Lista gwiazdkowa (26.02.2025), Analiza Matematyczna II

401. Załóżmy, że f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna na odcinku $[a, b]$ oraz istnieje $\delta > 0$ taka, że $f(x) \geq \delta$ na $[a, b]$. Udowodnij, że funkcja $g(x) = 1/f(x)$ jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$[1].

402. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją monotoniczną. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemmana.

403. Niech $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną wzorem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \chi_{(a_n, b_n)}(x),$$[2]

gdzie (a_n, b_n) są parami rozłącznymi przedziałami o długościach 2^{-n}. Wykaż, że f jest całkowalna w sensie Riemanna oraz oblicz wartość całki $\int_0^\pi f(x)\, dx$.[3]

404. Załóżmy, że f jest funkcją ciągłą na odcinku $[0, 1]$ o wartościach rzeczywistych. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x)\, dx = f(1).$$

405. Pokazać, że

$$\int_0^1 x^{-x}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} n^{-n}.$$

[1]Uwaga: bez założenia $f(x) \geq \delta > 0$ funkcja $g(x)$ nie byłaby ograniczona.

[2]χ_A oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1 na zbiorze A oraz zero poza nim.

[3]Pytanie dla dociekliwych: czy rozłączność przedziałów ma znaczenie?