

SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 3

Rozwiązywanie UARL metodami iteracyjnymi

Jan Wojdylak, 21.03.2021

1. Cel ćwiczenia

Rozwiązanie algebraicznych układów równań liniowych metodami największego spadku oraz sprzężonego gradientu (CG).

2. Opis problemu

Przy pomocy wyżej wymienionych metod rozwiązujemy układ równań liniowych $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Aby rozwiązać układ metodą iteracyjną macierz A musi być macierzą wstęgową, czyli macierzą kwadratową, w której wszystkie elementy poza diagonalą i wstęgą wokół niej są zerowe. Przykład macierzy wstęgowej $A_{6 \times 6}$ o szerokości pasma 3.

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & B_{32} & B_{33} & B_{34} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & B_{43} & B_{44} & B_{45} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix}$$

Natomiast nasz wektor wyrazów wolnych \mathbf{b} w metodzie największego spadku ma postać:

$$B[i] = i, i = 0, \dots, n-1,$$

A dla metody CG

$$B[i] = i + 1, i = 0, \dots, n-1,$$

Dla metody największego spadku sprawdzamy czy ilość iteracji zależy od postaci wektora początkowego. W tym celu rozważamy dwa przypadki, kiedy wektor \mathbf{x} miał dwie wersje:

$$x[i] = 0 \text{ lub } x[i] = 1 \text{ dla } i = 0, \dots, n-1$$

Następnie sprawdzamy, czy rozwiązując ten układ metodą CG zmieni się ilość iteracji potrzebnych do rozwiązania układu w stosunku do metody największego spadku.

3. Opis metody

Do zaimplementowania metod iteracyjnych, konieczne było utworzenie macierzy wstęgowej i wypełnienie jej elementów zgodnie z poniższą formułą

$$\begin{aligned} A[i][j] &= \frac{1}{1 + |i - j|}, \quad \text{gdy } |i - j| \leq m, \quad i, j = 0, \dots, n - 1 \\ A[i][j] &= 0, \quad \text{gdy } |i - j| > m \end{aligned}$$

m przyjęliśmy jako 5

3.1.

Metoda największego spadku polega na iteracyjnym rozwiązaniu układu, każda iteracja polega na wykonaniu kroku w lokalnie najlepszym kierunku, czyli w kierunku wyznaczonym przez ujemny gradient. Pierwszym krokiem jest wybranie punktu startowego, drugim dokonanie minimalizacji kierunkowej funkcji $f(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k))$ względem alfa, następnie wykonanie kroku iteracyjnego $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$, obliczenia powtarza się od punktu 2 do momentu, w którym norma wektora jest mniejsza od zadanej wielkości.

Cały algorytm można zapisać w postaci pseudokodu

```
inicjalizacja :      b, x
do{
    rk = b - Axk
    αk =  $\frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{r}_k^T A \mathbf{r}_k}$ 
    xk+1 = xk + αk rk
}while(||rk||2 > 10-6)
```

gdzie: k to numer iteracji, x_k to aktualne przybliżenie wektora rozwiązań a r_k jest wektorem reszt.

3.2.

Metoda sprzężonego gradientu zbiega do rozwiązania w co najwyżej n krokach, gdzie n jest rozmiarem macierzy. W algorytmie najpierw wybierany jest punkt początkowy, można założyć, że $x_0 = 0$. Rozwiązanie x minimalizuje formę kwadratową: $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b$. Jako pierwszy wektor bazowy p_1 wybieramy gradient f w $x = x_0$, który wynosi $Ax_0 - b$, a ponieważ $x_0 = 0$, otrzymujemy $-b$. Pozostałe wektory w bazie będą sprzężone do gradientu. Jeśli przez r_k oznaczmy rezyduum w k -tym kroku: $r_k = b - Ax_k$. r_k jest przeciwny do gradientu f w $x = x_k$, więc metoda gradientu prostego nakazywałaby ruch w kierunku r_k , jednak zakładając wzajemną sprzężność kierunków p_k , wybieramy kierunek najbliższy do r_k pod warunkiem sprzężności. Co wyraża się wzorem

$$p_{k+1} = r_k - \frac{p_k^T A r_k}{p_k^T A p_k} p_k$$

W postaci pseudokodu algorytm zapisujemy następująco

```

//inicjalizacja
     $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_1 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_1$ 
    - - - - -
//petla iteracyjna CG
while( $\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k > 10^{-6}$ ){
     $\alpha_k = \frac{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}{\mathbf{v}_k^T A \mathbf{v}_k}$ 
     $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{v}_k$ 
     $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k - \alpha_k A \mathbf{v}_k$ 
     $\beta_k = \frac{\mathbf{r}_{k+1}^T \mathbf{r}_{k+1}}{\mathbf{r}_k^T \mathbf{r}_k}$ 
     $\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{r}_{k+1} + \beta_k \mathbf{v}_k$ 
}

```

4. Wyniki

Działanie algorytmu sprawdzaliśmy na macierzy o rozmiarze $N = 1000$

4.1.

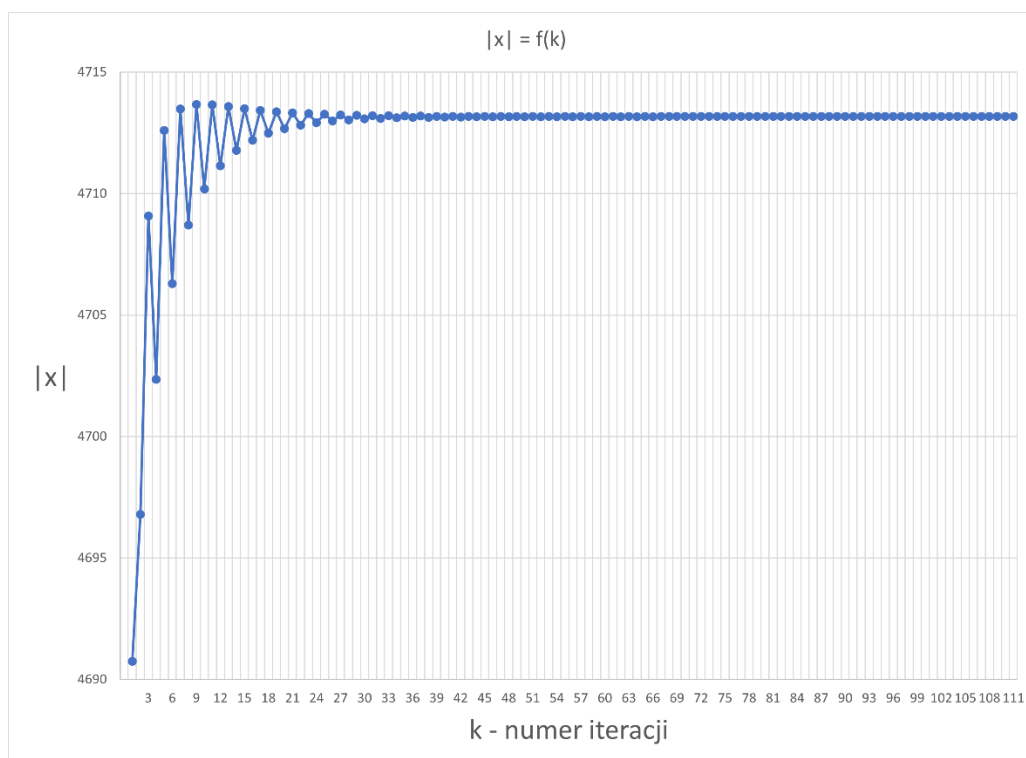
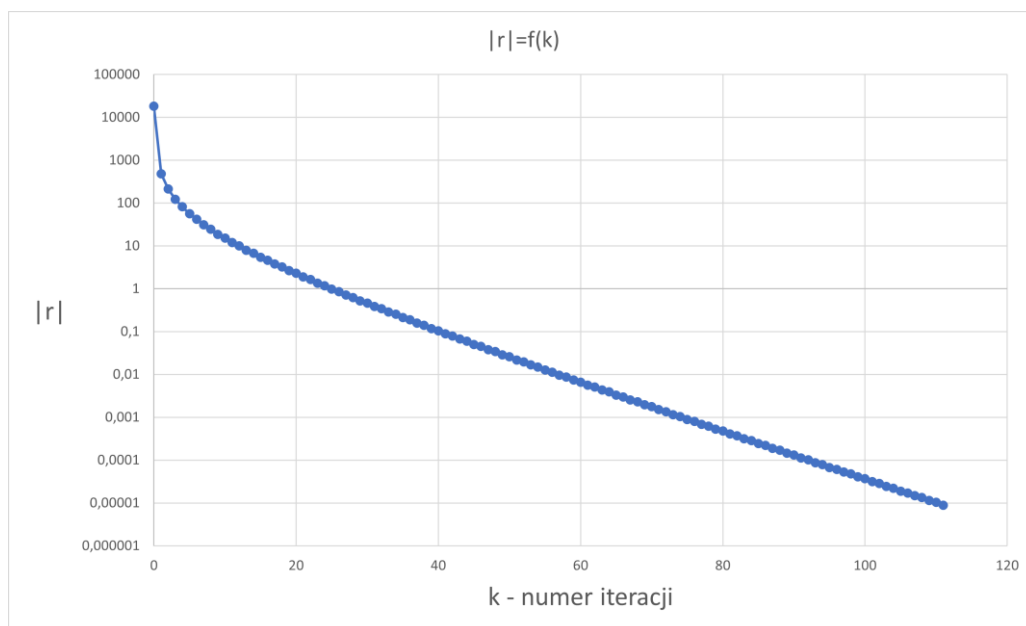
Uzyskane wyniki przedstawiłem w tabelach.

$x_0 = 0$		
k	r	x
0	18243,72495	0
1	482,3034005	4690,694
2	211,9716933	4696,812
3	121,6065196	4709,052
4	82,21506026	4702,362
5	56,14968884	4712,578
6	42,09859038	4706,305
...
104	2,21221E-05	4713,172
105	1,89708E-05	4713,172
106	1,71637E-05	4713,172
107	1,47209E-05	4713,172
108	1,33205E-05	4713,172
109	1,14263E-05	4713,172
110	1,03408E-05	4713,172
111	8,8714E-06	4713,172

$x_0 = I$		
k	r	x
0	18137,24496	31,62278
1	481,3350924	4690,744
2	211,6846404	4696,799
3	121,4351046	4709,083
4	82,13470821	4702,347
5	56,08863584	4712,596
6	42,06777942	4706,295
...
104	0,000022115	4713,172
105	1,89599E-05	4713,172
106	1,71582E-05	4713,172
107	1,47123E-05	4713,172
108	1,33162E-05	4713,172
109	1,14196E-05	4713,172
110	1,03373E-05	4713,172
111	8,8662E-06	4713,172

Na podstawie danych wejściowych oraz wyników można zauważyć, że liczba wykonanych iteracji jest taka sama w obu przypadkach i nie zależy od startowego wektora \mathbf{x} .

Następnie w celu lepszego zobrazowania danych przygotowałem wykres zależności wartości normy euklidesowej wektora reszt $\|r_k\|_2 = \sqrt[2]{r_k r_k}$ oraz wartości normy wektora rozwiązań $\|x_k\|_2 = \sqrt[2]{x_k x_k}$.

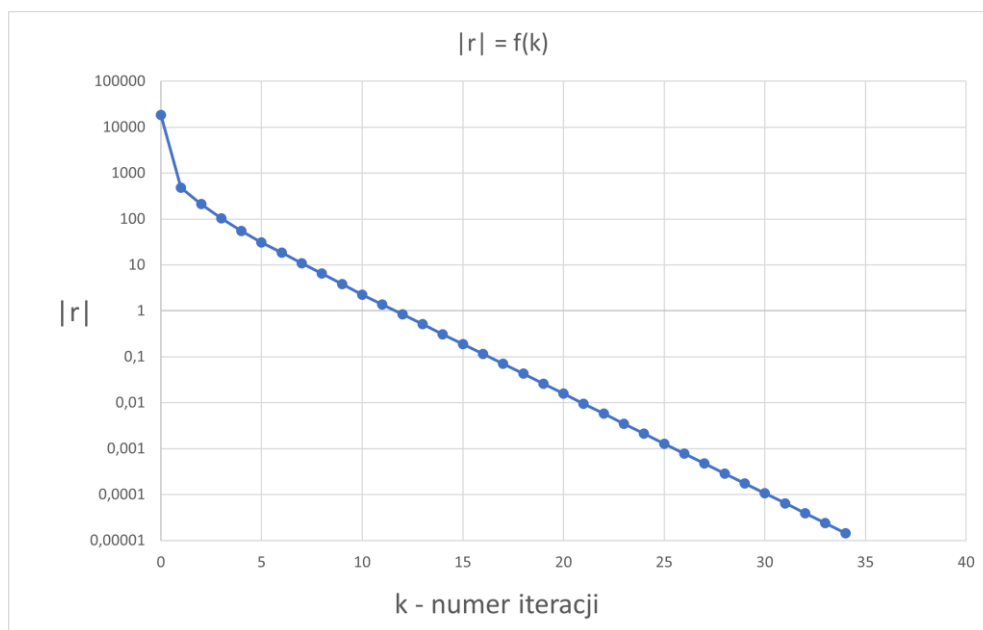


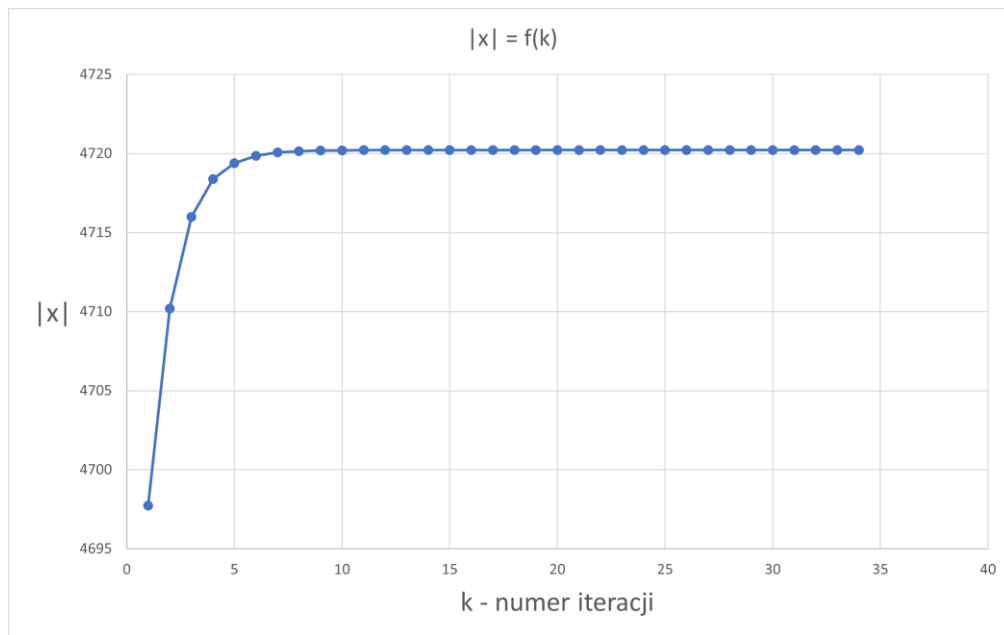
4.2.

Rozwiązując układ metodą sprzężonego gradientu otrzymaliśmy następujące wyniki.

k	r	x
0	18271,1111	0
1	482,785484	4697,72221
2	211,029742	4710,19934
3	103,522537	4715,98681
4	54,4185327	4718,38808
5	30,8650652	4719,39898
6	18,3183913	4719,85421
...
27	0,00047197	4720,21184
28	0,00028773	4720,21184
29	0,00017493	4720,21184
30	0,00010626	4720,21184
31	6,4624E-05	4720,21184
32	3,9278E-05	4720,21184
33	2,3803E-05	4720,21184
34	1,4398E-05	4720,21184

Ilość wykonanych iteracji jest trzy razy mniejsza niż w przypadku metody największego spadku, natomiast wykresy zależności norm wektora reszt oraz wektora rozwiązań prezentują się następująco.





Zarówno dla wykresu w metodzie spadku, jak i dla wykresu metody sprzężonego gradientu normy wektora od numeru iteracji, wyniki przedstawiłem od drugiej iteracji, aby wyniki były bardziej czytelne.

5. Podsumowanie

Sprawozdanie dotyczyło rozwiązywania układów liniowych metodami iteracyjnymi. Pierwsze zadanie rozwiązaliśmy metodą największego spadku oraz sprawdziliśmy, że wektor startowy rozwiązań, nie wpływa na ilość iteracji potrzebnych do rozwiązania układu. Drugą poznaną metodą była metoda sprzężonego gradientu, rozwiązując to samo równanie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, udało się dojść do rozwiązania w trzy razy mniejszej ilości iteracji. Metoda iteracyjna jest szybką metodą rozwiązywania układów, rozwiązujemy je przy pomocy jednej pętli, natomiast trzeba pamiętać, że możemy rozwiązywać tylko macierze symetryczne i dodatnio określone.