Exercícios Cálculo Numérico: Sistemas Lineares.

Para o sistema abaixo: Ax=b

```
A=[ 5     4     2;
    2     8     2;
    2     4     5]


b=[20;
   20;
   20]
```

1)Encontre a solução por eliminação de Gauss

2)Determine a solução do sistema abaixo empregando decomposição LU.
Use as matrizes [L] e [U] do problema (1).

```
A=[ 5     4     2;
    2     8     2;
    2     4     5]


b=[10;
   0;
   0]
```

3)Encontre a matriz inversa através da decomposição LU

Respostas:

1)

A =

```
  5   4   2
  2   8   2
  2   4   5
```

b =

```
 20
 20
 20
```

x =

2.0000
1.5000
2.0000

2)

L =

1.0000	0	0
0.4000	1.0000	0
0.4000	0.3750	1.0000

x =

2.6667
-0.5000
-0.6667

3)

Inv =

0.2667	-0.1000	-0.0667
-0.0500	0.1750	-0.0500
-0.0667	-0.1000	0.2667

Solução:

1)
$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix} \rightarrow A\bar{x} = \bar{b}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad L_2 = L_2 - m_{21} L_1$$

$$m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{2}{5} = 0{,}4 \qquad L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6{,}4 & 1{,}2 \\ 0 & 2{,}4 & 4{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{2{,}4}{6{,}4} = 0{,}375 \qquad L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6{,}4 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 3{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 7{,}5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6{,}4 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 3{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 7{,}5 \end{bmatrix} \Rightarrow U \cdot \bar{x} = \bar{d}$$

Substituições regressivas

$L_3 = 0 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 3{,}75 \cdot X_3 = 7{,}5$

$X_3 = \dfrac{7{,}5}{3{,}75} = 2$

$L_2 = 0 \cdot X_1 + 6{,}4 \cdot X_2 + 1{,}2 \cdot X_3 = 12$

$6{,}4X_2 = 12 - 2{,}4$

$X_2 = \dfrac{9{,}6}{6{,}4} = 1{,}5$

$L_1 : 5X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 20$

$5X_1 = 20 - 6 - 4$

$5X_1 = 10$

$X_1 = 2$

$$\boxed{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1{,}5 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

2)

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}375 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbb{U} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6{,}4 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 3{,}75 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A\,\bar{x} = b_n$$

$$\mathbb{L} \cdot \bar{d}_n = \bar{b}_n$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 1 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}375 & 1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$L_1 \rightarrow d_1 = 10$

$L_2 \rightarrow 0{,}4 \cdot d_1 + d_2 = 0$

$d_2 = -4$

$L_3 \rightarrow 0{,}4 \cdot d_1 + 0{,}375 \cdot d_2 + 1 \cdot d_3 = 0$

$L_3 \rightarrow 4 + (-1{,}5) + d_3 = 0 \Rightarrow d_3 = -2{,}5$

$$\bar{d}_n = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

$$U \cdot \bar{X}_m = \bar{d}_m$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6{,}4 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 3{,}75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ -2{,}5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow \quad 3{,}75X_3 = -2{,}5$$

$$X_3 = -0{,}666$$

$$L_2 \longrightarrow 6{,}4 \cdot X_2 + 1{,}2 \cdot X_3 = -4$$

$$6{,}4X_2 - 0{,}799 = -4$$

$$X_2 = \frac{-3{,}201}{6{,}4} = -0{,}500$$

$$L_1 = 5X_1 + 4X_2 + 2X_3 = 10$$

$$5X_1 - 2 - 1{,}332 = 10$$

$$5X_1 = 13{,}332$$

$$X_1 = \frac{13{,}332}{5}$$

$$X_1 = 2{,}666$$

$$\boxed{\bar{X}_m = \begin{bmatrix} 2{,}666 \\ -0{,}5 \\ -0{,}666 \end{bmatrix}}$$

3) $A\bar{x}_c = \bar{b}_c$ $\quad \mathbb{L} \cdot \bar{d}_c = \bar{b}_c$! $\quad \mathbb{U}\,\bar{x}_c = \bar{d}_c$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} & \bar{d}_c & \bar{b}_c \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,375 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$L_1 \to d_1 = 1$

$L_2 \to 0,4\, d_1 + d_2 = 0$

$d_2 = -0,4$

$L_3 \to 0,4\, d_1 + 0,375\, d_2 + d_3 = 0$

$$\bar{d}_c = \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

$0,4 - 0,15 + d_3 = 0$

$d_3 = -0,25$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6,4 & 1,2 \\ 0 & 0 & 3,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,4 \\ -0,25 \end{bmatrix}$$

$L_3 \to 3,75\, x_3 = -0,25$

$x_3 = -0,0667$

$L_2 \to 6,4\, x_2 + 1,2\, x_3 = -0,4$

$x_2 = -0,050$

$L_1 \to 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1$

$5x_1 = 1 + 0,2 + 0,133 =$

$x_1 = \dfrac{1,333}{5}$

$x_1 = 0,2667$

$A\bar{x}_b = \bar{b}_b \qquad \mathbb{L}\cdot\bar{d}_b = \bar{b}_b \; ! \qquad \mathbb{U}\,\bar{x}_b = \bar{d}_b \uparrow$

$$\underset{\mathbb{L}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,375 & 1 \end{bmatrix}} \underset{\bar{d}_b}{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}} \underset{\bar{b}_b}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$L_1 \to d_1 = 0$

$L_2 \to d_2 = 1$

$L_3 \to 0,4\, d_1 + 0,375\, d_2 + d_3$

$d_3 = -0,375$

$$\bar{d}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,375 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6,4 & 1,2 \\ 0 & 0 & 3,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,375 \end{bmatrix}$$

$L_3 : 3,75 X_3 = -0,375$

$X_3 = -0,1$

$L_2 \to 6,4 X_2 - 0,12 = 1$

$X_2 = \dfrac{1,12}{6,4} = 0,175$

$5X_1 + 0,7 - 0,2 = 0$

$5X_1 = -0,5 \Rightarrow X_1 = -0,1$

$$A\bar{x}_i = \bar{b} \qquad \mathbb{L}\cdot\bar{d} = \bar{b} \qquad \mathbb{U}\,\bar{x}_c = \bar{d}_c$$

$$\mathbb{L} \qquad d_c \qquad \bar{b}_c$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0,4 & 1 & 0 \\ 0,4 & 0,375 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$L_1: d_1 = 0$

$L_2: d_2 = 0$

$L_3: d_3 = 1$

$$\bar{d}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 6,4 & 1,2 \\ 0 & 0 & 3,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$L_3: X_3 = \dfrac{1}{3,75} = 0,2667$

$L_2: 6,4X_2 + 0,320 = 0$

$X_2 = \dfrac{-0,32}{6,4} = -0,0500$

$L_1: 5X_1 - 0,2 + 0,5334 = 0$

$X_1 = \dfrac{-0,3334}{5} = -0,0667$

RESPOSTA FINAL

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0,2667 & -0,1 & -0,0667 \\ -0,050 & 0,175 & -0,05 \\ -0,0667 & -0,1 & 0,2667 \end{bmatrix}$$