410. Udowodnić, że jeśli $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą, wklęsłą, klasy C^2 to ciąg

$$a_n = \int_1^n f(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} f(k) + \frac{1}{2} f(n)$$

jest ograniczony.

411. Wyznacz wartość całki

$$\int_1^2 \left(e^{1-\frac{1}{(x-1)^2}} + 1\right) + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\log(x-1)}}\right) dx.$$

412. Wykorzystując oszacowania wykorzystane w dowodzie wzoru Stirlinga na wykładzie wyznaczyć liczbę cyfr liczb 1000!.

413. Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą o wartościach dodatnich. Wykazać, że dla każdego $x > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\int_0^x t^2 f(t)\, dt \cdot \int_0^x f(t)\, dt \geq \left(\int_0^x t f(t)\, dt\right)^2.$$

414. Załóżmy, że $f : [0, 2\pi]$ spełnia warunek Lipshitza. Wykazać, że istnieje $C > 0$, taka że dla $k \in \mathbb{N}$ spełnione jest szacowanie[4]:

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx\right| \leq \frac{C}{k}.$$

[4] *Wskazówka:* Może pomóc zrobienie najpierw tego zadania dla funkcji klasy C^1 przy pomocy całkowania przez części. Jeśli nie założymy różniczkowalności można rozważać sumy Riemmana i zastosować odpowiednik całkowania przez części dla sum, czyli sumowanie Abela.