SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 8
Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Jan Wojdylak, 9.05.2021

1. Cel ćwiczenia

Napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami 3 stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

2. Opis problemu

Konkretnie interpolacje Newtona przeprowadzamy na funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ oraz $f(x) = cos(2x)$.

3. Opis metody

Aby rozwiązać problem musimy rozwiązać układ równań liniowych

$$Am = d$$

Którego generatorem jest:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i$$

gdzie m_i to poszukiwane wartości drugich pochodnych w węzłach (indeksowanych *i = 1, 2, ...,n).*

Pozostałe wartości wyznaczamy odpowiednio ze wzorów:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

Elementy wektora wyrazów wolnych

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right)$$

Oraz położenia węzłów: $x_1, x_2, \dots, x_n$ i odległości międzywęzłowe

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Oraz przyjmujemy warunki na drugie pochodne na brzegach, czyli:

$$m_1 = \alpha, \qquad m_n = \beta$$

Po wprowadzeniu warunków brzegowych do układu równań, przyjmuje on postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{bmatrix}$$

Po jego rozwiązaniu wartość funkcji interpolującej dla $x \in [x_{i-1}, x_i]$ wyznaczamy według poniższego przepisu:

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i + (x - x_{i-1}) + B_i$$

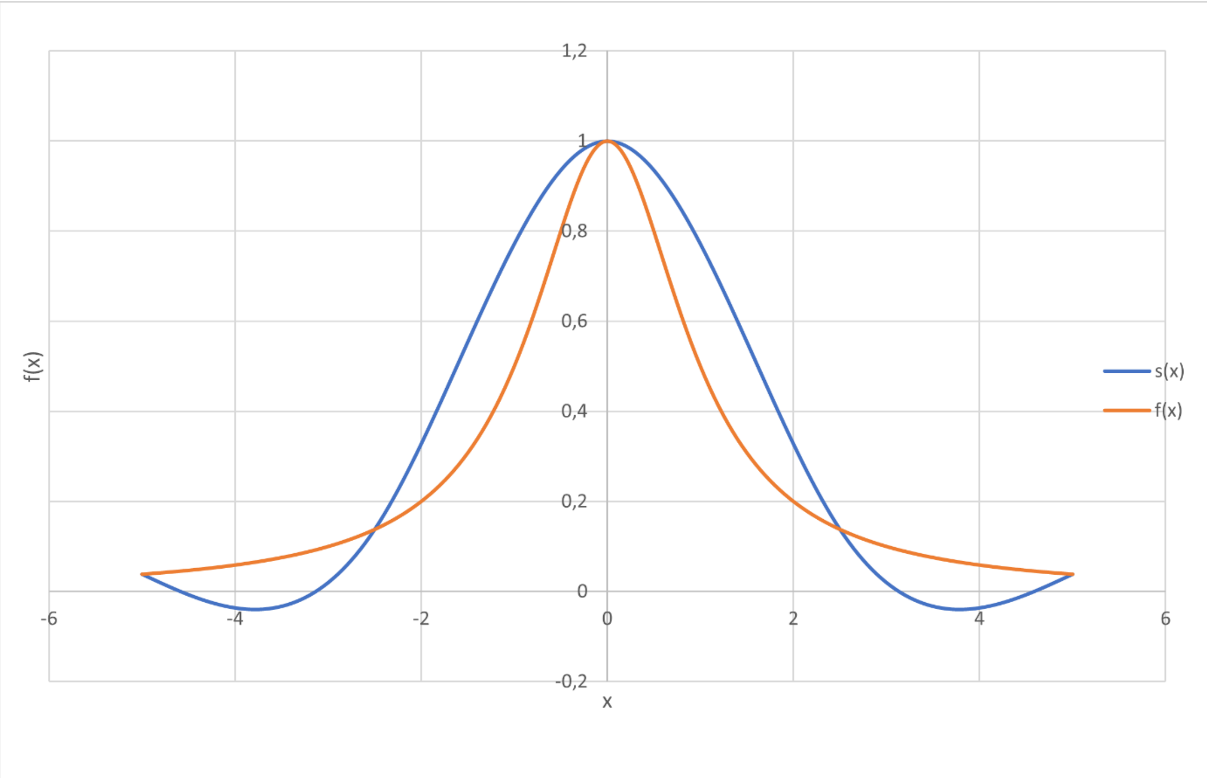
Gdzie stałe całkowania mają postać:

$$A_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1})$$

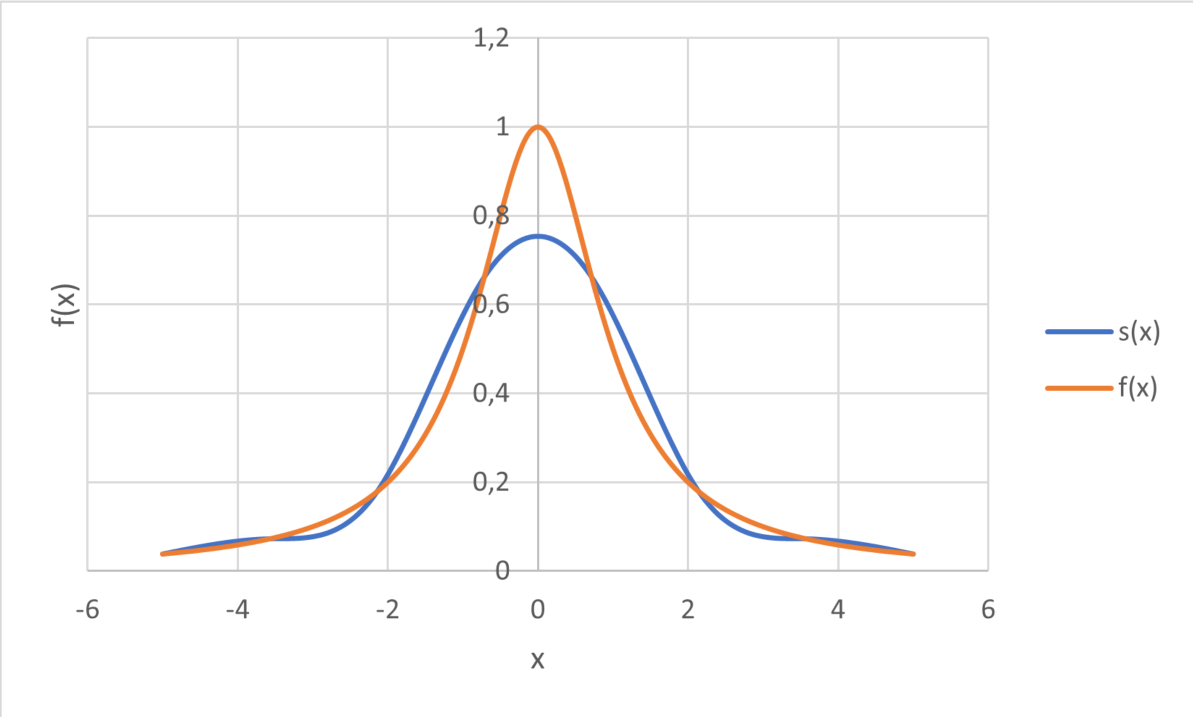
$$B_i = y_{i-1} - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

4. Wyniki

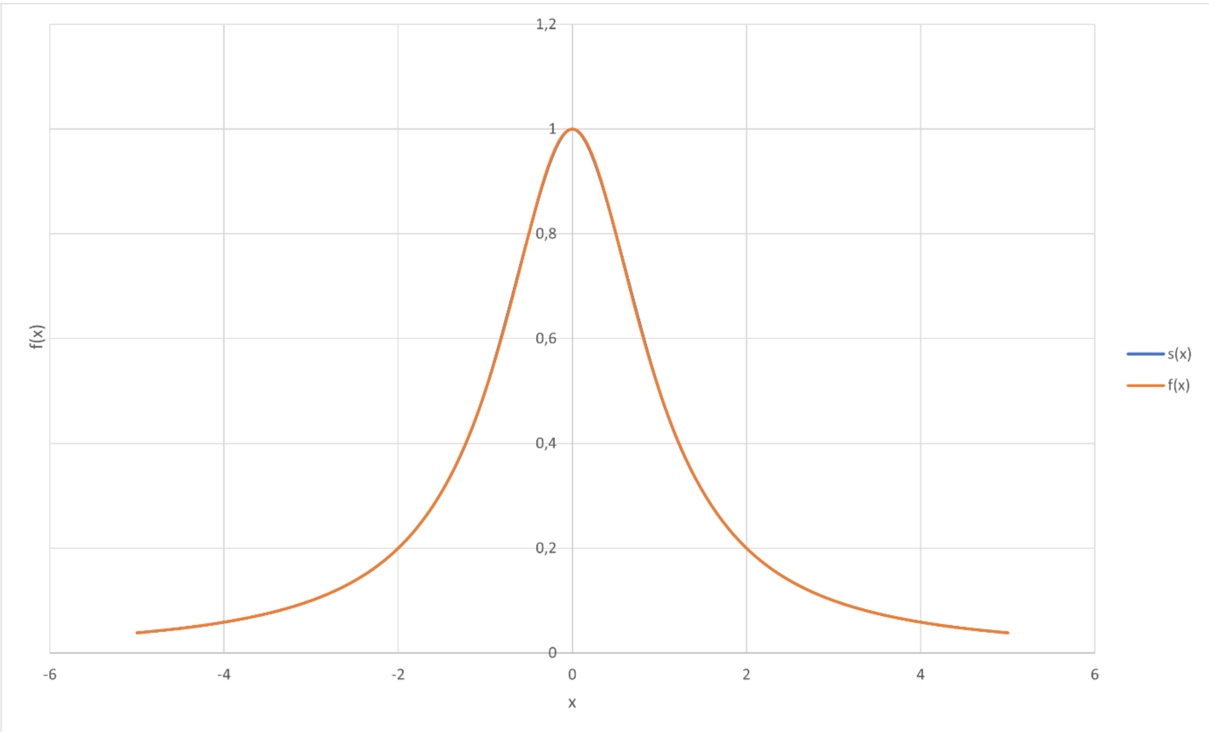
4.1. Interpolacja funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 1. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 5

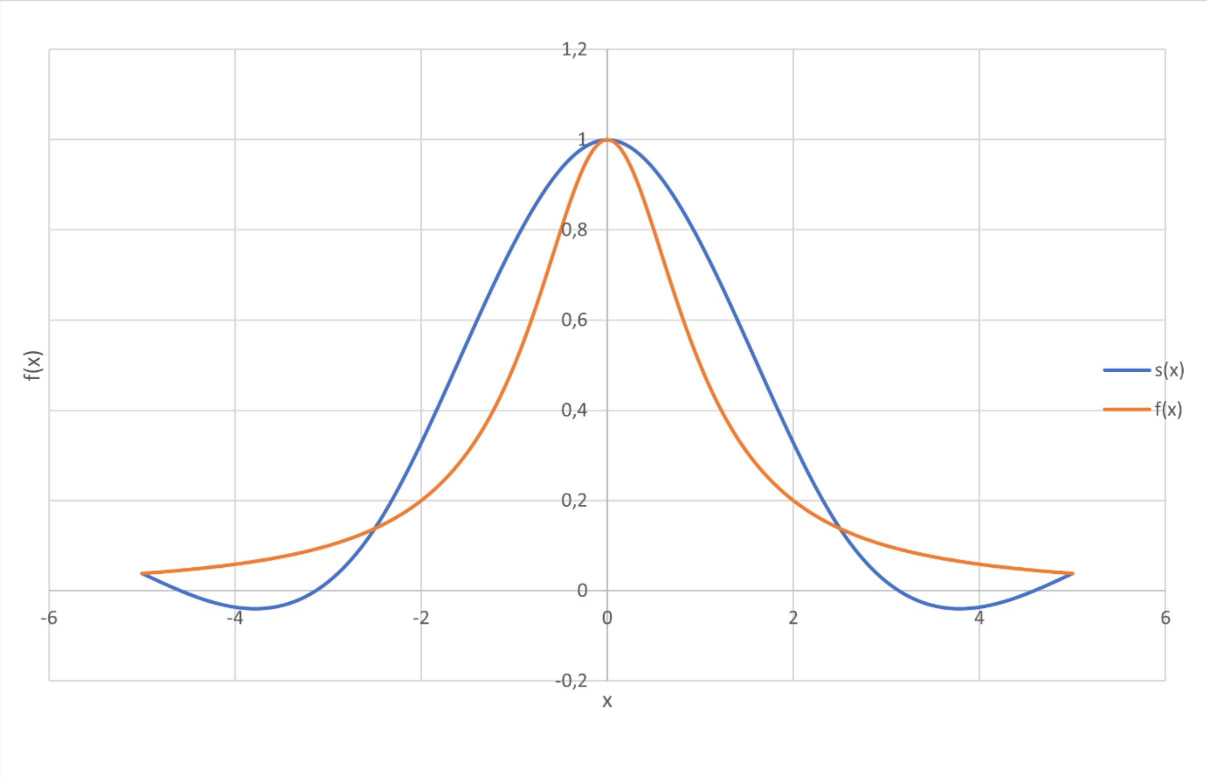


Rysunek 2. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 8

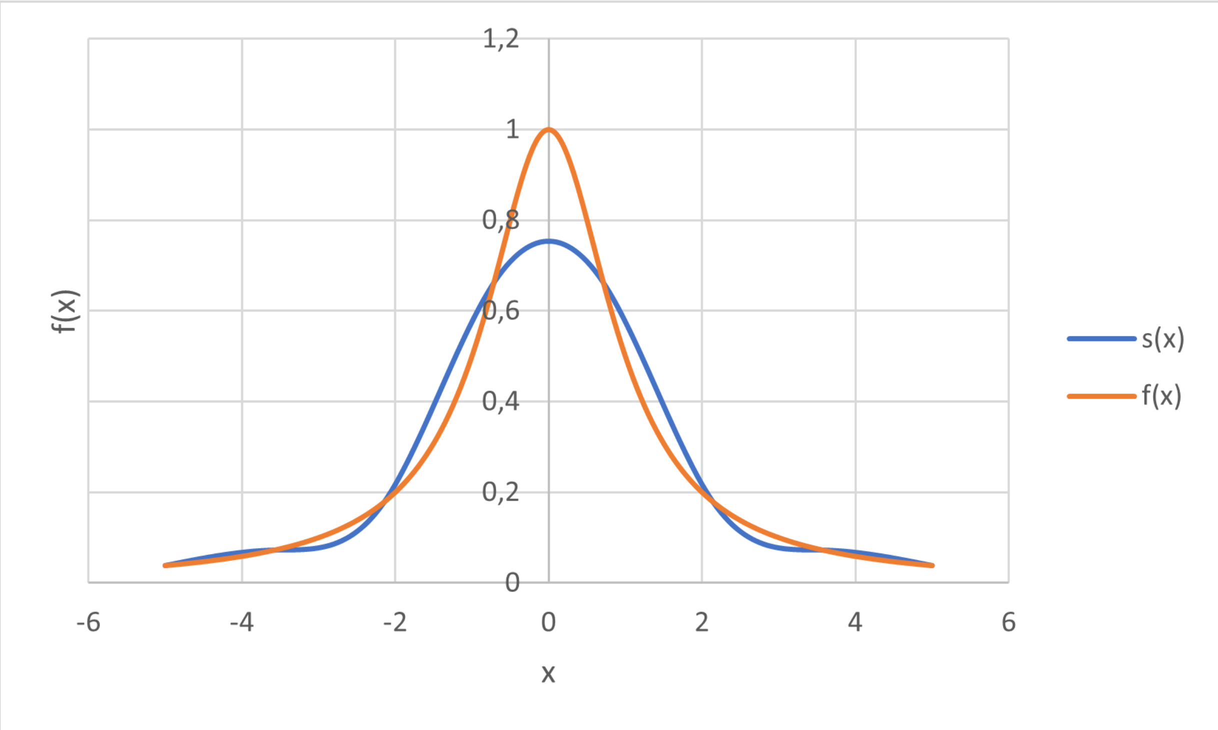


Rysunek 3. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 21

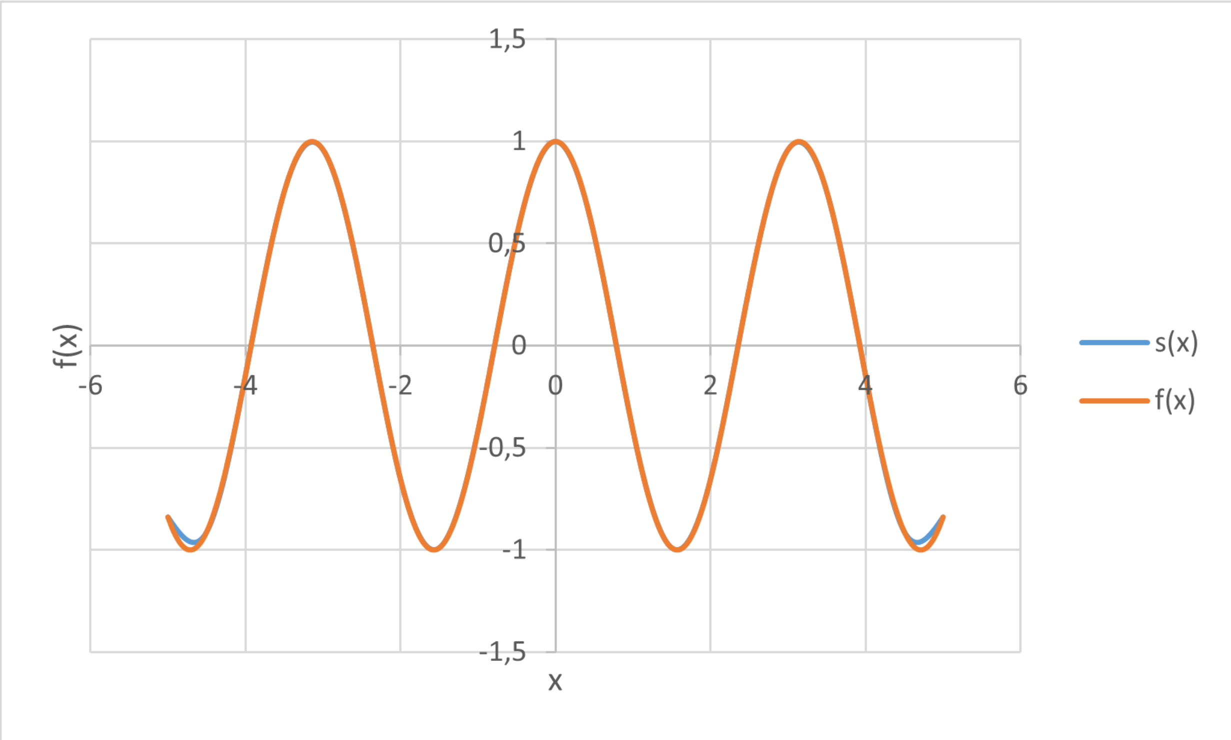
4.2. Interpolacja funkcji $f(x) = cos(2x)$



Rysunek 4. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 5



Rysunek 5. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 8



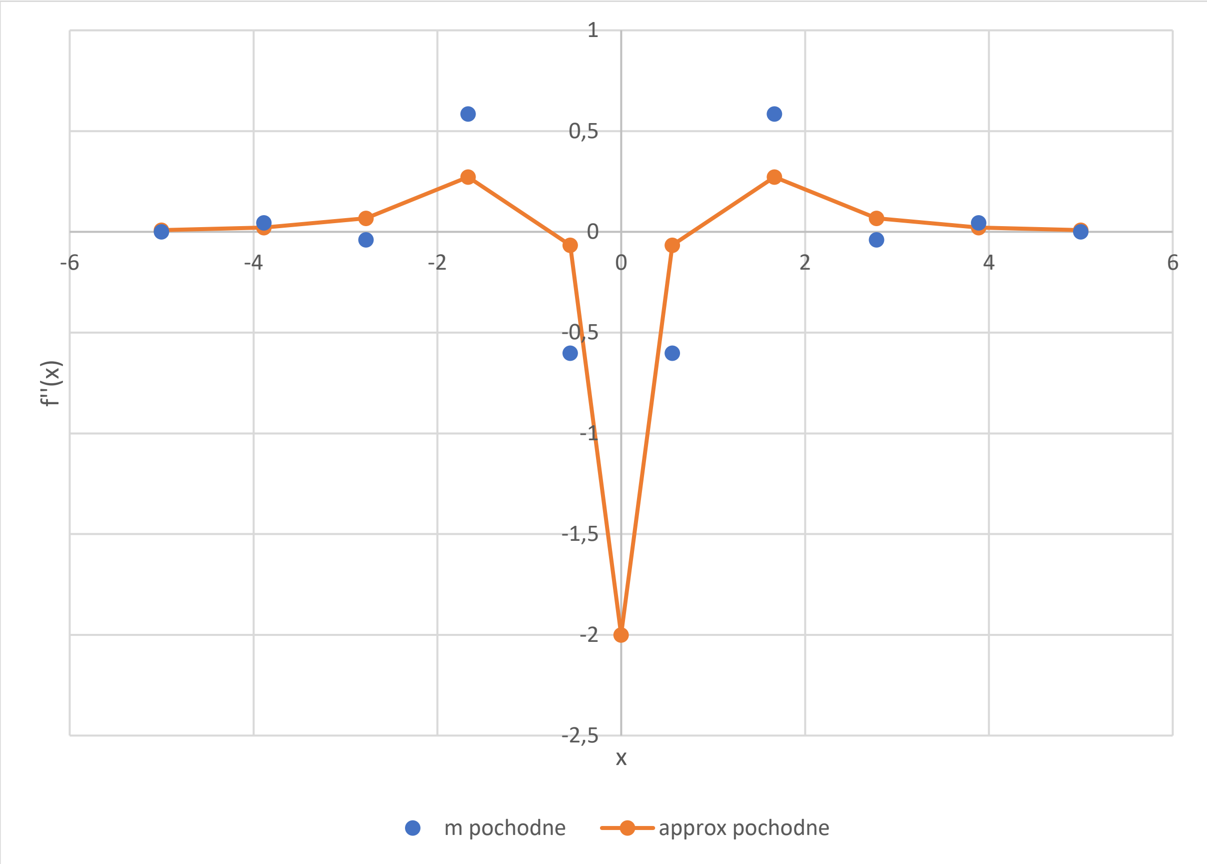
Rysunek 6. Interpolacja funkcji f(x) dla N = 21

4.3. Drugie pochodne

Kolejnym zadaniem było wyznaczenie wartości drugich pochodnych funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ dla N = 10 węzłów oraz porównać je z wartościami wyliczonymi zgodnie z wzorem:

$$\frac{d^2x}{dx^2} \approx \frac{f(\mathrm{x} - \Delta x) - 2f(x) + f(\mathrm{x} + \Delta x)}{(\Delta x)^2}$$

Gdzie $\Delta x = 1$



Rysunek 7. Wykres wartości drugich pochodnych w zależności od położenia węzłów

5. Podsumowanie

Interpolacja funkcjami sklejanymi pozwala odwzorować przebieg funkcji. Im większa ilości węzłów, tym odwzorowanie funkcji jest dokładniejsze, w naszym przypadku dla N =21 odwzorowany przebieg pokrywał się prawie identycznie z analitycznym przebiegiem funkcji. W odróżnieniu od interpolacji metodą Newtona, nie mamy problemu z nierównością pochodnych na krawędziach przedziału. Wraz z oddaleniem od krawędzi, wartości m stają się bardziej rozbieżne od teoretycznego przebiegu pochodnej.