1 Tydzień 1 (10–14.03.2023)

▶ **Zadanie 1.1.** *Podczas wykładu pokazaliśmy, że "parzystość" nie jest definiowalna w* FO$[\emptyset]$, *tzn. nie jest definiowalna nad (skończonymi) zbiorami. Wytłumacz czemu przedstawiony w trakcie wykładu dowód nie może być przerobiony na dowód niewyrażalności w świecie skończonych grafów czy skończonych porządków liniowych.*

▶ **Zadanie 1.2.** *Przy pomocy twierdzenia o zwartości wykaż, że nie ma takiej formuły φ w* FO$[\{P\}]$ *używającej unarnego predykatu P dla której dla każdej skończonej struktury $\mathfrak{A}$ mamy $\mathfrak{A} \models \varphi$ wtw $|P^{\mathfrak{A}}| = |A \setminus P^{\mathfrak{A}}|$, tzn. interpretacja P oraz jego dopełnienia mają równe moce.*

Hint: Zaadaptuj dowód niewyrażalności parzystości podanej podczas wykładu.

▶ **Zadanie 1.3.** *Wykaż, że jeśli teoria $\mathcal{T}$ ma modele o dowolnie dużych mocach (tzn. dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy model $\mathfrak{A} \models \mathcal{T}$ o mocy $|A| \geq n$). Pokaż, że $\mathcal{T}$ ma nieskończony model.*

▶ **Zadanie 1.4.** *Obal następujący wariant twierdzenia o zwartości w świecie skończonych modeli.*

"Niech $\mathcal{T}$ to FO*-teoria. Jeśli każdy skończony pozdzbiór $\mathcal{T}_0 \subseteq \mathcal{T}$ jest skończenie spełnialny, to $\mathcal{T}$ również ma skończony model."*

▶ **Zadanie 1.5.** *Zastosuj twierdzenie o zwartości by pokazać, że istnieje przeliczalna struktura, która jest elementarnie równoważna $(\mathbb{Z}, \leq)$ ale jej nie izomorficzna.*

Hint: rozszerz sygnaturę o symbole stałych c, d, i rozważ teorię $\mathcal{T}$ zdań spełnionych w $(\mathbb{Z}, \leq)$ razem ze zdaniami ϕ_n dla $n \in \mathbb{N}$ mówiącymi $\phi_n := \exists x_1 \cdots \exists x_n\, c < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < d$.

▶ **Zadanie 1.6.** *Przy pomocy twierdzenia o zwartości pokaż, że "parzystość" nie jest definiowalna w* FO *w świecie porządków liniowych, tzn. nie ma takiej formuły φ w* FO$[\leq]$ *takiej że dla każdej skończonej struktury $\mathfrak{A}$ interpretującej $\leq$ jako porządek liniowy to $\mathfrak{A} \models \varphi$ wtw A ma parzyście wiele elementów.*

Hint: Całkiem trudne. Zobacz Example 0.4.4 w notatkach Otta dla zarysu dowodu.

▶ **Zadanie 1.7.** *Dla podanych poniżej par struktur, wskaż minimalne m, takie że duplic∀tor ma strategię wygrywającą w m-rundowej grze E-F.*