,

2.1 Gry E-F na grafach

W zadaniach poniżej wystarczy wskazać dwie struktury wraz z pomysłem na strategię wygrywającą dla duplik$\forall$tora w m-rundowej grze E-F. Napisanie porządnego dowodu to prawie samobójstwo. Nauczymy się to robić potem, jak poznamy lokalności Hanfa i Gaifmana. W zadaniach poniżej polecam rysować sobie kółka i kreski.

▶ **Zadanie 2.1.** *Podaj intuicję czemu "istnienie kliki o rozmiarze przynajmniej $n/2$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu" nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalne.*

▶ **Zadanie 2.2.** *Podaj intuicję czemu spójność grafów nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalna.*

▶ **Zadanie 2.3.** *Podaj intuicję czemu acykliczność nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalna.*

▶ **Zadanie 2.4.** *Podaj intuicję czemu dwukolorowalność nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalna.*

▶ **Zadanie 2.5.** *Podaj intuicję czemu „posiadanie cyklu Eulera" nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalna.*

Spójny graf ma cykl Eulera wtw każdy wierzchołek ma parzysty stopień.

▶ **Zadanie 2.6.** *Podaj intuicję czemu „planarność" nie jest* $\mathsf{FO}[\{E\}]$*-definiowalna.*

Hint: Zastosuj twierdzenie Kuratowskiego oraz graf podobny do 5-elementowej kliki.

2.2 Gry E-F na porządkach

▶ **Zadanie 2.7.** *Niech $\mathcal{C}$ to klasa wszystkich porządków liniowych. Jaki jest rozmiar $\mathcal{C}/_{\equiv_2}$?*

Dla porządku liniowego $\mathfrak{L}$ (tj. $\{\leq\}$-struktury interpretującej $\leq$ jako porządek liniowy na uniwersum) oraz elementu $a \in L$, przez $\mathfrak{L}^{\leq a}$ oznaczamy ograniczenie $\mathfrak{L}$ do elementów mniejszych-lub-równych a. Analogicznie definiujemy $\mathfrak{L}^{\geq a}$. Wykaż:

▶ **Zadanie 2.8.** *Niech $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ to* skończone *porządki liniowe oraz niech $a \in L_1, b \in L_2$ będą takie że $\mathfrak{L}_1^{\leq a} \equiv_k \mathfrak{L}_2^{\leq b}$ i $\mathfrak{L}_1^{\geq a} \equiv_k \mathfrak{L}_2^{\geq b}$. Pokaż, że $(\mathfrak{L}_1, a) \equiv_k (\mathfrak{L}_2, b)$. Przez $(\mathfrak{L}_1, a)$ oznaczamy tu rozszerzenie $\mathfrak{L}_1$ o nowy symbol stałej a interpretowanej jako element a. Strukturę $(\mathfrak{L}_2, b)$ definiujemy analogicznie.*

▶ **Zadanie 2.9.** *Wykorzystaj poprzednie zadanie by pokazać alternatywny dowód tego że każde dwa* skończone *porządki $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ o mocach $|L_1| \geq 2^m, |L_2| \geq 2^m$ spełniają $\mathfrak{L}_1 \equiv_m \mathfrak{L}_2$.*

▶ **Zadanie 2.10.** *Niech $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ będzie minimalną funkcją taką, że $|L_1| \geq f(m)$ oraz $|L_2| \geq f(m)$ implikuje $\mathfrak{L}_1 \equiv_m \mathfrak{L}_2$ (gdzie $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2$ są jak poprzednio). Wykaż, że f jest funkcją wykładniczą.*