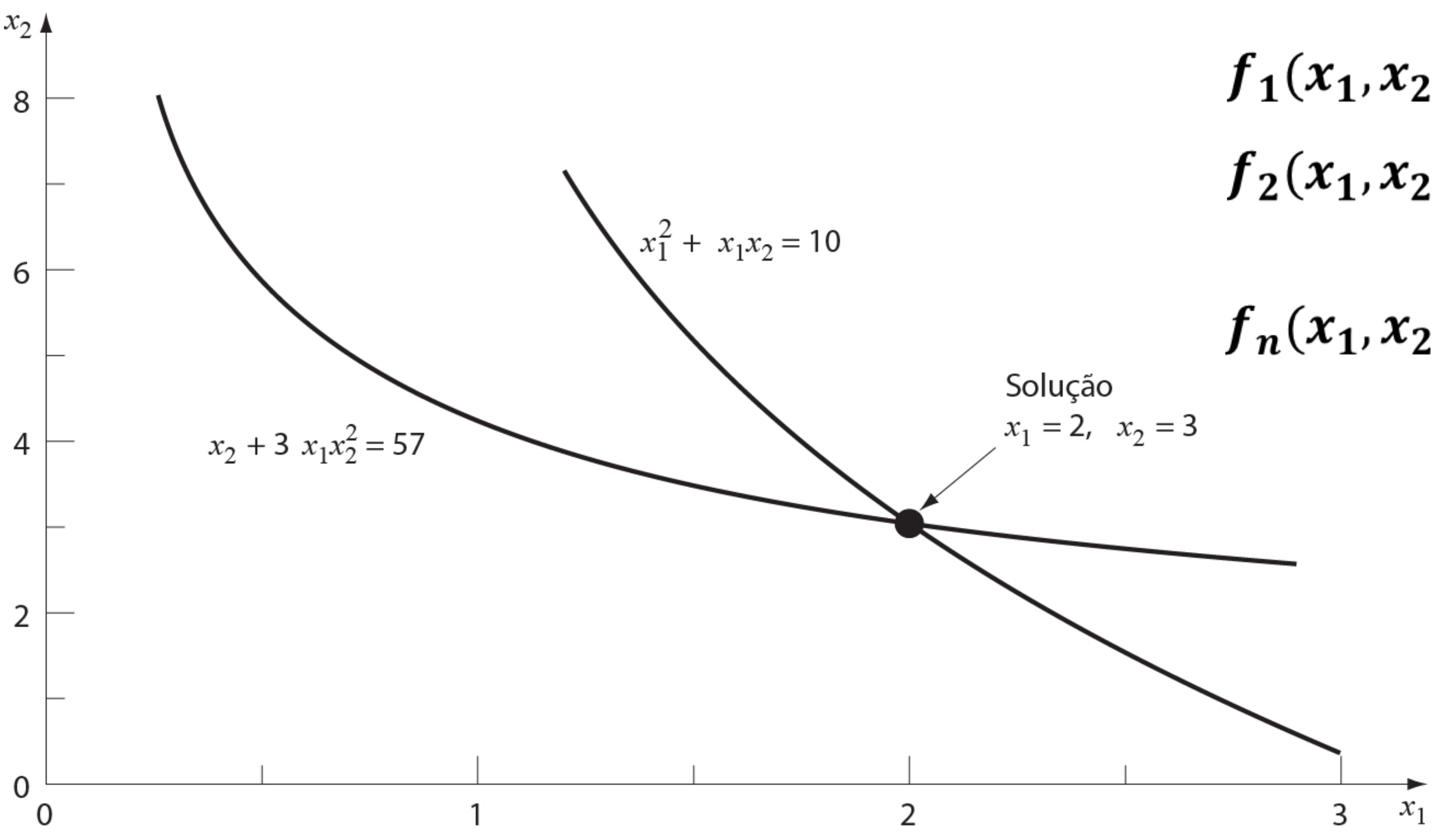
Cálculo Numérico

Resolução de Sistemas de Equações NÃO Lineares

Visão Geral

Boa parte dos problemas reais podem ser resolvidos por métodos de sistemas lineares. Frequentemente, problemas não-lineares também são resolvidos de forma aproximada com métodos lineares.

Ao contrário dos SL, cujas equações representam retas, os gráficos associados as equações não-lineares são curvas de *x1 versus x2* (quando duas variáveis). A solução é a interseção das curvas.



$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

SNL – Newton-Raphson

O método baseia-se no emprego da derivada (inclinação) de uma função.

$$f(x_{i+1}) = f(x_1) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_1) = 0$$

X_i é a aproximação da raiz e $x_{(i+1)}$ é o ponto em que a tangente intercepta o eixo x.

Para o caso de duas variáveis:

$$f_{1,i+1} = f_{1,i} + \left(x_{1,i+1} - x_{1,i}\right)\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + \left(x_{2,i+1} - x_{2,i}\right)\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}$$

$$x_{1,i+1} = x_{1,i} - \frac{f_{1,i}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - f_{2,i}\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}}{\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}$$

$$f_{2,i+1} = f_{2,i} + \left(x_{1,i+1} - x_{1,i}\right)\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + \left(x_{2,i+1} - x_{2,i}\right)\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2}$$

$$x_{2,i+1} = x_{2,i} - \frac{f_{2,i}\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} - f_{1,i}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}{\dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} - \dfrac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2}\dfrac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1}}$$

O denominador de cada uma dessas equações é chamado de determinante da matriz Jacobiana do sistema.

EXEMPLO 12.4 Newton-Raphson para um sistema não linear

Use o método de Newton-Raphson para equações múltiplas para determinar as raízes da Equação (12.6). Inicie os cálculos com as aproximações $x_1 = 1{,}5$ e $x_2 = 3{,}5$.

Solução. Determine primeiro as derivadas parciais e calcule-as nas aproximações iniciais de x_1 e x_2:

x1^2 + x1x2 = 10 **x2 + 3x1x2^2 = 57**

$$\frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 = 2(1{,}5) + 3{,}5 = 6{,}5 \qquad \frac{\partial f_{1,0}}{\partial x_2} = x_1 = 1{,}5$$

$$\frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_1} = 3x_2^2 = 3(3{,}5)^2 = 36{,}75 \qquad \frac{\partial f_{2,0}}{\partial x_2} = 1 + 6x_1x_2 = 1 + 6(1{,}5)(3{,}5) = 32{,}5$$

Portanto, o determinante da matriz Jacobiana para a primeira iteração é:

$$6{,}5(32{,}5) - 1{,}5(36{,}75) = 156{,}125$$

Os valores das funções podem ser calculados nas aproximações iniciais como

$$f_{1,0} = (1{,}5)^2 + 1{,}5(3{,}5) - 10 = -2{,}5$$
$$f_{2,0} = 3{,}5 + 3(1{,}5)(3{,}5)^2 - 57 = 1{,}625$$

Esses valores podem ser substituídos na Equação (12.12) para fornecer

$$x_1 = 1{,}5 - \frac{-2{,}5(32{,}5) - 1{,}625(1{,}5)}{156{,}125} = 2{,}03603$$

$$x_2 = 3{,}5 - \frac{1{,}625(6{,}5) - (-2{,}5)(36{,}75)}{156{,}125} = 2{,}84388$$

Desse modo, os resultados estão convergindo para os valores verdadeiros $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$. O cálculo pode ser repetido até que uma acurácia aceitável seja obtida.

SNL – Newton-Raphson

SLN_RN.m

x1^2 + x1x2 = 10   x2 + 3x1x2^2 = 57

```
x = [ 1.5; 3.5];  %aproximações

iter = 0;    maxit = 50;      es=0.0001;

while (1)

    J = [2*x(1)+x(2)     x(1);    3*x(2)^2     1+6*x(1)*x(2)];

    F = [x(1)^2+x(1)*x(2)-10; x(2)+3*x(1)*x(2)^2-57];

    dx=J\F;            x=x-dx;

    iter=iter+1;     ea=100*max(abs(dx./x));

    if iter>=maxit || ea<=es, break, end

end
```

Trabalho 4: a ser entregue antes da AV1

Elabore um SNL e resolva por Newton-Raphson

Duas vezes: uma na mão e outra por computador.