Wyznaczanie minimalnej odległośći między wypukłymi wielokątami

Wojciech Klusek

21 stycznia 2023

Spis treści

Zadanie

Problem:

- Znalezienie minimalnej odległości między dwoma wypukłymi, rozłącznymi wielokątami w R^2.
- Wielokąty definiowane przez zbiory punktów $P = \{p_1, ..., p_r\}$ oraz $Q = \{q_1, ..., q_s\}$.
- Minimalna odległość definiowana jako $min(||p - q||)$, gdzie $p = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i$, a $q = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i q_i$.

Formułowanie Zadania Programowania Kwadratowego

Zadanie sprowadza się do problemu programowania kwadratowego:

$$\min_{x \in \Omega} (x^T D x)$$

$$\text{gdzie } \Omega = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} x_i = 1, \\ \sum_{i=r+1}^{m} x_i = 1, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Konstrukcja Macierzy C i D

Macierz C:

- Rozmiar: $2 \times (r + s)$.
- Zawiera różnice współrzędnych punktów P i Q.
- Definicja:

$$C = \begin{bmatrix} P_{x_1} & \cdots & P_{x_r} & -Q_{x_1} & \cdots & -Q_{x_s} \\ P_{y_1} & \cdots & P_{y_r} & -Q_{y_1} & \cdots & -Q_{y_s} \end{bmatrix}$$

Macierz D:

- Iloczyn $C^T C$, kwadratowa $(r + s) \times (r + s)$.

Macierz C i D, a minimalna odległość

$$||p-q||^2 = ||\lambda_1 p_1 + ... + \lambda_r p_r - \mu_1 q_1 - ... - \mu_s q_s||^2 = ||[\lambda, \mu]^T C^T||^2$$

$$x = [\lambda, \mu]$$
$$||[\lambda, \mu]^T \cdot C^T||^2 = (x^T C^T)(x^T C^T) = (x^T C^T)(Cx) = xDx$$

Wyprowadzenie Wzorów - Barierowa Postać Zadania

Przekształcenie zadania do barierowej postaci:

$$\min_{x \in \Omega} \left(x^T D x - r \sum_{i=1}^{m} \ln x_i \right)$$
$$\Omega = Ax - b = 0$$

- Pozwala na zastosowanie metod optymalizacji wewnętrznej.
- Nierówność w postaci $x \geqslant 0$ staje się $r \sum_{i=1}^{m} \ln x_i$.

Funkcja Lagrange'a

Funkcja Lagrange'a dla zadanego problemu:

$$L(x, y) = x^T Dx - r \sum_{i=1}^{m} \ln x_i + y^T (b - Ax)$$

- Kombinuje oryginalną funkcję celu z ograniczeniami liniowymi.

Warunki Kuhna-Tuckera

Rozwiązanie wynikające z warunków Kuhna-Tuckera:

$$\begin{cases} \nabla_x L(x,y) = Dx - rX^{-1}e - A^T y = 0 \\ \nabla_y L(x,y) = Ax - b = 0 \\ XZe = r_k e \end{cases}$$

$$\begin{cases} Dx - z - A^T y = 0 \\ XZe = r_k e \\ Ax - b = 0 \\ x, y, z > 0 \end{cases}$$

- Prowadzi do systemu równań opisujących optymalne rozwiązanie.

Metoda Punktu Wewnętrznego - Ogólny Opis

- Metoda iteracyjna do rozwiązywania problemów optymalizacji.
- Skupia się na spełnieniu warunków KKT (Kuhna-Tuckera).
- Iteracyjnie zmienia aktualny punkt (x, y, z) o wyliczony kierunek oraz długość kroku.

Warunek Stopu

- Sprawdzenie, czy aktualne rozwiązanie spełnia warunki KKT.
- Jeśli tak, ustawienie flagi wyjścia (`exitflag`) na 1.
- Przerwanie pętli iteracyjnej.

Obliczenie Kierunków

- Ustalenie wartości r jako $\sigma \frac{z^T x}{n+m}$.
- Tworzenie macierzy diagonalnych X, Y Z z wektorów x, y, z.
- Rozwiązanie układu równań dla kierunków Δx i Δy:
- $\Delta z = X^{-1}(re - XZe - Z\Delta x)$

$$\begin{bmatrix} -(X^{-1}Z + D) & A_{eq}^T \\ A_{eq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{eq}^T y - r(X^{-1}e) + Dx \\ b_{eq} - A_{eq}x + rY^{-1}e \end{bmatrix}$$

Obliczenie Długości Kroku (α)

- Obliczenie wartości β_x i β_z:

$$\beta_x = -\beta \left(\frac{x}{\Delta x} \right), \quad \Delta x < 0$$

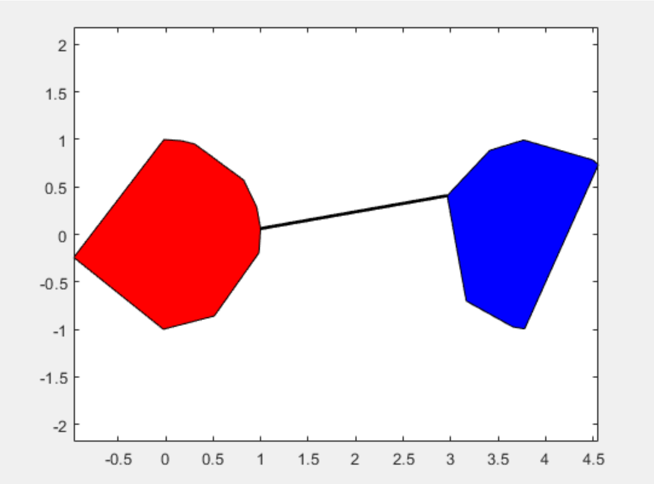
$$\beta_z = -\beta \left(\frac{z}{\Delta z} \right), \quad \Delta z < 0$$

- Wybór długości kroku α jako minimum z 1 i najmniejszych wartości β_x i β_z.

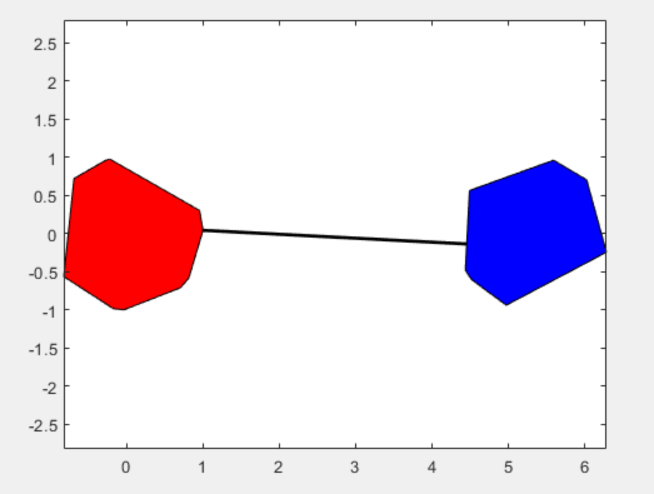
Aktualizacja Rozwiązania

- Aktualizacja wektorów x, y, i z zgodnie z obliczonymi kierunkami i długością kroku.
- Proces ten jest powtarzany w każdej iteracji metody punktu wewnętrznego.

Przykład 1



Przykład 2



Parametry dla testu

Test wykonano przy użyciu następujących parametrów:

- Liczba punktów w wielokątach: 20
- Liczba różnych wejść: 100
- Ziarno generatora liczb losowych: 1
- Dokładność obliczeń: $1e - 6$

Wyniki Testu Dokładności

Wyniki testu dokładności:

- Dokładność: 100%
  (określa jak często algorytm zwrócił tą samą wartość co `quadprog`)
- Średnia liczba iteracji metodą IPM: 13.33
- Średnia liczba iteracji `quadprog`: 6.51

Wnioski

Optymalizacja Problemu Minimalnej Odległości między Wielokątami:

- Możliwa do przekształcenia w zadanie optymalizacji funkcji kwadratowej.
- Metoda punktu wewnętrznego efektywnie rozwiązuje problem z ograniczeniami.

Porównanie z `quadprog`:

- Algorytm osiąga takie same wyniki jak funkcja `quadprog`.
- Średnia liczba iteracji: 13.33 - świadczy o efektywności metody.