,

4.1 Wokół prawa Zero-Jedynkowego dla FO

▶ **Zadanie 4.1.** *Pokaż, że obecność stałych w sygnaturze psuje prawo* 0—1 *dla* FO.

▶ **Zadanie 4.2.** *Wyjaśnij, w jaki sposób aksjomaty rozszerzenia mogą zostać uogólnione, aby udowodnić prawo* 0—1 *dla* FO *w dowolnych czysto relacyjnych sygnaturach (tj. bez stałych, tylko predykaty).*

▶ **Zadanie 4.3.** *Libkin w swojej książce definiuje k-ty aksjomat rozszerzenia następująco: „dla wszystkich parami różnych elementów $x_1, x_2, \ldots, x_{2k}$ istnieje inny element y taki, że y jest połączony przez E ze wszystkimi x_i dla $i \leq k$ oraz niepołączony przez E ze wszystkimi x_i dla $i > k$.” Dlaczego nasza teoria aksjomatów rozszerzenia $\mathbb{EA}$ oraz teoria Libkina $\mathbb{LIB}$ są „takie same”, tzn. udowodnij, że $\mathbb{EA} \models \mathbb{LIB}$ oraz $\mathbb{LIB} \models \mathbb{EA}$.*

▶ **Zadanie 4.4.** *Udowodnij, że każdy aksjomat rozszerzenia jest prawie na pewno spełniony. Jeśli nie potrafisz liczyć, możesz też zreferować dowód tego faktu z notatek Grädela.*

▶ **Zadanie 4.5.** *Pokaż, że logika drugiego rzędu nie spełnia prawa* 0–1.

4.2 Alternatywne definicje grafu Rado

▶ **Zadanie 4.6.** *Rozważ przeliczalny graf G, którego uniwersum to $\mathbb{N}$ i istnieje krawędź nieskierowana między dowolnymi (i, j), dla których $j < i$ i $\mathsf{BIT}(i, j)$ jest `true` (tj. j-ty bit binarnej reprezentacji i wynosi 1). Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym.*

▶ **Zadanie 4.7.** *Definiujemy zbiór* HF dziedzicznie skończonych zbiorów *w następujący sposób. Zbiór pusty $\emptyset$ należy do* HF, *a jeśli $a_1, \ldots, a_k$ należą do* HF *(dla jakiegoś $k \in \mathbb{N}$), to $\{a_1, \ldots, a_k\} \in \mathrm{HF}$. Rozważ przeliczalny graf G, którego dziedziną jest* HF, *a krawędź łączymy między dwoma wierzchołkami u, v wtedy i tylko wtedy, gdy $u \in v$ lub $v \in u$. Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym.*

▶ **Zadanie 4.8.** *Rozważ przeliczalny graf G, którego uniwersum stanowi zbiór liczb pierwszych przystających do 1 modulo 4. Połącz krawędzią p i q, jeśli p jest resztą kwadratową modulo q.[1] Udowodnij, że G jest izomorficzny z grafem losowym.* `[Rozwiazanie]`.

4.3 Obliczalność

▶ **Zadanie 4.9** ((2pkt)). *Niech $\mathcal{T} \subseteq \mathsf{FO}$ będzie zupełną oraz rekurencyjną teorią, tj. istnieje program, który dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zwraca pierwsze n elementów $\mathcal{T}$. Pokaż, że następujący problem wynikania jest rozstrzygalny: „dla danej formuły pierwszego rzędu φ, czy zachodzi $\mathcal{T} \models \varphi$?”. Nie przejmuj się złożonością :)*

[1] Liczba p jest resztą kwadratową modulo q, jeśli istnieje liczba x taka, że $x^2 \equiv p \pmod{q}$.