$:

a) $f^{-1}[F]$ jest domknięty dla każdego domkniętego $F \subseteq Y$,

b) $f^{-1}[B]$ jest otwarty dla każdego $B \in \mathcal{B}$.

Wywnioskuj, że aby sprawdzić ciągłość funkcji $f\colon X \to Y$ wystarczy sprawdzać otwartość przeciwobrazów kul.

Zad. 2 Pokaż, że ciąg (x_n) elementów przestrzeni metrycznej X jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru otwartego U od pewnego momentu wszystkie wyrazy (x_n) należą do U.

Zad. 3 Udowodnij, że w przestrzeni metrycznej zbiór A jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A^c jest domknięty.

Zad. 4 Rozważmy $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. Podaj przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takiej, że

a) funkcja f jest ciągła, ale istnieje zbiór otwarty $U \subseteq \mathbb{R}$ taki, że obraz $f[U]$ nie jest otwarty,

b) dla każdego zbioru otwartego $U \subseteq \mathbb{R}$ obraz $f[U]$ jest otwarty, ale funkcja f nie jest ciągła.

Zad. 5 Niech $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie dana wzorem $f(x) = x$. Przedyskutuj, kiedy f jest funkcją ciągłą w zależności od tego, w które z klasycznych metryk wyposażymy dziedzinę i przeciwdziedzinę (przy czym w poczet klasycznych metryk na $\mathbb{R}^2$ zaliczamy metrykę euklidesową, miasto, maksimum, centrum i dyskretną).