SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 10

Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella

Jan Wojdylak, 23.05.2021

1. Cel ćwiczenia

Celem laboratoriów jest znalezienie minimum lokalnych danej funkcji korzystając z metody interpolacji kwadratowej Powella.

2. Opis problemu

Dane mamy dwie funkcje $f_1(x) = \ln(x^5 + 3x^2 + 9)$ oraz $f_2(x) = x^6$. Zadanie polega na znalezieniu minimum lokalnego tych funkcji w przedziale [-1.5, 1]

3. Opis metody

Metoda interpolacji Powella jest jedną z bezgradientowych metod minimalizacji funkcji, korzystamy z lokalnego przybliżenia funkcji wielomianem drugiego stopnia. Przez trzy punkty: x_1, x_2, x_3, które wybieramy na początku obliczeń ręcznie prowadzimy wielomian kwadratowy dany wzorem:

$$p_2(x) = F(x_1) + F[x_1, x_2](x - x_0) + F[x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2)$$
$$gdzie\ F(x_1)\ -\ wartość\ funkcji$$

$$F[x_1, x_2]\ = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} -\ iloraz\ róznicowy\ 1.rzędu$$

$$F[x_1, x_2, x_3] = \frac{\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}{x_3 - x_1} -\ iloraz\ różnicowy\ 2.rzędu$$

Następnie narzucamy warunek zerowania pochodnej, ponieważ tam spodziewane jest minimum funkcji.

$$\frac{dp_2}{dx} = F[x_1, x_2]\ +\ 2xF[x_1, x_2, x_3]\ -\ F[x_1, x_2, x_3](x_1 + x_2) = 0$$

Powyższe równanie możemy przekształcić tak, aby wyliczyć x

$$x_m = \frac{F[x_1, x_2, x_3](x_1 + x_2)\ -\ F[x_1, x_2]}{2F[x_1, x_2, x_3]}$$

Aby znaleziony punkt był rzeczywistym minimum musi być spełniony warunek:

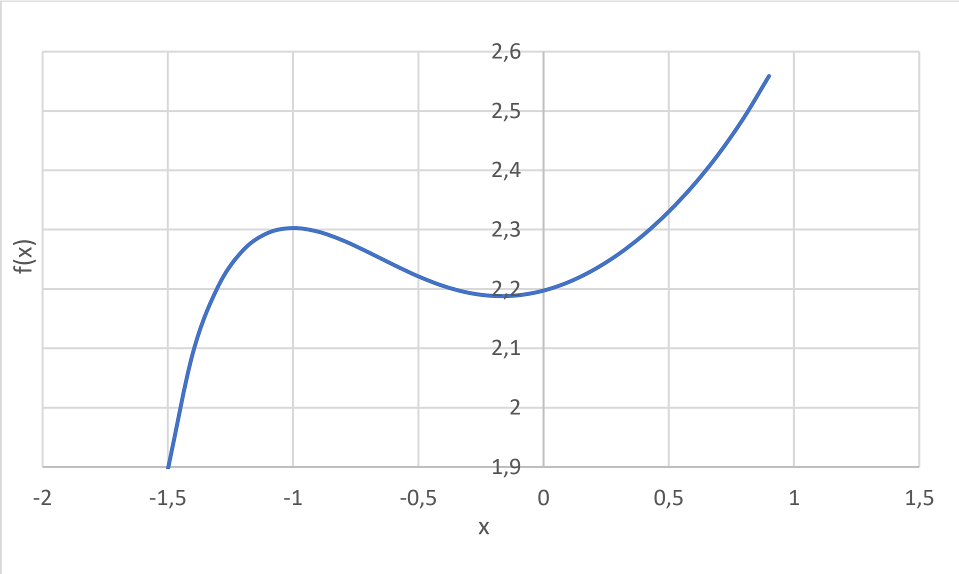
$$F[x_1, x_2, x_3]\ >\ 0$$

4. Wyniki

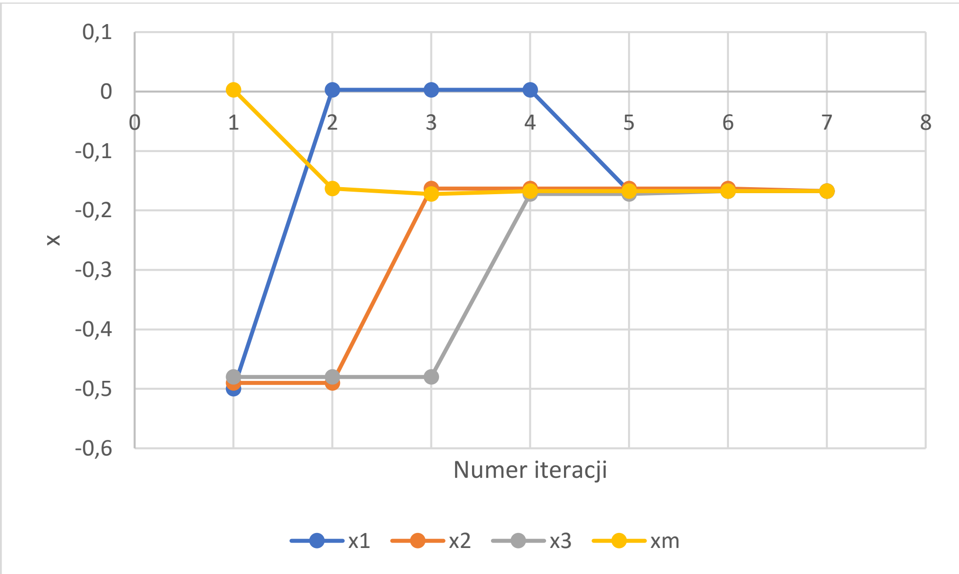
4.1.1. Minimum lokalne funkcji $f_1(x) = \ln(x^5 + 3x^2 + 9)$

Punkty początkowe: $x_1 = -0.5,\ x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, gdzie\ h = 0{,}01$

Przedział: [-1.5, 1]

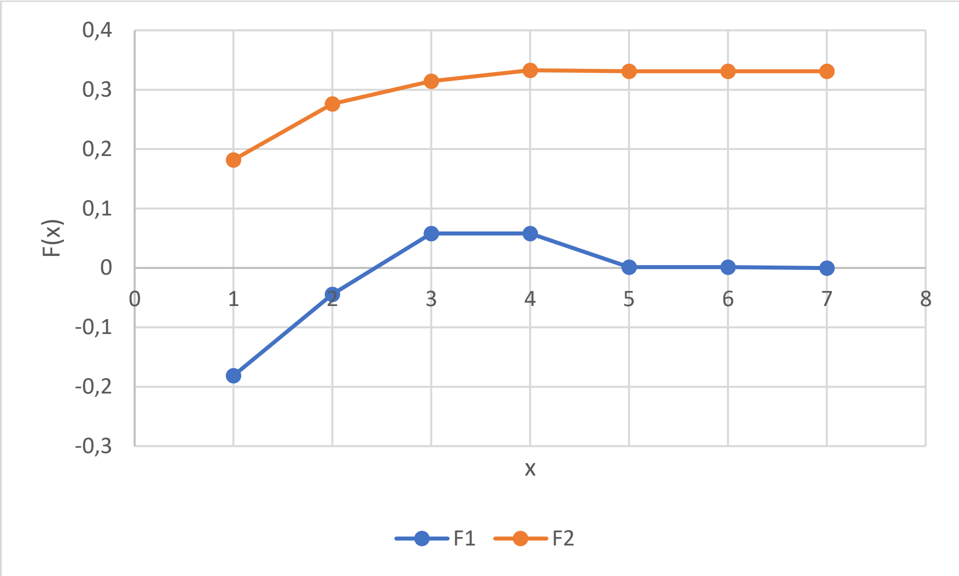


Rysunek 1. Wykres funkcji $f_1(x)$



Rysunek 2. Kolejne przybliżenia wybranych punktów oraz szukanego minimum

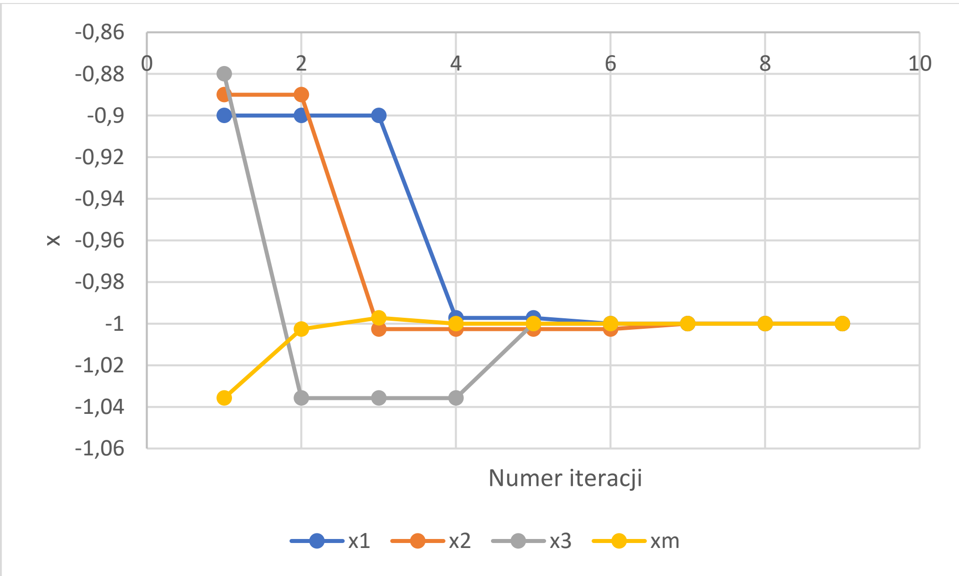
Ostateczne przybliżenie x_m = -0,16732, taki wynik jest zgodny z analitycznym lokalnym minimum funkcji. Otrzymaną wartość obliczyliśmy w 7 iteracjach, a nie tak jak zakładaliśmy w 10, ponieważ otrzymaliśmy wystarczającą dokładność.



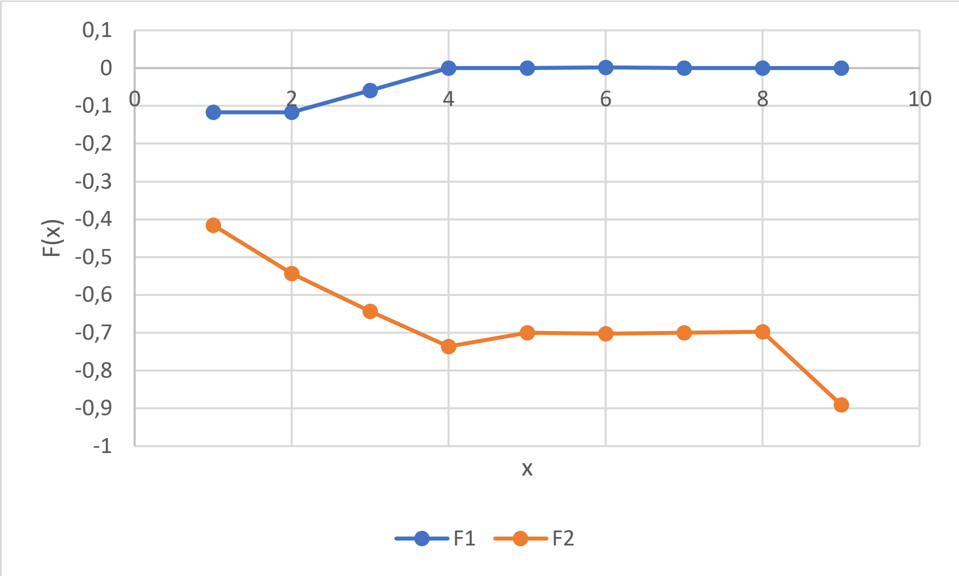
Rysunek 3. Zmiany ilorazu 1. i 2. Rzędu funkcji

4.1.2. Minimum lokalne funkcji $f_1(x) = \ln(x^5 + 3x^2 + 9)$

Punkty początkowe: $x_1 = -0.9,\ x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, gdzie\ h = 0{,}01$
Przedział: [-1.5, 1]



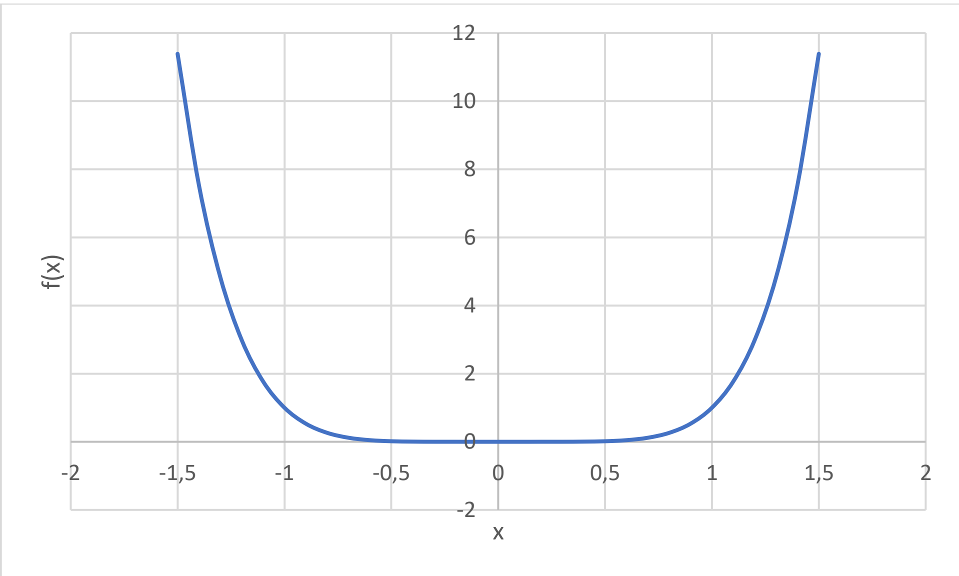
Rysunek 4. Kolejne przybliżenia wybranych punktów oraz szukanego minimum



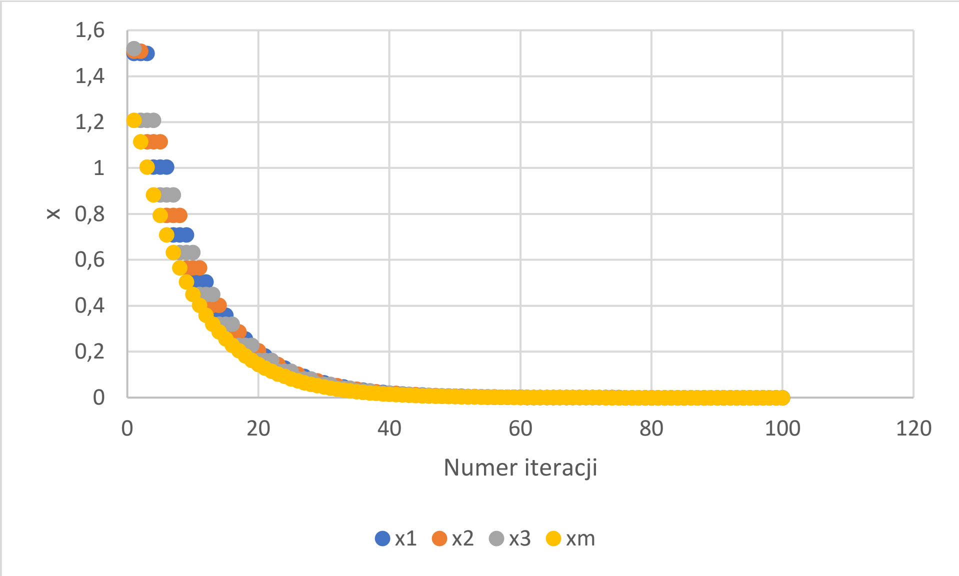
Rysunek 5. Zmiany ilorazu 1. i 2. Rzędu funkcji

4.2. Minimum lokalne funkcji $f_2(x) = x^6$.

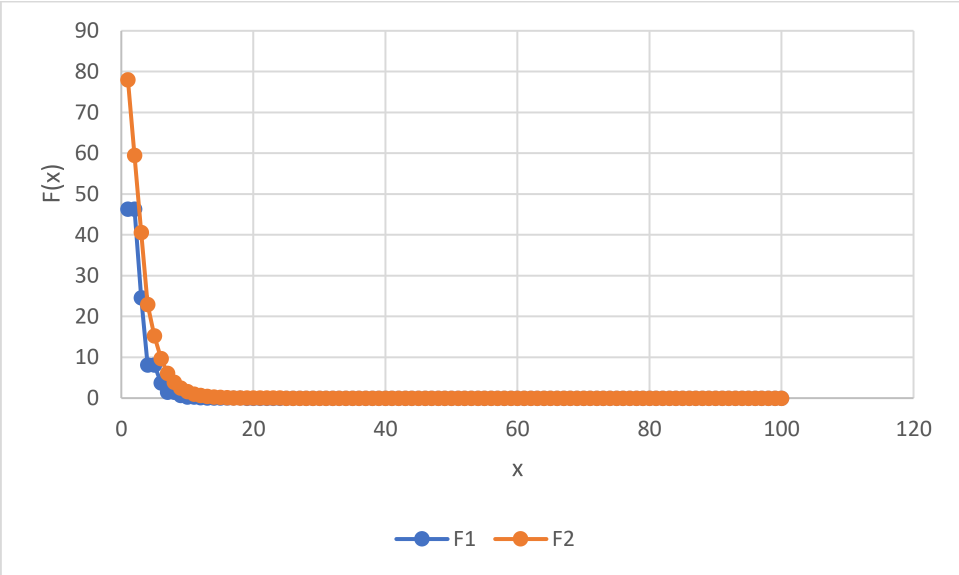
Punkty początkowe: $x_1 = -1.5,\ x_2 = x_1 + h, x_3 = x_2 + h, gdzie\ h = 0{,}01$
Przedział: [-1.5, 1.5]



Rysunek 6. Wykres funkcji $f_2(x)$



Rysunek 7. Kolejne przybliżenia wybranych punktów oraz szukanego minimum



Rysunek 8. Zmiany ilorazu 1. i 2. Rzędu funkcji

5. Podsumowanie

Minimalizacja wartości funkcji metodą interpolacji kwadratowej Powella pozwala na znalezienie minimum danej funkcji, otrzymane wyniki generalnie są zgodne z wartościami rzeczywistymi, jednak dla przypadku 4.1.2. otrzymany wynik był błędny. Otrzymaliśmy maksimum funkcji, błąd był spowodowany tym, że wartości ilorazu różnicowego 2. Rzędu była ujemna, co nie jest zgodne z naszym założeniem $F[x_1, x_2, x_3] > 0$. Na podstawie przykładu 4.1. możemy stwierdzić, że poprawność metody zależy od parametrów wejściowych.

Przy funkcji $f_2(x)$ znalezienie minimum zajmuje więcej iteracji, ponieważ są mniejsze zmiany ilorazów różnicowych pomiędzy kolejnymi iteracjami.