Lista 7[1], Analiza Matematyczna II

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań:

a) $y = x^3 + 1,\ y = (x+1)^2$,

b) $x = y^2 - y,\ x = y - y^2$.

2. Naszkicuj krzywe zadane parametrycznie i oblicz ich długość.

a) $x = 3t,\ y = 2t^{3/2},\ 0 \le t \le 3$,

b) $x = t^4/4 + 1,\ y = t^6/6,\ 0 \le t \le 1$,

c) $x = \frac{2}{3}t^{3/2},\ y = \frac{4}{9}t^{9/4},\ 0 \le t \le 4$,

d) $x = \cos^3(t),\ y = \sin^3(t),\ 0 \le t \le 2\pi$.

3. Naszkicuj krzywe zadane we współrzędnych biegunowych i oblicz ich długość.

a) $r = 2\cos(\theta)$,

b) $r = \theta^2,\ 0 \le \theta \le 4\sqrt{2}$,

c) $r = \sin^2(\theta/2),\ 0 \le \theta \le \pi$,

d) $\theta = \frac{1}{2}(r + 1/r),\ 1 \le r \le 3$.

4. Funkcja $f(\theta)$ zależy w sposób ciągły od kąta, gdzie $\theta \in [0, 2\pi)$. Niech R będzie obszarem złożonym z tych punktów na płaszczyźnie, których współrzędne biegunowe spełniają: $0 \le r \le f(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$. Udowodnić[2], że pole R wynosi $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2\,d\theta$.

5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykresy równań we współrzędnych biegunowych

a) $r = 2 + 2\cos\theta$ (kardioida),

b) $r^2 = 9\sin(2\theta)$ (leminiskata).

6. Znajdź pole obszaru na zewnątrz kardioidy $r = 1 + \cos\theta$ i wewnątrz kardioidy $r = 1 + \sin\theta$.

7. Narysuj w układzie współrzędnych krzywą zadaną parametrycznie w następujący sposób:

$$x = \cos(t), y = \sin(t) + 1,\ t \in [0, \pi].$$

Co to za krzywa? Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót tej krzywej wokół osi x. Narysować tę bryłę.

8. Obliczyć pole powierzchni otrzymanej przez obrót wokół osi x podanych wykresów.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3,\ x \in [0, \sqrt{2}]$,

b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8x^2},\ x \in [1, \sqrt{2}]$,

c) $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$,

d) $x = \sin^2(t),\ y = \cos^2(t),\ t \in [0, \pi]$.

9. Jakościowo narysować krzywą zadaną we współrzędnych biegunowych przez:

a) $r^2 = 4\cos(\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$,

---

[1] W większości zadań na tej liście głównym celem jest dojście do całki, która daje wynik. Samo całkowanie można pominąć, jeśli dalsza droga jest jasna.

[2] *Wskazówka:* Podzielić przedział $[\alpha, \beta]$ na n równych części i przybliżyć pole odpowiedniego obszaru przez pole wycinka kołowego.

b) $r = \cos(m\theta),\ m \in \{1/3, 2, 3, 7\},\ \theta \in [0, 2\pi]$ (róża),

c) $r = 1 - 2\sin(3\theta),\ \theta \in [0, 2\pi]$ (róża w róży).

10. Opisać hiperbolę we współrzędnych biegunowych.

11. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi OX obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

a) $f(x) = \sqrt{x+1},\ g(x) = -\sqrt{x-1},\ x \in [1, 3]$,

b) $y = x^3 + 2,\ y = x^2 + 2x + 2$.

12. Obliczyć objętość bryły otrzymanej przez obrót wokół osi y obszaru ograniczonego przez podane wykresy.

a) $f(x) = 1,\ g(x) = x - 2,\ x \in [2, 3]$,

b) $f(x) = \cos(x^2),\ g(x) = \sin(x^2),\ x \in \left[0, \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$.

13. Obliczyć objętość brył opierając się na informacji o przekrojach. Zrobić rysunek.

a) Podstawą bryły jest trójkąt równoramienny prostokątny o ramionach L_1 i L_2 długości 4. Przekroje prostopadłe do L_1 są półkolami.

b) Podstawą bryły jest koło o promieniu 1. Przekroje prostopadłe do ustalonej średnicy podstawy są kwadratami.

14. W kuli o promieniu 2 wydrążono otwór o promieniu 0.5. O ile zmniejszyła się objętość?

15. Pojemnik w kształcie odwróconego stożka o wysokości $4m$ i promieniu $1m$ jest wypełniony wodą. Obliczyć pracę potrzebną do wypompowania wody przez odpływ znajdujący się $1m$ nad powierzchnią wody.

16. Basen pełen wody ma kształt półcylindra o wysokości $10m$ i promieniu $2m$ (powierzchnia wody jest prostokątem o wymiarach $10m$ na $4m$). Obliczyć pracę potrzebną do wypompowania wody przez odpływ znajdujący się na brzegu basenu.

17. Stalowy płat w kształcie trójkąta równoramiennego o podstawie $2m$ i wysokości $1m$ leży na ziemi. Zakładamy, że masa każdego fragmentu płata jest równa polu. Ile pracy trzeba włożyć, aby unieść płat do pozycji pionowej, przy założeniu, że podstawa płata pozostaję cały czas na ziemi?

18. Wyznaczyć środek masy:

a) półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z \geq 0$,

b) półkuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ z \geq 0$,

c) obszaru ograniczonego przez krzywą we współrzędnych biegunowych przez

$$r = a(1 + \cos\theta).$$