

Logika dla Informatyków (zaawansowana)

Lista zadań nr 4

1 Logika pierwszego rzędu

Zadanie 1. Sygnatura Σ , którą w tym zadaniu rozważamy, składa się z jednego binarnego symbolu relacyjnego \leq i dwóch unarnych symboli relacyjnych P i R . Wszystkie struktury nad Σ jakie w tym zadaniu rozważamy są **skończonymi** liniowymi porządkami z relacją \leq . Taka struktura może być w naturalny sposób traktowana jako zakodowane (binarnie) dwie liczby naturalne p i r (myślimy że p ma jedynkę tam gdzie P jest prawdziwe, a zero tam gdzie P jest fałszywe; podobnie z r i R). Napisz zdanie logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą Σ , które jest prawdziwe dokładnie w tych spośród rozważanych struktur w których $p = r + 1$.

Zadanie 2. Rozważamy tu taką samą sygnaturę i takie same struktury jak w poprzednim zadaniu. Napisz zdanie logiki pierwszego rzędu nad sygnaturą Σ , które jest prawdziwe dokładnie w tych strukturach w których dla każdego elementu x zachodzi:

$$R(x) \Leftrightarrow |\{y : y \leq x \wedge P(y)\}| \text{ jest liczbą parzystą}$$

Zadanie 3* [3 pkt.] Rozważmy sygnaturę Σ składającą się z jednego binarnego symbolu relacyjnego E i dwóch stałych s (jak *source*) i t (jak *target*). Pokaż, że nie istnieje zdanie pierwszego rzędu Φ nad tą sygnaturą takie że dla dowolnej skończonej struktury \mathbb{M} nad Σ zachodzi $\mathbb{M} \models \Phi$ wtedy i tylko wtedy gdy w \mathbb{M} jest skierowana ścieżka z s do t .

Zadanie 4* [3 pkt.] Udowodnij, że spójność grafu nieskierowanego¹ nie da się wyrazić w logice pierwszego rzędu, tzn. że nie ma formuły logiki pierwszego rzędu prawdziwej dokładnie w tych grafach nieskierowanych, które są spójne.

Logika drugiego rzędu

Egzystencjalna monadyczna logika drugiego rzędu (\exists MSOL) jest rozszerzeniem logiki pierwszego rzędu. Jej składnia jest następująca: Załóżmy że Σ jest sygnaturą (składającą się z symboli relacyjnych), oraz że unarne symbole relacyjne R_1, R_2, \dots, R_k nie należą do Σ . Oznaczmy $\bar{\Sigma} = \Sigma \cup \{R_1, R_2, \dots, R_k\}$. Wtedy dla każdej formuły Φ logiki I rzędu nad $\bar{\Sigma}$ napis $\exists R_1, \dots, R_k \Phi$ jest formułą \exists MSOL. Semantyka jest naturalna. Na przykład, następująca formuła wyraża dwudzielną relację E :

$$\exists R \forall x, y (E(x, y) \Rightarrow ((R(x) \wedge \neg R(y)) \vee (\neg R(x) \wedge R(y)))).$$

¹Graf nieskierowany to struktura relacyjna nad sygnaturą zawierającą jeden binarny symbol relacyjny E , w której E interpretowane jest jako relacja symetryczna.

Zadanie 5. Napisz formułę \exists MSOL mówiącą, że dany skończony częściowy porządek ma parzyście wiele elementów.

Zadanie 6. Napisz formułę \exists MSOL mówiącą, że dany graf nieskierowany nie jest spójny.

Zadanie 7. Rozważmy sygnaturę jak z Zadania 3. Napisz formułę \exists MSOL mówiącą, że w danym grafie nieskierowanym istnieje ścieżka z s do t

System dedukcji naturalnej dla rachunku zdań

Przeczytaj Rozdział 2.9 z MdZ.

Zadanie 8. Rozwiąż Zadanie 135 z MdZ.

Zadanie 9. Rozwiąż Zadanie 137 z MdZ.

Zadanie 10. Rozwiąż Zadanie 138 z MdZ.