

# SPRAWOZDANIE – LABORATORIUM 9

## Aproksymacja Pade funkcji $\exp(-x^2)$

Jan Wojdylak, 16.05.2021

### 1. Cel ćwiczenia

Celem laboratoriów jest zaznajomienie oraz przeprowadzenie aproksymacji Pade funkcji  $f(x) = \exp(-x^2)$

### 2. Opis problemu

Aproksymacja polega na przybliżeniu funkcji na danym przedziale, wykorzystywana jest do przedstawienia przebiegu funkcji, kiedy nie jesteśmy w stanie zrobić tego analitycznie.

Naszym zadaniem było przeprowadzenie aproksymacji Padego funkcji  $f(x) = \exp(-x^2)$  na przedziale  $[-5, 5]$  dla węzłów  $(N, M) = (2, 2), (4, 4), (6, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$ , gdzie  $N$  i  $M$  to stopnie wielomianów.

### 3. Opis metody

Funkcje  $f(x)$  przybliżamy przy pomocy funkcji wymiernej danej wzorem:

$$R_{N,M}(x) = \frac{P_N(x)}{Q_M(x)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i x^i}{\sum_{i=0}^M b_i x^i}$$

W tym celu rozwijamy funkcję  $f(x)$  w szereg Maclaurina za pomocą wzoru:

$$\exp(-x^2) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{p!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot x^k$$

gdzie  $k = N//2 + M//2 + 1$

A wyliczone wartości zapisujemy w wektorze  $\vec{c}$  o rozmiarze  $N$ . Następnie rozwiązujemy układ

$$A \cdot \vec{x} = \vec{y}.$$

Macierz  $A$  wyznaczamy ze wzoru

$$A_{i,j} = c_{N-M+i+j+1}$$

gdzie  $i, j = 0, 1, \dots, M-1$

Natomiast wektor  $y$ :

$$y_i = -c_{N+1+i}$$

gdzie  $i = 0, 1, \dots, M-1$

Współczynniki wielomianu  $Q_M(x)$  zachowujemy w wektorze  $b$ :

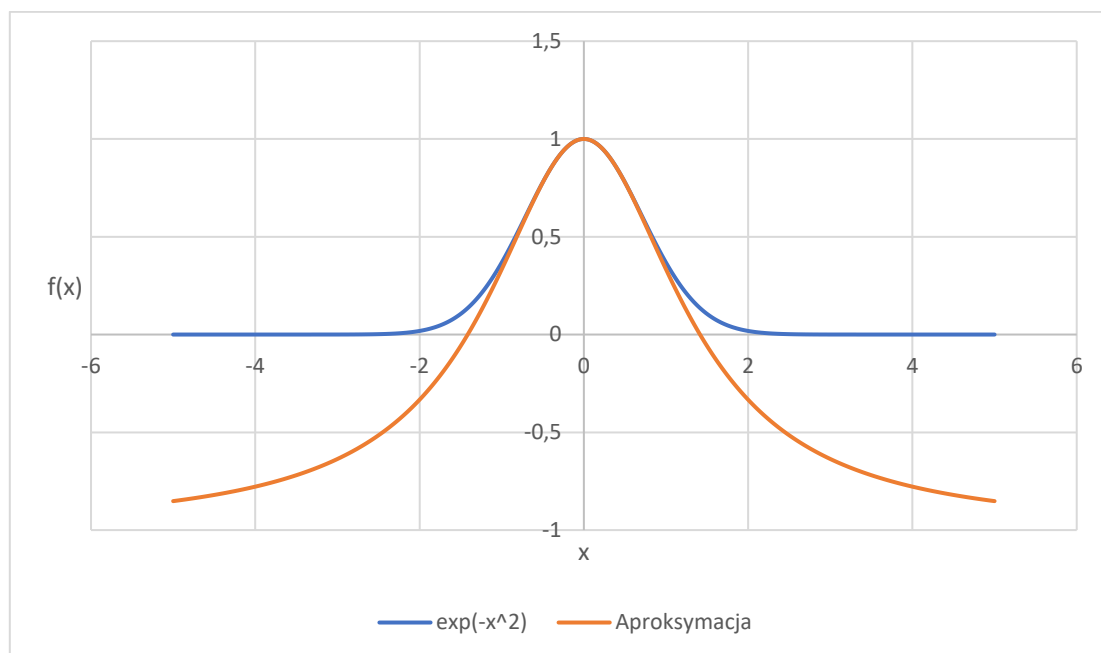
$$b_0 = 1 \text{ oraz } b_{M-i} = x_i \\ \text{gdzie } i = 0, 1, \dots, M-1$$

Aby móc skorzystać ze wzoru na  $R_{N,M}$  potrzebujemy nasze współczynniki  $a$ , wyliczamy je ze wzoru:

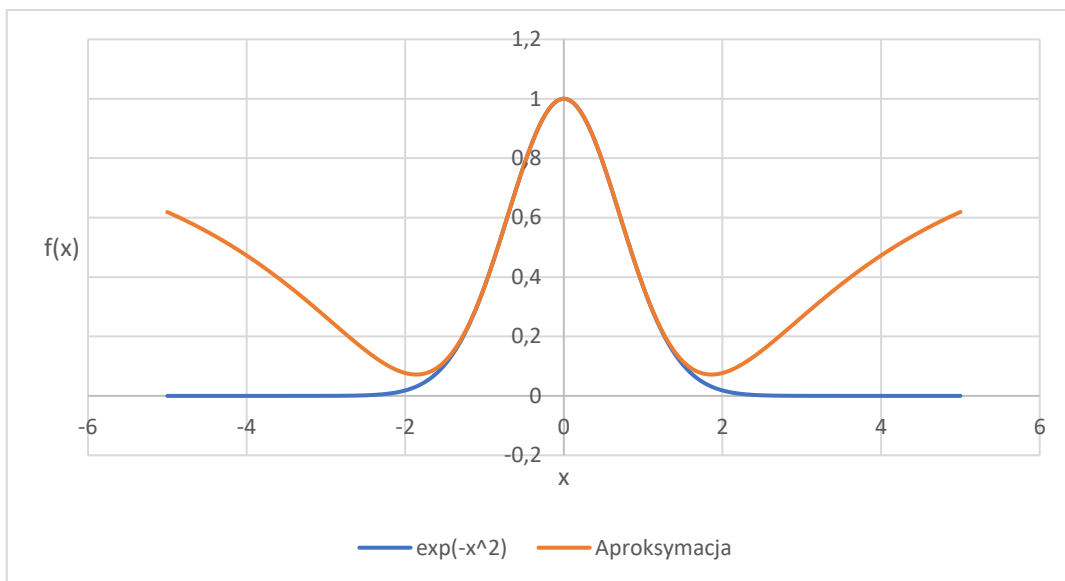
$$a_i = \sum_{j=0}^i c_{i-j} \cdot b_j \\ \text{gdzie } i = 0, 1, \dots, N$$

Mając obliczone współczynniki  $a$  i  $b$  możemy wyznaczyć kolejne wartości funkcji na zadanym przedziale.

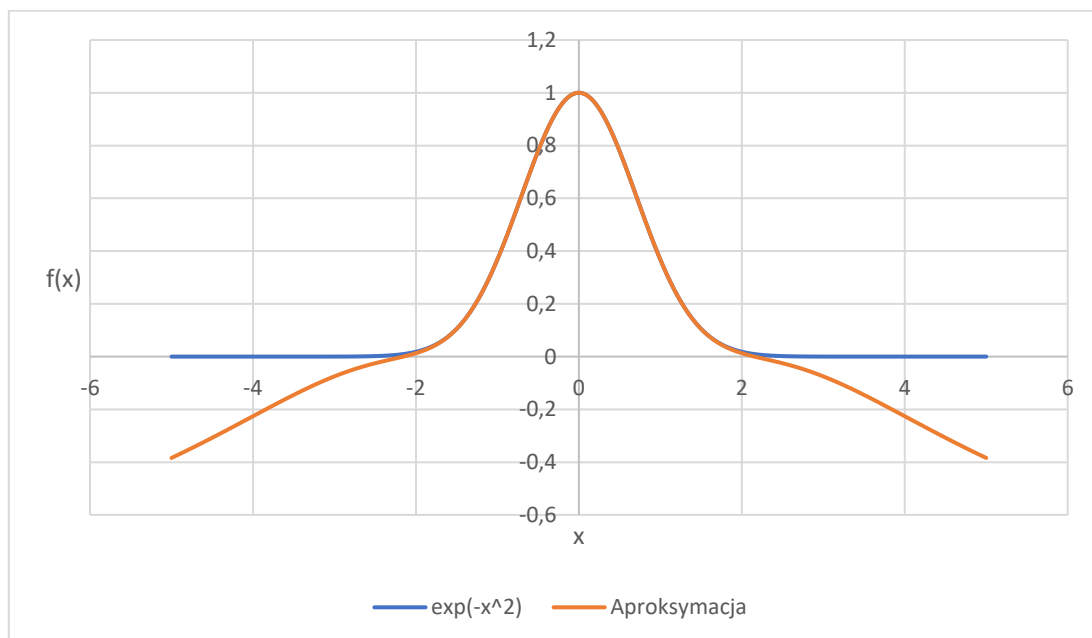
## 4. Wyniki



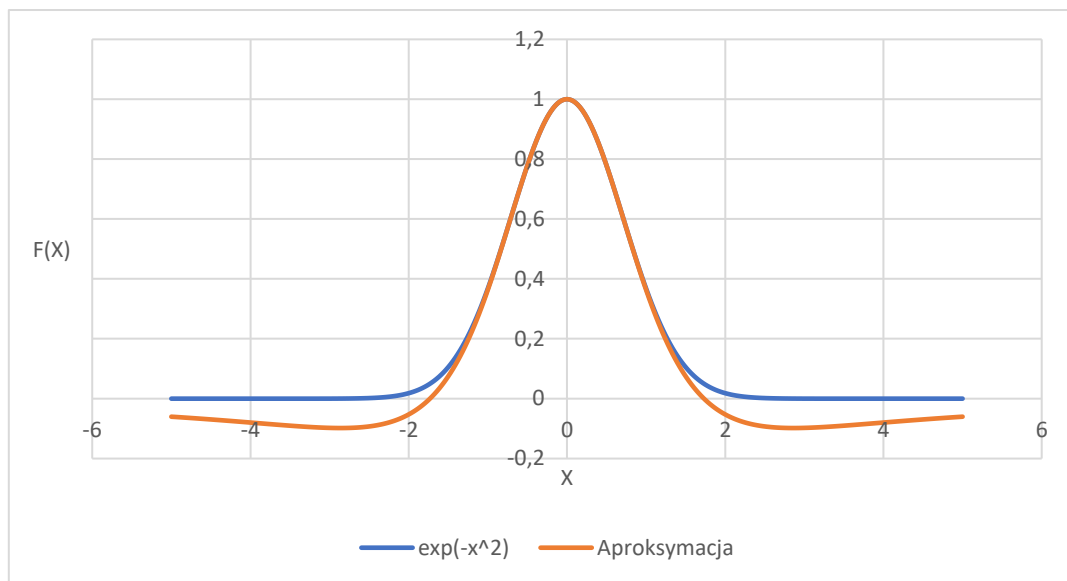
Rysunek 1.  $N = 2, M = 2$



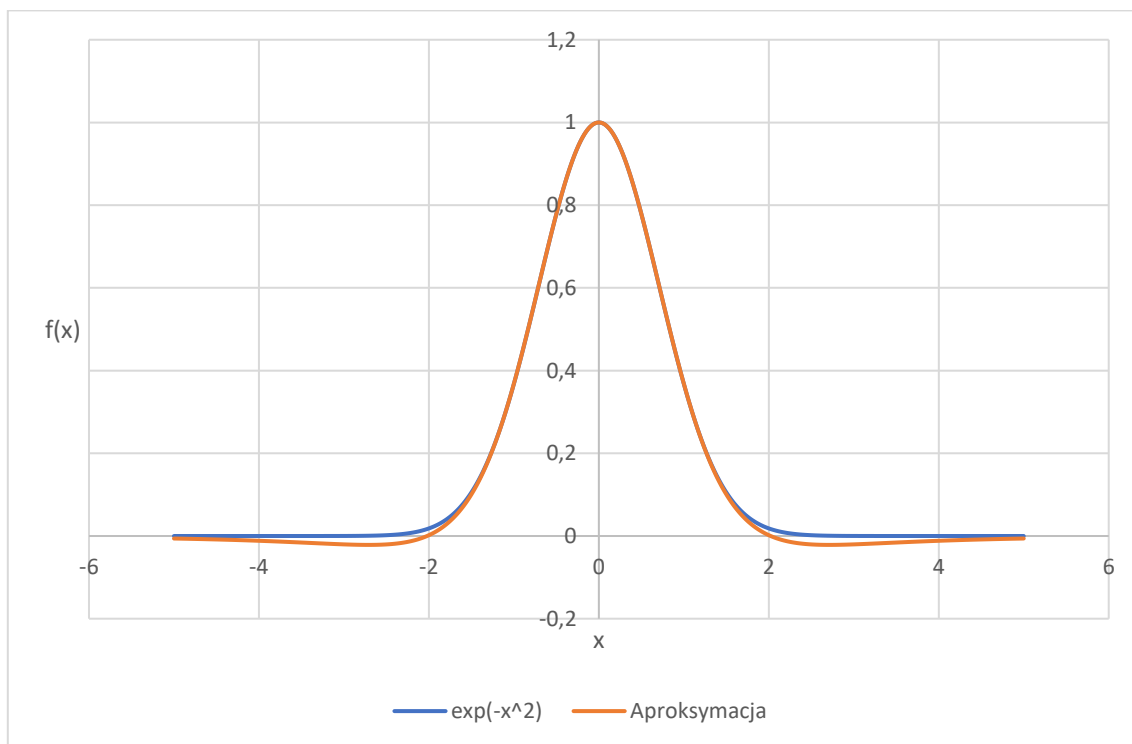
Rysunek 2.  $N = 4$ ,  $M = 4$



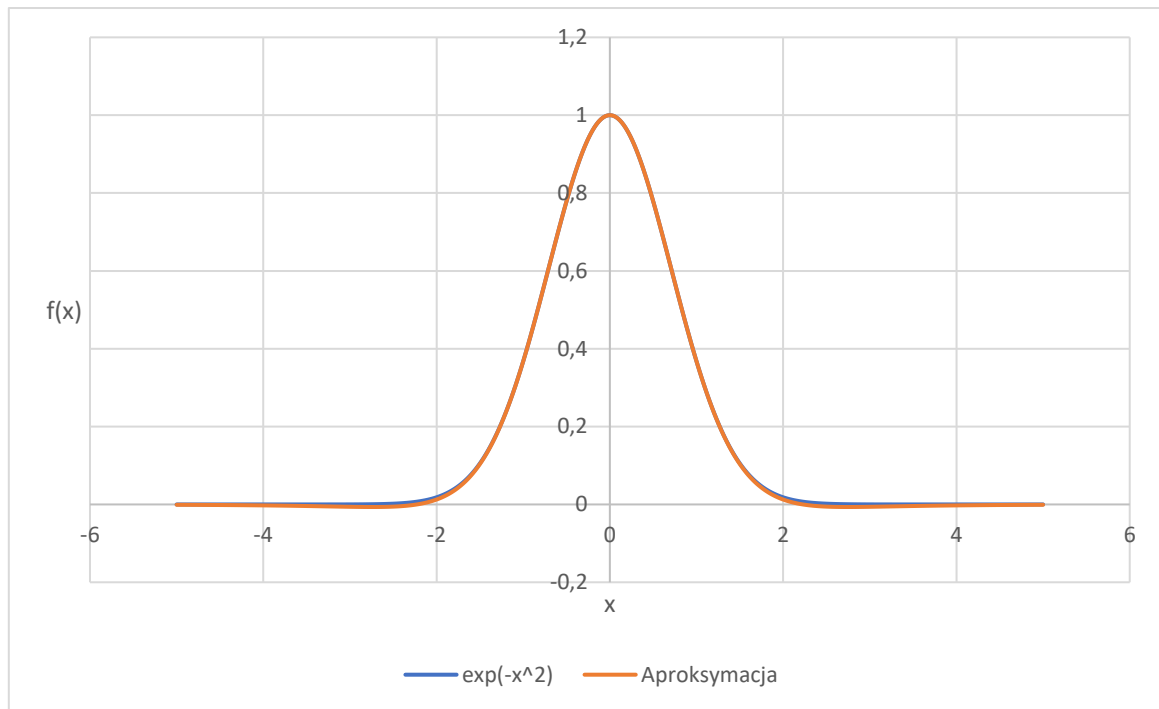
Rysunek 3.  $N = 6$ ,  $M = 6$



Rysunek 4.  $N = 2, M = 4$



Rysunek 5.  $N = 2, M = 6$



Rysunek 6.  $N = 2$ ,  $M = 8$

## 5. Podsumowanie

Aproksymacja Padego pozwala na odwzorowanie przebiegu funkcji. Dokładność przybliżenia zależy od wartości  $M$  i  $N$ , w sytuacjach, kiedy  $M = N$  odwzorowanie jest najgorsze, jednak, kiedy  $M > N$  odwzorowanie jest lepsze. Można też zauważyć, że im większe jest  $M$  tym przybliżenie jest lepsze. W odróżnieniu od interpolacji, funkcja aproksymująca nie musi zawsze przechodzić przez punkty węzłowe.