Lista 2, Analiza Matematyczna II

1. Udowodnić oszacowania

a)
$$\frac{1}{5} < \int_1^2 \frac{1}{x^2+1}\,dx < \frac{1}{2},$$

b)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < \frac{\pi}{2},$$

c)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} < \frac{\pi}{2},$$

$\dot{\text{d}}$)
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx < \frac{3}{4}.$$

$\dot{\text{e}}$)
$$e^{-1/e} \le \int_0^1 x^x\,dx \le 1.$$

$\dot{\text{f}}$)
$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\,dx \le \frac{1}{3}.$$

$\ddot{\mathbf{2}}$. Co jest większe $\int_0^\pi e^{\sin^2 x}\,dx$ czy $\frac{3\pi}{2}$?

$\dot{\mathbf{3}}$. Obliczyć całkę
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin^2(x^3)\cos(x^3)\,dx.$$

$\dot{\mathbf{4}}$. Udowodnij, że dla $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ zachodzi[1]
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 2^m + \ldots + n^m}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

5. Uzasadnij, że podane granice są równe odpowiedniej całce Riemmana.[2]

$\dot{\text{a}}$)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right),$$

$\dot{\text{b}}$)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right),$$

$\dot{\text{c}}$)
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}\right),$$

$\ddot{\text{d}}$)
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^{1/n}}{n+1} + \frac{2^{2/n}}{n+(1/2)} + \cdots \frac{2^{n/n}}{n+(1/n)}\right).$$

$\dot{\mathbf{6}}$. Dowieść, że
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \log 2.$$

$\dot{\mathbf{7}}$. Obliczyć[3]
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!\,n^n}}.$$

---

[1] Możesz skorzystać z tego, że dla $n \neq -1$ mamy $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$.

[2] Jeśli znasz już zasadnicze twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego, to policz te całki.

[3] *Wskazówka:* Zlogarytmować wyrażenie pod granicą.

8. Załóżmy, że f jest funkcją różniczkowalną. Udowodnić, że

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(y)\,dy = f(0).$$

9. Obliczyć

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\int_0^t (\operatorname{arctg}(y))^2\,dy.$$

10. Obliczyć pochodne następujących funkcji

a)

$$f(x)=\int_0^{x^2}\sin(t)\,dt,$$

b)

$$f(x)=\int_{-\sin(x)}^{\cos(x)}\arcsin(t)\,dt,$$

c)

$$f(x)=\int_0^x [t]\,dt,$$

d)

$$f(x)=\int_{-x^2}^{x^4}\{t\}\,dt.$$

11. Niech f będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły na $[a,b]$ i

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,dx-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big).$$

Oblicz granicę $\lim_{n\to\infty} n\Delta_n$.

12. Funkcja f jest całkowalna na $[0,2\pi]$. Pokazać, że[4]

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\sin nx|\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)|\cos nx|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

13. Dowieść, że jeśli f jest funkcją ciągłą nieujemną na $[a,b]$, to

$$\lim_{p\to\infty}\Big(\int_a^b f(x)^p\,dx\Big)^{1/p}=\max_{[a,b]} f(x).$$

14. Funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$. Udowodnić, że dla dowolnych $a<c<d<b$ mamy[5]

$$\lim_{h\to 0}\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx=0.$$

---

[4] *Wskazówka:* Rozbić przedział całkowania na $2n$ części.

[5] *Wskazówka:* Przy założeniu $h>0$ i $d\le c+nh\le b$ zauważyć, że

$$\int_c^d |f(x+h)-f(x)|\,dx\le U(P,f)-L(P,F)$$

dla podziału odcinka $[c,c+nh]$ punktami $p=\{c,c+h,c+2h,\dots,c+nh\}$.