Zadanie 1.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Rozwiązanie
Dowodzimy to indukcyjnie. Jako bazę wybieramy $n = 1$; wtedy te nierówności mówią, że $1 \leq 1 \leq 1$. Krok indukcyjny zaczynamy od następujących nierówności zachodzących dla $n \geq 1$:

$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1$$
$$4n^2 - 4n \leq 4n^2 - 4n + 1$$

Pierwiastkujemy obie strony obu nierówności, a możemy, bo są dodatnie dla $n \geq 1$:

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n + 1$$
$$2\sqrt{n(n-1)} \leq 2n - 1$$

Dzielimy stronami przez $\sqrt{n}$, przerzucamy wyrazy i dostajemy:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Z założnenia indukcyjnego dla $n - 1$ wiemy, że:

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n-1} - 1 \tag{2}$$

Dodajemy (1) i (2) i dostajemy założenie indukcyjne dla n:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Zadanie 2.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwa jest równość

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Z lewej strony równości liczba 2 występuje n razy.

Rozwiązanie
$0 \leq x \leq \pi$, więc możemy skorzystać ze wzoru $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. Dowodzimy tezę indukcyjnie. Jako bazę wybieramy $n = 0$; wtedy teza mówi tyle, że $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Krok indukcyjny przeprowadzamy następująco:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z założnenia indukcyjnego dla $n - 1$.