Lista 8, Analiza Matematyczna II

1̇. Znaleźć przybliżoną wartości całki

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos(x)}\,dx$$

stosując metodę Simpsona dla $n = 2$. Następnie znaleźć dokładną wartość tej całki i porównać wyniki.

2̇. Przybliż całkę $\int_0^1 4(x^2+1)^{-1}\,dx$ używając podziału odcinka $[0,1]$ na 8 równych części trzema metodami: używając końców przedziałów, metodą trapezów i metodą Simpsona[1]. Do ilu miejsc dziesiętnych po przecinku zgadza się wynik?

3̈. Udowodnij, że błąd w metodzie trapezów spełnia szacowanie:

$$|B| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\|f''\|_\infty .$$ [2]

4̈. Dane są punkty x_0, $x_1 = x_0 + (b-a)/n$, $x_2 = x_0 + 2(b-a)/n$ (jak w metodzie Simpsona). Udowodnij, że pole pod parabolą przechodzącą przez punkty $(x_k, f(x_k))$, $k = 0,1,2$, wynosi $\frac{b-a}{3n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$.

5. Oliczyć całki niewłaściwe

a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

ḃ) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos(bx)\,dx, \qquad b > 0.$

6. Niech $n \in \mathbb{N}$, $a, b > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.Wskazać punkty osobliwe i zbadać zbieżność całek niewłaściwych

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^2\log(x)}\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-1}^\infty \frac{x}{2x^3+x^2+1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{2x^3+x^2+\sqrt[3]{x}}$,

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^4+1}{x^6+3x^2+2}\,dx$,

f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$,

ġ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{3/2}}{e^{x^2} - x^{-x^2}}\,dx$,

ḣ) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{\sin(x)}$,

i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sqrt{x(\pi-x)}}{\tan(x)}\,dx$,

j) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{(x^2-1)dx}{\sqrt{2+x+2x^2-x^3}}$,

k̇) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x-\sin(x)}\,dx$,

l̇) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^{3/2}+x+1}\,dx$,

ṁ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx$,

ṅ) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - e^{-x}}{x\sqrt{x}}\,dx$,

---

[1] Do sumowania ułamków użyj komputera.

[2] Dla przypomnienia: f jest klasy C^2 na odcinku $[a,b]$, dzielimy przedział na n równych części i na każdej z nich przybliżamy pole trapezem.

ȯ) $\int_2^\infty \frac{dx}{x^\alpha \log(x)}\, dx,$

ṗ) $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\log(x))^n},$

q̇) $\int_0^2 \frac{dx}{\log(x)},$

ṙ) $\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x}\, dx,$

ṡ) $\int_0^\infty \frac{1}{x^a + x^b}\, dx,$

ṫ) $\int_0^{\pi/2} \log(\sin(x))\, dx,$

u̇) $\int_0^\infty \frac{x}{1 + x^2\cos^2(x)}\, dx,$

v̇) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2 + \sin^2(x)}\, dx$

ẇ) $\int_0^\infty \frac{1 + \cos(x)}{\sqrt{x^6 + |\log(x)| + x}}\, dx$

ẋ) $\int_0^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right) dx$

ẏ) $\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\, dx,$

z̈) $\int_0^1 (1 - x^a)^{-b}\, dx.$

7̇. Udowodnić zbieżność następującej całki niewłaściwej

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x^5 + x^3}}{\sqrt[3]{x^{11} + x^7}}\, dx.$$

8̈. Dla $n \in \mathbb{N}$ wyznaczyć wartość całki

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)...(x+n)}\, dx.$$

9. Zbadać zbieżność zwykłą i bezwzględną całek:

ȧ) $\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}(x+1)}\, dx,$

ḃ) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx,$

ċ) $\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1 + x^n}\, dx, \quad n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R},$

ḋ) $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^a}\, dx, \quad a \in \mathbb{R},$

ė) $\int_1^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2 + k^2}\, dx, \quad a \in \mathbb{R},\ k > 0,$

f̈) $\int_\pi^\infty \frac{\cos(x)}{x + \sin(2x)}\, dx.$

1̈0. Funkcja $\phi(x)$ jest ciągła na przedziale $[a, b]$ i różniczkowalna w sposób ciągły na $(a, b]$, przy czym $\phi'(x)$ jest nieograniczona w pobliżu punktu a. Funkcja $f(u)$ jest ciągła na przedziale zawierającym wszystkie wartości funkcji $\phi(x)$. Pokazać, że całka $\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx$ jest zbieżna oraz

$$\int_a^b f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)\, du. \tag{1}$$

11. Pokazać, że

$$\int_0^1 \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\, dx.$$

1̈2. Czy wzór (1) zachodzi dla $b = \infty$? Sformułuj odpowiednie założenia i udowodnij analogiczne twierdzenie.

13. Pokazać, że

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{\sqrt{x}}\,dx.$$