

Wojciech Kłyszejko

## Równania Różniczkowe i Różnicowe

### Zadanie Domowe

Równanie transportu ciepła – rozwiązanie metodą elementów skończonych

$$-k(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

$$u(2) = 0$$

$$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

Gdzie  $u$  to poszukiwana funkcja

$$[0, 2] \ni x \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$$

## 1. Wprowadzenie

Równanie transportu ciepła

$$-k(x) \cdot \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0$$

$u(2) = 0$  - warunek Dirichleta w  $x=2$

$\frac{du(0)}{dx} + u(0) = 20$  - warunek Cauchy'ego w  $x=0$

$$k(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{dla } x \in (1, 2] \end{cases}$$

$$x \in [0, 2] \quad \Omega = (0, 2)$$

$$-k(x) \cdot u'' = 0 \quad / : k(x)$$

$$-u'' = 0$$

Mnożę równanie przez funkcję  $v$

$$v(2) = 0$$

$$-u''v = 0 \quad / \int_0^2$$

$$\int_0^2 -u''v dx = 0$$

$$[-u'v]_0^2 + \int_0^2 u'v' dx = 0$$

$$\int_0^2 u'v dx - \underbrace{u'(2)v(2)}_0 + \underbrace{u'(0)v(0)}_{20 - u(0)} = 0$$

$$\int_0^2 u'v dx + 20v(0) - v(0)u(0) = 0$$

$$\int_0^2 u'v dx - v(0)u(0) = -20v(0)$$

$$B(u, v)$$

$$L(v)$$

## 2. Kod programu

Algorytm MES zaimplementowałem, korzystając z programu MATLAB.

Funkcja zwraca i – ty element

```
function e = element(i, n)
    e = @(x) (max( 1 - abs( (x - i.*2/n) ./2.*n) , 0));
end
```

Funkcja zwraca pochodną i – tego elementu

```
function e = element_derivative(i, n)
    e = @(x) (n./2 .* (2.*(i-1)/n <= x) .* (x < 2.*i/n) .* (0 <= x) + ...
        (-n)./2 .* (2.*i / n <= x) .* (x < 2.*(i+1) / n) .* (x <= 2));
end
```

Funkcja zwraca B (u,v)

```
function b = b_u_v(u_derivative, v_derivative, u, v, s, e)
    b = integral( @(x) (u_derivative(x) .* v_derivative(x)), s, e) - ...
        u(0) .* v(0);
end
```

Funkcja zwraca L (v)

```
function l = l_v(v)
    l = - 20 .* v(0);
end
```

Funkcja rysuje wykres dla zbioru oraz tablicy funkcji

```
function plot_elements(X, elements)
    f = elements{1};
    Y = f(X);
    plot(X, Y);
    hold on;
    for i=2:length(elements)
        f = elements{i};
        Y = f(X);
        plot(X, Y);
    end
    hold off
end
```

## Funkcja główna

```
function main
%input section
    %number of elements:
    n = 20;
%end of input

%plotting elements or their derivatives (optional)
    N = (0:n);
    D = (0:0.01:2);
    elements = arrayfun(@(t){element(t, n)}, N);
    elements_der = arrayfun(@(t){element_derivative(t, n)}, N);
%    tmp_der = elements_der{11};
%    disp(f);
%    plot(D,tmp_der(D));
%    plot_elements(D, elements);

%initialize the equations matrix and iterate
    equations = zeros(n+1,n+1);
    for i=0:n-1
        for j=0:n
            if (abs(i - j) > 1)
                continue;
            end
            if (abs(i - j) == 1)
                s = 2.* max(0, min(i, j) / n);
                e = 2.* min(1, max(i, j) / n);
            else
                s = 2.* max(0, (i - 1) / n);
                e = 2.* min(1, (i + 1) / n);
            end
            %count B (u , v)
            equations(i+1,j+1) = b_u_v(element_derivative(j, n), ...
element_derivative(i, n), element(j, n), element(i, n), s, e);

        end
    end

%set Dirichlet's boundary condition
    equations(n+1,n+1) = 1;

%initiate right side of equation array
    eq_right = zeros(n+1,1);

%count l(v) for each element besides last one
    for i=0:n-1
        eq_right(i+1) = l_v(element(i, n));
    end

%set Dirichlet's boundary value
    eq_right(n+1) = 0;

%display equation system (optional)
%    disp([equations eq_right]);

%solve equations
    Results = linsolve(equations,eq_right);
%    disp(Results);
%    disp(length(Results));
```

```

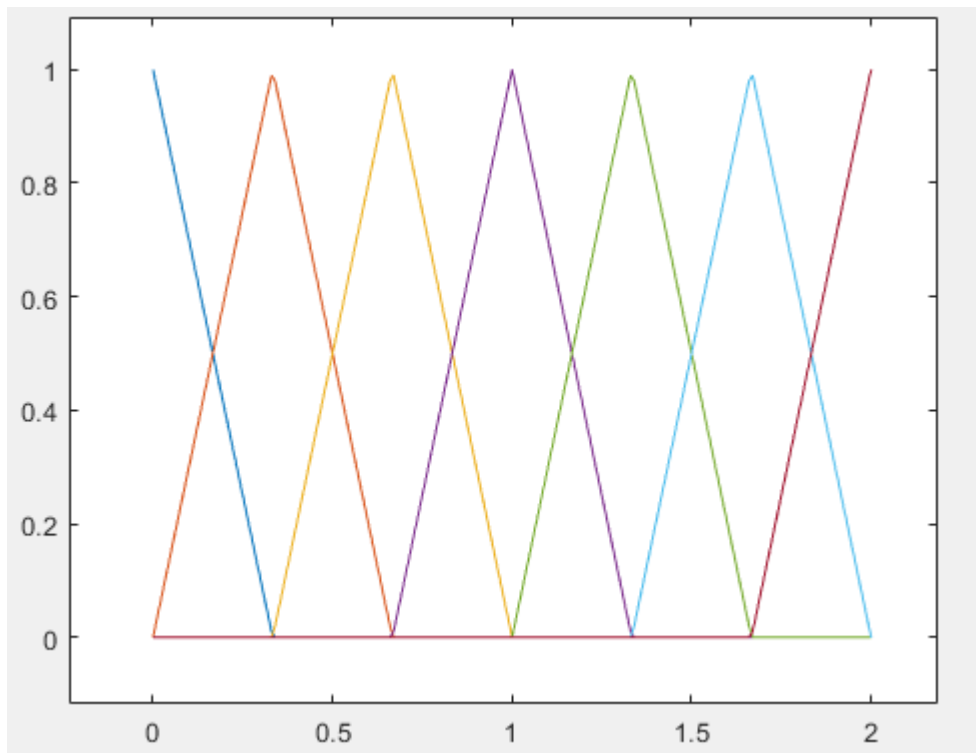
%initiate arrays for printing the results
X = (0:0.001:2-0.001);
Y = zeros(1, length(X));

%for each x in X increment coresponding Y by each element e(x) * result
for i=0:length(X)-1
    for j=0:length(Results)-1
        e = element(j, n);
        tmp = Y(i+1);
        Y(i+1) = tmp + Results(j+1) .* ( e( X(i+1) ) );
    end
end

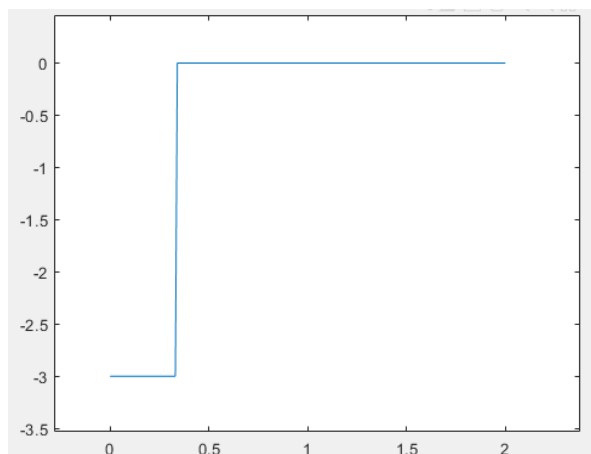
%plot the results
plot(X,Y);
end

```

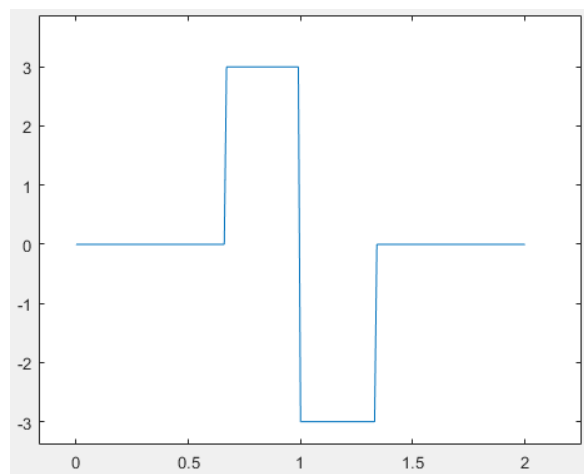
### 3. Prezentacja uzyskanych wyników dla N = 6



Rys. 1 – Wykres wszystkich elementów



Rys. 2 - Pochodna elementu nr.1



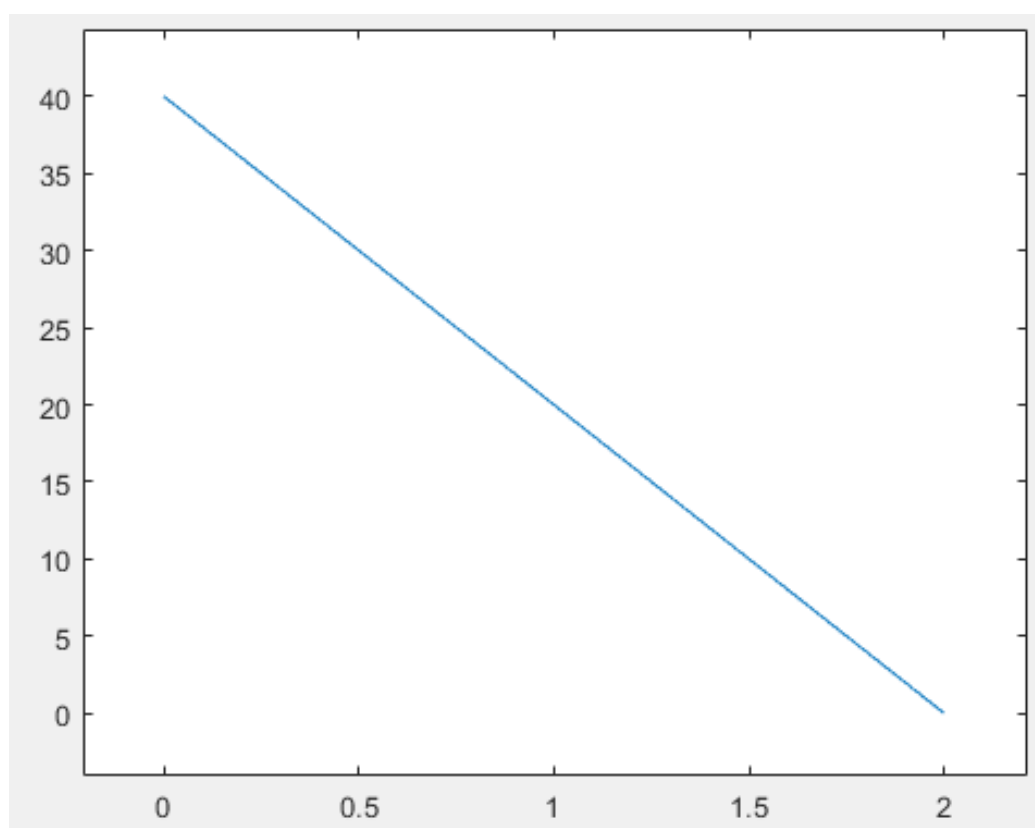
Rys. 3 - Pochodna elementu nr.4

2.0000	-3.0000	0	0	0	0	0	-20.0000
-3.0000	6.0000	-3.0000	0	0	0	0	0
0	-3.0000	6.0000	-3.0000	0	0	0	0
0	0	-3.0000	6.0000	-3.0000	0	0	0
0	0	0	-3.0000	6.0000	-3.0000	0	0
0	0	0	0	-3.0000	6.0000	-3.0000	0
0	0	0	0	0	0	1.0000	0

Rys. 4 - układ równań liniowych dla elementów

40.0000  
33.3333  
26.6667  
20.0000  
13.3333  
6.6667  
0

Rys. 5 - rozwiązania układu równań liniowych



*Rys.6 - funkcja wynikowa – rozwiązanie problemu*