Lista gwiazdkowa (10.03.2025), Analiza Matematyczna II

401. Załóżmy, że f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[a, b]$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) \geq \delta$ na $[a, b]$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = 1/f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$[1].

402. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemmana.

403. Niech $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{(a_n, b_n)}(x),$$ [2]

gdzie (a_n, b_n) są parami rozłącznymi przedziałami o długościach 2^{-n}. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemanna oraz oblicz wartość całki $\int_0^\pi f(x)\,dx$.[3]

404. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na odcinku $[0, 1]$ o wartościach rzeczywistych. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} (n + 1) \int_0^1 x^n f(x)\,dx = f(1).$$

405. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-n}.$$

406. Załóżmy, że f jest ciągła, ściśle rosnąca z $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$. Niech g oznacza funkcję odwrotną do f. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b > 0$ mamy

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geq ab$$

oraz zbadaj kiedy zachodzi równość.

407. Czy liczba $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\,dx > 0$ jest dodatnia czy ujemna?

408. Udowodnić, że równanie

$$\int_0^a e^{-x} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{100}}{100!} \right) dx = 50$$

ma rozwiązanie a zawarte w przedziale $[50, 100]$.

[1] Uwaga: bez założenia $f(x) \geq \delta > 0$ funkcja $g(x)$ nie byłaby ograniczona.

[2] χ_A oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1 na zbiorze A oraz zero poza nim.

[3] Pytanie dla dociekliwych: czy rozłączność przedziałów ma znaczenie?

409. Niech $f;[0,1]\longmapsto\mathbb{R}$ będzie funkcją trzykrotnie różniczkowalną która spełnia $f(0)=f(1)$ oraz $\int_0^1 f(x)\,dx=0$. Udowodnij, że[4]

$$30240\left(\int_0^1 xf(x)\,dx\right)^2\leq\int_0^1|f''(x)|^2\,dx.$$

410. Niech $a\in[0,1]$. Znajdź wszystkie funkcje ciągłe $f:[0,1]\longmapsto\mathbb{R}$ spełniające poniższe warunki:

$$\int_0^1 f(x)\,dx=a^0,\quad\int_0^1 xf(x)\,dx=a^1,\quad\int_0^1 x^2f(x)\,dx=a^2.$$

411. Załóżmy, że $f:[-1,1]\longmapsto\mathbb{R}$ jest ciągła i parzysta. Ponadto dla każdego $n=1,2,...$ spełnia ona warunek $\int_{-1}^1 x^{2n}f(x)\,dx=0$. Udowodnij, że $f(x)=0$ dla każdego $x\in[-1,1]$.

412. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0,1]$ wykazać równość

$$\int_0^\pi xf(\sin(x))\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\,dx.$$

413. Wykorzystując oszacowania wykorzystane w dowodzie wzoru Stirlinga na wykładzie wyznaczyć liczbę cyfr liczb 100! i 1000!.

414. Funkcja ciągła f spełnia $\int_0^1 x^nf(x)\,dx=0$ dla $n\leq N$. Udowodnić, że f na przedziale $[0,1]$ zeruje się przynajmniej $N+1$ razy.

415. Pokazać, że wartość całki

$$\int_0^\infty\frac{1}{(x^2+1)(x^\alpha+1)}\,dx$$

nie zależy od parametru $\alpha\geq 0$.

416. Niech $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x>0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2f(t)\,dt\cdot\int_0^x f(t)\,dt\geq\left(\int_0^x tf(t)\,dt\right)^2.$$

417. Załóżmy, że $f:[0,2\pi]$ spełnia warunek Lipshitza. Wykazać, że istnieje $C>0$, taka że dla $k\in\mathbb{N}$ spełnione jest szacowanie[5]:

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin(kx)\,dx\right|\leq\frac{C}{k}.$$

---

[4] *Wskazówka:* Użyć zasadniczego twierdzenia rachunku różniczkowego i całkowego oraz nierówności Cauchy'ego–Schwarza.

[5] *Wskazówka:* Może pomóc zrobienie najpierw tego zadania dla funkcji klasy C^1 przy pomocy całkowania przez części. Jeśli nie założymy różniczkowalności można rozważać sumy Riemmana i zastosować odpowiednik całkowania przez części dla sum, czyli sumowanie Abela.

418. Funkcja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ jest ciągła. Wykaż, że

$$\lim_{y\to 0}\int_0^\infty \frac{yf(x)}{x^2+y^2}\,dx = \frac{\pi}{2}f(0).$$

419. Udowodnić, że jeśli $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 to ciąg

$$a_n = \int_1^n f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{1}{2}f(n)$$

jest ograniczony.

420. Wyznacz wartość całki

$$\int_1^2 \left(e^{1-\frac{1}{(x-1)^2}}+1\right) + \left(1+\frac{1}{\sqrt{1-\log(x-1)}}\right)\,dx.$$

421. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na $[0,1]$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(y)\sin(2\pi n y)\,dy = 0.$$

422. Niech f będzie funkcją ciągłą na $[0,\infty)$ posiadającą skończoną granicę $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Udowodnij, że dla każdego $\delta > 0$

$$\lim_{t\to\infty} t\int_\delta^\infty e^{-tx}f(x)\,dx = 0$$

oraz oblicz granicę

$$\lim_{t\to\infty} t\int_0^\infty e^{-tx}f(x)\,dx.$$

423. Niech f będzie funkcją klasy C^1 na $[0,\infty)$, taką że $\int_1^\infty x^{-1}f(x)\,dx$ jest zbieżna. Dla $a, b > 0$ udowodnij wzór Froullaniego:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

424. Dla $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ wyznacz wartość całki[6]

$$F(a,b) = \int_0^\infty e^{-ax^2}\cos(bx)\,dx.$$

425. (a) Uzasadnij, że

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$$

zbiega jednostajnie do e^{-x} na $[0,\infty)$.

[6] *Wskazówka:* B.s.o. można przyjąć $a = 1$. Potem policz pochodną po b funkcji $G(b) = F(1,b)$ (uzasadnienie dlaczego z pochodną można wejść pod całkę mile widziane). Ułóż równanie różniczkowe dla $G(b)$ i je rozwiąż.

(b) Oblicz (jeszcze raz) całkę

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx.$$

426. W zależności od parametru α zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^\alpha \sin^2 x}.$$

427. Obliczyć[7]

$$\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\operatorname{tg} t}\,dt.$$

428. Udowodnić, że funkcja zadana wzorem $\sin(1/x)$ nie jest granicą jednostajną ciągu wielomianów na $(0,1)$.

429. Znajdź funkcję $f(x,y)$ nieciągłą w $(0,0)$, ale posiadającą obie pochodne cząstkowe w każdym punkcie.

430. Znajdź funkcję $f(x,y)$ nieciągłą w $(0,0)$, ale posiadającą wszystkie pochodne kierunkowe w każdym punkcie.

431. Udowodnij, że funkcja ciągła $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $n>1$, nie jest różnowartościowa.

432. Istnieje funkcja ciągła $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, taka że funkcje $t\mapsto f(tu,tv)$ mają minimum w $t=0$ dla dowolnego $(u,v)\neq(0,0)$, ale $f(x,y)$ nie ma minimum w punkcie $(0,0)$.

433. Znajdź funkcję $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, która dla żadnego $\alpha>0$ nie spełnia warunku Höldera:

$$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|^\alpha, \quad x,y\in[0,1],$$

ale ma wahanie ograniczone.

434. Niech $g,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

(a) Istnieje $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ klasy C^2, taka że na $\mathbb{R}^2$ mamy równości:

$$g=\frac{\partial f}{\partial x}, \quad h=\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(b) Na $\mathbb{R}^2$ zachodzi

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial h}{\partial x}.$$

---

[7]Rozważ: $F(p)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg} t)}{\operatorname{tg}(t)}\,dt.$

435. Funkcja $f(x, y)$ jest określona w otoczeniu punktu (0, 0) i ma następujące własność: jeśli funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są różniczkowalne w otoczeniu zera, $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ oraz $h(t) = f(x(t), y(t))$, to h jest różniczkowalna w zerze oraz

$$h'(0) = ax'(0) + by'(0).$$

Udowodnić, że $f(x, y)$ jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$.