SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 6

Metoda Newtona

Jan Wojdylak, 17.04.2021

1. Cel ćwiczenia

Celem zadania było wyznaczanie pierwiastków układu równań nieliniowych metodą Newtona.

2. Opis problemu

Do rozwiązania mamy następujący układ równań:

$$\begin{cases} 2zy^2 - 3x^2 - 2 = 0 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 = 0 \end{cases}$$

metodą Newtona.

3. Opis metody

Metoda Newtona jest metodą iteracyjną, pozwala rozwiązać układ równań nieliniowych postaci:

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, ...x_n) = 0 \end{cases}$$

w tym celu w k – tej iteracji obliczamy wektor rozwiązań $r_k = [x_k, y_k]$ bazujący na rozwiązaniu w kroku k – 1:

$$r_k = r_{k-1} - \triangle r$$

Metoda Newtona opiera się na liczeniu pochodnych odpowiednich funkcji. Ogólna postać $\triangle r$ to iloczyn odwrotnej macierzy Jacobiego funkcji f i wektora kolumnowego, składającego się z kolejnych wartości funkcji f:

$$\Delta r = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_1(x)}{\delta x_n} \\ \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_2(x)}{\delta x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_n(x)}{\delta x_1} & \frac{\delta f_n(x)}{\delta x_2} & \dots & \frac{\delta f_n(x)}{\delta x_n} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_s(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$$

W naszym przypadku $\triangle r$ przyjmuje postać:

$$\Delta \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 2y^2 - 6xy & 4xy - 3x^2 \\ 2xy^3 + 2y & 3x^2y^2 + 2x \end{bmatrix}^{-1}_{r=r_{k-1}} \cdot \begin{bmatrix} 2xy^2 - 3x^2y - 2 \\ x^2y^3 + 2xy - 12 \end{bmatrix}_{r=r_{k-1}}$$

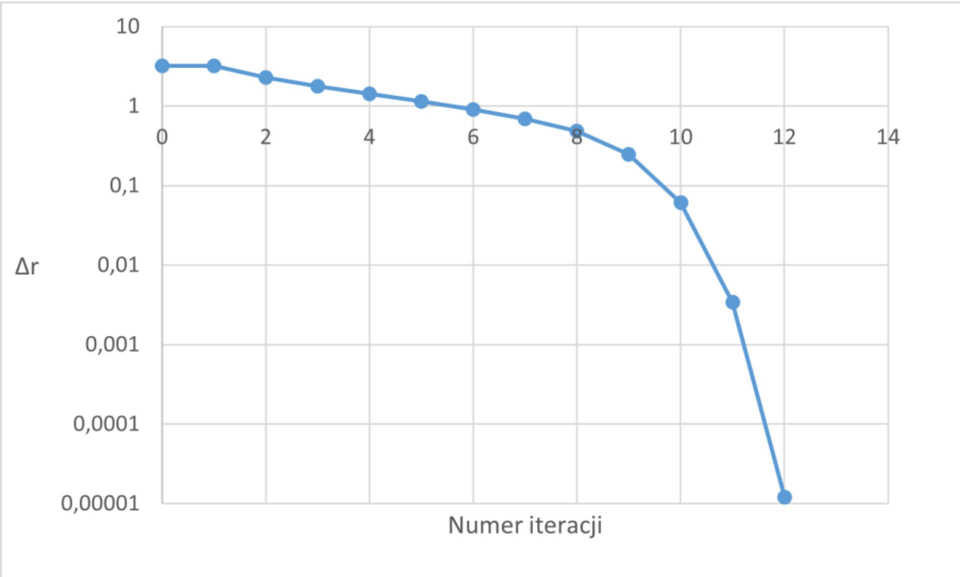
Działania powtarzamy do momentu, w którym norma wektora $\triangle r$ równa $||r_k - r_{k-1}||$ jest mniejsza od ustalonej wartości ϵ, u nas konkretnie jest to 10^{-6}.

4. Wyniki

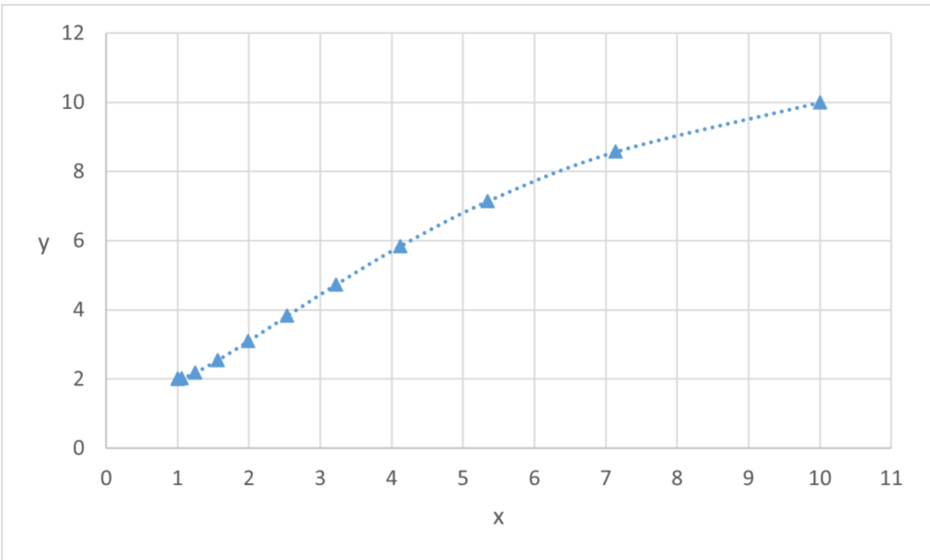
Nasz algorytm testowaliśmy dla dwóch punktów początkowych [10, 10] oraz [10, -4]. Za każdym razem sprawdzając wartość normy wektora $\triangle r$ oraz współrzędne aktualnego wektora rozwiązań.

4.2. Punkt początkowy [10, 10]

Dla tak wybranego punktu początkowego otrzymaliśmy rozwiązanie x = 1 oraz y = 2 wykonując 13 iteracji.



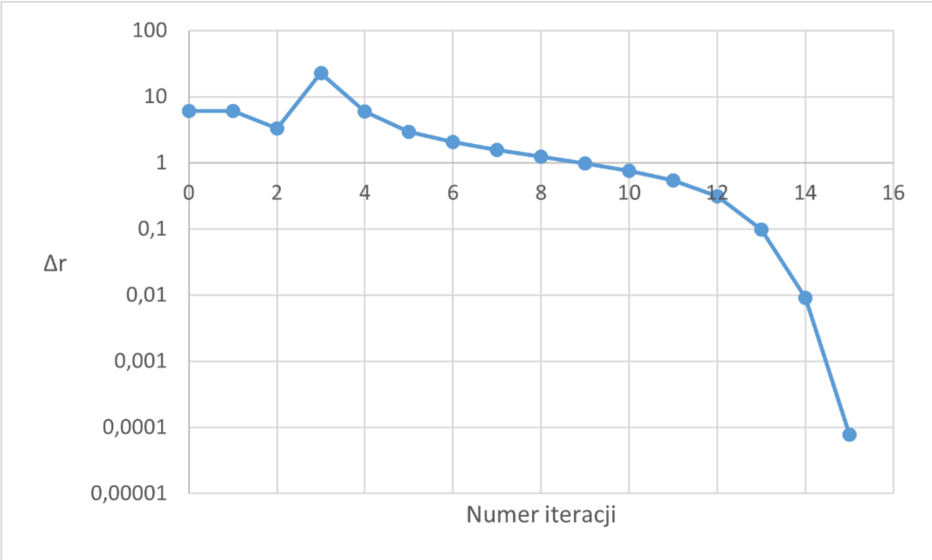
Rys. 1. Wykres normy długości różnicy wektorów położenia punktów w zależności od numeru iteracji *k*



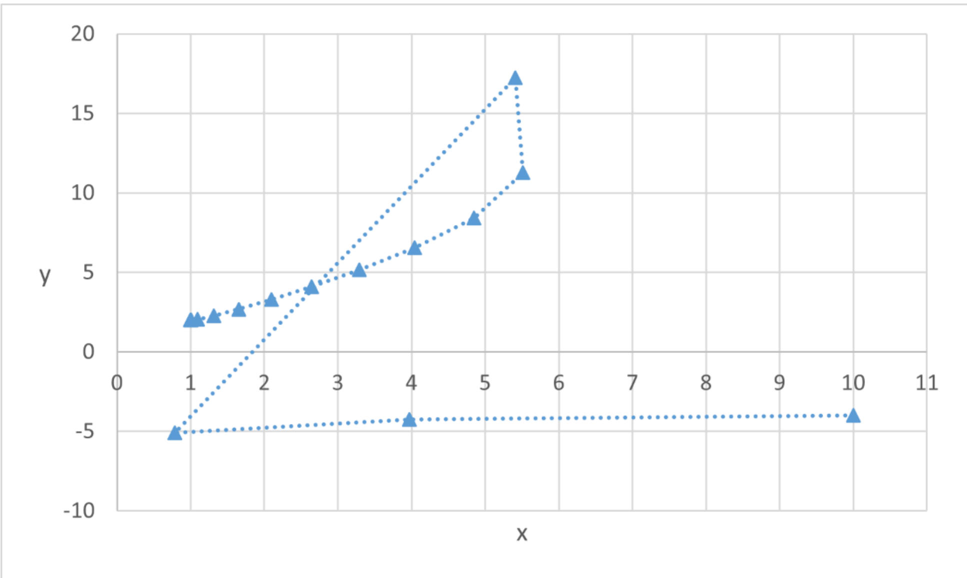
Rys. 2. Wykres punktów pośrednich, przez które przechodzi algorytm, zmierzając do rozwiązania układu równań

4.1. Punkt początkowy [10, -4]

Dla tego punktu początkowego otrzymaliśmy rozwiązanie wykonując 16 iteracji.



Rys. 3. Wykres normy długości różnicy wektorów położenia punktów w zależności od numeru iteracji k



Rys. 4. Wykres punktów pośrednich, przez które przechodzi algorytm, zmierzając do rozwiązania układu równań

5. Podsumowanie

Zgodnie z przewidywaniami z każdą iteracją wektor rozwiązań jest coraz bliższy ostatecznemu rozwiązaniu, w naszym przypadku [1, 2]. Możemy też zauważyć, że wektor początkowy wpływa na ilość iteracji jakie trzeba wykonać, aby rozwiązać układ oraz wpływa na to jak wygląda droga schodzenia wektora rozwiązań do ostatecznego wyniku, jednak w jednym i w drugim przypadku algorytm osiąga zbieżność.