Wojciech Michaluk grupa nr 6 godz. 13:00-14:30 czw. A

Sprawozdanie z laboratorium nr 4: Przecinanie odcinków

Data wykonania: 30.11.2023r. Data oddania: 15.12.2023r.

1. Cel ćwiczenia

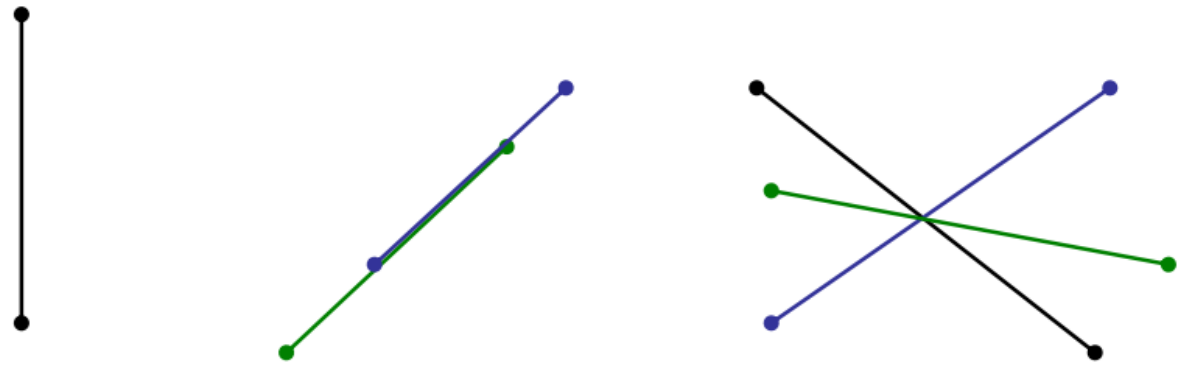
Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z algorytmem zamiatania wyznaczającym przecięcia się odcinków na płaszczyźnie oraz jego implementacja w dwóch wariantach: sprawdzanie, czy jakakolwiek para odcinków się przecina oraz obliczanie wszystkich punktów przecięć odcinków, a także wizualizacja wyników.

2. Wstęp teoretyczny

Algorytm zamiatania w ogólności wykorzystuje tzw. miotłę oraz pomocnicze struktury: strukturę zdarzeń Q oraz strukturę stanu T. W przypadku problemu rozważanego w ramach tego laboratorium, miotłą jest prosta równoległa do osi OY.

Założenia, które czynimy w ramach rozwiązania problemu:

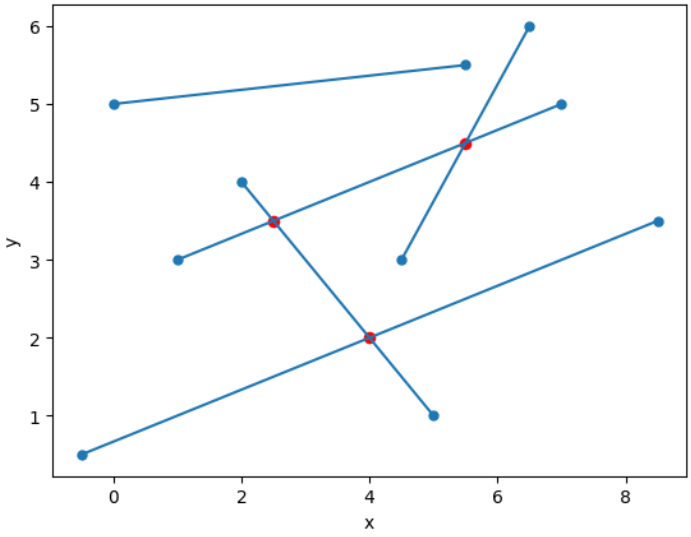
- żaden odcinek nie jest pionowy (równoległy do osi OY) ani nie ma tej samej współrzędnej x-owej końca odcinka co koniec innego odcinka
- dwa odcinki przecinają się w co najwyżej jednym punkcie (nie jest możliwa sytuacja, że pokrywają się – czy to całkowicie, czy częściowo)
- w jednym punkcie przecięcia przecinają się nie więcej niż dwa odcinki



Rys. 2.1 Powyższe sytuacje są „zabronione”

Kierunek zamiatania jest wzdłuż osi OX (w stronę rosnących x-ów). Przesuwanie miotły następuje w tym kierunku. Jako stan miotły rozumiemy zbiór odcinków przecinających miotłę. Miotła zatrzymuje się w punktach zdarzeń, którymi są końce odcinków oraz wykryte punkty przecięć. To właśnie tutaj następuje aktualizacja stanu miotły oraz testy przecięć.

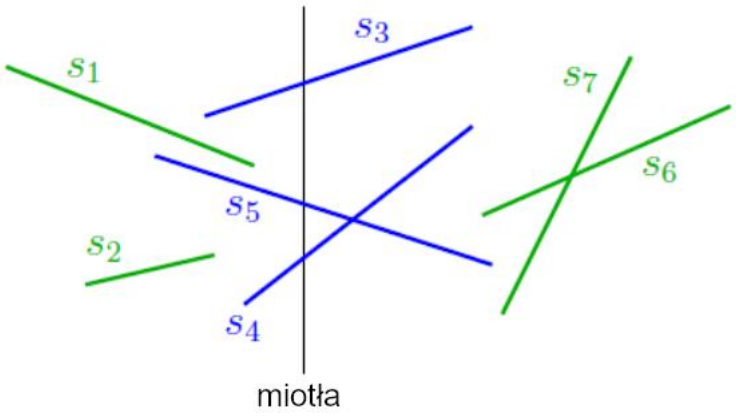
Informacje o zdarzeniach przechowujemy w strukturze zdarzeń, z kolei informacje potrzebne do obliczeń przechowujemy w strukturze stanu. Struktura stanu jest aktualizowana w każdym zdarzeniu. Na „zamiecionym” obszarze (czyli na lewo od miotły) znane jest rozwiązanie badanego problemu dla zdarzeń należących do tego obszaru, natomiast przecięcia na prawo od miotły są nieznane.



Rys. 2.2 Zdarzenia dla podanego przykładowego zbioru odcinków. Na czerwono zaznaczone są punkty przecięć, na niebiesko – końce odcinków.

W każdym położeniu miotły wyróżniamy odcinki:

- przetworzone – oba ich końce znajdują się na lewo od miotły
- aktywne – aktualnie przecinają miotłę
- oczekujące – o obu końcach na prawo od miotły



Rys. 2.3 Odcinki s_1 oraz s_2 są *przetworzone*. Odcinki *aktywne* w tym przypadku to s_3, s_4 i s_5. Odcinkami *oczekującymi* są s_6 oraz s_7.

3. Metodologia, specyfikacja narzędzi i sprzętu

Aby móc wprowadzać odcinki w sposób interaktywny przy użyciu myszki, skorzystałem z pakietu funkcji oferowanych przez bibliotekę matplotlib. Wykresy przedstawiające przykładowe i „wygenerowane” zbiory odcinków oraz wizualizacja poszczególnych kroków algorytmu zamiatania powstały przy użyciu biblioteki matplotlib oraz dzięki narzędziu przygotowanemu przez koło naukowe Bit.

Struktury pomocnicze do algorytmu zamiatania (zdarzeń, Q i stanu, T) zostały zaimplementowane z wykorzystaniem struktury **SortedSet** z zewnętrznego pakietu *sortedcontainers*. Jest to posortowany zbiór, który zapewnia obsługę podstawowych operacji potrzebnych do algorytmu zamiatania (wstawianie elementu, usuwanie ze struktury) w czasie $O(logn)$, gdzie n oznacza liczbę odcinków w wejściowym zbiorze – jest to pożądana złożoność.

Aby móc poprawnie obsługiwać dodawanie odcinków do struktury stanu i usuwanie ich z niej, stworzyłem dodatkowe klasy **Point** oraz **Section**. Wynika to ze specyfiki SortedSet – więcej szczegółów w pliku z implementacją.

Program (w pliku „michaluk_kod_4.ipynb") jest napisany w języku Python w środowisku Jupyter Notebook. Przedstawione wyniki pochodzą z uruchomienia programu na komputerze z systemem Windows 11 i procesorem Intel Core i5-8300H 2.30 GHz.

4. Program ćwiczenia

Na początku zaimplementowałem procedury pozwalające w sposób interaktywny wprowadzać odcinki poprzez zaznaczanie punktów myszką / generować zadaną liczbę odcinków o współrzędnych z podanego zakresu. Ich dokładny opis (m. in. „instrukcje" wprowadzania odcinków) znajduje się w pliku z implementacją.

Drugą częścią laboratorium jest implementacja algorytmu zamiatania w dwóch wariantach: aby sprawdzić, czy w zbiorze odcinków występuje jakiekolwiek przecięcie oraz aby znaleźć wszystkie przecięcia w zbiorze odcinków. W obu przypadkach użyłem wspomnianej struktury **SortedSet**.

W programie dla obu wersji zagadnienia wykorzystałem te same struktury zdarzeń i stanu. Istotna różnica polega na tym, że w pierwszym przypadku po wykryciu punktu przecięcia algorytm kończył działanie, zwracając stosowną wartość, a w drugim wariancie ten punkt był dodawany do struktury zdarzeń. Wydaje mi się, że nie ma konieczności używania tej samej struktury zdarzeń - można użyć innej struktury zdarzeń, ale niezależnie od wersji problemu w strukturze zdarzeń znajdują się wszystkie końce odcinków, które muszą być posortowane, więc rząd złożoności powinien być taki sam, jak przy użyciu SortedSet, czyli $O(nlogn)$.

Obsługa zdarzeń:

- początku odcinka – odcinek jest dodawany do struktury stanu T.
- końca odcinka – odcinek jest usuwany ze struktury stanu T
- przecięcia odcinków – kolejność przecinających się odcinków w strukturze stanu jest zamieniana

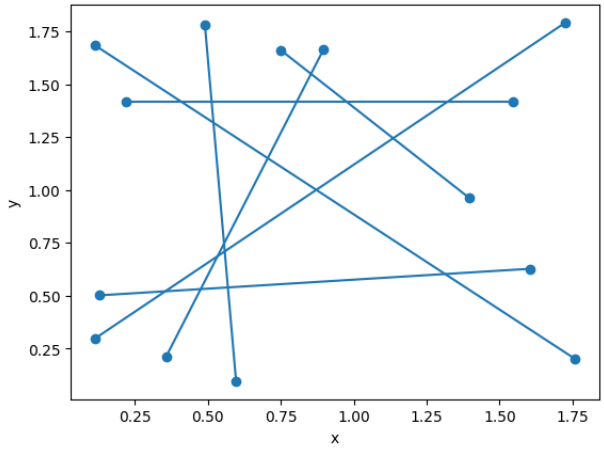
Zdarzenie jest pobierane na początku każdej iteracji głównej pętli ze struktury Q, zdarzenia są ułożone zgodnie z przyjętą konwencją kierunku zamiatania (w kierunku rosnących x-ów).

Wstawianie do struktury stanu T odbywa się z zachowaniem porządku – odcinki są ułożone rosnąco względem współrzędnej y-owej (z którą jest powiązany każdy aktywny odcinek).

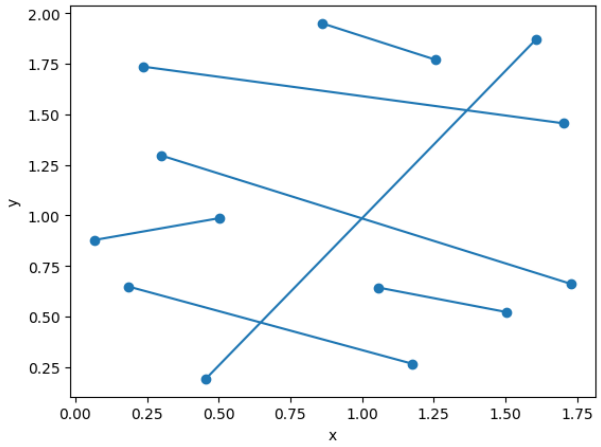
We wszystkich przypadkach po wykonaniu operacji badamy pary nowych „sąsiadów", szukając potencjalnych punktów przecięcia.

5. Testowane zbiory danych i wyniki działania algorytmów

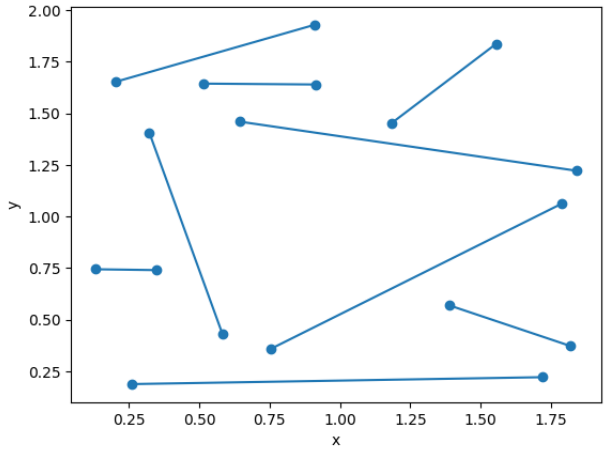
Aby testy były rzetelne, starałem się dobrać zbiory odcinków różnej natury. Na następnych stronach przedstawiam wybrane **cztery** zbiory odcinków, dla których przetestuję działanie zaimplementowanych w ramach tego laboratorium algorytmów. Wśród nich jest zbiór, w którym jest duża liczba przecięć; zbiór z małą liczbą przecięć; zbiór, w którym nie ma przecięć oraz zbiór, w którym odcinki są dobrane w taki sposób, że przecięcia mogłyby być wykrywane wielokrotnie.



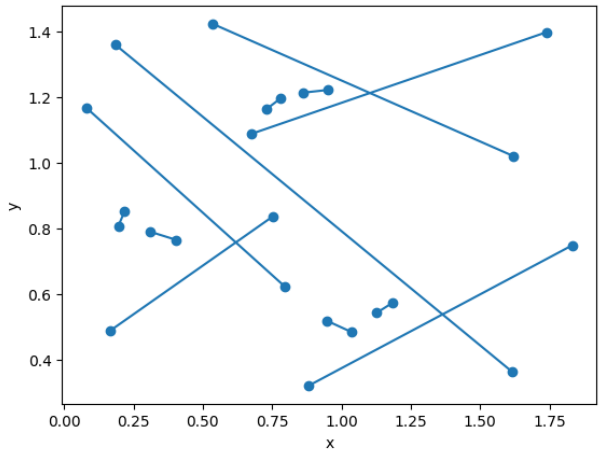
Rys. 5.1 Pierwszy testowany zbiór, z dużą liczbą przecięć – zbiór A



Rys 5.2 Drugi testowany zbiór, z małą liczbą przecięć – zbiór B



Rys. 5.3 Trzeci testowany zbiór, nie ma żadnego przecięcia – zbiór C



Rys. 5.4 Czwarty testowany zbiór, sprawdzający potencjalne kilkukrotne znalezienie punktu przecięcia – zbiór D

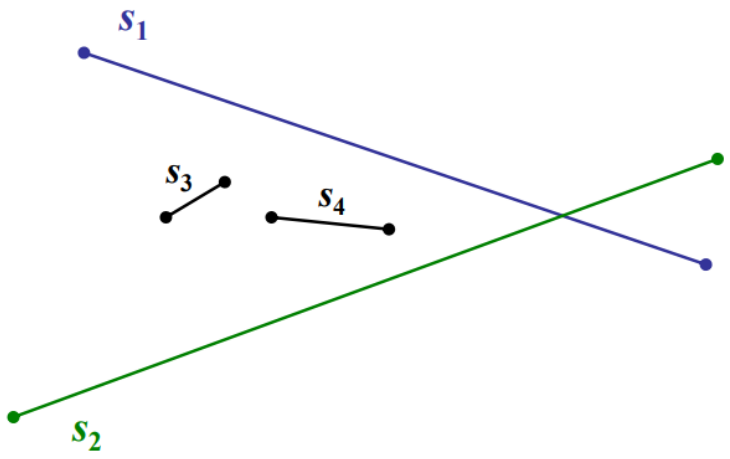
W poniższej tabeli przedstawiam wyniki działania funkcji sprawdzającej, czy istnieje co najmniej jedno przecięcie odcinków w zbiorze – True, jeśli w zbiorze występuje co najmniej jedno przecięcie, False w przeciwnym przypadku.

Testowany zbiór	Zbiór A	Zbiór B	Zbiór C	Zbiór D
Występuje przecięcie?	True	True	False	True

Tabela 5.5 Sprawdzenie występowanie przecięcia odcinków w testowanych zbiorach

Jak widać w tabeli 5.5, dla zbioru C słusznie program nie znalazł żadnego przecięcia – takowego nie ma. W pozostałych przypadkach znaleziono przecięcie. Co do zbioru D, czy w moim programie jedno przecięcie będzie wykryte wielokrotnie?

Przeanalizujmy tę sytuację. Dla układu odcinków podobnego jak poniżej (który kilkukrotnie się powtarza w zbiorze D) jedno przecięcie może być wykrywane (a co niepożądane – dodawane do struktury zdarzeń) wielokrotnie.



Rys. 5.6 Problematyczny układ odcinków – ale czy dla mojego algorytmu?

Punkt przecięcia odcinków s_1 i s_2 będzie wykryty trzykrotnie - przy dodawaniu lewego końca s_1; gdy usuwamy prawy koniec s_3 oraz gdy usuwamy prawy koniec s_4. **Czy mój program to uwzględnia?**

Tak. Korzystam ze zbioru (set), w którym zapisuję już sprawdzane pary odcinków, odnoszących się do ich indeksów. Tak jak ułożenie odcinków w trakcie wykonania programu się zmienia, tak ich indeksy z oryginalnej listy odcinków są niezmienne, więc żadna para odcinków nie będzie sprawdzana dwukrotnie. Wadą takiego rozwiązania jest pesymistyczna złożoność pamięciowa (jeżeli zostanie zapisana (prawie) każda para odcinków) - $O(n^2)$.

Algorytm zamiatania dla znajdowania wszystkich przecięć

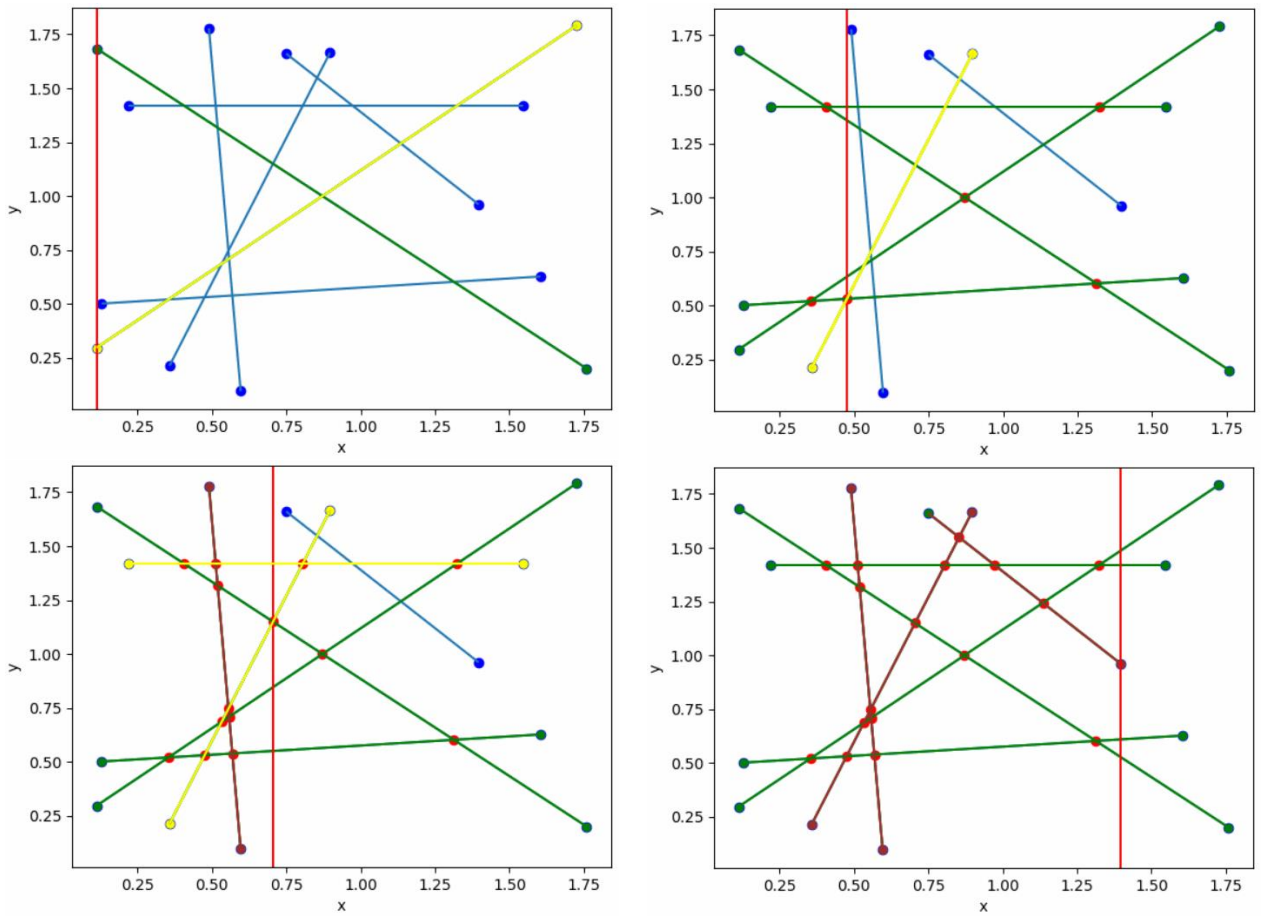
Dla każdego zbioru odcinków przedstawię teraz wybrane etapy algorytmu zamiatania oraz zamiecione zbiory. Konwencja kolorowania: punkty oraz odcinki mogą być zaznaczone kolorem

- niebieskim – są to odcinki oczekujące
- zielonym – są to odcinki aktywne
- żółtym – aktywne odcinki, które są w danej chwili sprawdzane
- brązowym – odcinki przetworzone

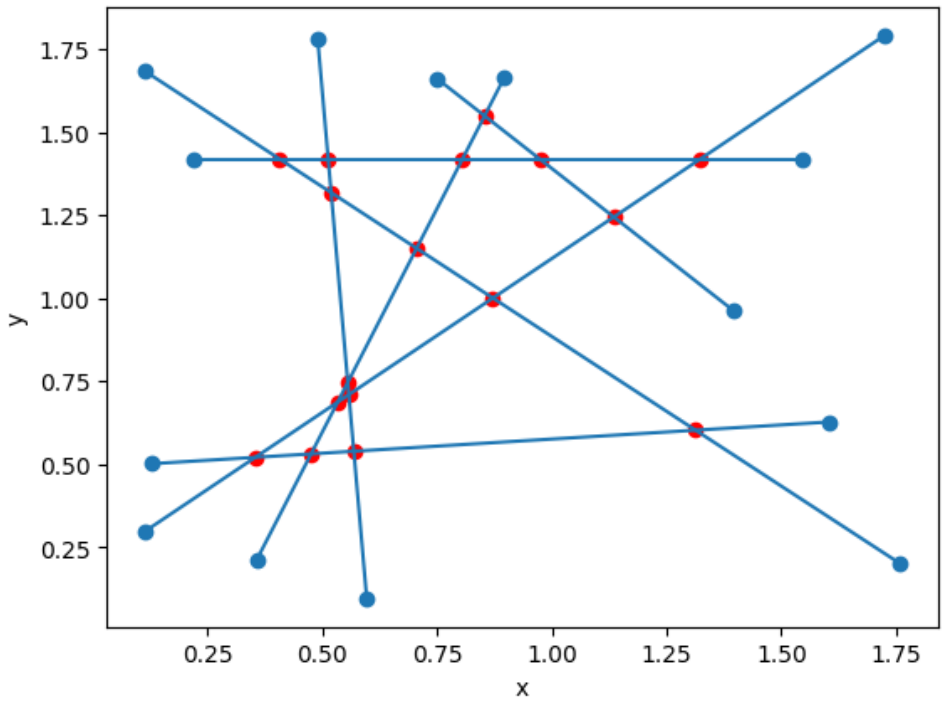
Ponadto miotła jest zaznaczona kolorem czerwonym.

Animacja przedstawiająca wszystkie kroki algorytmu zamiatania, wraz z efektem końcowym, są przedstawione w pliku z implementacją. W sprawozdaniu umieszczam również informacje o liczbie znalezionych przecięć w każdym ze zbiorów.

Zbiór A

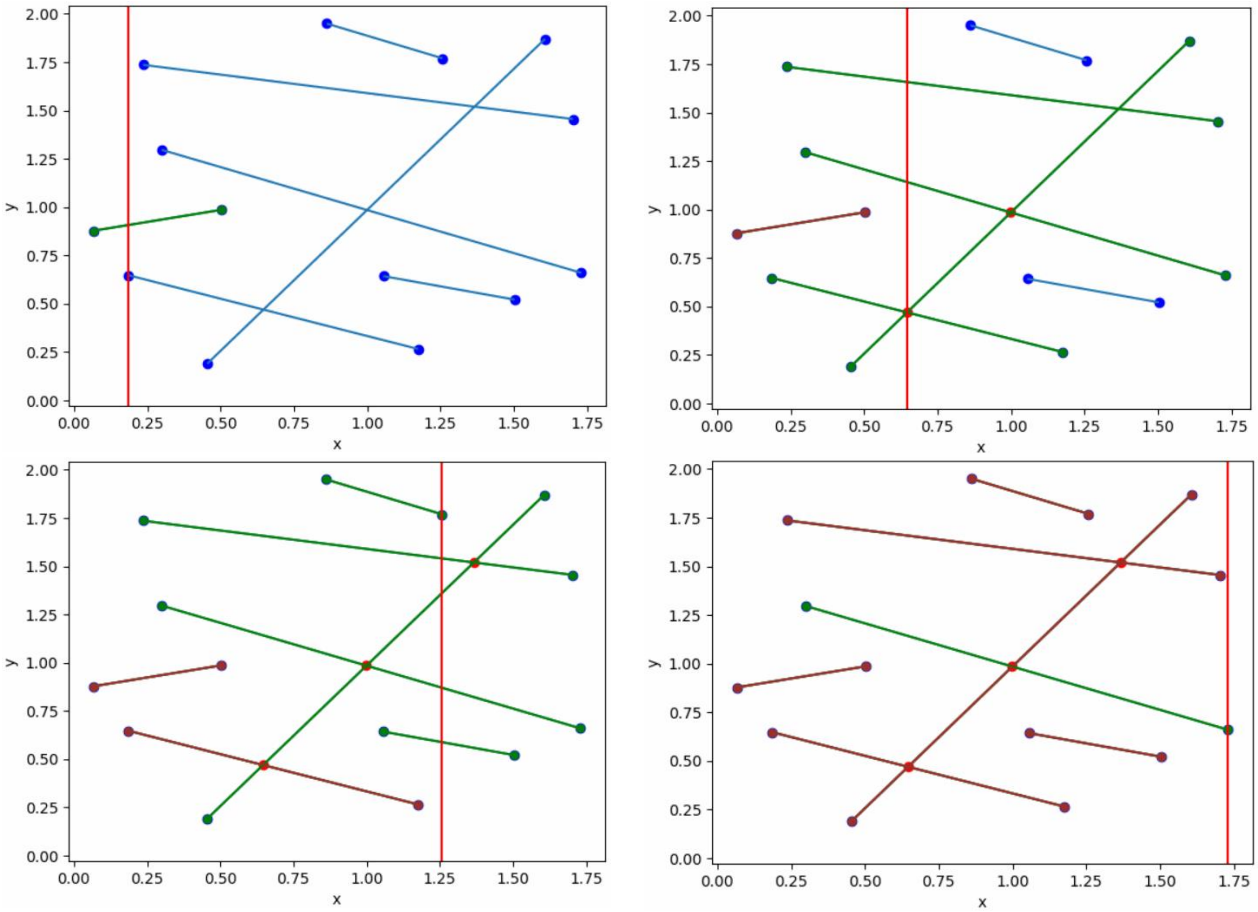


Rys. 5.7 Wybrane etapy algorytmu zamiatania dla zbioru A

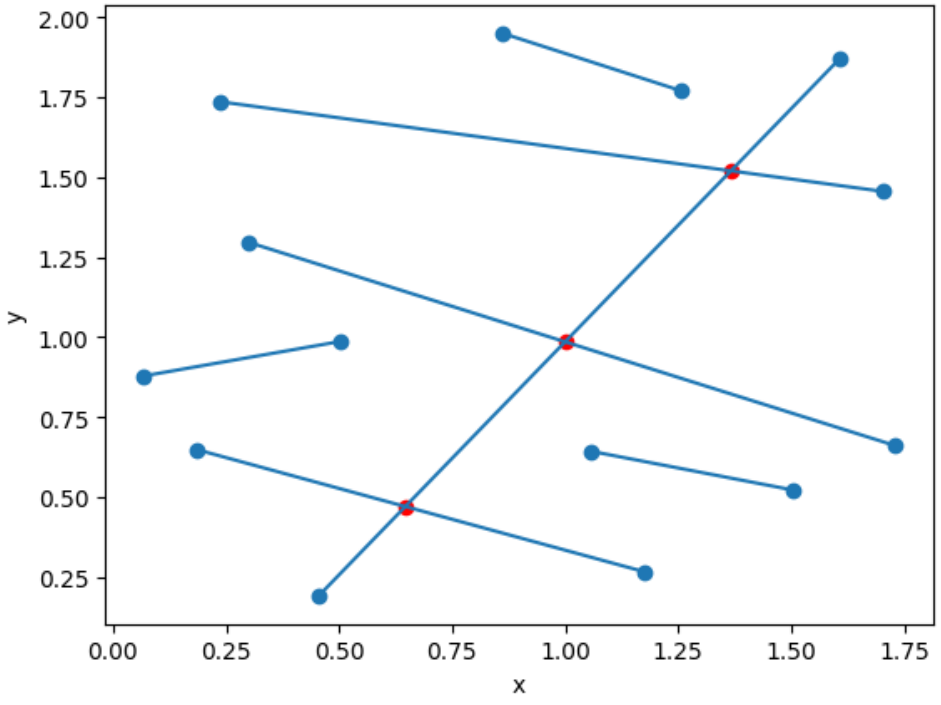


Rys. 5.8 Zamieciony zbiór A (17 przecięć)

Zbiór B

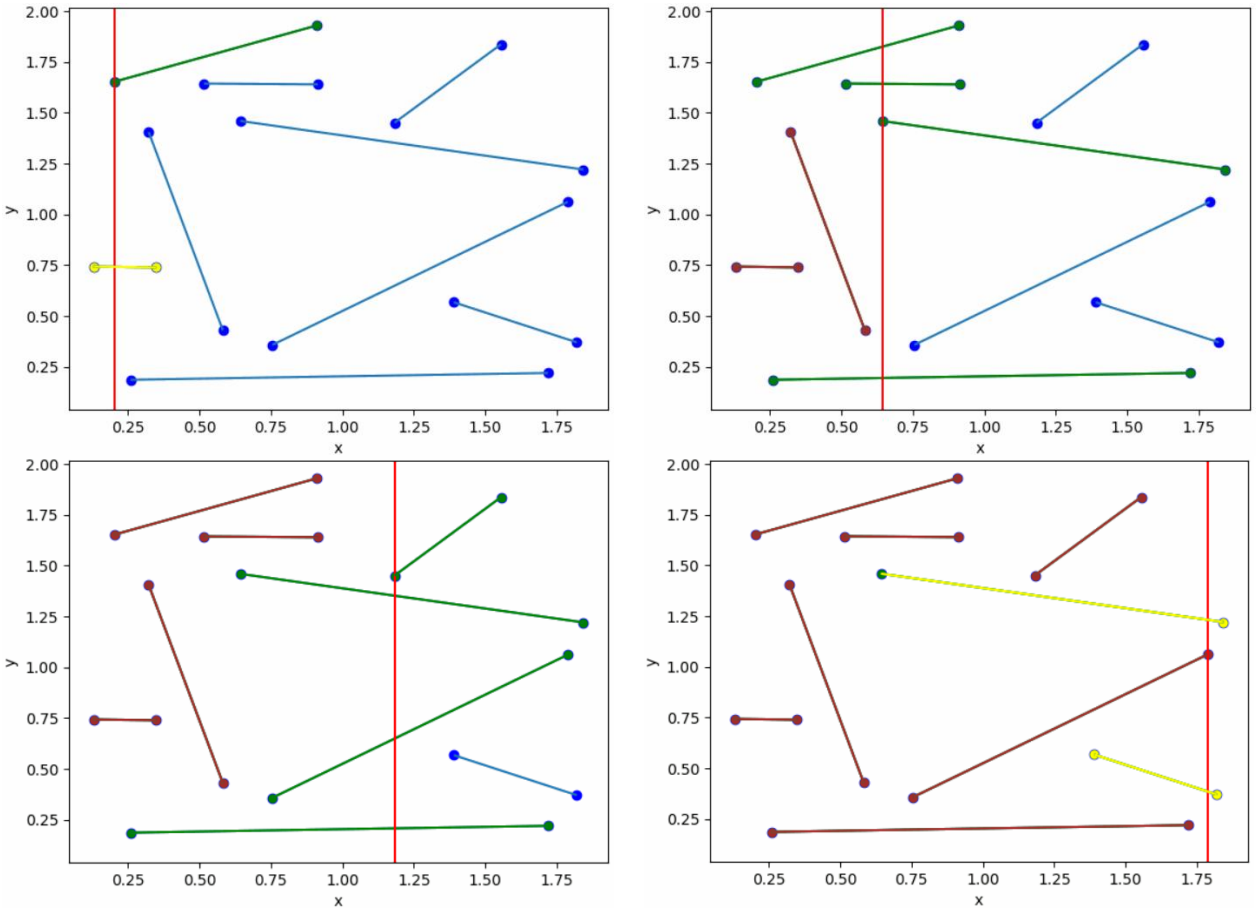


Rys. 5.9 Wybrane etapy algorytmu zamiatania dla zbioru B

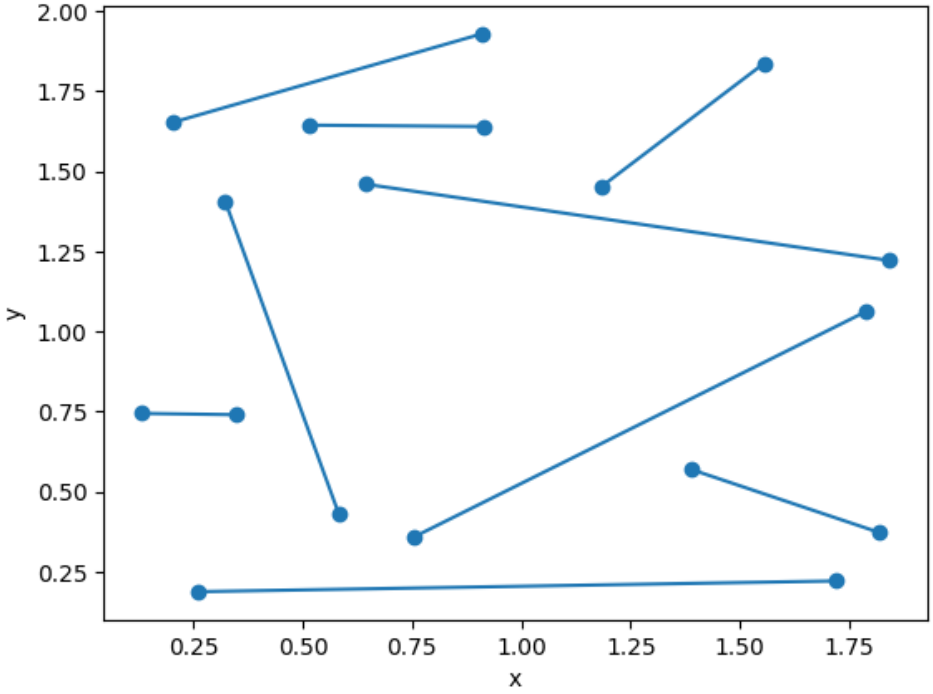


Rys. 5.10 Zamieciony zbiór B (3 przecięcia)

Zbiór C

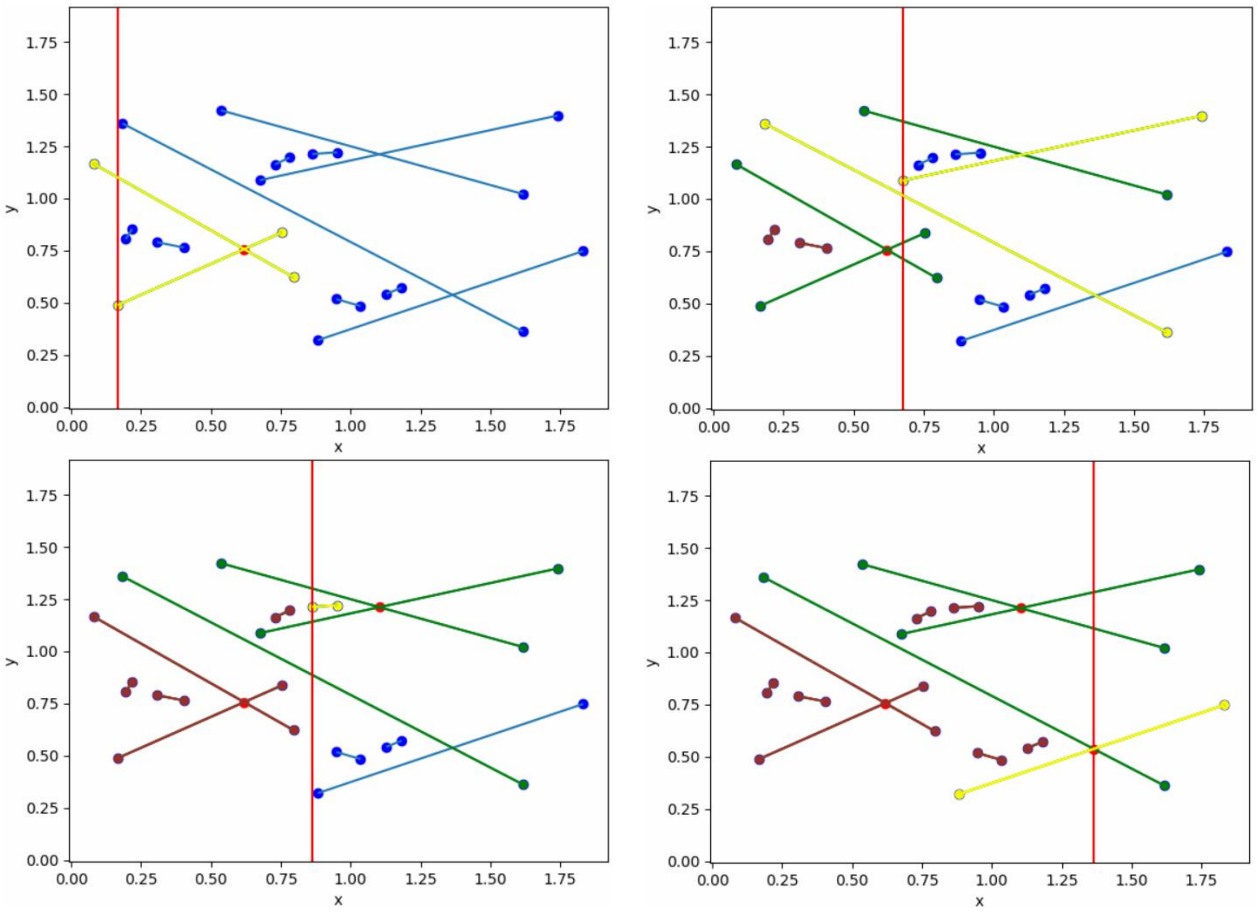


Rys. 5.11 Wybrane etapy algorytmu zamiatania dla zbioru C

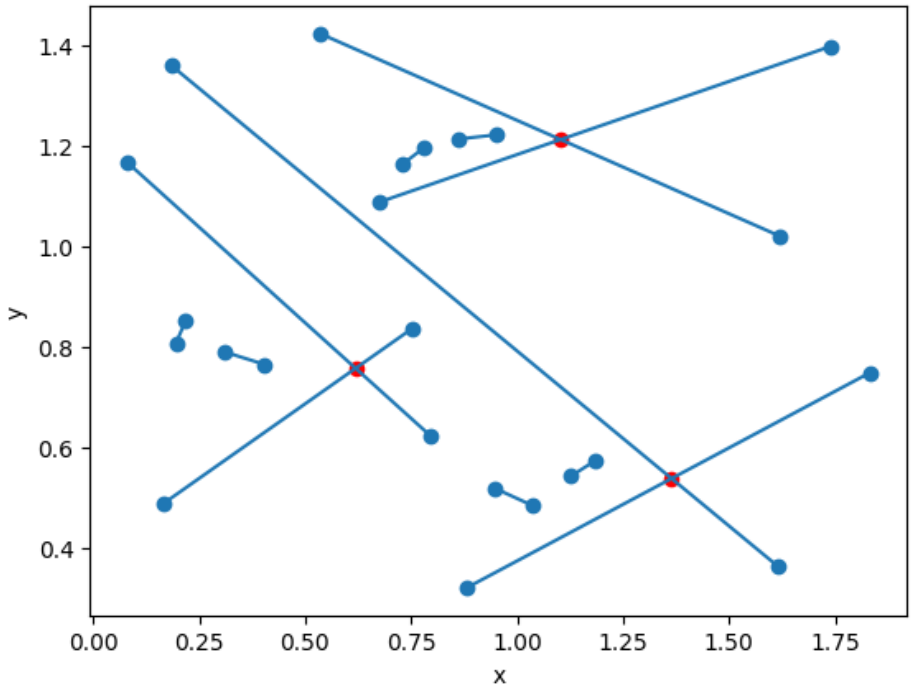


Rys. 5.12 Zamieciony zbiór C (0 przecięć)

Zbiór D



Rys. 5.13 Wybrane etapy algorytmu zamiatania dla zbioru D



Rys. 5.14 Zamieciony zbiór D (3 przecięcia)

6. Podsumowanie i wnioski

Testowane zbiory odcinków miały różną specyfikę, aby móc przetestować program w różnych warunkach. Zarówno dla przyjętych zbiorów testowych, jak i dla zbiorów w testach zaproponowanych przez Koło Naukowe AGH Bit, program radził sobie dobrze, co widać także na rysunkach i gifach wygenerowanych przez program. Program bazował na opisie algorytmu zamiatania przedstawionym na wykładzie.

Struktury zdarzeń i stanu można zaimplementować także w inny sposób. Modelowym rozwiązaniem jest użycie zrównoważonych (i/lub wzbogaconych) drzew BST, zapewnia to optymalną złożoność oraz przysparza mniej potencjalnych problemów przy „aktualizacji" współrzędnej y-owej odcinka, kiedy zmienia się współrzędna x-owa.

Złożoność algorytmu zamiatania to wtedy (dla mojej implementacji również) $O((P+n)logn)$, gdzie n oznacza liczbę odcinków, a P – liczbę przecięć. Z tego powodu, pesymistycznie złożoność czasowa jest gorsza niż złożoność algorytmu „Bruteforce", która jest oszacowana na $O(n^2)$, bowiem liczba przecięć może być kwadratowa względem liczby odcinków. Jednakże, zwykle liczba przecięć jest zdecydowanie mniejsza.