Sprawozdanie z listy 6 - Spacer losowy

Mateusz Wojteczek

Wstęp

Celem listy zadań jest zbadanie zachowań i charakterystyk spacerów losowych w różnych wymiarach i kontekstach. Spacer losowy to model matematyczny opisujący ścieżkę składającą się z serii losowych kroków, często stosowany w fizyce, ekonomii, biologii i innych naukach. Zrozumienie jego właściwości ma kluczowe znaczenie dla interpretacji wielu zjawisk naturalnych i procesów stochastycznych.

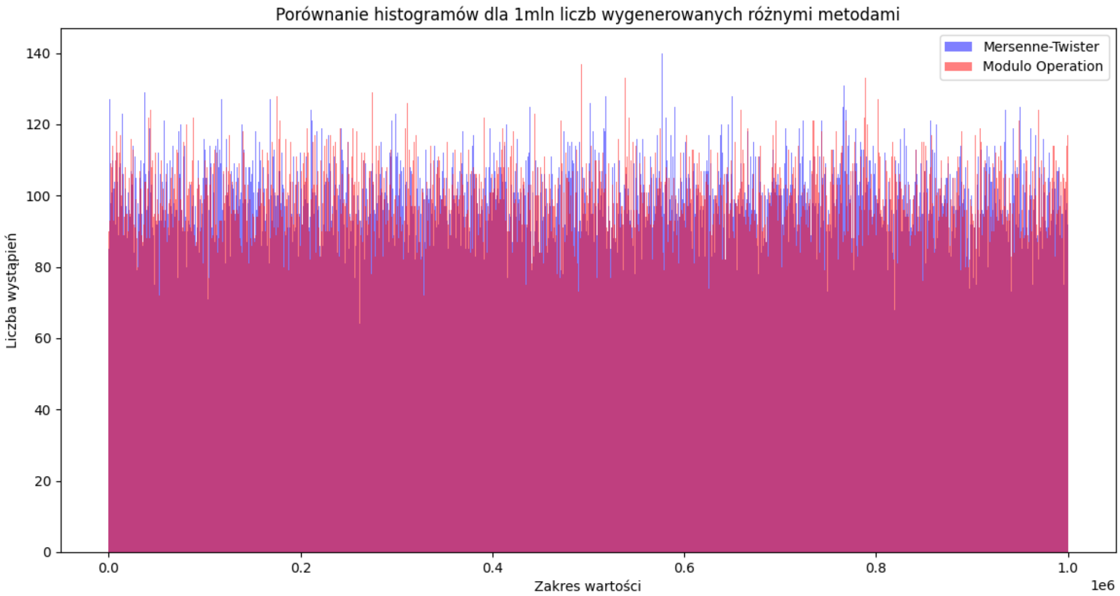
Zadanie 1

Kod programu

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random

# Ilość liczb do wygenerowania
n = 1000000

# Generowanie 1mln liczb za pomocą generatora Mersenne-Twister z numpy
x = np.random.randint(0, 1000000, n)

# Generowanie 1mln liczb za pomocą prostego generatora opartego na operacji modulo
random.seed(0)  # Ustawienie ziarna dla powtarzalności
y = [random.randrange(0, 1000000) % 1000000 for _ in range(n)]

# Histogramy
bins = 10000

# Histogram dla Mersenne-Twister
hist_x, bins_x = np.histogram(x, bins=bins)

# Histogram dla generatora opartego na operacji modulo
hist_y, bins_y = np.histogram(y, bins=bins)

# Tworzenie histogramów
plt.figure(figsize=(14, 7))
plt.hist(x, bins=bins, alpha=0.5, label='Mersenne-Twister', color='blue')
plt.hist(y, bins=bins, alpha=0.5, label='Modulo Operation', color='red')
plt.legend(loc='upper right')
plt.title('Porównanie histogramów dla 1mln liczb wygenerowanych różnymi metodami')
plt.xlabel('Zakres wartości')
plt.ylabel('Liczba wystąpień')
plt.show()
```

```
# Wyświetlanie różnicy między kubełkami
differences = np.abs(hist_x - hist_y)
print("Średnia różnica między kubełkami: ", np.mean(differences))
print("Maksymalna różnica między kubełkami: ", np.max(differences))

np.savetxt("histogram_mersenne_twister.csv", hist_x, delimiter=",")
np.savetxt("histogram_modulo.csv", hist_y, delimiter=",")
```

Analiza wyników



Mersenne-Twister: Liczby generowane przez ten algorytm wykazały znaczną równomierność w rozkładzie, z niewielkimi fluktuacjami liczby wystąpień między poszczególnymi kubełkami.

Operacja modulo: Histogram dla tej metody pokazał większe fluktuacje w liczbie wystąpień, z niektórymi kubełkami wyraźnie odbiegającymi od średniej liczby wystąpień, co sugeruje mniej równomierny rozkład.

Analiza pokazała, że algorytm Mersenne-Twister jest bardziej odpowiedni dla zastosowań, które wymagają wysokiej jakości równomiernego rozkładu liczb losowych. Prosty generator oparty na operacji modulo może być mniej efektywny w przypadkach, gdy równomierność rozkładu jest kluczowa, jak np. w modelowaniu statystycznym czy symulacjach. Wyniki te podkreślają znaczenie wyboru odpowiedniego generatora liczb losowych w zależności od wymagań konkretnego zastosowania.

```
Mersenne-Twister Chi-square Statistic: 9836.279999999999 P-value: 0.8753893231521649
Modulo Operation Chi-square Statistic: 9836.66 P-value: 0.8748304322598011
```

Mersenne-Twister:

Statystyka chi-kwadrat: 9836.28 P-wartość: 0.8754

Operacja Modulo:

Statystyka chi-kwadrat: 9836.66 P-wartość: 0.8748 Interpretacja Statystyka Chi-Kwadrat:

Obie wartości statystyki chi-kwadrat są zbliżone i dość wysokie. Wysoka wartość chi-kwadrat może sugerować, że istnieją różnice między oczekiwanymi a rzeczywistymi rozkładami, jednak to interpretacja p-wartości dostarczy pełniejszego obrazu. P-wartość:

Obie p-wartości są znacznie powyżej typowego progu istotności statystycznej (0.05), co sugeruje, że nie ma wystarczających dowodów, aby odrzucić hipotezę o równomierności rozkładu liczby wystąpień w kubełkach. Innymi słowy, dane nie wykazują statystycznie istotnych odchyleń od rozkładu równomiernego.

Wyniki wskazują, że zarówno generator Mersenne-Twister, jak i prostszy generator oparty na operacji modulo, produkują dane, które nie różnią się w sposób istotny od równomiernego rozkładu (w kontekście testu chi-kwadrat z zadanymi parametrami). To może być zaskakujące, szczególnie w przypadku prostszego generatora modulo, gdzie moglibyśmy oczekiwać większych nieregularności.

Zadanie 2

Kod programu

Spacer losowy 2D

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <gsl/gsl_rng.h>
#include <gsl/gsl_randist.h>
#include <cmath>
#include <iomanip>

int main() {
    const gsl_rng_type * T;
    gsl_rng * r;

    int n = 1000; // number of steps
    double x = 0, y = 0; // start at the origin, using double for better precision

    std::ofstream file;
    file.open("random_walk_2D.txt");

    gsl_rng_env_setup();

    T = gsl_rng_default;
    r = gsl_rng_alloc(T);

    gsl_rng_set(r, time(NULL)); // Set the seed based on current time for
randomness

    file << "0,0" << std::endl;  // Save the starting point

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double angle = gsl_ran_flat(r, 0, 2 * M_PI);
        std::cout << "Step " << i << ": Angle = " << angle << std::endl; // Debug
output to console
```

```
        x += cos(angle);
        y += sin(angle);
        file << std::fixed << std::setprecision(4) << x << "," << y << std::endl;
// Ensure precision for small increments
    }

    file.close();
    gsl_rng_free(r);
    return 0;
}
```

Spacer losowy 3D

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <gsl/gsl_rng.h>
#include <gsl/gsl_randist.h>
#include <cmath>
#include <iomanip>  // Include for std::setprecision

int main() {
    const gsl_rng_type * T;
    gsl_rng * r;

    int n = 1000; // number of steps
    double x = 0, y = 0, z = 0; // start at the origin, using double for better
precision

    std::ofstream file;
    file.open("random_walk_3D.txt");

    gsl_rng_env_setup();

    T = gsl_rng_default;
    r = gsl_rng_alloc(T);

    gsl_rng_set(r, time(NULL)); // Set the seed based on current time for
randomness

    file << "0,0,0" << std::endl; // Save the starting point

    for (int i = 0; i < n; i++) {
        double phi = gsl_ran_flat(r, 0, 2 * M_PI);
        double theta = acos(gsl_ran_flat(r, -1, 1));
        x += sin(theta) * cos(phi);
        y += sin(theta) * sin(phi);
        z += cos(theta);
        file << std::fixed << std::setprecision(4) << x << "," << y << "," << z <<
std::endl;
    }
```

```
    file.close();
    gsl_rng_free(r);
    return 0;
}
```

Skrypty do generowania wykresów

Wykres spaceru 2D

```python
import matplotlib.pyplot as plt

# Load data
x, y = [], []
with open("random_walk_2D.txt", "r") as file:
    for line in file:
        parts = line.strip().split(',')
        x.append(float(parts[0]))
        y.append(float(parts[1]))

# Plot
plt.figure(figsize=(8, 8))
plt.plot(x, y, marker='o', markersize=2)
plt.title("2D Random Walk")
plt.xlabel("X Coordinate")
plt.ylabel("Y Coordinate")
plt.grid(True)
plt.show()
```

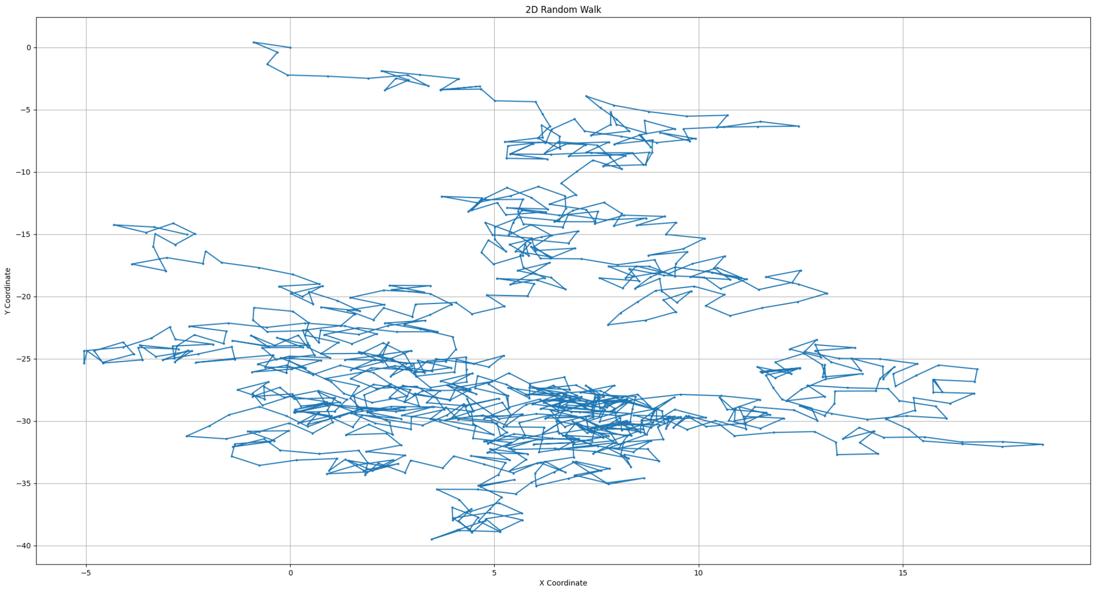
Wykres spaceru 3D

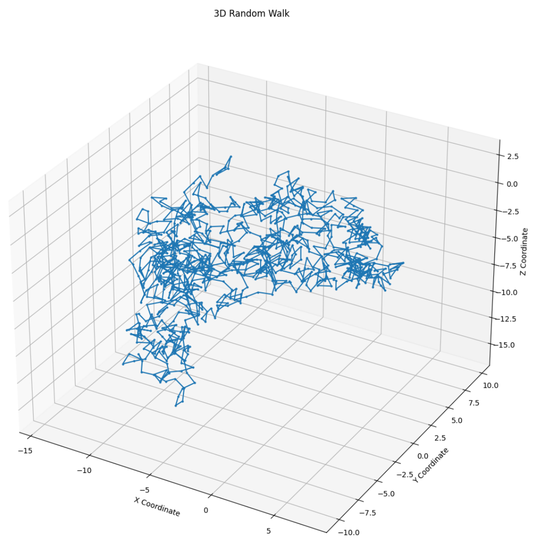
```python
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Load data
x, y, z = [], [], []
with open("random_walk_3D.txt", "r") as file:
    for line in file:
        parts = line.strip().split(',')
        x.append(float(parts[0]))
        y.append(float(parts[1]))
        z.append(float(parts[2]))

# Plot
fig = plt.figure(figsize=(8, 8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x, y, z, marker='o', markersize=2)
ax.set_title("3D Random Walk")
```

```
    ax.set_xlabel("X Coordinate")
    ax.set_ylabel("Y Coordinate")
    ax.set_zlabel("Z Coordinate")
    plt.show()
```

Analiza wyników

Przykładowe wykresy trajektorii - więcej w folderze "wykresy"





W przestrzeni dwuwymiarowej trajektoria przedstawia złożony, ale skoncentrowany wzór, gdzie ścieżka przecina sama siebie wielokrotnie, tworząc liczne pętle. To ilustruje charakterystykę spacerów losowych w niskich wymiarach, gdzie prawdopodobieństwo powrotu do wcześniejszej lokalizacji jest wysokie. Natomiast w przestrzeni trójwymiarowej trajektoria jest znacznie bardziej rozproszona niż w przypadku 2D. Spacer wydaje się bardziej rozciągnięty i mniej skoncentrowany, z mniejszą liczbą przecięć. Wzór w 3D pokazuje, jak dodanie kolejnego wymiaru może zmniejszyć prawdopodobieństwo powrotu do poprzednich pozycji.

Zadanie 3

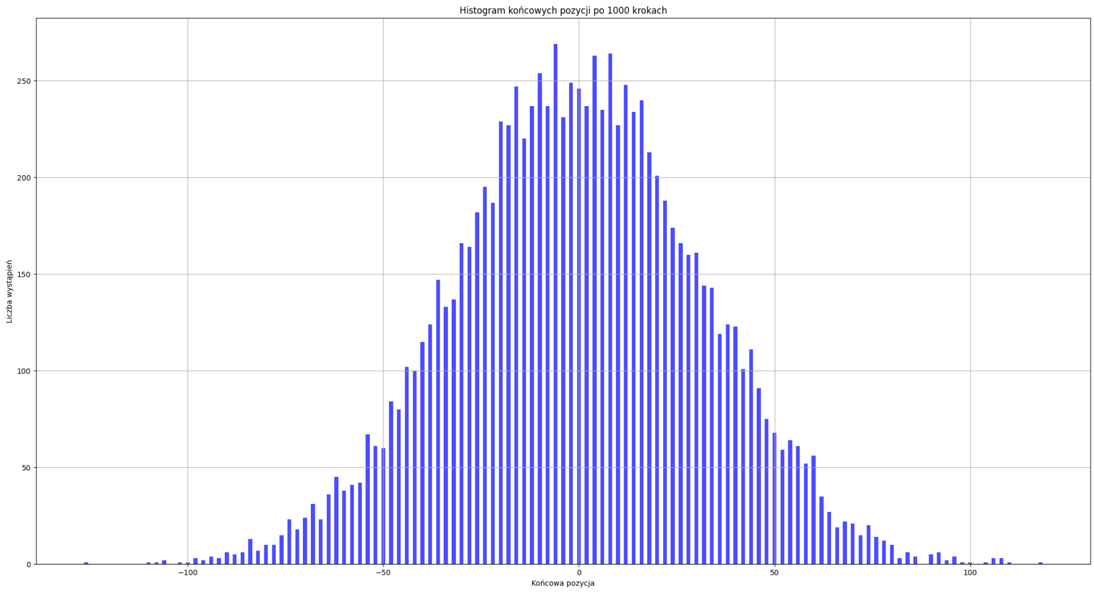
Kod programu - histogram

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(0)  # For repeatability
n_steps = 1000
n_simulations = 10000
final_positions = []

for _ in range(n_simulations):
    steps = np.random.choice([-1, 1], size=n_steps)  # Random steps
    final_position = np.sum(steps)  # Adding steps to get the final position
    final_positions.append(final_position)

# Creating a histogram
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.hist(final_positions, bins=50, color='blue', alpha=0.7)
plt.title('Histogram końcowych pozycji po 1000 krokach')
plt.xlabel('Końcowa pozycja')
plt.ylabel('Liczba wystąpień')
plt.grid(True)
plt.show()
```

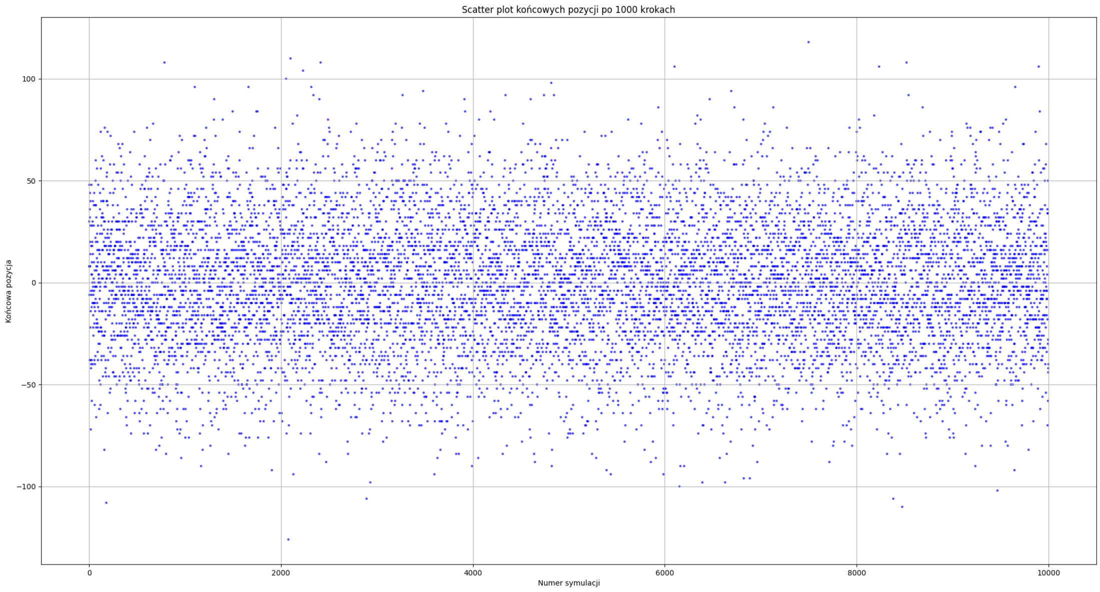
Kod programu - scatter plot

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

np.random.seed(0)  # Dla powtarzalności wyników
n_steps = 1000
n_simulations = 10000
final_positions = [np.sum(np.random.choice([-1, 1], size=n_steps)) for _ in
range(n_simulations)]

# Tworzenie scatter plot
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.scatter(range(n_simulations), final_positions, alpha=0.7, c='blue',
edgecolors='none', s=10)
plt.title('Scatter plot końcowych pozycji po 1000 krokach')
plt.xlabel('Numer symulacji')
plt.ylabel('Końcowa pozycja')
plt.grid(True)
plt.show()
```

Analiza wyników



Histogram, który został wygenerowany, wizualnie reprezentuje rozkład końcowych pozycji dziecka po wykonaniu 1000 kroków w jednowymiarowym spacerze losowym, gdzie każdy krok ma równą szansę być wykonanym w lewo (-1) lub w prawo (+1). Dziecko ma dużo większe prawdopodobieństwo znalezienia się blisko punktu początkowego, w odległości 1 jednostki, niż w odległości 30 jednostek od punktu startowego. Wyniki te są zgodne z teoretycznym modelem spaceru losowego, gdzie większe odległości są mniej prawdopodobne w wyniku sumowania równie prawdopodobnych, niezależnych kroków. Kształt rozkładu jest zbliżony do gaussowskiego (normalnego), co jest typowym wynikiem sumy dużej liczby losowych, jednakowo rozłożonych zmiennych (Twierdzenie Centralne Graniczne). Histogram z kubełkami ustawionymi na parzystych wartościach oznacza, że każdy kubełek (bin) agreguje dane z zakresu wartości, który obejmuje zarówno parzyste, jak i nieparzyste liczby. Na przykład, kubełek dla wartości 0 może obejmować dane od -1 do 1, kubełek dla wartości 2 od 1 do 3, i tak dalej. To pomaga zrozumieć, gdzie dokładnie skupiają się dane.



Duże skupienie punktów blisko środka (0) wskazuje, że bardzo prawdopodobne jest, iż dziecko zakończy spacer blisko punktu startowego. To jest zgodne z oczekiwaniami dla symetrycznego spaceru losowego. Widzimy również przypadki, w których dziecko kończy w pozycjach odległych, co pokazuje możliwość wystąpienia bardziej ekstremalnych rezultatów w spacerze losowym.

Zadanie 4

Kod programu

```
import numpy as np

def simulate_random_walk(dimension, steps):
    position = np.zeros(dimension)
    for _ in range(steps):
        move_direction = np.random.randint(0, 2*dimension)
        axis = move_direction // 2
        direction = 1 if move_direction % 2 == 0 else -1
        position[axis] += direction
        if np.all(position == 0):
            return True
    return False

def calculate_return_probability(dimension, num_walks, walk_length):
    successes = 0
    for _ in range(num_walks):
        if simulate_random_walk(dimension, walk_length):
            successes += 1
    return successes / num_walks

for d in range(1, 4):
    probability = calculate_return_probability(d, 1000, 1000)
```

```
    print(f"Prawdopodobieństwo powrotu do punktu zerowego w {d}D:
{probability:.4f}")
```

Analiza wyników

```
Prawdopodobieństwo powrotu do punktu zerowego w 1D: 0.9820
Prawdopodobieństwo powrotu do punktu zerowego w 2D: 0.6900
Prawdopodobieństwo powrotu do punktu zerowego w 3D: 0.3320
```

Wyniki pokazują wyraźny trend: zwiększenie wymiaru przestrzeni, w której odbywa się spacer, prowadzi do znacznego spadku prawdopodobieństwa powrotu do punktu wyjścia. Jest to zgodne z teoretycznymi przewidywaniami na temat spacerów losowych:

W 1D: Spacer ma bardzo wysokie prawdopodobieństwo powrotu do punktu startowego, co jest typowe dla jednowymiarowych błądzeń losowych. W 2D: Prawdopodobieństwo to jest już niższe, co odzwierciedla większą przestrzeń do eksploracji i mniejszą szansę na powrót. W 3D: Prawdopodobieństwo to jest najniższe, co ilustruje fakt, że w trójwymiarowej przestrzeni istnieje jeszcze więcej ścieżek, które oddalają od punktu początkowego.

Zadanie 5

Kod programu

```
import numpy as np

def simulate_random_walk(steps, directions):
    if directions == 4:
        moves = np.random.choice(range(4), size=steps)
        sin_move = np.sin(moves * np.pi / 2)
        cos_move = np.cos(moves * np.pi / 2)
    elif directions == 8:
        moves = np.random.choice(range(8), size=steps)
        angle = moves * np.pi / 4
        sin_move = np.sin(angle)
        cos_move = np.cos(angle)

    x = np.cumsum(cos_move)
    y = np.cumsum(sin_move)
    msd = np.mean(x[-1]**2 + y[-1]**2)
    return msd

def calculate_diffusion_coefficient(steps, num_simulations, directions):
    msds = [simulate_random_walk(steps, directions) for _ in
range(num_simulations)]
    mean_msd = np.mean(msds)
    diffusion_coefficient = mean_msd / (4 * steps)
    return diffusion_coefficient

# Parameters
steps = 10000
```

```python
num_simulations = 1000

# Calculate diffusion coefficients
D_4 = calculate_diffusion_coefficient(steps, num_simulations, 4)
D_8 = calculate_diffusion_coefficient(steps, num_simulations, 8)

print(f"Współczynnik dyfuzji dla 4 kierunków: {D_4}")
print(f"Współczynnik dyfuzji dla 8 kierunków: {D_8}")
```

Analiza wyników

```
Współczynnik dyfuzji dla 4 kierunków: 0.25384
Współczynnik dyfuzji dla 8 kierunków: 0.23466211198852407
```

Wyniki wskazują, że wprowadzenie dodatkowych kierunków (przekątnych) faktycznie zmniejszyło współczynnik dyfuzji. To może wydawać się sprzeczne z intuicją, że więcej kierunków zwiększa możliwości rozprzestrzeniania się, jednak warto zaznaczyć, że wprowadzenie przekątnych zmienia charakterystykę kroku.

Twierdzenie Centralne Graniczne mówi, że suma dużej liczby niezależnych zmiennych losowych dąży do rozkładu normalnego (Gaussa), niezależnie od rozkładu pojedynczej zmiennej. W kontekście eksperymentu:

Ruch w 4 kierunkach może być bardziej przewidywalny i regularny, co prowadzi do większej dyspersji. Ruch w 8 kierunkach wprowadza więcej zmienności, ale przesunięcia w każdym kroku są mniej "skuteczne" w osiąganiu dużych odległości od punktu początkowego, co może wydawać się niezgodne z TCL. Jednakże, zgodność z TCL w tym kontekście dotyczy rozkładu pozycji cząsteczki, a nie bezpośrednio wartości współczynnika dyfuzji. TCL sugeruje, że rozkład końcowych lokalizacji cząsteczki (dla dużej liczby kroków) powinien być normalny, co jest prawdopodobnie spełnione w obu przypadkach, lecz nie analizowano tego bezpośrednio.

W przypadku ruchu w 8 kierunkach, krok w przekątnym kierunku (np. północny-wschód) nie oddala się od początku tak bardzo jak krok w jednym z głównych kierunków (północ lub wschód). W przestrzeni 2D przekątne kroki mają mniejszy efektywny zasięg na osiach x i y niż kroki bezpośrednie. Dodatkowo, dodanie przekątnych zwiększa szansę "krążenia" cząsteczki w mniejszym obszarze, co zmniejsza jej efektywną dyfuzję.

Wnioski

W ramach Listy 6 udało się przeprowadzić szereg symulacji i analiz modelujących różnorodne scenariusze związane ze spacerami losowymi i ruchem cząsteczek. Zadania te pozwoliły na głębsze zrozumienie dynamiki systemów wielociałowych oraz procesów dyfuzyjnych w różnych warunkach.

Każde zadanie dostarczyło wartościowych danych, które pomogły zilustrować kluczowe koncepcje teoretyczne, takie jak prawdopodobieństwo powrotu do punktu początkowego, wpływ wymiarowości na zachowanie systemów oraz zmiany w dyfuzji przy różnych schematach ruchu cząsteczek. Przeanalizowane modele stanowią solidną bazę do dalszych badań i zastosowań w różnych dziedzinach nauki, od fizyki po inżynierię.