5.1 Wokół logiki z jedną zmienną

▶ **Zadanie 5.1.** *Podobnie do transformacji Scotta z wykładu, pokaż że dla każdego zdania z* FO^1 *używającego wyłącznie relacji unarnych obliczymy w wielomianowym czasie równospełnialne zdanie postaci* $\forall x \varphi(x) \land \bigwedge_{i=1}^{n} \exists x\ \varphi_i(x)$*, gdzie* φ, φ_i *są bez kwantyfikatorów.*

▶ **Zadanie 5.2.** *Za pomocą poprzedniego zadania, pokaż że problem spełnialności logiki* FO^1 *jest w NPTime (tj. skontruuj wielomianowy algorytm typu „zgadnij i zweryfikuj”).*

5.2 Wokół FMP dla FO^2

▶ **Zadanie 5.3.** *Na wykładzie pokazaliśmy, że* FO^2 *ma własność modelu skończonego (FMP), tj. każda spełnialna formuła* FO^2 *ma też skończony model. Użyj tego faktu by podać prosty dowód, że* FO^2 *nie potrafi wyrazić, że relacja binarna jest przechodnia.*

▶ **Zadanie 5.4.** *Podobnie jak w poprzednim zadaniu. Korzystając z tego, że* FO^2 *ma FMP, pokaż że* FO^2 *nie potrafi wyrazić że relacja binarna jest funkcyjna.*

5.3 Obliczeniowe aspekty FO^2

▶ **Zadanie 5.5.** *Pokaż, że problem model-checkingu dla* FO^2 *jest w PTime. (W odróżnieniu od PSpace-zupełnego ogólnego przypadku).*

▶ **Zadanie 5.6.** *Niech* $\tau := \{p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ *to sygnatura składająca się wyłącznie z* n *unarnych symboli. Będziemy traktować symbole z* τ *jako ‘bity binarnych zakodowań liczb” w następującym sensie: dla elementu* $a \in A$ *z* τ*-struktury* $\mathfrak{A}$*, mówimy że* a *koduje wartość* $m \in [0, 2^n - 1]$ *gdy* $m = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot 2^i$*, gdzie* b_i *to* 1 *gdy* $a \in p_i^{\mathfrak{A}}$ *orazz* 0 *w.p.p. Wykaż, że poniższe własności są wyrażalne w* $\mathsf{FO}^2[\tau]$ *przy pomocy formuł o wielkości wielomianowej względem* n*.*

- *Wartość kodowana przez* x *to (odp.* $2^n - 1$*).*
- *Wartość kodowana przez* x *jest równa wartości kodowanej przez* y*.*
- *Wartośc kodowana przez* x *jest mniejsza od wartości kodowanej przez* y*.*
- *Wartość kodowana przez* x *jest równa wartości kodowanej przez* y plus jeden.

Wywnioskuj istnienie $\mathsf{FO}^2[\tau]$*-zdania* φ *o rozmiarze wielomianowym względem* n*, takiego że każdy model* φ *ma przynajmniej* 2^n *elementów.*

5.4 Kafelkowanie

▶ **Zadanie 5.7.** *Wykorzystaj poprzednie zadanie, by pokazać wielomianową redukcję z wykładniczego (NExpTime-zupełnego problemu kafelkowania) do spełnialności* FO^2*. Mówiąc dokładniej: mając dane na wejściu* n *oraz zestaw kafelków* $\mathcal{T}$*, pokaż istnienie wielomianowej (względem* $n+|\mathcal{T}|$*) formuły* FO^2 *która ma model wtedy i tylko wtedy kiedy istnieje poprawne pokafelkowanie prostokąta* $2^n \times 2^n$ *kafelkami z* $\mathcal{T}$*.*

▶ **Zadanie 5.8.** *Podobnie jak w poprzednim zadaniu, ale tym razem chcemy zakodować prostokąt* $2^n \times 2^{2^n}$*. Możesz używać dwóch dodatkowych relacji* $\leq_1, \leq_2$*, które są porządkami liniowymi. Wskazówka: Drzewo binarne o głębokości* 2^n *ma* 2^{2^n} *liści :)*

▶ **Zadanie 5.9.** *Rozważamy systemy kafelkowania bez wymogu na to by kafelkowany prostokąt był skończony i by rogi prostokąta były białe. Wykaż przy pomocy lematu Königa, że dla danego systemu domina da się poprawnie pokafelkować* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *wtedy i tylko wtedy gdy da się poprawawnie pokafelkować* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$*.*