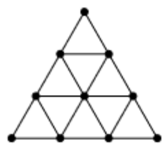
Wyznaczniki i pokrewne wielomiany – spojrzenie kombinatoryczne – Inf rok 3,2020/21

Wojciech Chudoba, 185060

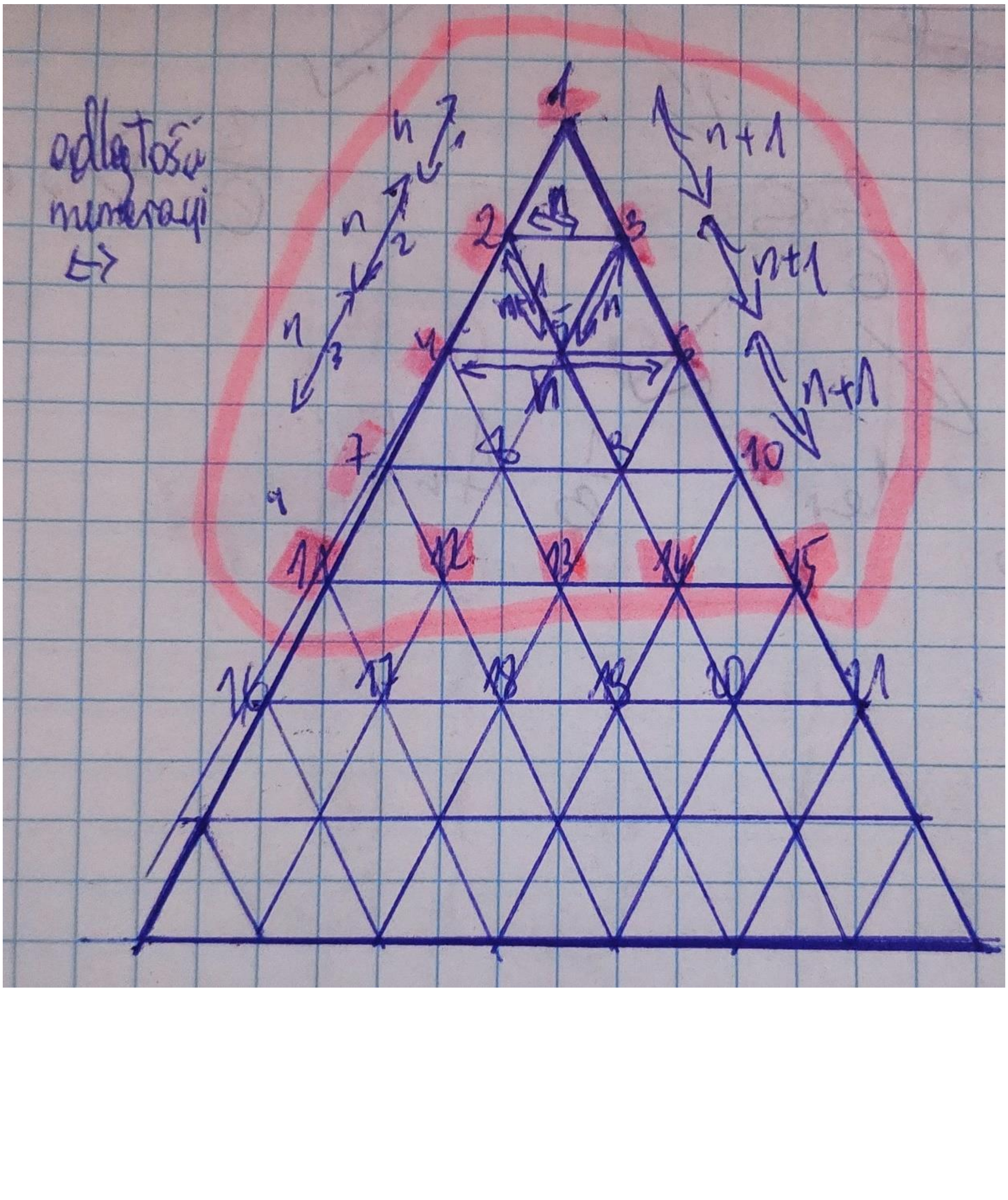
Kod został napisany w języku C#

5. Proszę napisać program (język dowolny) znajdujący liczbę drzew rozpinających w grafie będącym trójkątem o boku n, przykład dla $n = 3$:



Powyższy graf to figura triangularna, na wzór tetraktysa – nasz graf różni się jednak dowolną ilością mniejszych trójkątów, tworzących większy trójkąt równoboczny.

Można zauważyć, iż po odpowiednim ponumerowaniu wierzchołków, są wyraźne zależności.



A więc, numerując od góry do dołu oraz od lewej do prawej, widać następujące zależności:

- Dla n=1 mamy 3 wierzchołki i 3 krawędzie;
- Dla n=2 mamy 6 wierzchołków i 9 krawędzi;
- Dla n=3 mamy 10 wierzchołków i 18 krawędzi;
- Dla n=4 mamy 15 wierzchołków i 30 krawędzi.

Matematyczna zależność wygląda następująco:

- Dla krawędzi: 3+3*n;
- Dla wierzchołków: 3+n+1.

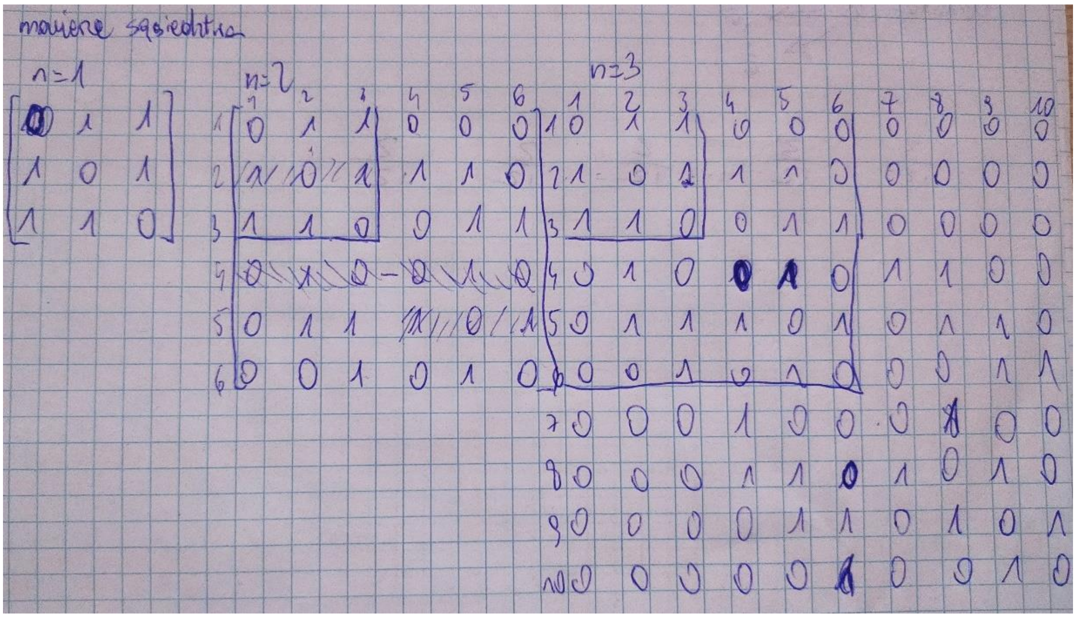
Możemy też zauważyć zależności pomiędzy różnicami numerów wierzchołków, jak i ilościami krawędzi:

- Wierzchołki dużego trójkąta – mają zawsze połączenia z dwoma innymi wierzchołkami;
- Wierzchołki niekrańcowe na lewym boku – mają zawsze 4 połączenia; różnica w numeracji o 1 w poziomie i o n w pionie;
- Wierzchołki niekrańcowe na prawym boku – mają zawsze 4 połączenia; różnica w numeracji o 1 w poziomie i o n+1 w pionie;
- Wierzchołki na dolnym boku, bez krańcowych – mają zawsze 4 połączenia, różnica o 1 w poziomie;
- Wierzchołki w środku figury – mają zawsze 6 połączeń; różnica o 1 w poziomie, o n+1 w pionie na lewo i o n w pionie na prawo.

Wszystkie te zależności są wysoce pomocne w ustalaniu algorytmu.

Pierwszym krokiem było zwykłe zliczenie za pomocą służących temu metod, wierszy i kolumn tworzonych macierzy.

Dzięki temu mogliśmy utworzyć macierz sąsiedztwa. Owa macierz będzie startem na drodze do rozwiązania problemu. Na papierze wyniki prezentują się następująco:



Po zaimplementowaniu algorytmu (wykorzystując wcześniej zauważone zależności), przyszła pora na zamianę elementów diagonalnych na stopnie odpowiednich wierzchołków.

Pewnym ułatwieniem było, iż w macierzy sąsiedztwa, wyniki były albo zerem, albo jedynką. Z racji tego, że każdy z wierzchołków, jest połączony z przynajmniej dwoma innymi, później w bardzo łatwy sposób mogliśmy podmienić wartości z 1 na -1 (nie na miejscach diagonalnych).

Po tym jesteśmy już gotowi do obliczenia dopełnienia algebraicznego, mówiącego nam, ile jest wszystkich drzew rozpinających w grafie.

Nasz graf jest grafem spójnym i nieskierowanym – dla każdej pary wierzchołków istnieje ścieżka, która je łączy. Dzięki temu możemy skorzystać z twierdzenia Kirchhoffa, które jest uogólnieniem wzoru Cayleya o liczbie drzew rozpinających w grafie pełnym.

Tak przedstawiają się wyniki w konsoli:

```
Podaj wartość n:
1

Obwód naszej figury to: 3
Ilość jego wierzchołków to: 3
Ilość jego krawędzi to: 3

Macierz sąsiedztwa naszego grafu:
0 1 1
1 0 1
1 1 0

Macierz sąsiedztwa po zamianie diagonalnych elementów na odpowiednie stopnie wierzchołków naszego grafu:
2 1 1
1 2 1
1 1 2

Macierz z zamienionymi wartościami 1 na -1 i przygotowana do obliczenia ilości drzew rozpinających w grafie, dzięki dopełnieniu algebraicznemu:
2 -1 -1
-1 2 -1
-1 -1 2
Dzięki obliczeniu dopełnienia algebraicznego, dowiadujemy się, że liczba drzew rozpinających w grafie wynosi: 8
```

```
Podaj wartość n:
2

Obwód naszej figury to: 6
Ilość jego wierzchołków to: 6
Ilość jego krawędzi to: 9

Macierz sąsiedztwa naszego grafu:
0 1 1 0 0 0
1 0 1 1 1 0
1 1 0 0 1 1
0 1 0 0 1 0
0 1 1 1 0 1
0 0 1 0 1 0

Macierz sąsiedztwa po zamianie diagonalnych elementów na odpowiednie stopnie wierzchołków naszego grafu:
2 1 1 0 0 0
1 4 1 1 1 0
1 1 4 0 1 1
0 1 0 2 1 0
0 1 1 1 4 1
0 0 1 0 1 2

Macierz z zamienionymi wartościami 1 na -1 i przygotowana do obliczenia ilości drzew rozpinających w grafie, dzięki dopełnieniu algebraicznemu:
2 -1 -1 0 0 0
-1 4 -1 -1 -1 0
-1 -1 4 0 -1 -1
0 -1 0 2 -1 0
0 -1 -1 -1 4 -1
0 0 -1 0 -1 2
Dzięki obliczeniu dopełnienia algebraicznego, dowiadujemy się, że liczba drzew rozpinających w grafie wynosi: 512
```

```
Podaj wartość n:
3

Obwód naszej figury to: 9
Ilość jego wierzchołków to: 10
Ilość jego krawędzi to: 18

Macierz sąsiedztwa naszego grafu:
0 1 1 0 0 0 0 0 0 0
1 0 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 0 0 1 1 0 0 0 0
0 1 0 0 1 0 1 1 0 0
0 1 1 1 0 1 0 1 1 0
0 0 1 0 1 0 0 0 1 1
0 0 0 1 0 0 0 1 0 0
0 0 0 1 1 0 1 0 1 0
0 0 0 0 1 1 0 1 0 1
0 0 0 0 0 1 0 0 1 0

Macierz sąsiedztwa po zamianie diagonalnych elementów na odpowiednie stopnie wierzchołków naszego grafu:
2 1 1 0 0 0 0 0 0 0
1 4 1 1 1 0 0 0 0 0
1 1 4 0 1 1 0 0 0 0
0 1 0 4 1 0 1 1 0 0
0 1 1 1 6 1 0 1 1 0
0 0 1 0 1 4 0 0 1 1
0 0 0 1 0 0 2 1 0 0
0 0 0 1 1 0 1 4 1 0
0 0 0 0 1 1 0 1 4 1
0 0 0 0 0 1 0 0 1 2

Macierz z zamienionymi wartościami 1 na -1 i przygotowana do obliczenia ilości drzew rozpinających w grafie, dzięki dopełnieniu algebraicznemu:
2 -1 -1 0 0 0 0 0 0 0
-1 4 -1 -1 -1 0 0 0 0 0
-1 -1 4 0 -1 -1 0 0 0 0
0 -1 0 4 -1 0 -1 -1 0 0
0 -1 -1 -1 6 -1 0 -1 -1 0
0 0 -1 0 -1 4 0 0 -1 -1
0 0 0 -1 0 0 2 -1 0 0
0 0 0 -1 -1 0 -1 4 -1 0
0 0 0 0 -1 -1 0 -1 4 -1
0 0 0 0 0 -1 0 0 -1 2
Dzięki obliczeniu dopełnienia algebraicznego, dowiadujemy się, że liczba drzew rozpinających w grafie wynosi: 196608
```