Algebra I, lista 3 (ćwiczenia 17.03.2025, deklaracje do godz. 11:00).

Teoria: Przestrzeń sprzężona (dualna) $V^* = Hom(V, \mathbb{R})$ funkcjonałów liniowych na V. Baza sprzężona $\mathcal{B}^*$ do bazy $\mathcal{B}$. Izomorfizm $f : V \to V^*$, gdy $dim(V) < \infty$ (niekanoniczny). Zbiór $Aut(V)$ automorfizmów liniowych V, związek z $GL(n, \mathbb{R})$. Macierz odwracalna: definicja, własności. $Ker(F)$ i $Im(F)$ dla $F : V \to W$ liniowego: definicja, własności. F jest 1-1 $\iff$ $Ker(F) = \{0\}$.
$dim(V) = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$. Wn: gdy $dim(V) < \infty$ i $F : V \to V$ liniowe, to F jest 1-1 $\iff$ F jest "na". Macierz kwadratowa A wymiaru $n \times n$ jest odwracalna iff kolumny A są liniowo niezależne.

Permutacje: definicja, zapis dwuwierszowy, składanie, permutacja odwrotna, transpozycja, cykl. Cykle rozłączne, ich komutowanie. Rozkład permutacji na iloczyn cykli rozłącznych. Każda permutacja jest złożeniem pewnej liczby transpozycji liczb sąsiednich. Inwersja w permutacji. Permutacje parzyste/nieparzyste. Znak permutacji $sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau)$, $sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$.

V oznacza przestrzeń liniową nad $\mathbb{R}$, $U < V$.

Ćwiczenia (do samodzielnego wykonania, nie deklaruje się ich).

1. Niech $B = \{1, X, X^2, X^3\}$, $C = \{X^3, X^2, X, 1\}$. Znaleźć macierze $m_{BC}(F)$ i $m_{CB}(F)$ dla następujących odwzorowań liniowych $F : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$.
   (a) $F(W(X)) = W(2X)$, (b) $F(W(X)) = 2W(X)$, (c) $F(W(X)) = W(X-1)$, (d) $F(W(X)) = W(X) - W(1)$.
   Następnie obliczyć macierz $m_{BB}(F \circ F)$ na dwa sposoby:
   (1) jako iloczyn $m_{CB}(F)m_{BC}(F)$,
   (2) wyprowadzić wzór na złożenie $F^2 = F \circ F$ i obliczyć $m_{BB}(F^2)$ wprost z definicji, obliczając współrzędne w bazie B wielomianów $F^2(W)$ dla $W \in B$.
   Podobnie sprawdzić, że $m_{CC}(F \circ F) = m_{BC}(F)m_{CB}(F)$. Porównać $m_{CC}(F^2)$ i $m_{BB}(F^2)$.

2. Niech $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.
   (a) Przedstawić σ w postaci iloczynu cykli rozłącznych.
   (b) Czy σ jest parzysta?

3. Narysować w układzie współrzędnych obraz siatki $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}) \cup (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$ względem przekształcenia liniowego $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o macierzy
   (a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, (b) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
   (c) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego płaszczyzny F wiedząc, że
   (a) $F(5, 0) = (3, 1)$, $F(0, 7) = (-2, 3)$,
   (b) $F(4, 1) = (2, 3)$, $F(1, -1) = (0, 1)$.

Zadania. Zadań oznaczonych minusem nie omawiamy na ćwiczeniach.

1. (a)– Sprawdzić, że przekształcenie $F : V \to V/U$ określone przez $F(v) = v + U$ jest liniowe. (przekształcenia takie nazywamy przekształceniami ilorazowymi)
(b) Udowodnić, że $dim(V) = dim(U) + dim(V/U)$ (korzystając z punktu (a) i twierdzenia z wykładu).

2. (Bazy sprzężone) Niech $b_1 = E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$, zaś $\mathcal{E} = \{E_1, E_2\}$ (są to dwie bazy $\mathbb{R}^2$ o wspólnym pierwszym wektorze). Wyznaczyć wzory na b_1^* i E_1^* jako funkcjonały liniowe $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, elementy baz sprzężonych $\mathcal{B}^*$ i $\mathcal{E}^*$.

3. Udowodnić, że dla $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, jeśli $AB = I$, to $BA = I$ (bez używania wyznacznika i bez rachunków). W szczególności takie macierze są odwracalne i są wzajemnymi odwrotnościami.

4. Niech $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = E_3 \in \mathbb{R}^3$. Niech $V_0 = Lin(b_1, b_2)$, $V_1 = Lin(E_3)$, zaś $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na V_0 wzdłuż V_1. Wyznaczyć macierz F w bazie $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, E_3\}$, (tzn. $m_{\mathcal{BB}}(F)$) i w bazie standardowej $\mathcal{E}$ (tzn. macierz $m_{\mathcal{EE}}(F)$ (bez odwoływania sie do macierzy przejścia).

5. (a) Załóżmy, że $\Pi < \mathbb{R}^3$ jest płaszczyzną o równaniu parametrycznym $X = tb_1 + sb_2,\ t, s \in \mathbb{R}$, gdzie wektory b_1 i b_2 są liniowo niezależne, zaś $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest przekształceniem liniowym takim, że $Im(F) = \Pi$ oraz $F|_{\Pi} = id_{\Pi}$. Niech $V = Ker(F)$. Udowodnić, że F jest rzutem na Π wzdłuż V.
(b) W przypadku gdy $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, podać przykład liniowych $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takich, że $Im(F) = Im(G) = \Pi$, F jest rzutem na Π (wzdłuż pewnej podprzestrzeni), zaś G nie jest rzutem na Π. Podać macierze F i G, w bazie standardowej.

6. Macierz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ jest macierzą obrotu $\mathbb{R}^3$ wokół pewnej osi przechodzącej przez O. Znaleźć tę oś (równanie w postaci parametrycznej).

7. Znaleźć jądra i obrazy przekształceń liniowych $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o następujących macierzach:
(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, (b)– $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
Znaleźć bazy tych podprzestrzeni. Napisać równania tych podprzestrzeni w postaci parametrycznej. (wskazówka: $Im(F)$ jest generowany przez $F(E_1), F(E_2), F(E_3)$, $Ker(F)$ jest zbiorem rozwiązań układu równań liniowych)

8. Czy istnieje przekształcenie liniowe F takie, że $Im(F) = Ker(F)$?
(a)– $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, (b)– $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
(c)(i) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, (ii) $F : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$,
(d)* $F : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.

9. Podać przykład przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, które
(i) jest 1-1, lecz nie jest "na"
(ii) jest "na", lecz nie jest 1-1.

10. Załóżmy, że $\sigma \in S_n$. Udowodnić, że $\sigma = id$, jeśli
a) $\sigma(i) \geqslant i$ dla wszystkich i lub
b)– $\sigma(i) \leqslant i$ dla wszystkich i.

11. Dla $\alpha \in S_4$ określamy przekształcenie liniowe $T_\alpha : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ wzorem:
$T_\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, x_{\alpha(3)}, x_{\alpha(4)})$.
(a) Znaleźć macierz $m_{\mathcal{E}}(T_\alpha)$ (w bazie standardowej, macierze tej postaci nazywamy macierzami permutacji)
(b) Udowodnić, że dla $\alpha, \beta \in S_4$, $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\beta\alpha}$.
(c) Udowodnić, że $(T_\alpha)^{-1} = T_{\alpha^{-1}}$.