SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 1
Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Jan Wojdylak, 08.03.2021

1. Cel ćwiczenia

Rozwiązanie równań macierzowych metodami bezpośrednimi, konkretnie metodą Gaussa oraz metodą Gaussa-Jordana.

2. Opis problemu

2.1.
W pierwszym zadaniu posłużyliśmy się równaniem macierzowym do rozwiązania równania różniczkowego dla prostego oscylatora harmonicznego. Z równania różniczkowego otrzymujemy iteracyjny przepis na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}. x_0 i x_1 są podane jako założenia początkowe, więc takie równanie można zapisać w postaci macierzowej dla N kroków czasowych.

2.2.
W drugim zadaniu musimy rozwiązać podany układ równań **A**x = **b** dla zmiennej wartości w macierzy **A** zależnej od q. W przypadku gdy q = 1 układ jest sprzeczny i nie ma rozwiązania. Celem zadania jest sprawdzenie co się dzieje, gdy zbliżamy się do osobliwości i jak wartość w macierzy A wpływa na dokładność rozwiązania.

3. Opis metody

3.1
Z drugiej zasady dynamiki Newtona zapisujemy równanie dla prostego oscylatora harmonicznego zapisujemy równanie:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t)$$

z czego przybliżając i zamieniając różniczkę na różnicę możemy otrzymać wzór

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t)}{(\Delta t)^2}\frac{-2x(t)+x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

i wyprowadzając oznaczenia $\Delta t = h$, x_i = x(ih) otrzymujemy iteracyjny przepis na wyznaczenie x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1}

$$x_{i+t} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0$$

Mając warunki początkowe x_0 = A, czyli początkowe wychylenie z położenia oraz iloraz $(x_1 - x_0)/h$ = v_0 informuje o początkowej wartości prędkości ciała. Równanie zapisujemy w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2h^2-2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Do rozwiązania układu wykorzystano metodę Gaussa – Jordana.

3.1.1. Metoda Gaussa – Jordana

Metoda polega na przekształceniu macierzy do postaci macierzy jednostkowej wykonując n kroków, gdzie macierz A jest rozmiaru n x n.

Dla pierwszej iteracji: pierwszy wiersz dzielimy przez $\omega_1 = a_{11}$ i od i-tego wiersza (i = 2, 3, … , n) odejmujemy pierwszy wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}$

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Dla drugiej iteracji: drugi wiersz dzielimy przez $\omega_2 = a_{22}$ i od i-tego wiersza (i = 2, 3, … , n) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez $\omega_{i1} = a_{i1}$

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + \cdots + a_{1n}^{(3)}x_n &= b_1^{(3)} \\ x_2 + \cdots + a_{2n}^{(3)}x_n &= b_2^{(3)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\ a_{n2}^{(3)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(3)}x_n &= b_n^{(3)}. \end{aligned}$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 \\ x_2 &= b_2 \\ &\dots \\ x_n &= b_n \end{aligned}$$

Wektor współczynników b_i po n operacjach jest równy wektorowi niewiadomych x_i.

3.2. Rozwiązanie układu równań **A**x = **b,** gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2q \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 2 \cdot 10^{-4} & 1 & 6 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 6 & 8 & 6 \\ 5 & 9 & 10 & 7 & 10 \\ 3 & 4 & 9 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{ oraz } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 9 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

gdy q = 1 układ równań jest sprzeczny. Gdy q zbliża się do jedynki równanie ma rozwiązanie analityczne, ale numerycznie jest źle uwarunkowany, ponieważ macierz jest bliska osobliwości.

W celu wyznaczania różnicy pomiędzy wartością analityczną, a wartością otrzymaną numerycznie wyznaczamy zależność odchylenia o(q) od wartości parametru q w zakresie 1/5 do 5. Odchylenie wyliczamy ze wzoru na błąd średnio kwadratowy.

$$o(q) = \sqrt[\frac{1}{5}]{\sum_{i=1}^{5} (c_i - b_i)^2}$$

Gdzie c = A * x, licząc analitycznie wektor c powinien się równać się wektorowi b.

W celu rozwiązania równania tym razem skorzystałem z metody Gaussa.

3.2.1. Metoda Gaussa

Metoda polega na przekształceniu macierzy do macierzy górnotrójkątnej, a następnie wyliczeniu niewiadomych.

Układ pierwotny:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(1)} x_1 + a_{12}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(1)} x_n &= b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} x_1 + a_{22}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(1)} x_n &= b_2^{(1)} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots &= \dots \dots \\ a_{n1}^{(1)} x_1 + a_{n2}^{(1)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(1)} x_n &= b_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Odejmujemy od i-tego wiersza (i = 2,3, … , n) pierwszy wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

tym samym wyzerujemy wszystkie wartości poniżej diagonali w pierwszej kolumnie i dostaniemy macierz postaci

$$\begin{aligned} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(2)}x_n &= b_1^{(2)} \\ a_{22}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(2)}x_n &= b_2^{(2)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\ a_{n2}^{(2)}x_2 + \cdots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)}. \end{aligned}$$

Następnie od i-tego wiersza (i = 3,4, … , n) odejmujemy drugi wiersz przemnożony przez

$$l_{i1} = \frac{a_{i2}}{a_{22}}$$

I wyzerujemy wszystkie wartości poniżej diagonali w drugiej kolumnie. Wykonując n takich kroków, ostatecznie macierz będzie wyglądała w następujący sposób:

$$\begin{aligned} a_{11}^{(n)}x_1 + a_{12}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{1n}^{(n)}x_n &= b_1^{(n)} \\ a_{22}^{(n)}x_2 + \cdots + a_{2n}^{(n)}x_n &= b_2^{(n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= \dots\dots \\ a_{nn}^{(n)}x_n &= b_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Aby wyznaczyć rozwiązania x_i najpierw obliczamy $x_{n,}$ a następnie iterujemy od n-1 do 1 wiersza i obliczamy x_i korzystając ze wzorów:

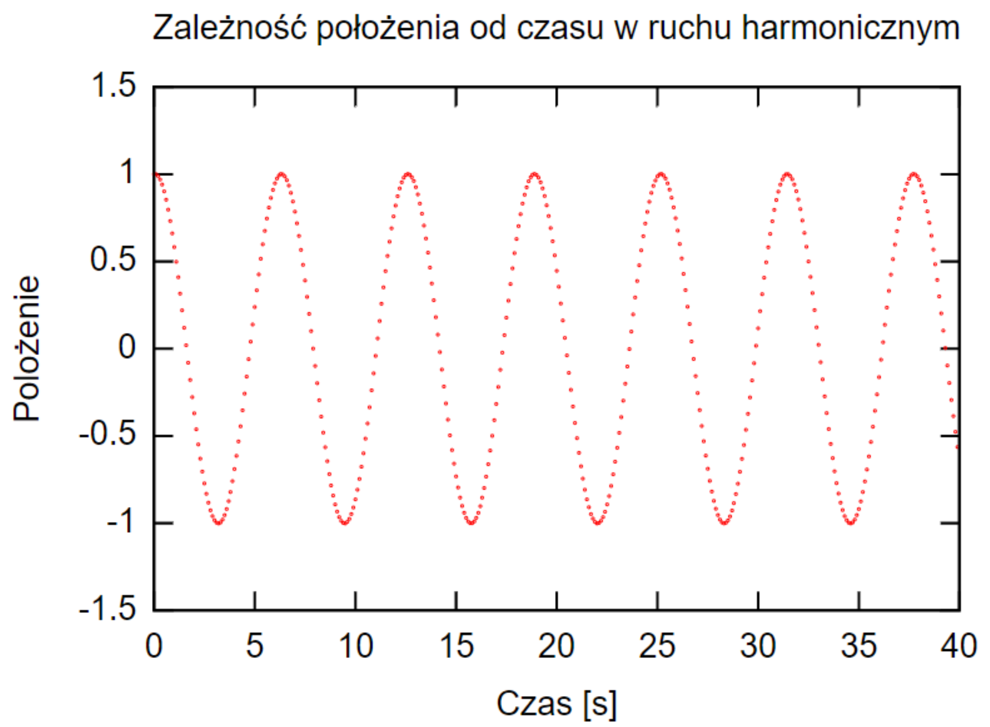
$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

4. Wyniki

4.1.

Jako warunki początkowe przyjęliśmy, że k/m = 1, $v_0 = 0$, A = 1 oraz krok całkowania h = 0.1. Po rozwiązaniu układu dla 400 kroków czasowych otrzymaliśmy zależność położenia od czasu, która przedstawiono na wykresie poniżej.



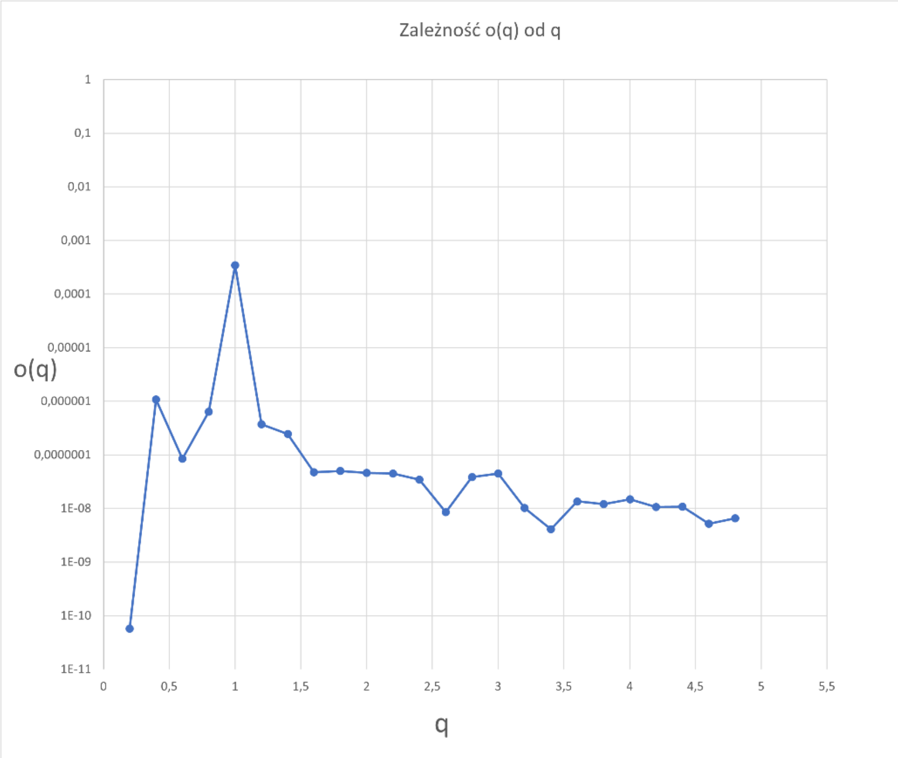
Rozwiązując analitycznie otrzymujemy równanie:

$$x(t) = A\,sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Zatem dla naszych danych otrzymany wykres pokrywa się z wykresem x(t).

4.2.

Po wyliczeniu rozwiązań równania Ax=b, macierzy c = Ax, obliczono odchylenie o(q) wektora c i b zgodnie ze wcześniej podanym wzorem. Wartość q ustalono na 0.2001 pozwala na bliskie zbliżenie się do 1, konkretnie mamy 1,0004. Zależność o(q) od q przedstawiono na wykresie poniżej:



5. Podsumowanie

Sprawozdanie dotyczyło rozwiązania układów liniowych metodami Gaussa oraz Gaussa-Jordana. Pierwsze zadanie pokazało możliwość rozwiązania równania różniczkowego w sposób numeryczny korzystając z rozwiązania układu liniowego metodą Gaussa-Jordana. Otrzymane wyniki w pełni zgadzają się z rzeczywistym wykresem położenia od czasu w ruchu harmonicznym.

Drugie zadanie pokazało różnicę w obliczeniach analitycznych, a numerycznych. Dla kolejnych wartości q otrzymano wartości odchylenia, na wykresie zdecydowanie widać pik dla 1,0004. Macierz dla q = 1 nie ma rozwiązania, dlatego dla wartości bliskich 1 wartość średniego błędu kwadratowego jest największa.