Algebra I, lista 6 (ćwiczenia 14.04.2025 deklaracje do godz. 11:00)

Teoria: Wartości i wektory własne odwzorowania liniowego i macierzy. $f \in End(V)$ jest diagonalizowalny $\iff$ istnieje baza V złożona z wektorów własnych f. Wyznacznik $det(f)$. f odwracalne $\iff$ $det(f) \neq 0$. Wielomian charakterystyczny $\varphi_A(X)$, $\varphi_f(X)$. Wartości własne f i A jako pierwiastki wielomianu charakterystycznego. Współczynniki wielomanu charakterystycznego $\varphi_f(X)$ jako niezmienniki f. Ślad macierzy $Tr(A)$, ślad endomorfizmu liniowego f: $Tr(f)$ (związek z wielomianem charakterystycznym). Przestrzeń V^λ własna f dla wartości własnej λ (przestrzeń wektorów własnych f dla wartości własnej λ). Podprzestrzeń f-niezmiennicza. V^λ jest f-niezmiennicza. Suma przestrzeni własnych f jako suma prosta. Charakteryzacja diagonalizowalności f przez wymiary przestrzeni wektorów własnych f.

Ćwiczenia.

1. Obliczyć wielomian charakterystyczny i wartości własne oraz wyznaczyć przestrzenie wektorów własnych macierzy:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Zbadać diagonalizowalność macierzy:
$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$
W przypadku, gdy macierz jest diagonalizowalna, zapisać ją w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest diagonalna.

3. Rozstrzygnąć, które z następujących przekształceń liniowych przestrzeni $\mathbb{R}^3$ są diagonalizowalne poprzez wskazanie przestrzeni wektorów własnych i ich wymiarów (bez rachunków, korzystając wyłącznie z interpretacji geometrycznej):
(a) obrót R wokół osi przechodzącej przez O, o kąt $\alpha \in (0, \pi)$.
(b) Odbicie S_Π względem płaszczyzny Π przechodzącej przez O.
(c) Rzut prostopadły P_Π na płaszczyznę z punktu (b).
(c) Odbicie S_L względem prostej L przechodzącej przez O.
(e) Rzut prostopadły P_L na prostą L z punktu (d).
(f) Dylatacja (jednokładność) D_t o środku O i skali $t \in \mathbb{R}$ ($D_t(X) = tX$).

Zadania. Zakładamy wszędzie, że $dim(V) < \infty$ oraz $F, G \in End(V)$.

1. (rekurencja liniowa) Ciąg Fibonacciego jest zadany rekurencyjnie wzorami $a_0 = 1,\ a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ dla $n \geqslant 1$. Wyprowadzić wzór na n-ty wyraz tego ciągu wg następującego planu:
(i) Niech $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$. Podać macierz M wymiaru 2×2 taką, że $MX_n =$

X_{n+1} dla wszystkich n.
(ii) Przedstawić M w postaci PDP^{-1}, gdzie D jest diagonalna.
(iii) Podać wzór na M^n, a następnie wzór na a_n.

2. Załóżmy, że F, G są przemienne (tzn. $F \circ G = G \circ F$).
(a) Załóżmy, że $W < V$ jest F-niezmiennicza. Udowodnić, że $G[W]$ też jest F-niezmiennicza.
(b) Załóżmy dodatkowo, że F i G są diagonalizowalne. Udowodnić, że istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni V taka, że macierze F i G w tej bazie są obie diagonalne.

3. Udowodnić, że dla macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\varphi_{AB}(X) = \varphi_{BA}(X)$:
(a) gdy A jest odwracalna,
(b)* gdy A, B są dowolne.
Wywnioskować stąd, że:
(c)– $Tr(AB) = Tr(BA)$ (oczywiscie to można też sprawdzić rachunkowo).
(d)– $\varphi_{FG}(X) = \varphi_{GF}(X)$.

4. * Dowieść, że każdy endomorfizm liniowy jest automorfizmem liniowym lub jest sumą dwóch automorfizmów liniowych (dla przestrzeni liniowej V nad dowolnym ciałem F, z wyjątkiem przypadku, gdzie $F = \mathbb{Z}_2$ i $\dim V = 1$).

5. (a) Udowodnić, że:
(i) Jesli $F^2 = F$ i $F \neq 0$, to 1 jest wartością własną F.
(ii) Jeśli $F^2 = -F$ i $F \neq 0$, to -1 jest wartością własną F.
(iii) W punkcie (i): jeśli λ jest wartością własną F to $\lambda = 0$ lub $\lambda = 1$.
(iv) W punkcie (ii): jesli λ jest wartością własną F, to $\lambda = 0$ lub $\lambda = -1$.
(b)* Załóżmy, że $W(X)$ jest wielomianem niezerowym i $W(F) = 0$. Udowodnić, że jesli λ jest wartością własną F, to λ jest pierwiastkiem wielomianu W.

6. Załóżmy, że $m, n \in \mathbb{Z}$ są względnie pierwsze. Udowodnić, że istnieją $s, t \in \mathbb{Z}$ takie, że $1 = sm+tn$. (wsk: rozważyć zbiór $I = \{sm+tn : s, t \in \mathbb{Z}\}$, a nastepnie najmniejszy dodatni element tego zbioru. Wykorzystać dzielenie z resztą).

7. Załóżmy, że $W(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ są względnie pierwsze (tzn. nie istnieje wielomian stopnia > 0, który dzieli $W(X)$ i $V(X)$). Udowodnić, że istnieją wielomiany $S(X), T(X) \in \mathbb{R}[X]$ takie, że $1 = S(X)W(X) + T(X)V(X)$. (wsk: wzorować się na dowodzie z poprzedniego zadania).

8. Załóżmy, że $W(X), V(X) \in \mathbb{R}[X]$ są względnie pierwsze, $U(X) = W(X)V(X)$ oraz $U(F) = 0$. Udowodnić, że $V = Ker(W(F)) \oplus Ker(V(F))$.

9. Udowodnić, że istnieje niezerowy wielomian $W_F(X) \in \mathbb{R}[X]$ taki, że $W_F(F) = 0$ oraz $W_F(X)$ dzieli $V(X)$ dla każdego wielomianu $V(X) \in \mathbb{R}[X]$ takiego, że $V(F) = 0$. (Wielomian W_F nazywamy wielomianem minimalnym endomorfizmu F, gdy dodatkowo W_F ma współczynnik 1 przy X w najwyższej potędze).

10. * Udowodnić, że F jest diagonalizowalne $\iff$ istnieje wielomian $W(X) \in \mathbb{R}[X]$ taki, że $deg(W) > 0$, $W(F) = 0$, W rozkłada się nad $\mathbb{R}$ na iloczyn czynników liniowych oraz wszystkie pierwiastki W sa jednokrotne. (uwaga: to zadanie jest słuszne dla dowolnego ciała w miejsce $\mathbb{R}$).

11. – Załóżmy, że V jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ i $F^n = id$ dla pewnego $n > 0$, to F jest diagonalizowalny (wsk: skorzystać z poprzedniego zadania oraz z rozkładu wielomianu $X^n - 1$ nad $\mathbb{C}$).