Wojciech Michalak

Równania różniczkowe i różnicowe - zadanie obliczeniowe

Problem 4.1: równanie transportu ciepła

Zgodnie z podanymi na zajęciach informacjami, w poleceniu Gpt GPad - równanie powinno mieć postać $-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)=0$.

Warunki brzegowe: $u(2)=0$ $\quad \frac{du(0)}{dx}+u(0)=20$

$k(x)=\begin{cases}1 & \text{dla } x\in\langle 0;1\rangle \\ 2 & \text{dla } x\in(1;2\rangle\end{cases}$ $\quad$ u to poszukiwana funkcja $\langle 0;2\rangle \ni x \to u(x)\in\mathbb{R}$

Przechodząc do sformułowania wariacyjnego, przyjmuję funkcję testującą v, która zeruje się na prawym brzegu ($v(2)=0$), ponieważ z prawej strony mamy warunek Dirichleta. $\quad -\int_0^2 (k(x)u'(x))'v(x)dx = \int_0^2 0\, v(x)dx = 0$

Przyjmuję skrótowy zapis $k(x)\equiv k$, $u'(x)\equiv u'$, $v'(x)\equiv v'$, $v(x)\equiv v$:

$$-(ku'v)\Big|_0^2 + \int_0^2 ku'v'dx = 0 \Rightarrow -\underbrace{k(2)u'(2)v(2)}_{0} + k(0)\underbrace{u'(0)}_{20-u(0)}v(0)+\int_0^2 ku'v'dx=0$$

Korzystam z warunku brzegowego: $(20-u(0))v(0)+\int_0^2 ku'v'dx=0$

$$\underbrace{-u(0)v(0)+\int_0^2 ku'v'dx}_{B(u,v)} = \underbrace{-20v(0)}_{L(v)}$$

Ponieważ z prawej strony mamy warunek Dirichleta, to przestrzeń w której będziemy rozwiązywać problem $V_h=\langle e_0,e_1,\dots,e_{n-1}\rangle$. Zgodnie z metodą Galerkina przybliżam $u\approx\sum_{i=1}^{n-1} u_i e_i$, gdzie u_i to odpowiednie współczynniki w układzie równań liniowych oraz jako v przyjmuję e_j, $j=0,1,\dots,n-1$. Układ ten można zapisać macierzowo:

$$\begin{bmatrix} B_{00} & B_{10} & \cdots & B_{n0} \\ B_{01} & B_{11} & \cdots & B_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{0,n-1} & B_{1,n-1} & \cdots & B_{n-1,n-1}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_0 \\ L_1 \\ \vdots \\ L_{n-1}\end{bmatrix}$$

, gdzie $B_{ij}:=B(e_i,e_j)$. Problem można sprowadzić do takiego układu, korzystając z liniowości operatora (funkcjonału) $B(u,v)$.