SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 7

Interpolacja Newtona

Jan Wojdylak, 20.04.2021

1. Cel ćwiczenia

Celem zadania było przeprowadzenie i zapoznanie się z interpolacją wielomianową Newtona.

2. Opis problemu

Konkretnie interpolacje Newtona przeprowadziliśmy na funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

3. Opis metody

Funkcje f(x) definiujemy na przedziale [-5,5], w takim przedziale wybieramy N punktów i obliczamy wartość funkcji f(x) w tych punktach, a następnie prowadzimy krzywą wielomianową przez te punkty, tak, aby jak najlepiej odzwierciedlić naszą funkcję.
Wzór Newtona na przybliżenie dowolnej funkcji wielomianem zapisujemy w postaci

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0) \cdot \prod_{i=0}^{j-1} (x - x_i)$$

gdzie: $f^{(j)}(x_0)$ - iloraz rzędu j liczony dla węzła x_0
x_i - położenia węzłów

W celu wyznaczenia kolejnych ilorazów różnicowych tworzymy tabele:

$$\left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} y_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & f^{(1)}_{x_0,\ldots} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_2 & f^{(1)}_{x_1} & f^{(2)}_{x_0} & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & f^{(1)}_{x_2} & f^{(2)}_{x_1} & f^{(3)}_{x_0} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\ y_n & f^{(1)}_{x_{n-1}} & f^{(2)}_{x_{n-2}} & f^{(3)}_{x_{n-3}} & \ldots & f^{(n)}_{x_0} \end{array}\right| \Longrightarrow \left|\begin{array}{c|c|c|c|c|c} f_{0,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{1,0} & f_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_{2,0} & f_{2,1} & f_{2,2} & 0 & 0 & 0 \\ f_{3,0} & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & 0 \\ f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \ldots & f_{n,n} \end{array}\right|$$

Gdzie: y_i to kolejne wartości funkcji w N punktach, a elementy $f_{j,j}$ to ilorazy różnicowe do rzędu j

Do wyznaczenia kolejnych wartości w prawej tabelce używamy pseudokodu:

$$
\begin{aligned}
&for(j = 1; j <= n; j++)\{\\
&\quad for(i = j; i <= n; i++)\{\\
&\quad\quad f_{i,j} = \frac{f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}};\\
&\quad\}\\
&\}
\end{aligned}
$$

Mając obliczone wartości $f_{j,j}$ możemy już obliczyć przybliżone wartości funkcji korzystając ze wzoru Newtona.

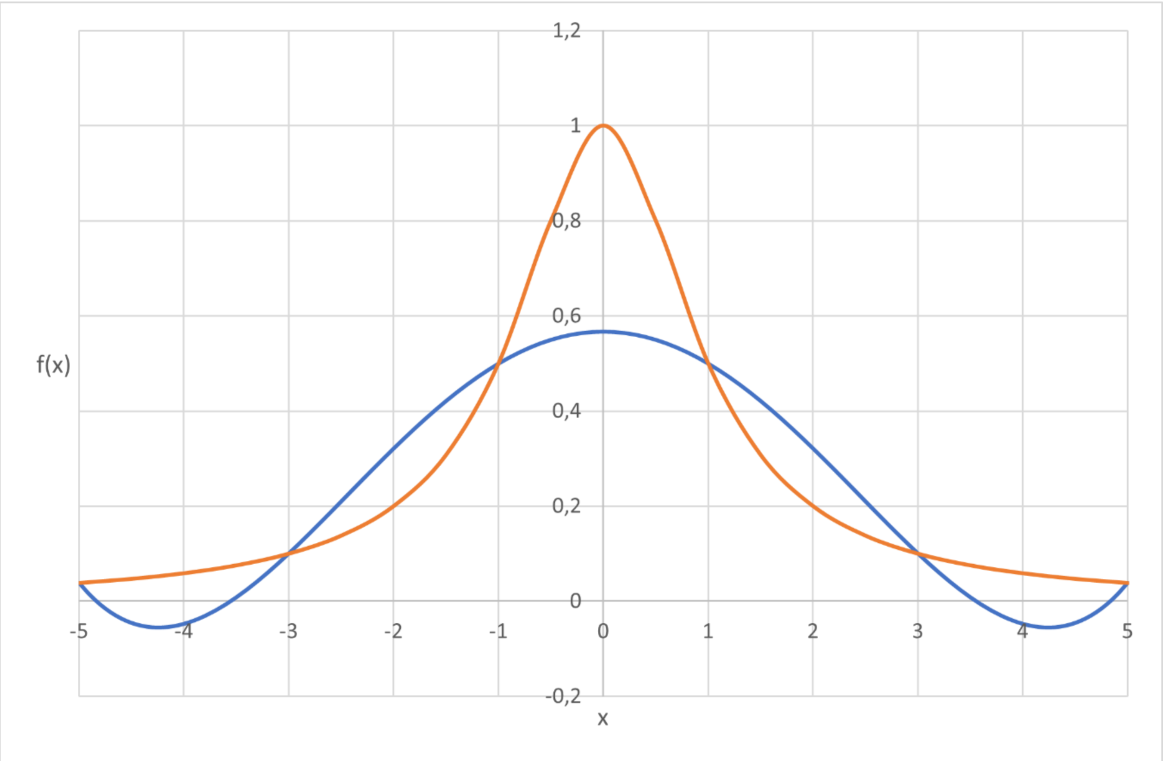
Te same obliczenia wykonaliśmy dla zmienionej instrukcji określającej położenie węzłów:

$$
x_i = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)\, cos\left(\pi \frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_1 + x_1)\right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n
$$

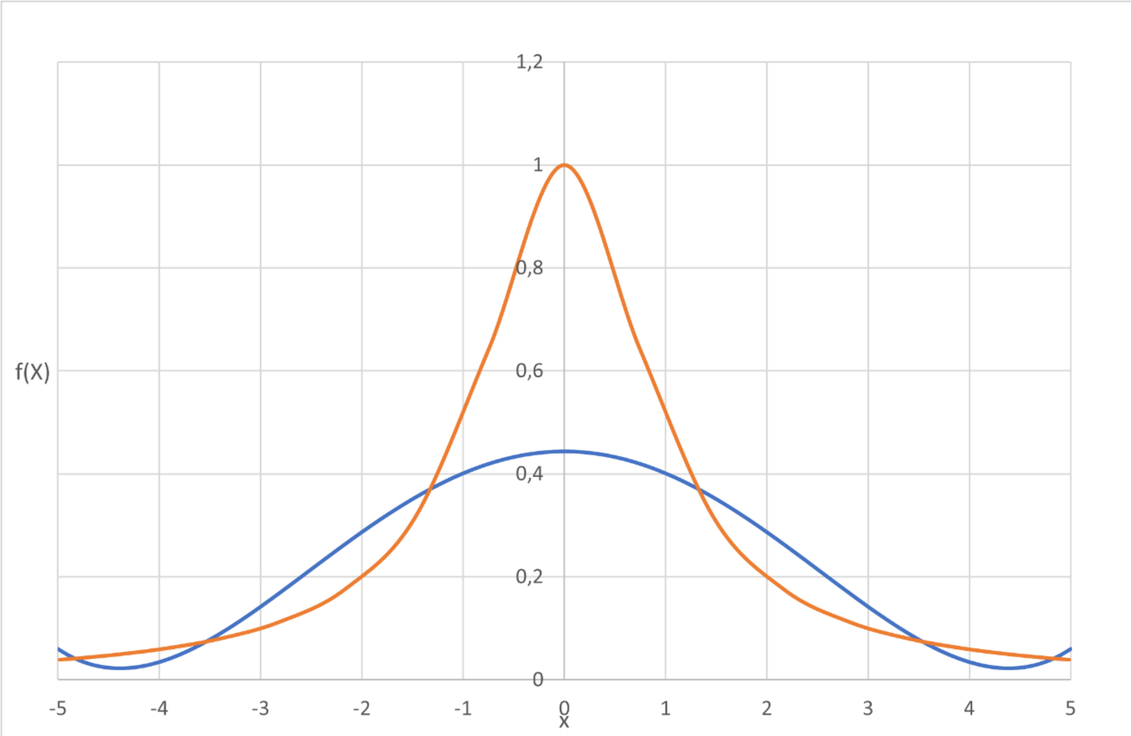
Punkty x to kolejne zera wielomianu Czebyszewa.

4. Wyniki

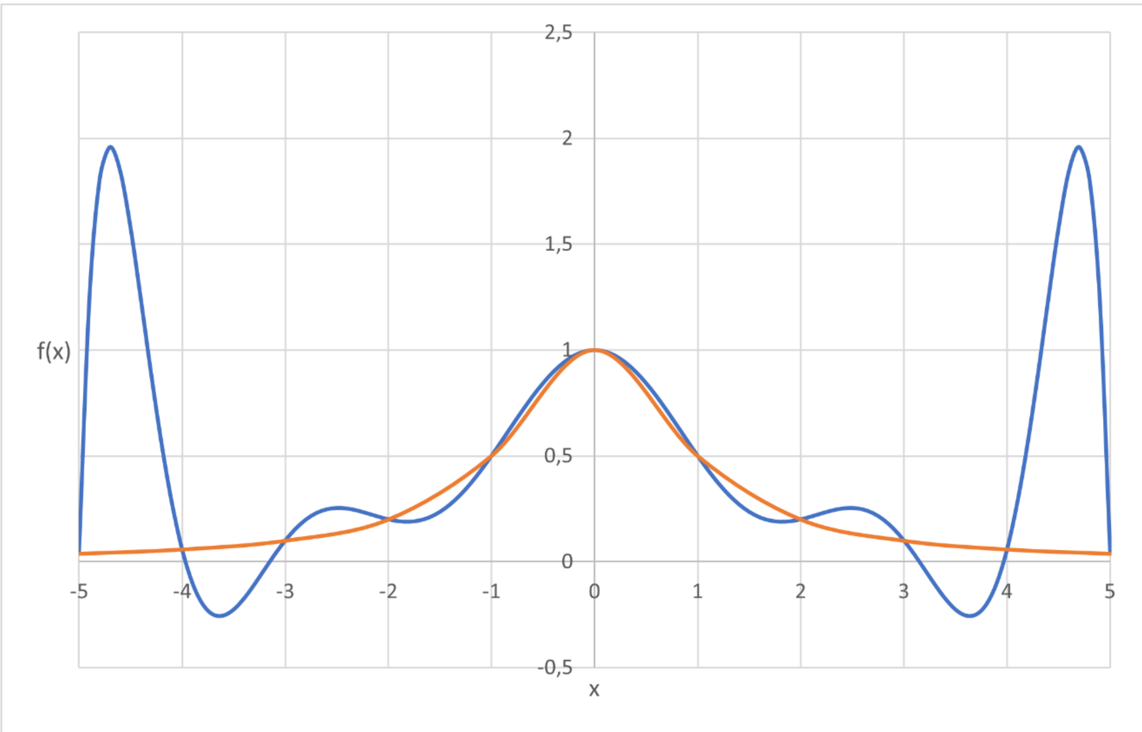
Interpolacje naszej funkcji przeprowadziliśmy kolejno dla N = 5, 10, 15, 20. Na wykresach poniżej na każdym wykresie umieściłem przebieg funkcji f(x) – pomarańczowa linia oraz Wn(x) – niebieska linia.



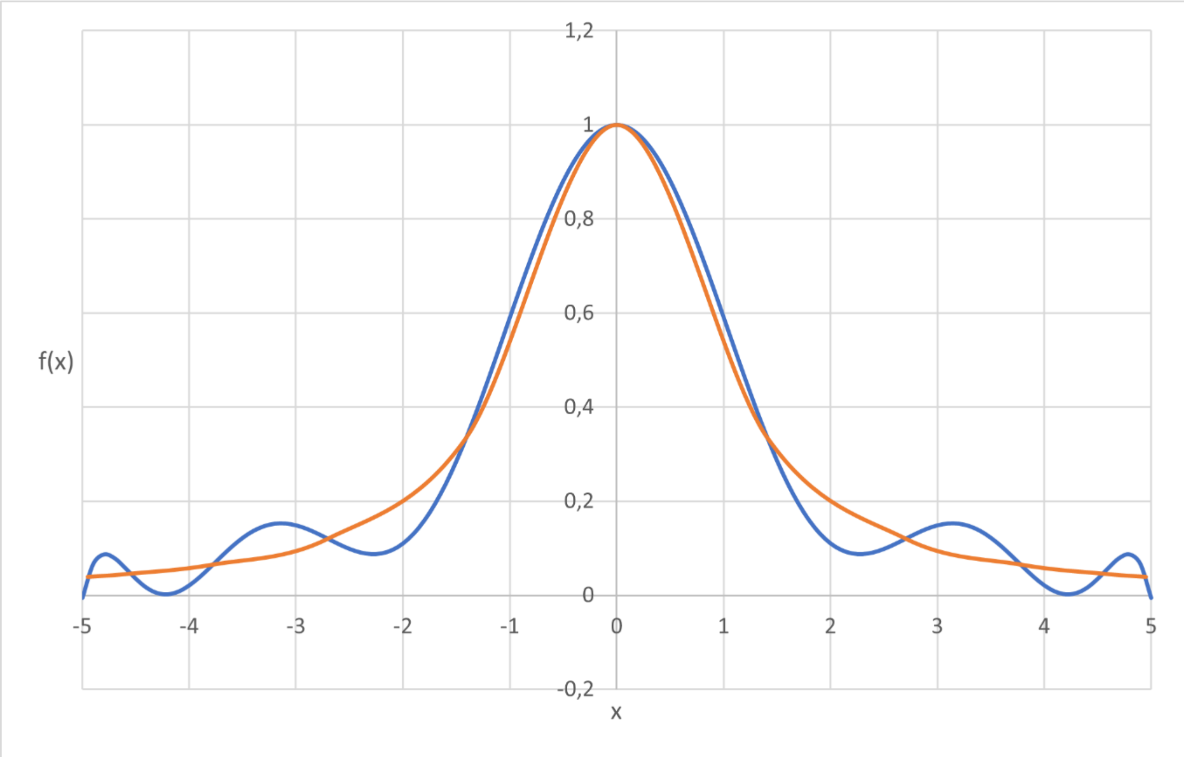
Rysunek 1. N = 5



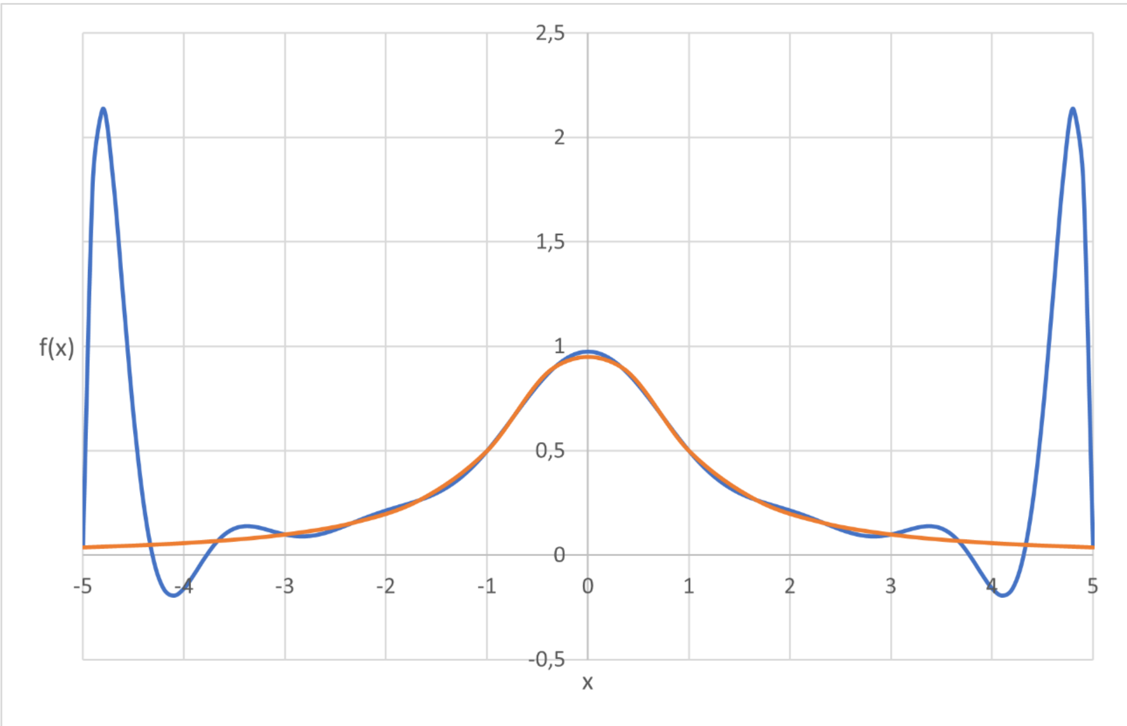
Rysunek 2. N = 5 Czebyszew



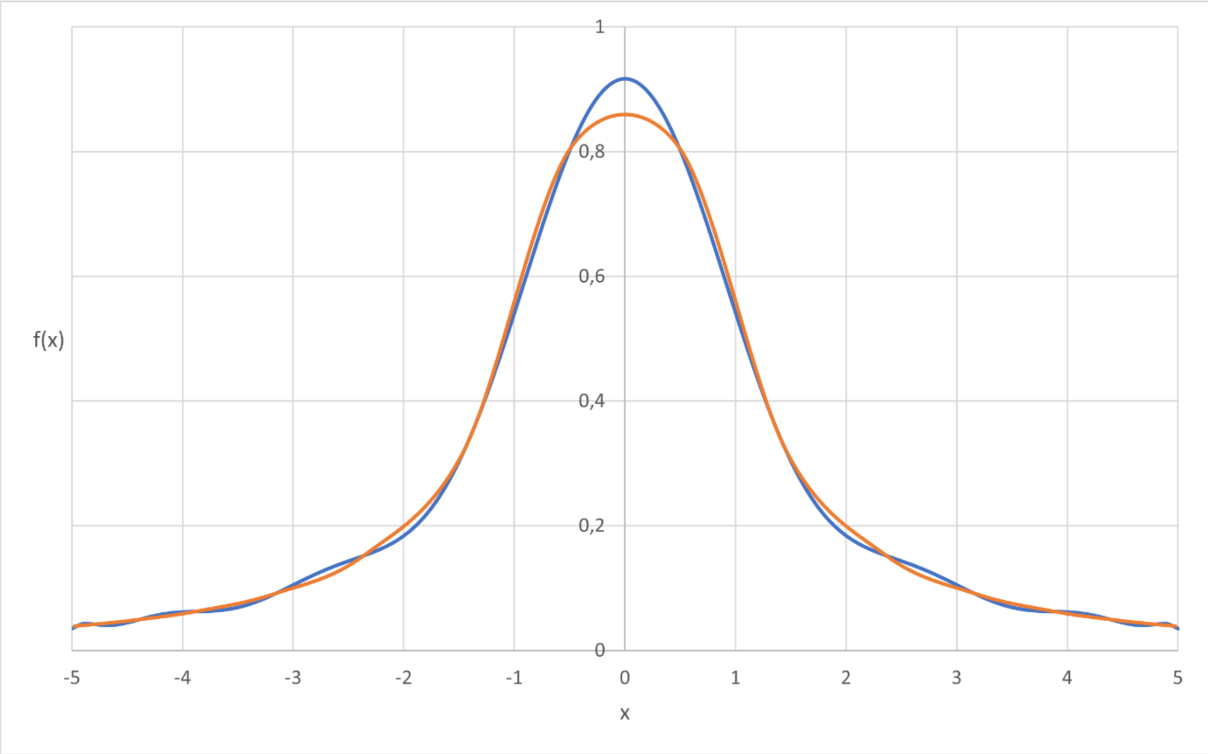
Rysunek 3. N = 10



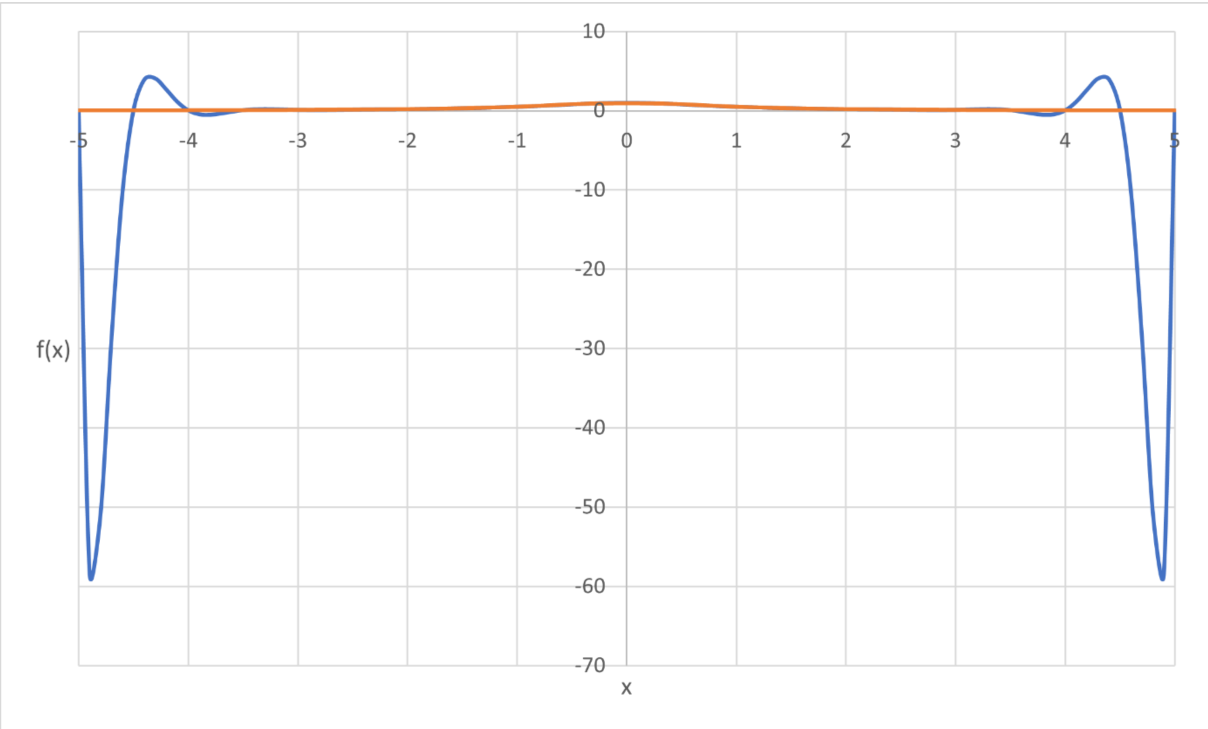
Rysunek 4. N = 10 Czebyszew



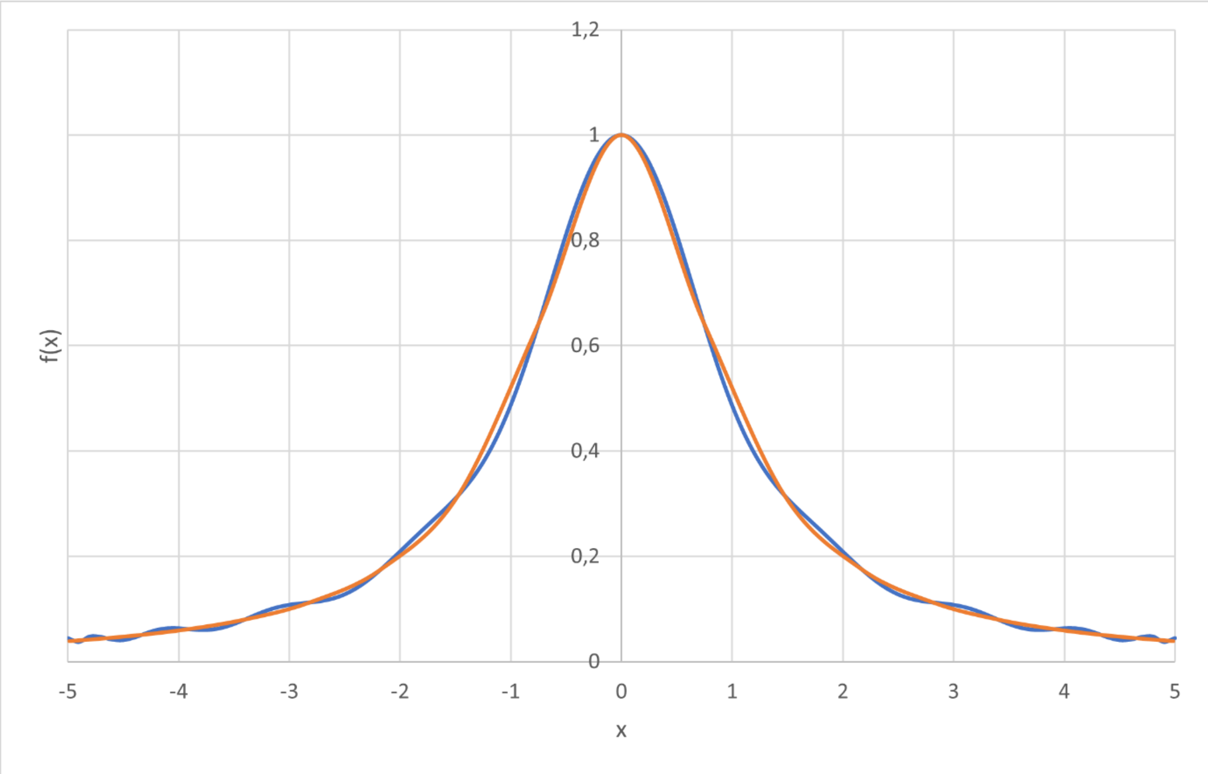
Rysunek 5. N = 15



Rysunek 6. N = 15 Czebyszew



Rysunek 7. N = 20



Rysunek 8. N = 20 Czebyszew

5. Podsumowanie

Interpolacja Newtona pozwala na wyznaczenie przebiegu funkcji na podstawie kilku punktów. Im więcej tych punktów to przebieg jest dokładniej odwzorowany, najlepsze odwzorowanie dostaliśmy dla N = 20. Na to jak funkcja jest odwzorowana wpływa również metoda wyboru węzłów, metoda zer wielomianu Czebyszewa okazała się bardziej dokładna, największa różnica była widoczna dla punktów bliskich granicy przedziału, kiedy wybraliśmy ze węzły punkty równoodległe różnica w przebiegu była bardzo duża.