Zadanie 1.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Rozwiązanie
Dowodzimy to indukcyjnie. Jako bazę wybieramy $n = 1$; wtedy te nierówności mówią, że $1 \leq 1 \leq 1$. Krok indukcyjny zaczynamy od następujących nierówności zachodzących dla $n \geq 1$:

$$4n^2 + 4n \leq 4n^2 + 4n + 1$$
$$4n^2 - 4n \leq 4n^2 - 4n + 1$$

Pierwiastkujemy obie strony obu nierówności, a możemy, bo są dodatnie dla $n \geq 1$:

$$2\sqrt{n(n+1)} \leq 2n + 1$$

$$2\sqrt{n(n-1)} \leq 2n - 1$$

Dzielimy stronami przez $\sqrt{n}$, przerzucamy wyrazy i dostajemy:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} \tag{1}$$

Z założnenia indukcyjnego dla $n - 1$ wiemy, że:

$$2\sqrt{n} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n-1} - 1 \tag{2}$$

Dodajemy (1) i (2) i dostajemy założenie indukcyjne dla n:

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1.$$

Zadanie 2.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwa jest równość

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

Z lewej strony równości liczba 2 występuje n razy.

Rozwiązanie
$0 \leq x \leq \pi$, więc możemy skorzystać ze wzoru $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. Dowodzimy tezę indukcyjnie. Jako bazę wybieramy $n = 0$; wtedy teza mówi tyle, że $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Krok indukcyjny przeprowadzamy następująco:

$$2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 2\sqrt{\frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}$$

W ostatniej równości skorzystaliśmy z założnenia indukcyjnego dla $n-1$.

Zadanie 3.
Niech $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ oraz $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ dla $n > 1$. Wykazać, że każda dodatnia liczba całkowita może być przedstawiona w postaci sumy parami różnych liczb F_n.

Rozwiązanie
Przeprowadzimy indukcję po n. Założenie indukcyjne brzmi następująco: wszystkie liczby naturalne mniejsze od F_{n+1} da się przedstawić jako sumę różnych liczb Fibonacciego. Jako bazę bierzemy $n = 2$. Wtedy teza mówi, że 1 da się przedstawić w takiej postaci i rzeczywiście $1 = F_0$.
Dowodzimy tezę dla n. Już wiemy, że liczby mniejsze od F_n da się przedstawić w tej postaci. Pozostają liczby w przedziale $F_n \leq A < F_{n+1}$. Możemy je przedstawić w postaci $A = F_n + B$. $B = A - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \leq F_n$, więc wiemy, że B jest sumą różnych liczb Fibonacciego mniejszych niż F_n, czyli A jest sumą różnych liczb Fibonacciego: tych, z których składa się B oraz F_n.

Zadanie 4.
Załóżmy, że $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$. Wykaż nierówność

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + ... + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + ... + \frac{a_n}{a_{n-1}} + \frac{a_1}{a_n}.$$

Rozwiązanie
Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. Jako przypadek bazowy bierzemy $n = 2$ (uznaję, że $n = 1$ ma niewiele sensu); wtedy teza mówi, że $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2}$, co jest oczywiste.
Udowodnijmy następujący lemat:
Lemat Dla $0 < a \leq b \leq c$ zachodzi:

$$a^2c + b^2a + c^2b \geq b^2c + c^2a + a^2b \tag{3}$$

Ponieważ $0 < a \leq b \leq c$, mamy:

$$(2c - a - b)(b - a) \geq 0$$

Po wymnożeniu nawiasów i przerzuceniu na drugą stronę:

$$a^2 + 2bc \geq b^2 + 2ac \tag{4}$$

Oznaczmy lewą stronę (3) jako L, a prawą jako P. Zauważmy, że

$$\frac{\partial L}{\partial c} = a^2 + 2bc, \frac{\partial R}{\partial c} = b^2 + 2ac,$$

czyli z (4) mamy:

$$\frac{\partial L}{\partial c} \geq \frac{\partial R}{\partial c}$$

Do tego dla najmniejszej możliwej wartości c, czyli $c = b$, mamy $L = R$, więc zachodzi $L \geq R$ dla wszystkich c, co kończy dowód lematu. Dzieląc (3) stronami przez abc, podstawiając $a = a_n, b = a_{n+1}, c = a_1$ i przerzucając wyrazy, dostajemy:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_1} - \frac{a_n}{a_1} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_1}{a_{n+1}} - \frac{a_1}{a_n}$$

Dodając powyższą nierówność do założenia indukcyjnego dla $n-1$, dostajemy tezę dla n.

Zadanie 5.
Udowodnij, że dla $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)} < \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Rozwiązanie
Udowodnimy mocniejszą nierówność, z której wynika powyższa, indukcyjnie:

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \cdot (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}. \tag{5}$$

Jako przypadek bazowy bierzemy $n = 1$; wtedy (5) mówi, że $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$. Zacznijmy krok indukcyjny od następujących nierówności, prawdziwych dla $n \geq 1$:

$$4n^3 - 4n^2 \leq 4n^3 - 4n^2 + n8n^3 - 6n + 2 \leq 8n^3$$

Albo

$$4n^2(n-1) \leq n(4n^2 - 4n + 1)(2n+2)(4n^2 - 4n + 1) \leq 2n \cdot 4n^2$$

Dzielimy stronami (przez liczby dodatnie):

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \leq \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n+2}}$$

Mnożąc powyższą parę nierówności stronami przez założenie indukcyjne dla $n-1$ dostajemy tezę dla n.

Zadanie 6.
Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, ..., a_n$ oraz $b_1, ..., b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \leq \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)}{\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)}.$$

Rozwiązanie
Przeprowadzimy dowód indukcyjny po n. W przypadku bazowym, czyli $n = 1$, powyższa nierówność jest równością. Zaczynamy od AM-GM dla ac, bd, gdzie $a, b, c, d > 0$:

$$2abcd \leq a^2c^2 + b^2d^2$$

Dodajemy stronami $4abcd + a^2cd + b^2cd + abc^2 + abd^2$ i dzielimy przez $(a+b)(c+d)$:

$$(a+b)\frac{cd}{c+d} + \frac{ab}{a+b}(c+d) \leq ac + bd$$

Sumujemy powyższą nierówność dla $c = a_k, d = b_k, k \in 1, 2, ..., n$:

$$(a+b)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k}\right) + \frac{ab}{a+b}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k\right) \leq a\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) + b\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

Dodajemy stronami ab i podstawiamy $a = a_{n+1}, b = b_{n+1}$:

$$(a_{n+1} + b_{n+1}) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k b_k}{a_k + b_k} \right) + \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + b_k \right) + (a_{n+1} + b_{n+1}) \frac{a_{n+1} b_{n+1}}{a_{n+1} + b_{n+1}} \leq$$

$$a_{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) + b_{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + a_{n+1} b_{n+1}$$

Po dodaniu powyższej nierówności stronami do założenia indukcyjnego dla $n-1$ i podzieleniu stronami przez $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)$ otrzymujemy tezę dla n.