Lista 1, Analiza Matematyczna II

1. Oblicz sumy dolne i górne dla podanych całek i podziałów:

a)

$$\int_{-2}^{1} x^2\,dx; \quad P = \{-2, -1, 0, 1\},$$

b)

$$\int_{0}^{2} |x-1|\,dx; \quad P = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\},$$

c)

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x\,dx; \quad P = \{-\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\}.$$

2. Które z funkcji są całkowalne w sensie Riemanna na przedziale $[0,1]$?

a) $f(x) = x + [2x]$,

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,

ċ) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \in (0,1] \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$,

ḋ) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$,

ë) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right) & \text{dla } x \in (0,1] \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$,

f̈) $f(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{x}\right\} & \text{dla } x \in (0,1] \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$.

3. Oblicz całki poprzez znalezienie podziałów dla których sumy dolne i górne są blisko siebie.

a) $$\int_0^2 [x]\,dx,$$

ḃ) $$\int_0^2 \{x\}\,dx.$$

ċ) $$\int_{-1}^1 x\,dx,$$

ḋ) $$\int_1^2 x^2\,dx.$$

4̇. Dla pewnego podziału P przedziału $[a,b]$ spełniony jest warunek $L(P,f) = U(P,f)$. Rozstrzygnąć, czy z tego wynika, że f jest całkowalna w sensie Riemanna. Znajdź wszystkie funkcje, dla których ten warunek zachodzi.

5̇. Nieujemna funkcja ciągła f spełnia warunek $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Pokaż, że $f(x) = 0$ dla $x \in [a,b]$.

6̇. Pokazać, że jeśli f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$ i spełnia warunek $\int_0^1 f(x)\,dx > 0$, to istnieje przedział $[a,b] \subset [0,1]$, że $f(x) > 0$ dla $x \in [a,b]$.

7̇. [1]Funkcja całkowalna w sensie Riemanna f różni się od funkcji g w skończeniu wielu punktach przedziału $[a,b]$. Pokazać, że g jest całkowalna w sensie Riemanna i

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

[1] *Wskazówka:* Na początek rozważ przypadek, że funkcje f i g różnią się w jednym punkcie.

8̇. Funkcja f jest całkowalna w sensie Riemmana osobno na przedziałach $[a, c]$ i $[c, b]$. Pokazać, że f jest całkowalna w sensie Riemmana na przedziale $[a, b]$ oraz $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

9. Niech f będzie całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a, b]$, niech $M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$. Udowodnij, że $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le M(b-a)$.

Udowodnij, że jeśli f jest funkcją całkowalną w sensie Riemanna okresową o okresie p, to mamy $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+kp}^{b+kp} f(x)\,dx$ dla $k \in \mathbb{Z}$.

10. Udowodnij, że dla funkcji całkowalnej na $[-a, a]$ zachodzi:

a) jeśli f jest parzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$,

b) jeśli f jest nieparzysta, to $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

11. Czy każda ograniczona funkcja nieparzysta na $[-1, 1]$ ma całkę zero?

12. Rozstrzygnij, czy dana funkcja jest całkowalna w sensie Riemanna. Jeśli jest, to oblicz jej całkę po zadanym przedziale.

a)
$$\int_0^5 (2x+5)\,dx,$$

ḃ)
$$\int_{-1}^2 x^2\,dx,$$

ċ)
$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx,$$

ḋ)
$$\int_a^b \frac{dx}{x^2},\quad 0 < a < b,$$

ė)
$$\int_0^1 a^x, dx,$$

f̈)
$$\int_0^x \cos t\,dt.$$

ġ)
$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1, \\ -x^2 & 1 < x \le 2. \end{cases},$$

ḣ)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & 0 \le x \le \pi, \\ \cos(x) & \pi < x \le 2\pi. \end{cases},$$

i̇)
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \le x \le 0,\ x \in \mathbb{Q}, \\ -1 & 0 < x \le 1,\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & -1 \le x \le 1,\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}.$$

1̈3. Funkcja f jest monotoniczna na $[0, 1]$. Udowodnij, że $f \in \mathcal{R}[0, 1]$ oraz

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(k/n)\right| \le \frac{c}{n}$$

dla pewnej stałej $c > 0$.