

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

WYDZIAŁ INFORMATYKI  
KIERUNEK INFORMATYKA



METODY OBLICZENIOWE W NAUCE I TECHNICE

---

## Laboratorium 9

Równania różniczkowe zwyczajne

---

Wojciech Michałuk, Kyryło Iakymenko

Kraków, 24 maja 2024

# 1 Wprowadzenie

W ramach zadań z dzisiejszego laboratorium będziemy zajmować się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Przeanalizujemy różne metody ich rozwiązywania na przykładzie kilku równań tego typu, a także zbadamy charakterystykę numeryczną tych metod - zwracając szczególnie uwagę na stabilność (zarówno numeryczną, jak i analityczną) w zależności od warunków początkowych i przyjętego kroku. Sprawdzimy także, jak równania różniczkowe zwyczajne dają sobie radę w podejściu do problemu wziętego z życia (szczególnie patrząc na przestrzeni ostatnich kilku lat), czyli modelowaniu przebiegu epidemii.

Czym są dokładnie równania różniczkowe zwyczajne? Ich definicję można w uproszczeniu przedstawić jako: równania, w których występuje jedna zmienna niezależna oraz funkcja tej zmiennej i jej pochodne, które są niewiadomymi - zatem to ich szukamy. Ponadto, żeby jako rozwiązanie uzyskać jednoznacznie konkretną funkcję, a nie rodzinę funkcji, zawsze będziemy mówić o **warunkach początkowych**. W zależności od maksymalnego rzędu pochodnych  $p$  wskazujemy na rząd równania różniczkowego.

Najczęściej używane konwencje zapisu równań różniczkowych (pierwszego rzędu) to:

$$y' + f(t, y) = 0, \quad (1)$$

$$y' = f(t, y), \quad (2)$$

w których  $t$  jest zmienną niezależną,  $y$  jest funkcją tej zmiennej, z kolei  $f$  jest tzw. *funkcją wyższego rzędu*, jest to pewne przekształcenie funkcji  $y$  oraz zmiennej  $t$  (zauważmy, że  $f$  z drugiego modelu to  $-f$  z modelu pierwszego). W tym laboratorium stosujemy tę drugą.

Zwykle na zmienną niezależną stosuje się właśnie oznaczenie  $t$ , gdyż kojarzy się ono z *czasem* i dokładnie taka zmienna pojawiała się w pierwszych równaniach różniczkowych, gdyż wywodziły się one z rozważań fizycznych.

## 2 Zadanie 1

### 2.1 Opis zadania

W pierwszym zadaniu należy każde z równań różniczkowych zwyczajnych:

1.  $y'' = y'(1 - y^2) - y$  - równanie Van der Pol'a,
2.  $y''' = -yy''$  - równanie Blasiusa,
3. II zasada dynamiki Newtona dla problemu dwóch ciał:

$$y_1'' = -GM y_1 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

$$y_2'' = -GM y_2 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}$$

przedstawić jako równoważny układ równań pierwszego rzędu, czyli z ang. *first-order system of ODEs*.

### 2.2 Opracowanie zadania

W celu przedstawienia równania różniczkowego zwyczajnego rzędu wyższego niż 1 jako układ równań pierwszego rzędu, należy wprowadzić dodatkowe zmienne, przy czym każda z nowych zmiennych "obniża" rząd równania o 1.

1. Przedstawimy równanie Van der Pol'a jako układ równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu. Wprowadzamy nową zmienną  $z = y'$ . Wtedy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu odpowiadający równaniu Van der Pol'a to:

$$\begin{cases} z = y', \\ z' = z(1 - y^2) - y. \end{cases}$$

Na końcu mamy dwa równania rzędu pierwszego i dwie niewiadome, więc będziemy w stanie go rozwiązać.

2. Teraz zajmijmy się równaniem Blasiusa. Stosujemy podstawienie w podobnym duchu jak poprzednio  $z = y'$  oraz  $w = z' = y''$ . Możemy więc przedstawić badane równanie w postaci układu równań rzędu pierwszego:

$$\begin{cases} z = y', \\ w = z', \\ w' = -yw. \end{cases}$$

3. Zastosujemy analogiczną technikę do ostatniego przykładu. Podstawiamy  $z_1 = y'_1$  i  $z_2 = y'_2$ . Na końcu dostajemy wtedy:

$$\begin{cases} z_1 = y'_1, \\ z_2 = y'_2, \\ z'_1 = -GM y_1 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}, \\ z'_2 = -GM y_2 / (y_1^2 + y_2^2)^{3/2}. \end{cases}$$

### 3 Zadanie 2

#### 3.1 Opis zadania

W zadaniu drugim celem jest rozwiązanie numeryczne równania różniczkowego zwyczajnego

$$y' = -5y.$$

Warunkiem początkowym jest  $y(0) = 1$ , przyjmujemy krok  $h = 0.5$ .

Należy zbadać stabilność analityczną oraz na przykładzie metody Eulera, w obu wersjach, tzn. *explicit* (jawnej) oraz *implicit* (niejawnej), przeanalizować:

- analityczną i numeryczną stabilność dla tego równania z użytym krokiem  $h$ ,
- wartość przybliżonego rozwiązania dla punktu  $t = 0.5$ .

#### 3.2 Opracowanie zadania

Wspomniane w opisie zadania metody Eulera (jawna i niejawna) są opisane następującymi równaniami:

1. jawna metoda Eulera:  $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_k, y_k)$ ,
2. niejawna metoda Eulera:  $y_{k+1} = y_k + h_k f(t_{k+1}, y_{k+1})$ .

W obu przypadkach odpowiednie oznaczenia reprezentują:

- $y_{k+1}, y_k$  to wartości funkcji występującej w równaniu różniczkowym w następnym i bieżącym punkcie siatki czasowej
- $t_{k+1}, t_k$  to wartości następnego i bieżącego punktu siatki czasowej
- $h_k$  to krok pomiędzy  $k + 1$ -ym a  $k$ -tym punktem siatki czasowej. W tym przypadku jest on stały i zgodnie z treścią zadania wynosi  $h = 0.5$ .
- $f$  to funkcja funkcji  $y$  i zmiennej niezależnej  $t$ , która jest dana - w tym przypadku  $f(t, y) = \lambda y = -5y$  (**zgodnie z konwencją!**).

Zauważmy, że w przypadku *niejawnej* metody Eulera, wartość  $y_{k+1}$ , którą chcemy wyliczyć, znajduje się po prawej stronie równania jako argument funkcji  $f$  (stąd właśnie ta metoda jest niejawna!). Oznacza to, że w celu obliczenia tej wartości należy ją najpierw **rozwikłać** - czyli rozwiązać odpowiednie równanie. W zależności od stopnia skomplikowania funkcji  $f$  może być to czynność kosztowna albo niezbyt obciążająca.

W tym przypadku łatwo wyznaczyć  $y_{k+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_k = \frac{2}{7} y_k$ .

### 3.2.1 Analityczna stabilność

Rozwiązaniem analitycznym równania jest funkcja  $y(t) = e^{-5t}$ . Sprawdźmy teraz analityczną stabilność otrzymanego rozwiązania. Dziedziną w naszym przypadku będzie  $t \geq 0$ .

Niech  $\varepsilon > 0$  i niech  $\delta = \varepsilon$ . Załóżmy, że  $\delta$  spełnia poniższą nierówność:

$$|y(t_0) - \hat{y}(t_0)| < \delta,$$

gdzie  $t_0 = 0$ , a  $\hat{y}(t)$  oznacza funkcję spełniającą równanie różniczkowe po perturbacji stanu początkowego. Przyjmujemy  $\hat{y}(t_0) = \hat{y}_0$ . Podstawiając do wzoru:

$$\begin{aligned} |y_0 - \hat{y}_0| &< \delta, \\ |1 - \hat{y}_0| &< \delta. \end{aligned}$$

Oczywiście  $0 < e^{-5t} \leq 1$  dla  $t \geq 0$ . Pomnóżmy obustronnie przez  $e^{-5t}$ :

$$\begin{aligned} e^{-5t}|1 - \hat{y}_0| &< e^{-5t} \cdot \delta, \\ |e^{-5t} - \hat{y}_0 e^{-5t}| &< e^{-5t} \cdot \varepsilon \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\hat{y}_0 e^{-5t}$  jest rozwiązaniem ogólnym równania dla zaburzonego warunku początkowego. Dlatego właśnie

$$|y(t) - \hat{y}(t)| < \varepsilon, \text{ dla } t \geq t_0.$$

Widzimy, że otrzymane rozwiązanie jest stabilne. Oczywiście jest również asymptotycznie stabilne, bo  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-5t} = 0$ .

### 3.2.2 Numeryczna stabilność

Teraz zbadajmy numeryczną stabilność metody Eulera w wersji jawnej i niejawnej. Jeżeli  $y' = \lambda y$  oraz  $h$  to przyjęty w metodzie krok, to warunkiem stabilności numerycznej dla metody jawnej jest, aby

$$|1 + h\lambda| < 1.$$

Podstawiając przyjęte wartości  $\lambda = -5$  oraz  $h = 0.5$ , otrzymujemy

$$|1 + h\lambda| = |1 + 0.5 \cdot (-5)| = |1 - 2.5| = |-1.5| = 1.5 > 1,$$

zatem w tym przypadku metoda jawna Eulera **nie jest** numerycznie stabilna.

Przeprowadźmy analogiczne rozumowanie dla niejawnej metody Eulera. W tym podejściu warunkiem stabilności numerycznej jest, aby

$$\left| \frac{1}{1 - h\lambda} \right| < 1.$$

Przedstawiamy obliczenia:

$$\left| \frac{1}{1 - 0.5 \cdot (-5)} \right| = \left| \frac{1}{1 + 2.5} \right| = \left| \frac{1}{3.5} \right| < 1,$$

zatem metoda niejawna Eulera **jest** numerycznie stabilna w tym przypadku.

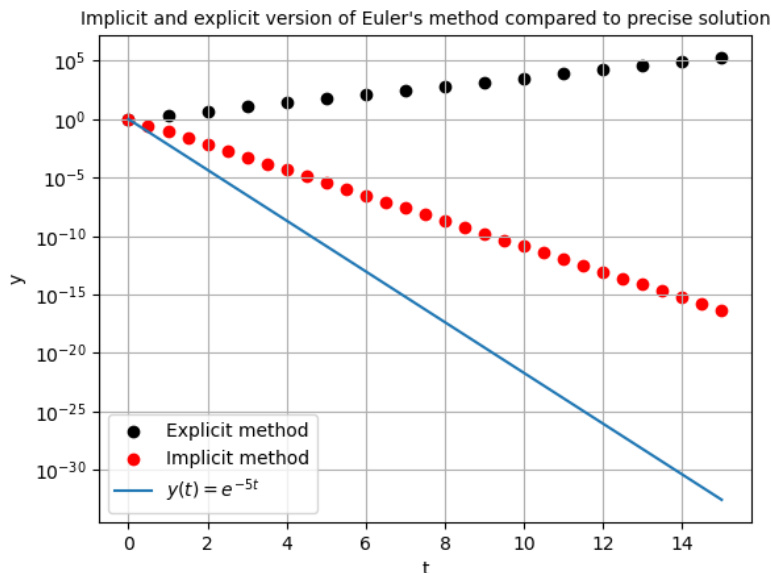
Zbadamy teraz, jak metody Eulera sprawdzają się w praktyce. Żeby lepiej zrozumieć charakterystykę obu metod, przedstawimy dwa wykresy w skali logarytmicznej: pierwszy jest wykresem wartości badanych metod w porównaniu do rzeczywistego rozwiązania, a drugi jest wykresem błędu względnego obu metod.

Najpierw jednak spójrzmy na tabelę prawdziwych wartości oraz wartości uzyskanych za pomocą metod Eulera dla  $t = 0.5$ .

Metoda	Uzyskana wartość dla $t = 0.5$
Prawdziwa wartość	0.0821
Postać jawna	-1.50
Postać niejawna	0.286

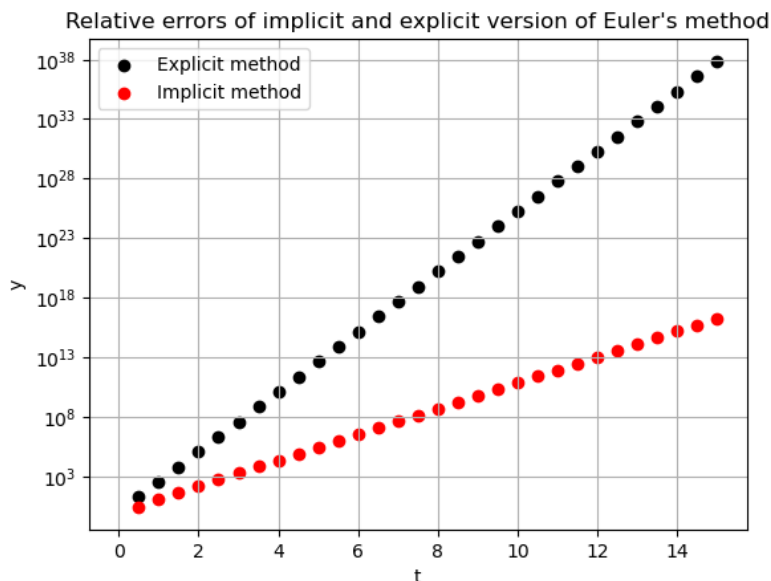
Tabela 1: Tabela porównawcza dla metod Eulera

Poniżej pierwszy ze wspomnianych wykresów.



Rysunek 1: Wspólny wykres logarytmiczny metod Eulera i rozwiązania badanego równania

Widzimy, że nasze teoretyczne przewidywanie dotyczące dokładności metod (chodzi o badanie numerycznej stabilności) się sprawdziły. Rzeczywiście, metoda w postaci niejawnej jest dużo bardziej dokładną aproksymacją, zarówno w naszym rozważanym przypadku, jak i na ogół. Metoda jawna daje w naszym przypadku aproksymację rosnącą, co pokazuje, na ile jest niedokładna, gdyż rzeczywiste rozwiązanie jest malejące na całej dziedzinie. Choć warto również zauważyć, że nawet dla metody niejawnej błąd względny rośnie bardzo szybko, co jest widoczne na kolejnym wykresie.



Rysunek 2: Wspólny wykres logarytmiczny błędów względnych metod Eulera

Już patrząc na tabelę porównawczą widać, jak wyniki (dla pierwszego wyrazu!) się różnią. Z kolei analizując poprzedni wykres, jak można było oczekiwać, błąd względny metody niejawnej rośnie dużo wolniej w porównaniu do metody jawnej, ale nawet wykorzystanie metody niejawnej nie zapewni nam dokładności potrzebnej dla żadnych praktycznych zastosowań. Już dla  $t = 14$ , czyli dla 28. wyrazu, błąd względny jest rzędu  $10^{15}$ .

## 4 Zadanie 3

### 4.1 Opis zadania

W zadaniu trzecim należy modelować przebieg epidemii w populacji, korzystając z modelu Kermack'a-McKendrick'a (znanego także pod nazwą model *SIR*) oraz przyjmując odpowiednie wartości początkowe. Układ równań różniczkowych opisujących ten model należy rozwiązać metodą Eulera (jawną i niejawną) oraz metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4). Następnie należy wykonać wykresy komponentów wspomnianego modelu jako funkcje czasu  $t$  oddzielnie dla każdego z rozwiązań oraz przedstawić je odpowiednio (zsumowane) na wspólnym wykresie.

Finalną częścią zadania jest podejście odwrotne do pierwotnego: mając informacje o wartościach jednego z komponentów, zadaniem jest oszacowanie wartości charakterystycznych współczynników poprzez wybranie jednej z trzech wcześniej użytych metod oraz zminimalizowanie funkcji kosztu, którą najpierw jest suma kwadratów reszt (ang. *residual sum of squares*, RSS), a następnie należy jako funkcję kosztu przyjąć inną funkcję i powtórzyć obliczenia.

### 4.2 Opracowanie zadania

Wspomniany w opisie zadania model przebiegu epidemii jest opisany poprzez układ równań różniczkowych:

$$S' = -\frac{\beta}{N}IS, \quad (3)$$

$$I' = \frac{\beta}{N}IS - \gamma I, \quad (4)$$

$$R' = \gamma I. \quad (5)$$

W tym modelu (SIR) kolejno:

- $S$  oznacza liczbę zdrowych osób, **podatnych** na zachorowanie (ang. *susceptible*),
- $I$  oznacza liczbę **zainfekowanych** osób, roznoszących infekcję (ang. *infectious*),
- $R$  oznacza liczbę osób **ozdrowiałych**, odpornych na chorobę (ang. *recovered*).

Ponadto  $N$  to jest liczba osób w populacji, parametr  $\beta$  to współczynnik zakaźności (ang. *transmission rate*) oraz parametr  $\gamma$  to współczynnik wyzdrowień (ang. *recovery rate*). Stąd  $1/\gamma$  reprezentuje średni czas choroby. Przyjęte założenia modelu, częściowo wynikające z powyższych równań:

1. Przyrost liczby zakażonych osób jest proporcjonalny do liczby obecnie zakażonych osób oraz do liczby osób podatnych.
2. Przyrost liczby osób odpornych lub zmarłych (którym wprost nie poświęcamy tutaj komponentu - tak się dzieje np. w modelu *SIRD*, gdzie mamy dodatkową kategorię  $D$  - *deceased*) jest wprost proporcjonalny do liczby osób aktualnie chorych.
3. Okres inkubacji choroby jest zaniedbywalnie krótki.
4. Populacja jest wymieszana.

Diagram przejść osób między "stanami" wraz z "tempem" tych przejść można przedstawić następująco (**Uwaga!** Poprawiliśmy błąd, zamiast  $\beta IS$  jest  $\frac{\beta}{N}IS$ ):



Rysunek 3: Diagram przejść osób między poszczególnymi kategoriami w modelu

Powyższy obrazek został zaczerpnięty z materiału referencyjnego do tego laboratorium.

Przejdźmy teraz do właściwej części opracowania zadania. Ustalamy jako wartości początkowe:

$$S(0) = 762, I(0) = 1, R(0) = 0.$$

Przyjmujemy populację początkową  $N(0) = S(0) + I(0) + R(0) = 763$  oraz zakładamy wartości parametrów:  $\beta = 1$  i  $\gamma = 1/7$ , stąd mamy średni czas trwania choroby (np. przyjmijmy, że to grypa) wynoszący 7 dni.

Całkujemy od  $t = 0$  do  $t = 14$ , przyjmując krok 0.2. W tym zadaniu oprócz omówionych w ramach zadania 2. metod Eulera (jawnej i niejawnej), używamy także metody Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4). Jest ona opisana równaniem

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h_k}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

gdzie:

- $k_1 = f(t_k, y_k)$ ,
- $k_2 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_1/2)$ ,
- $k_3 = f(t_k + h_k/2, y_k + h_k k_2/2)$ ,
- $k_4 = f(t_k + h_k, y_k + h_k k_3)$ ,
- pozostałe oznaczenia są takie same.

W przypadku metody Eulera (jawnej) sposób postępowania jest analogiczny. Metoda Rungego-Kutty również nie wymaga skomplikowanych operacji. Natomiast dla każdego z komponentów  $S$ ,  $I$ ,  $R$ , aby zastosować metodę Eulera w wersji niejawnej, rozwikłujemy kolejne równania:

1. Rozwikłane równanie dla  $S$ :

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k + h_k \left( -\frac{\beta}{N} I S_{k+1} \right) \\ S_{k+1} \left( 1 + h_k \frac{\beta}{N} I \right) &= S_k \\ S_{k+1} &= \frac{1}{1 + h_k \frac{\beta}{N} I} S_k \end{aligned}$$

2. Rozwikłane równanie dla  $I$ :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= I_k + h_k \left( \frac{\beta}{N} I_{k+1} S - \gamma I_{k+1} \right) \\ I_{k+1} \left( 1 + h_k \gamma - h_k \frac{\beta}{N} S \right) &= I_k \\ I_{k+1} &= \frac{1}{1 + h_k \gamma - h_k \frac{\beta}{N} S} I_k \end{aligned}$$

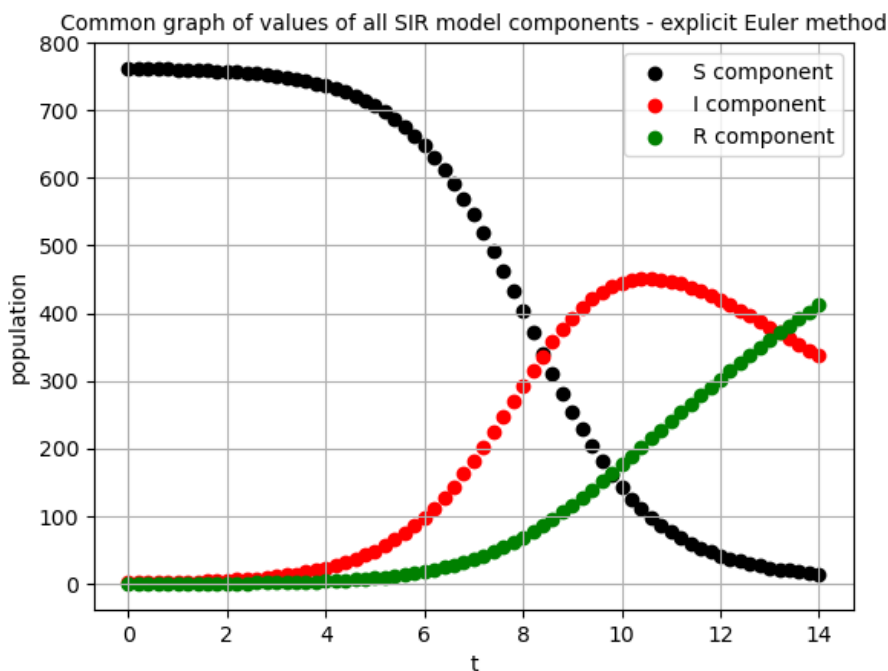
3. Dla  $R$  tak naprawdę nie trzeba rozwikłać równania, bowiem  $R'$  nie zależy wprost od  $R$ . Mamy zatem:

$$R_{k+1} = R_k + h_k \gamma I$$

#### 4.2.1 Porównanie rozwiązań dla różnych metod

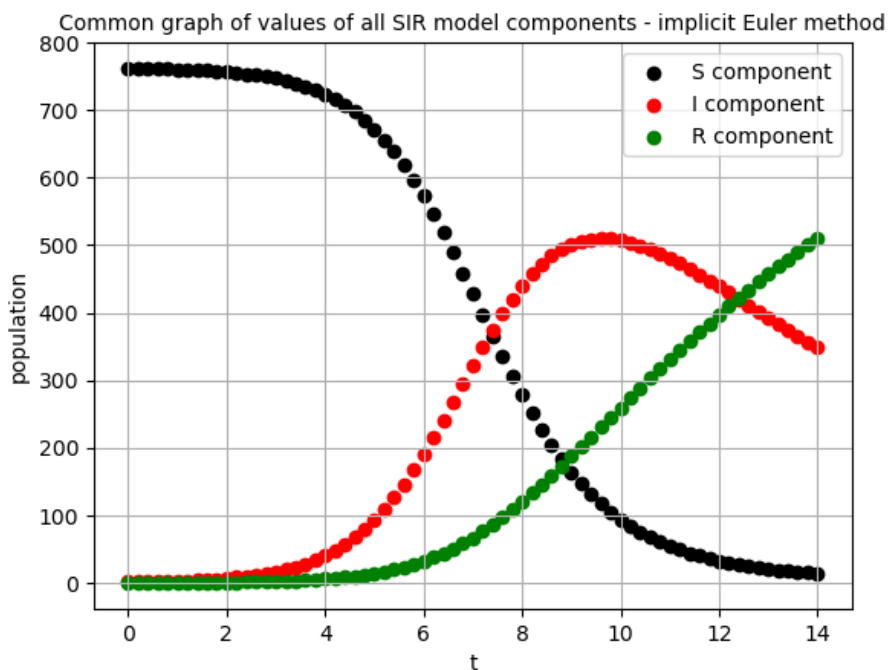
Najpierw przedstawmy wspólne wykresy wszystkich komponentów rozwiązania ( $S, I, R$ ) dla każdej metody.

W przypadku metody Eulera w wersji jawnej wykres wygląda następująco:



Rysunek 4: Wykres komponentów modelu SIR dla metody Eulera w wersji jawnej

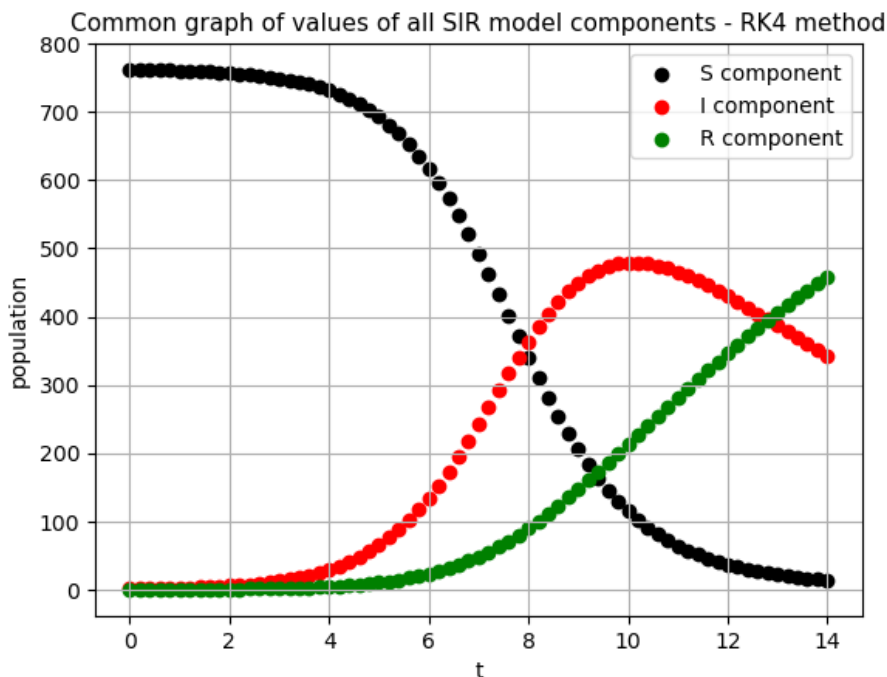
Dla wersji niejawnej metody Eulera wykres wygląda podobnie. Kształt wykresu jest praktycznie taki sam, ale występują drobne różnice, które mogą się okazać decydujące w kontekście oceny każdej z metod.



Rysunek 5: Wykres komponentów modelu SIR dla metody Eulera w wersji niejawnej



Na koniec spójrzmy na wyniki dla metody Rungego-Kutty.



Rysunek 6: Wykres komponentów modelu SIR dla metody Rungego-Kutty rzędu czwartego

Patrząc na wykresy, można stwierdzić, że w każdym modelu komponent  $S$  zaczyna powoli maleć, mniej więcej w środku rozważanego przedziału czasu gwałtownie maleje (wartość  $t$  od 5 do 10), następnie tempo spadku ulega znacznemu zmniejszeniu.

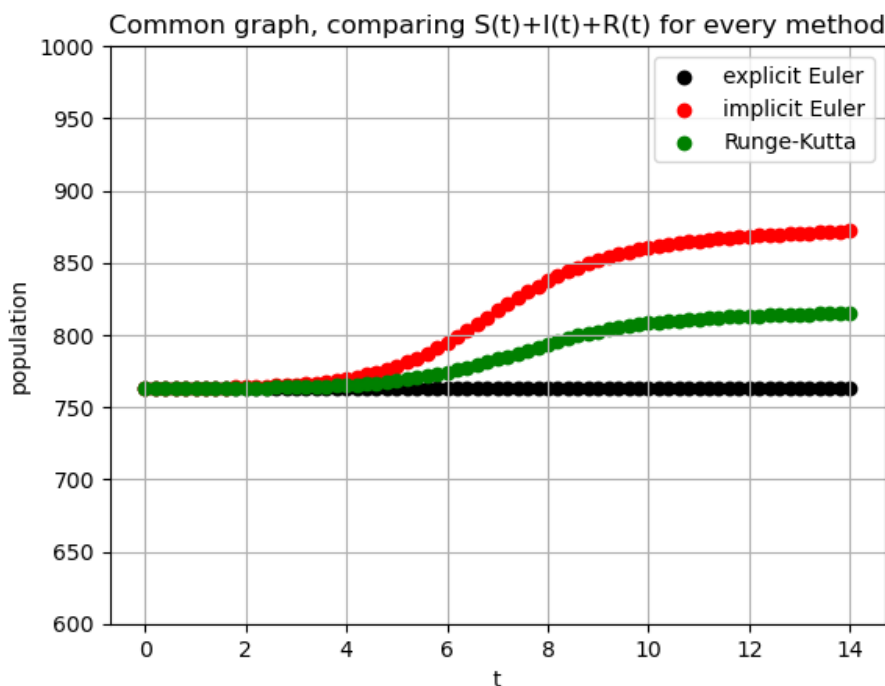
Z kolei liczba osób zainfekowanych i roznoszących chorobę (komponent  $I$ ) najpierw powoli rośnie, od mniej więcej 4. dnia zaczyna gwałtownie wzrastać, osiąga maksimum i zaczyna maleć. Tutaj już widać różnice, kiedy jest osiąganе maksimum i ile ono wynosi. Dla metody Eulera w wersji jawnej dzieje się tak dla  $t$  w przedziale od 10 do 11, a liczba osób wynosi około 450; z kolei dla wersji niejawnej maksimum następuje dla  $t$  od 9 do 10 oraz przekracza 500 osób. Metoda Rungego-Kutty plasuje się pomiędzy tymi wartościami.

Liczba osób ozdrowiałych (komponent  $R$ ) od około 6. dnia w każdym modelu zaczyna rosnąć, a różnice są widoczne, gdy spojrzymy na końcowe uzyskane wartości - zachowując tę samą kolejność omawiania metod co w poprzednim akapicie, uzyskujemy odpowiednio około 400, 500 i 450 osób - czyli różnice są zauważalne.

To wszystko wpływa na własność zachowania niezmiennika  $S(t) + I(t) + R(t) \equiv N$ , tzn. że w każdym punkcie czasowym suma komponentów powinna być równa liczebności populacji (początkowej), wynoszącej  $N = 763$ . Dzieje się tak, ponieważ w naszym modelu nie uwzględniamy osób zmarłych (wszyscy zainfekowani w końcu wyzdrowieją) oraz żadnego zewnętrznego napływu osób, rozmnażania itd.

**Czy ten warunek jest spełniony dla każdej metody?**

Odpowiedź na to pytanie poznamy, analizując poniższy wykres.



Rysunek 7: Wykres wspólny funkcji  $S(t) + I(t) + R(t)$  dla każdej metody

Widzimy, że jedynie metoda Eulera w wersji niejawnej ma szansę zachować niezmiennik. Istotnie, po sprawdzeniu wartości funkcji sumy wszystkich komponentów modelu, okazuje się, że w każdym punkcie czasowym  $t$  wartość ta wynosi 763, dokładnie tyle, ile stanowiła początkowa populacja.

Dla pozostałych metod gołym okiem widać, że na koniec populacja urosła. W przypadku metody Eulera w wersji niejawnej wartość sumy komponentów modelu dla  $t = 14$  wynosi dokładnie 872, natomiast dla metody Rungego-Kutty jest to 815.

#### 4.2.2 Znajdowanie optymalnych współczynników dla podanych danych

Druga część zadania polega na wyznaczeniu optimum dla współczynników  $\beta, \gamma$ , przyjmując różne funkcje kosztu. Mamy informacje o kształtowaniu się liczby osób zakażonych w pewnej szkole na przestrzeni dwóch tygodni.

Dzień, $t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zakażeni, $I$	1	3	6	25	73	222	294	258	237	191	125	69	27	11	4

Tabela 2: Kształtowanie się liczby osób zakażonych w pewnej szkole

Jako metodę numeryczną używaną w procesie znajdowania wartości optymalnych wybieramy metodę Eulera w wersji jawnej - w poprzedniej części zadania wywarła na nas pozytywne wrażenie.

Jako funkcję kosztu najpierw wykorzystujemy sumę kwadratów reszt. Dokładny wzór ma postać

$$L(\theta) = \sum_{i=0}^T (I_i - \hat{I}_i)^2,$$

gdzie  $\theta = [\beta, \gamma]$ ,  $I_i$  oznacza prawdziwą liczbę zakażonych (dane z tabeli), a  $\hat{I}_i$  oznacza liczbę zakażonych wyznaczonych metodą numeryczną.

Do minimalizacji wykorzystujemy metodę *Nelder-Mead*, bowiem nie wymaga ona informacji o gradiencie (której nie mamy). Ta metoda opiera się na konstruowaniu tzw. *sympleksu* w przestrzeni  $\mathbb{R}^n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę zmiennych niezależnych (w naszym przypadku  $n = 2$ , bo mamy dwa parametry). Ponadto mamy zestaw operacji, takich

jak odbicie, kontrakcja, ekspansja i inne. Na stronie <http://www.optymalizacja.w8.pl/simplexNM.html> jest zawarty opis tej metody, na którym się wzorowaliśmy przy próbie samodzielnej implementacji. Jednakże jest to zadanie trudne i osiągnięte wyniki nie były satysfakcjonujące, więc finalnie skorzystamy z implementacji tej metody z biblioteki `scipy`, mianowicie funkcja `scipy.optimize.minimize` z argumentem *method* równym 'Nelder-Mead'.

Ponieważ nie mamy podanych dodatkowych informacji, a do wyznaczenia liczby osób zainfekowanych potrzebna jest także liczba osób podatnych (komponent  $S$ ) w każdym punkcie czasowym - liczba osób ozdowiających w tym przypadku nie jest obiektem naszego zainteresowania - przyjmujemy więc, podobnie jak w pierwszej części zadania  $S(0) = 762$ .

Po wywołaniu funkcji `minimize` oraz wykonaniu algorytmu, otrzymane wyniki (z dokładnością do 3 cyfr po przecinku) prezentują się następująco:

optymalna wartość  $\beta \approx 2.146$

optymalna wartość  $\gamma \approx 0.604$

Przedstawmy przebieg kształtowania się liczby osób zakażonych w populacji dla tych wartości parametrów.

Dzień, $t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zakażenia, $I$	1	3	6	16	40	96	207	349	326	132	53	21	8	3	1

Tabela 3: Kształtowanie się liczby osób zakażonych dla obliczonych parametrów

Zanim przejdziemy do omówienia tych wyników, przedstawmy rezultaty dla innej proponowanej funkcji kosztu. Zgodnie z poleceniem, jest ona dana wzorem

$$L(\theta) = - \sum_{i=0}^T I_i \ln \hat{I}_i + \sum_{i=0}^T \hat{I}_i,$$

gdzie odpowiednie oznaczenia są tożsame z tymi w pierwszej funkcji kosztu.

Przyjmujemy te same wartości początkowe co w poprzednim podejściu i wykonujemy algorytm Nelder-Meada dla nowo przyjętej funkcji kosztu. Otrzymujemy następujące (zaokrąglone) wyniki:

optymalna wartość  $\beta \approx 2.238$

optymalna wartość  $\gamma \approx 0.440$

Tym razem przebieg liczebności kategorii  $I$  w naszym modelu epidemii jest zgoła inny.

Dzień, $t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Zakażenia, $I$	1	3	8	22	59	152	340	506	286	160	90	50	28	16	9

Tabela 4: Kształtowanie się liczby osób zakażonych dla obliczonych parametrów

Oczywiście w obu przypadkach charakter zmienności jest podobny - najpierw liczba zainfekowanych rośnie, mniej więcej po tygodniu osiąga maksimum oraz następnie spada, pod koniec osiągając jednocyfrową wartość. Różnice są widoczne, jeżeli popatrzymy na konkretne wartości liczbowe. Zapewne przy zastosowaniu innej metody uzyskalibyśmy odmienne wyniki - ale czy byłyby one lepsze, czy gorsze, należałoby sprawdzić, porównując wartości funkcji kosztu.

Dla parametrów minimalizujących pierwszą funkcję kosztu, osiąganе maksimum przy pada na dzień 7. i wynosi 349 osób. Jest zatem wyższe niż dla prawdziwych danych, ponadto osiąganе dzień później (dla podanych informacji są to 294 osoby w 6. dniu). Z kolei w ostatnich 6 dniach liczba osób zainfekowanych kształtuje się na niższym poziomie niż to było w rzeczywistości.

W przypadku parametrów znalezionych przy użyciu drugiej funkcji kosztu, maksimum również jest osiągane w 7. dniu, ale jest jeszcze wyższe i wynosi 506 osób. Wartości liczby zainfekowanych jednak bardzo szybko maleją, dzięki czemu liczba osób chorych na przestrzeni ostatnich 6 dni ( $t$  od 9 do 14 włącznie), mimo że nie jest odwzorowana idealnie, to jest bliższa wartościom rzeczywistym w porównaniu do pierwszego przypadku.

Na koniec obliczmy wartości współczynnika reprodukcji  $R_0$ . Dany jest on wzorem:

$$R_0 = \beta/\gamma,$$

gdzie  $\beta$  i  $\gamma$  to parametry modelu. Dla pierwszego przypadku uzyskujemy  $R_0 \approx 3.556$ , natomiast w drugim mamy  $R_0 \approx 5.100$ . Wydają się to być dość wysokie wartości, ale wciąż niższe niż współczynnik reprodukcji z pierwszej części zadania (tam jego wartość wynosi  $\frac{1}{\frac{1}{7}} = 7$ ).

## 5 Podsumowanie i wnioski

Pierwsze zadanie z dzisiejszego laboratorium miało na celu sprawdzenie umiejętności przekształcania równań różniczkowych wyższych rzędów w układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. Dokonywaliśmy tego poprzez odpowiednie podstawienia.

W drugim zadaniu celem było numeryczne rozwiązanie równania różniczkowego zwyczajnego  $y' = -5y$  z warunkiem początkowym  $y(0) = 1$  oraz krokiem  $h = 0.5$ . Zadanie obejmowało analizę stabilności analitycznej i numerycznej przy zastosowaniu metody Eulera w wersjach jawnej (explicit) i niejawnej (implicit). Konkretnie badano stabilność tych metod oraz wartość przybliżonego rozwiązania w punkcie  $t = 0.5$ .

Rozwiązanie analityczne równania to  $y(t) = e^{-5t}$ . Pokazaliśmy stabilność analityczną i asymptotyczną tego rozwiązania. Pod kątem stabilności numerycznej, dla jawnej metody Eulera, warunek stabilności  $|1 + h\lambda| < 1$  nie jest spełniony, ponieważ  $|1 - 2.5| = 1.5 > 1$ . Oznacza to, że metoda Eulera w wersji jawnej jest niestabilna numerycznie. W przeciwieństwie do niejawnej metody Eulera, która spełnia warunek stabilności:  $|\frac{1}{1-h\lambda}| < 1$ , ponieważ  $|\frac{1}{3.5}| < 1$ .

Wartości uzyskane dla  $t = 0.5$  były następujące: rzeczywista wartość wynosiła 0.0821, jawna metoda Eulera dała wynik -1.50, a niejawna metoda Eulera wynik 0.286. Widzimy, jak niedokładne są aproksymacje nawet najbliższego wyrazu.

Nasza analiza teoretyczna i praktyczna potwierdziła, że metoda Eulera (wersja jawna) jest niestabilna, dając rosnącą aproksymację, co jest niezgodne z malejącym charakterem rzeczywistego rozwiązania. Z kolei metoda Eulera w wersji niejawnej, choć numerycznie stabilna, również nie zapewnia wystarczającej (w praktyce) dokładności dla długoterminowych prognoz, co jest widoczne na wykresach przedstawiających wartości uzyskane tą metodą aproksymacji i błąd względny obu metod. Błąd bezwzględny maleje (bo metoda jest stabilna), ale błąd względny rośnie.

Ostatnie zadanie, trzecie, pozwoliło wykorzystać metody rozwiązywania równań różniczkowych (użyta w poprzednim zadaniu metodę Eulera oraz metodę Rungego-Kutty czwartego rzędu (RK4)) do modelowania przebiegu epidemii w populacji. Można było porównać te metody i przekonać się, że mimo tego, iż metoda Eulera w wersji jawnej jest bardzo prostą metodą (a przez to, często dającą niestabilne rozwiązanie - tak jak chociażby w zadaniu drugim), to w tym przypadku poradziła sobie najlepiej, jako jedyna nie przekłamała wyniku, bowiem niezmiennik liczebności populacji był zachowany.

Dlatego wybraliśmy właśnie tę metodę do drugiej części zadania, w której celem było znalezienie wartości charakterystycznych współczynników modelu, mając informacje o liczbie osób zainfekowanych. Uzyskane wyniki były zdeterminowane przyjętą funkcją kosztu, którą należało zminimalizować. Dla obu rozważanych funkcji kosztu rezultaty można uznać za zadowalające, ale nie wydają się być bardzo dokładnym dopasowaniem - być może użycie innej metody dałoby lepszy wynik.

## Literatura

- [1] Materiały pomocnicze do laboratorium zamieszczone na platformie Teams w katalogu *lab09*, plik *lab9-intro.pdf*.
- [2] Treść przedstawiona na wykładzie dotycząca równań różniczkowych zwyczajnych, zawarta także w prezentacji pomocniczej do wykładu, zamieszczonej na platformie Teams w katalogu *lab09*, plik *wyk10\_ode.pdf*.
- [3] C. Vuik, F.J. Vermolen, M.B. van Gijzen, M.J. Vuik,  
**Numerical Methods for Ordinary Differential Equations**  
- dokument zamieszczony na platformie Teams w katalogu *lab09*.