,

3.1 Brakujące kawałki dowodu twierdzenia E-F

Niech τ to skończona sygnatura, $\mathfrak{A}$ to τ-struktura, $\vec{a}$ to k-elementowa krotka z A, a $\vec{x}$ to k-elementowa krotka zmiennych. Definiujemy m-tą formułę Hintikki $\varphi^k_{(\mathfrak{A},\vec{a})}(\vec{x})$ indukcyjnie jako:

$$\varphi^0_{(\mathfrak{A},\vec{a})}(\vec{x}) := \underbrace{\bigwedge_{atomowe\ \lambda,\ \mathfrak{A}\models\lambda(\vec{a})} \lambda \quad \wedge \bigwedge_{atomowe\ \lambda,\ \mathfrak{A}\not\models\lambda(\vec{a})} \neg\lambda}_{\text{atomowa harmonia}}$$

$$\varphi^{m+1}_{(\mathfrak{A},\vec{a})}(\vec{x}) := \underbrace{\bigwedge_{c\in A} \exists x_{k+1}\ \varphi^m_{(\mathfrak{A},\vec{a}c)}(\vec{x}, x_{k+1})}_{\text{tam: odpowiedzi na wyzwania w } \mathfrak{A}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall x_{k+1} \bigvee_{c\in A} \varphi^m_{(\mathfrak{A},\vec{a}c)}(\vec{x}, x_{k+1})}_{\text{z powrotem: odpowiedzi na wyzwania w } \mathfrak{B}}$$

Zauważ, że ranga kwantyfikatorowa $\varphi^m_{(\mathfrak{A},\vec{a})}(\vec{x})$ to m. Co więcej, jeśli $\mathfrak{A}$ lub $\mathfrak{B}$ są nieskończone to powyższe formuły są inherentnie nieskończonymi obiektami. Pokażemy jednak, że to nie do końca prawda.

▶ **Zadanie 3.1.** *Dla każdej skończonej sygnatury τ, każdych $n, m \in \mathbb{N}$ jest tylko skończenie wiele nie-równoważnych $\mathsf{FO}[\tau]$-formuł o randze kwantyfikatorowej m używających zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Wywnioskuj, że każda (potencjalnie nieskończona) formuła Hintikki jest logicznie równoważna pewnej skończonej formule.*

▶ **Zadanie 3.2.** *Niech $m \in \mathbb{N}$, τ to skończona sygnatura, a $\mathfrak{A}$ oraz $\mathfrak{B}$ to (niekoniecznie skończone) struktury. Niech $\mathcal{Z}$ to $\subseteq$-maximalna m-bisymulacja pomiędzy $\mathfrak{A}$ a $\mathfrak{B}$. Pokaż, że dla wszystkich $k \leq m$ oraz k-krotek $\vec{a} \in \mathfrak{A}$ oraz $\vec{b} \in \mathfrak{B}$, dla $k \leq m$, mamy $(\vec{a}, \vec{b}) \in \mathcal{Z}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{B} \models \varphi^{m-k}_{(\mathfrak{A},\vec{a})}[\vec{b}]$.*
Wywnioskuj stąd, że Duplik∀tor ma strategię wygrywającąw m-rundowej grze E-F na $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają dokładnie te same zdania z $\mathsf{FO}_m[\tau]$.

3.2 Gry z kamieniami

▶ **Zadanie 3.3.** *Przeczytaj ze zrozumieniem definicję 11.4 gier z k-kamieniami z książki Libkina.*

U Libkina możesz przeczytać, że Duplic∀tor ma strategię wygrywającą w nieskończenie rundowej grze z k kamieniami na strukturach $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ spełniają te same zdania z FO^k (logika FO ograniczona do zdań używających wyłącznie zmiennych $x_1, x_2, \ldots, x_k$, zmienne możesz oczywiście re-kwantyfikować). Pokaż z ich pomocą, że:

▶ **Zadanie 3.4.** *Nie istnieje formuła $\mathsf{FO}^2[\{E\}]$ mówiąca, że E jest przechodnia.*

▶ **Zadanie 3.5.** *Nie istnieje formuła $\mathsf{FO}^2[\{E\}]$ mówiąca, że E jest relacją równoważności.*

▶ **Zadanie 3.6.** *Nie istnieje formuła $\mathsf{FO}^2[\{E\}]$ mówiąca, że E jest funkcyjna*[1].

[1] dla każdego x nie istnieją różne y, y', że $E(x, y)$ i $E(x, y')$