Lista powtórkowa przed 1. kolokwium, Analiza Matematyczna II

1. Czy funkcja $g(x) = [\sqrt{x}]$ jest całkowalna na przedziale $[0, 100]$?

2. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemmana na przedziale $[a, b]$. Uzasadnić, że dla ustalonego $c \in \mathbb{R}$ funkcja $f_c(x) = f(x - c)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a + c, b + c]$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c+a}^{c+b} f_c(x)\,dx$.

3. Niech

$$A = \{\pi q \ : \ q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}.$$

Rozstrzygnij, czy funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x)^2 \text{ dla } x \in A, \\ 0 \text{ dla } x \notin A \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0, \pi]$.

4. Rozstrzygnij, czy funkcja zadana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) + x^3 \text{ dla } x \in [0, 2], \\ 40x^4 + e^x \text{ dla } x \in (2, 5] \end{cases}$$

jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[0, 5]$. Odpowiedź uzasadnij.

5. Oblicz całki poprzez znalezienie podziałów dla których sumy dolne i górne są blisko siebie.

(a)
$$\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

(b)
$$\int_{0}^{1} e^x\,dx$$

(c)
$$\int_{-1}^{1} \operatorname{sgn}(x)\,dx$$

6. Niech f będzie ograniczoną funkcją na odcinku $[a, b]$. Czy prawdziwe są poniższe stwierdzenia?
(a) Jeśli f jest całkowalna, to f^2 jest całkowalna.
(b) Jeśli f^2 jest całkowalna, to f jest całkowalna.

7. Wiedząc, że funkcja $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jest rosnąca, wykaż że:
(a) funkcja $h(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ jest wypukła,
(b) funkcja $f(x) = x^{-1} \int_0^x g(t)\,dt$ jest rosnąca.

8. Oblicz pochodne następujących funkcji.
(a)

$$f(x) = \int_{-x^4}^{x^2+\sin(x)} \sin(e^y + \pi y^6)\,dy,$$

(b)

$$g(x) = \int_{-e^{3x}}^{x^7} \sqrt{y^8 + 3}\,dy.$$

9. Udowodnij podane oszacowania całek:

(a)
$$\int_0^1 x^2 e^{-\sin^4(x^2)}\,dx \le \frac{1}{3},$$
(b)
$$\frac{1}{4} \le \int_0^1 \frac{1}{3+e^{-x^2}}\,dx \le \frac{1}{3}.$$
(c)
$$\int_0^2 \sqrt{8+x^3}\,dx \le 7.$$
(d)
$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x}\,dx < \frac{1}{2} - \frac{2^3}{4\cdot 4!} + \frac{2^5}{6\cdot 6!}.$$

10. Wyznaczyć całki.

(a)
$$\int_0^{\sqrt[14]{5}} \frac{x^6}{1+x^{14}}\,dx,$$
(b)
$$\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx,$$
(c)
$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+3\sin x}.$$

11. Obliczyć granice:

(a)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{2n^2-k^2}\cdot\frac{k}{n^3},$$
(b)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{2n^2+kn-k^2}}{n^2},$$
(c)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^5}{(n^2+k^2)^3},$$
(d)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\sqrt{1/n}} + e^{\sqrt{2/n}} + e^{\sqrt{3/n}} + \ldots + e^{\sqrt{n/n}}\right),$$
(e)
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k)-\ln n}{n+k}.$$

12. Znajdź taką wartość $p > 0$, aby granica
$$\lim_{n\to\infty} n^{-p} \sum_{k=1}^{n} k^{1,23}$$
była skończona i dodatnia. Oblicz tę granicę.

13. Niech $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Znajdź granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^m + 3^m + 5^m ... + (2n-1)^m}{n^{m+1}}.$$

14. Funkcja $f(x)$ dana jest wzorem

$$f(x) = \int_x^{\sqrt{x^2+1}} \sin(t^2)\, dt.$$

Obliczyć $f'(x)$. Dla jakich x pochodna istnieje?

15. Znajdź kres górny i kres dolny funkcji $f : [-4, 8] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem:

$$f(x) = \int_{-4}^{x} (t^3 - 6t^2 - 13t + 42)\, dt.$$

16. Obliczyć granicę

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\tan s}\, ds}{\int_0^{\tan x} \sqrt{\sin t}\, dt}.$$

17. Niech

$$f(x) = \int_x^{x+1} \sin(e^t)\, dt.$$

Wykazać, że $e^x |f(x)| \leq 2$.

18. Skonstruować przykład ciągu funkcji ciągłych $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, takiego że $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dla każdego $x \in [0, 1]$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \infty.$$

19. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx + \sin(nx^2)}{n}\, dx.$$

20. Obliczyć całki nieoznaczone

(a)

$$\int \frac{x^3\, dx}{x^2 + 1}.$$

(b)

$$\int \cos^3 x \sin^2 x\, dx$$

(c)

$$\int x^2 \ln x\, dx,$$

21. W zależności od a oblicz całkę[1]

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\, dx.$$

22. Załóżmy, że $\alpha \in \mathbb{R}$. W zależności od α znajdź wartość granicy

$$\lim_{n\to\infty} \binom{3n}{n} n^{\alpha} \frac{4^n}{(27)^n}.$$

23. Podaj taką wartość $x > 0$, aby granica

$$\lim_{n\to\infty} x^n \sqrt{n} \binom{5n}{2n}$$

była skończona i dodatnia. Oblicz tę granicę.

24. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n-\frac{1}{2}}{n}^{\frac{7}{3}}.$$

25. Niech $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje przedział $[a, b] \subseteq [0, \pi]$, taki że

$$\int_0^{\pi} f(x) \sin x\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

26. Oblicz następujące całki nieoznaczone z funkcji wymiernych:

(a)

$$\int \frac{2x+3}{x^4 + x^3}\, dx,$$

(b)

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+2)(x^2-4)}\, dx,$$

(c)

$$\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)}.$$

27. Na jakie ułamki proste rozkłada się funkcja wymierna $\frac{1}{x^4+16}$?

28. Oblicz następujące całki z funkcji trygonometrycznych.

(a)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5(x)\, dx,$$

(b)

$$\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\cos(3x)\, dx.$$

29. Używając podstawienia $x = 2\tan(t)$ oblicz całki

[1] Można użyć podstawienia wykorzystującego funkcję $\sec(x)$ lub podstawienia wykorzystującego $\cosh(t)$.

(a)

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx,$$

(b)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx.$$

Powtórz zadanie używając podstawienia wykorzystującego $\sinh(t)$.