Mamy do policzenia całkę

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Sprowadzimy ją do jednej z trzech całek

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt, \qquad \int \sqrt{t^2+1}\,dt, \qquad \int \sqrt{t^2-1}\,dt, \tag{1}$$

a następnie zrobimy podstawienie trygonometryczne albo hiperboliczne.

Weźmy konkretny przykład, ogólnie robi się to tak samo:

$$\int \sqrt{9x^2-6x+3}\,dx.$$

Po pierwsze chcemy zwinąć wyrażenie pod pierwiastkiem do kwadratu.

$$9x^2-6x+3=(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 1+1^2+2=(3x-1)^2+2.$$

Dostajemy całkę

$$\int \sqrt{(3x-1)^2+2}\,dx,$$

w której chcemy podstawić u za wyrażenie pod kwadratem, tzn.

$$\int \sqrt{(3x-1)^2+2}\,dx = \left| \begin{array}{c} u=3x-1 \\ du=3\,dx \end{array} \right| = \frac{1}{3}\int \sqrt{u^2+2}\,du.$$

Teraz chcemy zamienić 2 pod pierwiastkiem na 1:

$$\frac{1}{3}\int \sqrt{u^2+2}\,du = \frac{\sqrt{2}}{3}\int \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,du.$$

Na koniec chcemy podstawić t za wyrażenie pod kwadratem.

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\int \sqrt{\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2+1}\,du = \left| \begin{array}{c} t=\frac{u}{\sqrt{2}} \\ dt=\frac{du}{\sqrt{2}} \end{array} \right| = \frac{2}{3}\int \sqrt{t^2+1}\,dt.$$

Teraz możemy zająć się liczeniem całek z (1). Przypomnijmy jedynkę trygonometryczną i hiperboliczną

$$\sin^2 u+\cos^2 u=1, \tag{2}$$

$$\cosh^2 u-\sinh^2 u=1, \tag{3}$$

wzory na cosinus dwukrotności kąta

$$\cos 2u = 2\cos^2 u-1 = 1-2\sin^2 u, \tag{4}$$

$$\cosh 2u = 2\cosh^2 u - 1 = 2\sinh^2 u + 1, \tag{5}$$

i wzory na sinus dwukrotności kąta

$$\sin 2u = 2\sin u\cos u, \tag{6}$$

$$\sinh 2u = 2\sinh u\cosh u. \tag{7}$$

1. Jeśli mamy całkę

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \sin u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u.$$

Cosinus powinien być w wartości bezwzględnej, ale możemy się tym nie przejmować, a gdy trzeba będzie policzyć całkę na konkretnym przedziale, to wtedy można się zastanawiać nad znakami funkcji trygonometrycznych. Dostajemy

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ dt = \cos u\,du \end{array} \right| = \int \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du = \int \cos^2 u\,du.$$

Korzystamy z (4), z którego wynika, że $\cos^2 u = \frac{\cos 2u+1}{2}$, i piszemy

$$\int \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int \cos 2u + 1\,du = \frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{2}u.$$

Ze wzoru na $\sin 2u$ i z jedynki trygonometrycznej dostajemy

$$\frac{1}{4}\sin 2u + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sin u\cos u + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sin u\sqrt{1-\sin^2 u} + \frac{1}{2}u.$$

Na koniec wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{asin} t.$$

2. Jeśli mamy całkę

$$\int \sqrt{t^2+1}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \sinh u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\sqrt{t^2+1} = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \cosh u.$$

Tu nie ma problemu ze znakiem, bo cosinus hiperboliczny jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$\int \sqrt{t^2+1}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \sinh u \\ dt = \cosh u\,du \end{array} \right| = \int \sqrt{\sinh^2 u + 1}\cosh u\,du = \int \cosh^2 u\,du.$$

Korzystamy z (5), z którego wynika, że $\cosh^2 u = \frac{\cosh 2u+1}{2}$, i piszemy

$$\int \cosh^2 u\,du = \frac{1}{2}\int \cosh 2u + 1\,du = \frac{1}{4}\sinh 2u + \frac{1}{2}u.$$

Ze wzoru na $\sinh 2u$ i z jedynki hiperbolicznej dostajemy

$$\frac{1}{4}\sinh 2u + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sinh u\cosh u + \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sinh u\sqrt{1+\sinh^2 u} + \frac{1}{2}u.$$

Na koniec wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \sqrt{t^2+1}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\operatorname{asinh} t.$$

3. Jeśli mamy całkę

$$\int \sqrt{t^2-1}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \cosh u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\sqrt{t^2-1} = \sqrt{\cosh^2 u - 1} = \sinh u.$$

Tutaj też powinna być wartość bezwzględna. Dostajemy

$$\int \sqrt{t^2-1}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \cosh u \\ dt = \sinh u\,du \end{array} \right| = \int \sqrt{\cosh^2 u - 1}\sinh u\,du = \int \sinh^2 u\,du.$$

Korzystamy z (5), z którego wynika, że $\sinh^2 u = \frac{\cosh 2u-1}{2}$, i piszemy

$$\int \sinh^2 u\,du = \frac{1}{2}\int \cosh 2u - 1\,du = \frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u.$$

Ze wzoru na $\sinh 2u$ i z jedynki hiperbolicznej dostajemy

$$\frac{1}{4}\sinh 2u - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sinh u\cosh u - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}\sqrt{\cosh^2 u - 1}\cosh u - \frac{1}{2}u.$$

Na koniec wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \sqrt{t^2-1}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2-1} - \frac{1}{2}\operatorname{acosh} t.$$

Podobnie możemy poradzić sobie z całkami postaci

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

Tak samo jak poprzednio sprowadzamy ją do jednej z trzech całek

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

a potem robimy odpowiednie podstawienia albo przypominamy sobie, że

$$\operatorname{asin}' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad \operatorname{asinh}' t = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \operatorname{acosh}' t = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Podstawienia wyglądają tak:

4. Jeśli mamy całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \sin u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \frac{1}{\cos u}.$$

Cosinus powinien być w wartości bezwzględnej, ale możemy się tym nie przejmować, a gdy trzeba będzie policzyć całkę na konkretnym przedziale, to wtedy można się zastanawiać nad znakami funkcji trygonometrycznych. Dostajemy

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \sin u \\ dt = \cos u\,du \end{array} \right| = \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\,du = \int 1\,du = u.$$

Wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \operatorname{asin} t.$$

5. Jeśli mamy całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \sinh u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{\sinh^2 u+1}} = \frac{1}{\cosh u}.$$

Tu nie ma problemu ze znakiem, bo cosinus hiperboliczny jest zawsze dodatni. Dostajemy

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \sinh u \\ dt = \cosh u\,du \end{array} \right| = \int \frac{\cosh u}{\sqrt{\sinh^2 u + 1}}\,du = \int 1\,du = u.$$

Wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\,dt = \operatorname{asinh} t.$$

6. Jeśli mamy całkę

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt,$$

to podstawiamy $t = \cosh u$, bo wtedy wyrażenie pod całką to

$$\frac{1}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}} = \frac{1}{\sinh u}.$$

Tutaj też powinna być wartość bezwzględna. Dostajemy

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \left| \begin{array}{c} t = \cosh u \\ dt = \sinh u\,du \end{array} \right| = \int \frac{\sinh u}{\sqrt{\cosh^2 u - 1}}\,du = \int 1\,du = u.$$

Wracamy do zmiennej t i wychodzi

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \operatorname{acosh} t.$$

To, co jest tu opisane, nie jest uniwersalnym sposobem liczenia całek funkcji niewymiernych, ale jest proste i działa wystarczająco dobrze w wielu przypadkach, np. w zadaniu 8. z 5. listy pięć z ośmiu całek da się sprowadzić do całek takich jak tu.