

Logika dla Informatyków (zaawansowana)

Lista zadań nr 8

Zadanie 1. [Nieskończone Twierdzenie Ramseya] Udowodnij, że każdy nieskończony graf zawiera nieskończoną klikę bądź nieskończony zbiór niezależny.

Zadanie 2. Czy porządek ω^2 wystarczy aby zabić smoka?

Zadanie 3. Na bankiet zaproszono $2n$ ambasadorów. Wśród zaproszonych każdy ma nie więcej niż $n - 1$ wrogów. Udowodnij, że można ich rozsadzić przy okrągłym stole, tak aby żaden nie siedział koło swojego wroga (podobnie jak w zadaniu o biskupach zakładamy, że wrogość jest symetryczna).

Zadanie 4. Kiedy Monsieur Creosote wchodzi do bistro, kelner stawia przed nim trzy talerzyki z kanapkami. Następnie, w każdej kolejnej rundzie algorytmu, pan Creosote wybiera dwa z trzech znajdujących się na stole talerzyków. Z pierwszego wybranego talerzyka zjada jedną kanapkę, a następnie drugi z wybranych talerzyków każe zabrać kelnerowi, który na miejsce zabranego przynosi inny talerzyk, na którym jest tyle samo kanapek ile (w tym momencie) na pierwszym wybranym talerzyku. Talerzyk niewybrany stoi przed panem Creosote i oczekuje na kolejne rundy. Czy istnieje taki stan talerzyków, począwszy od którego pan Creosote może jeść bez końca? *Uwaga: Należy też sprawdzić kim był Monsieur Creosote i zachować tę wiedzę dla siebie.*

Zadanie 5* [trudne, 3 pkt.] Wierzchołki pięciokąta etykietujemy liczbami całkowitymi o sumie większej od zera. W każdym kolejnym ruchu pewnej jednoosobowej gry, jeżeli x, y, z są etykietami kolejnych wierzchołków i jeśli $y < 0$ to x, y, z możemy zastąpić przez, odpowiednio, $x + y, -y, y + z$. Czy dla każdego początkowego układu pięciu etykiet, opisana gra zatrzyma się po skończonej liczbie kroków?

Aksjomat wyboru

Poniższe zadania można deklarować ponownie za pełną liczbę punktów.

Zadanie 6. Udowodnij, że stwierdzenie:

*Dla każdych zbiorów A i B , jeżeli istnieje funkcja $f : A \rightarrow B$, która jest “na”
to istnieje funkcja $g : B \rightarrow A$, która jest różnowartościowa.*

implikuje aksjomat wyboru.

Zadanie 7. Rozwiąż Zadanie 475 z MdZ.

Zadanie 8. Rozwiąż Zadanie 476 z MdZ.

Zadanie 9. Rozwiąż Zadanie 477 z MdZ.

Zadanie 10* [2 pkt] Myśliwy pojmał jednego niedźwiedzia. I mówi mu tak:

Zaraz ustalę sobie funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ty zaś wybierzesz jedną liczbę $x \in \mathbb{R}$, a ja wtedy podam Ci wartości tej funkcji dla wszystkich liczb poza x (tzn. $\{(y, f(y)) \mid y \in \mathbb{R} \setminus \{x\}\}$). Ty zaś będziesz musiał mi podać wartość $f(x)$. Jeśli powiesz źle, to zrobię z Ciebie bigos, a jak powiesz dobrze, to puszczę Ciebie wolno. A teraz się możesz zastanowić, co robić.

Udowodnij, że niedźwiedź ma strategię, która pozwala mu się uratować z prawdopodobieństwem 1.