

401. Załóżmy, że f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[a, b]$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) \geq \delta$ na $[a, b]$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = 1/f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ ¹.

402. Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemanna.

403. Niech $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{(a_n, b_n)}(x),^2$$

gdzie (a_n, b_n) są parami rozłącznymi przedziałami o długościach 2^{-n} . Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemanna oraz oblicz wartość całki $\int_0^\pi f(x) dx$.³

404. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na odcinku $[0, 1]$ o wartościach rzeczywistych. Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx = f(1).$$

405. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

406. Załóżmy, że f jest ciągłą, ściśle rosnącą z $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$. Niech g oznacza funkcję odwrotną do f . Udowodnij, że dla dowolnych $a, b > 0$ mamy

$$\int_0^a f(x) dx + \int_0^b g(x) dx \geq ab$$

oraz zbadaj kiedy zachodzi równość.

407. Czy liczba $\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2) dx$ jest dodatnia czy ujemna?

408. Udowodnić, że równanie

$$\int_0^a e^{-x} \left(\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{100}}{100!} \right) dx = 50$$

ma rozwiązanie a zawarte w przedziale $[50, 100]$.

409. Dla funkcji ciągłej f na przedziale $[0, 1]$ wykazać równość

$$\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx.$$

410. Udowodnić, że jeśli $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 to ciąg

$$a_n = \int_1^n f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(k) + \frac{1}{2} f(n)$$

¹Uwaga: bez założenia $f(x) \geq \delta > 0$ funkcja $g(x)$ nie byłaby ograniczona.

² χ_A oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1 na zbiorze A oraz zero poza nim.

³Pytanie dla dociekliwych: czy rozłączność przedziałów ma znaczenie?

jest ograniczony.

411. Wyznacz wartość całki

$$\int_1^2 \left(e^{1 - \frac{1}{(x-1)^2}} + 1 \right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 - \log(x-1)}} \right) dx.$$

412. Wykorzystując oszacowania wykorzystane w dowodzie wzoru Stirlinga na wykładzie wyznaczyć liczbę cyfr liczb $1000!$.

413. Niech $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t) dt \cdot \int_0^x f(t) dt \geq \left(\int_0^x t f(t) dt \right)^2.$$

414. Załóżmy, że $f : [0, 2\pi]$ spełnia warunek Lipshitz. Wykazać, że istnieje $C > 0$, taka że dla $k \in \mathbb{N}$ spełnione jest szacowanie:

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \right| \leq \frac{C}{k}.$$

415. (a) Uzasadnij, że

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{-n}$$

zbiega jednostajnie do e^{-x} na $[0, \infty)$.

(b) Oblicz (jeszcze raz) całkę

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} dx.$$

416. Pokazać, że wartość całki

$$\int_0^\infty \frac{1}{(x^2 + 1)(x^\alpha + 1)} dx$$

nie zależy od parametru $\alpha \geq 0$.

417. W zależności od parametru α zbadaj zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^\alpha \sin^2 x}.$$

418. Niech f będzie funkcją ciągłą na $[0, \infty)$ posiadającą skończoną granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Wyznacz granicę

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx.$$

- 419.** Niech f będzie funkcją klasy C^1 na $[0, \infty)$, taką że $\int_1^\infty x^{-1}f(x) dx$ jest zbieżna. Dla $a, b > 0$ udowodnij wzór Froullaniego:

$$\int_0^\infty \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}.$$