Logika dla Informatyków (zaawansowana)
Lista zadań nr 3

1 Kącik Zadań Zaległych

Zadanie 1. [2 pkt **i bez gwiazdki**] Dany jest przeliczalny[1] zbiór A klauzul. Udowodnij, że jeżeli każdy jego skończony podzbiór jest spełnialny to zbiór A też jest spełnialny.

2 Logika Pierwszego Rzędu

Niech L będzie zbiorem wszystkich ludzi, jacy żyli na Ziemi od czasu Adama i Ewy. Wyobraźmy sobie że dysonujemy relacjami M, T, oraz funkcją r, których sens jest następujący. Otóż dla pary dowolnych ludzi $\langle x, y\rangle$ napis $\langle x, y\rangle \in M$ będzie znaczył, że x jest matką y. Podobnie napis $\langle x, y\rangle \in T$ będzie znaczył, że x jest ojcem y. Wreszcie, dla człowieka x, napis $r(x)$ będzie oznaczał liczbę, będącą datą urodzenia x (zatem im mniejsze $r(x)$ tym wcześniej x się urodził).

Oczywiście kolejność występowania x i y w parze jest istotna[2], i fakt ten znajduje odbicie w pewnej różnicy w przyjętej notacji, na którą to różnicę zwróć uwagę.

Zadanie 2. Rozszyfruj znaczenie następujących napisów:

1. $\{x \in L : \forall y \in L\ \neg\langle y, x\rangle \in M\}$. Jaka jest moc tego zbioru?
2. $|\{x \in L : \langle y, x\rangle \in T\}|$
3. $\max\{|\{y \in L : \langle y, x\rangle \in M\}| : x \in L\}$. Jaka jest wartość tej liczby?
4. $\min\{r(x) - r(y) : \langle y, x\rangle \in M\}$
5. $\{x \in L : \exists y \in L\ \exists w \in L\ \exists z \in L\ \ \langle x, y\rangle \in M \wedge \langle z, x\rangle \in T \wedge \langle w, y\rangle \in T \wedge r(w) \leq r(z)\}$
6. $\{x \in L : \exists y \in L\ \exists z \in L\ \langle x, y\rangle \in T \wedge \langle x, z\rangle \in T \wedge \langle y, z\rangle \in M\}$

Zdajemy sobie rzecz jasna sprawę z tego, że niektórzy będą uważać wybór powyższego przykładu za nieco kontrowersyjny. Moglibyśmy oczywiście usprawiedliwiać się tu prostym stwierdzeniem, że nie ma w naszym przykładzie niczego, czego media nie byłyby pełne. Ale mamy dla tego wyboru wyjaśnienie bardziej fundamentalne. Otóż ucząc języka sformalizowanego dobrze jest sięgnąć, jako do źródła przykładów, do takiego fragmentu rzeczywistości,

[1] To znaczy, że każdy jego element można ponumerować liczbami naturalnymi. W szczególności można też ponumerować jego skończone podzbiory.

[2] Innymi słowy, o relacjach M i T nie zakładamy, że są symetryczne.

który jest bogaty w relacje dobrze opisane przez język naturalny (i jednakowo przez wszystkich uzytkowników języka rozumiane). Nie dysponując takim przykładem nie mielibyśmy jak sformułować kolejnego zadania. Z powodów o których chętnie opowiedzieliby nam antropolodzy, najlepszym kandydatem na taki fragment rzeczywistości[3] jest właśnie rzeczywistość więzów pokrewieństwa.

Zadanie 3. Zapisz, podobnie jak powyżej następujące obiekty matematyczne.

1. Największa różnica wieku między rodzicami.
2. Zbiór takich x, którzy są starsi od całego swojego rodzeństwa (w tym przyrodniego).
3. Zbiór tych mężczyzn, którzy mieli więcej dzieci, niż ich ojciec.
4. Zbiór takich x, którzy urodzili się ze związku rodzeństwa (być może przyrodniego).
5. Zbiór takich x, którzy mają rodzeństwo młodsze niż najstarsze z ich dzieci.
6. Zbiór takich x, które zostały matką wcześniej niż ich matka.
7. Najstarszy wiek w jakim siostra urodziła dziecko swojego brata.
8. Zbiór takich mężczyzn, którzy mieli dzieci z dokładnie jedną kobietą.

Zadanie 4. O poniższych dwóch formułach wiesz, że jedna jest prawdziwa, zaś prawdziwość drugiej jest otwartą hipotezą. Przeczytaj je starannie, wyjaśnij w języku naturalnym ich znaczenie i dojdź do tego która jest która.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y, z \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\ \ 2x = y + z \wedge [(rs \neq z \wedge rs \neq y) \vee r = 1 \vee s = 1]$$
$$\exists u \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \exists y, z, t \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\ \ x \leq u \vee [2x = t + yz \wedge ((rs \neq z \wedge rs \neq y \wedge rs \neq t) \vee r = 1 \vee s = 1)]$$

Zadanie 5. O poniższych dwóch formułach wiesz, że jedna jest prawdziwa, zaś prawdziwość drugiej jest otwartą hipotezą. Przeczytaj je starannie, wyjaśnij w języku naturalnym ich znaczenie i dojdź do tego która jest która.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\quad y > x \wedge (rs \neq y \vee r = 1 \vee s = 1)$$
$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\quad y > x \wedge\ [r = 1 \vee s = 1 \vee (rs \neq y \wedge rs \neq y + 2)]$$

Zadanie 6. O poniższej parze formuł wiesz, że dokładnie jedna z nich jest prawdziwa. Przeczytaj je starannie, wyjaśnij w języku naturalnym ich znaczenie i dojdź do tego która jest która. Przez $\mathbb{N}_0$ rozumiemy tu zbiór liczb naturalnych wraz z zerem.

$$\exists u \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in \mathbb{N}_0\ \exists y, z, r, s \in \mathbb{N}_0\quad x > u \Rightarrow x = y^2 + z^2 + r^2 + s^2$$
$$\exists u \in \mathbb{N}_0\ \forall x \in \mathbb{N}_0\ \exists y, z, r \in \mathbb{N}_0\quad x > u \Rightarrow x = y^2 + z^2 + r^2$$

Zadanie 7. O poniższych dwóch formułach wiesz, że jedna jest prawdziwa, zaś prawdziwość drugiej jest otwartą hipotezą. Przeczytaj je starannie, wyjaśnij w języku naturalnym ich znaczenie i dojdź do tego która jest która.

$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\quad x^2 \leq y \wedge y < (x+1)^2 \wedge (rs \neq y \vee r = 1 \vee s = 1)$$
$$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall r, s \in \mathbb{N}\quad x \leq y \wedge y < 2x \wedge (rs \neq y \vee r = 1 \vee s = 1)$$

[3] A może nawet jedynym takim przykladem.

Wybierz dowolną liczbę naturalną n większą od 0. Tak długo jak długo n jest różne od 1 wykonuj następującą operację: Jeśli n jest parzyste, podziel je przez 2 i wynik podstaw za n. Jeśli jest nieparzyste, pomnóż je przez 3, iloczynu dodaj 1 i wynik podstaw za n. Hipoteza Collatza mówi, że niezależnie od wyboru początkowego n wykonywanie powyższej pętli się kiedyś zakończy.

Zadanie 8.* [3 pkt] Napisz, w logice pierwszego rzędu, zdanie arytmetyki liczb naturalnych z funkcjami $+, \times, \uparrow$ (dodawanie mnożenie i potęgowanie) które jest prawdziwe w standardowym świecie liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy gdy prawdziwa jest hipoteza Collatza. *Wskazówka. Będziesz musiał(a) jakoś zakodować ciąg liczb o nieznanej z góry długości. Skorzystaj z jednoznaczności przedstawienia liczby naturalnej jako iloczynu liczb pierwszych. Na przykład ciąg $\langle 3, 6, 2\rangle$ możemy elegancko przedstawić jako $2^3 \times 3^6 \times 5^2$.*

Zadanie 9.* [3 pkt] Napisz, w logice pierwszego rzędu, zdanie arytmetyki liczb naturalnych z funkcjami $+, \times$ (dodawanie i mnożenie) które jest prawdziwe w standardowym świecie liczb naturalnych wtedy i tylko wtedy gdy prawdziwa jest hipoteza Collatza. *Wskazówka. Chińskie twierdzenie o resztach. Ciąg przedstawisz teraz jako parę liczb.*