Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin I, 1 II 2010

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 50 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Bolzano – Weierstrassa.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia (jeśli w dowodzie używasz lematu użytego na wykładzie, podaj jego sformułowanie, ale dowodu nie zamieszczaj).

(C) [**10 pkt.**] Oblicz, jeśli istnieje, granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ danego wzorem $a_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n}\left(k\cdot\frac{10k+70}{k+3}\right)}$.

Uwaga: tu **nie** przyda się raczej twierdzenie z punktu (A).

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium Leibniza zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$

a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?

b) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^2}$ jest bezwzględnie zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2-n^{\frac{3}{2}}}+\frac{(-1)^n}{n-\frac{13}{2}\sqrt{n}}\right)$.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Bolzano „o własności Darboux"(tj. „o osiąganiu wartości pośrednich").

(B) [**6 pkt.**] Rozstrzygnij, czy dla każdego wielomianu f o współczynnikach rzeczywistych, postaci $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$, gdzie $n \geqslant 1$, poniższe zdanie jest prawdziwe:

a) jeżeli n jest nieparzyste i $a_n \neq 0$, to równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastek rzeczywisty;

b) jeżeli $a_n = 1$ oraz $a_0 = -1$, to równanie $f(x) = 0$ posiada pierwiastek rzeczywisty;

c) jeżeli n jest parzyste oraz $a_n = 1$ i $a_0 = -1$, to równanie $f(x) = 0$ posiada co najmniej dwa pierwiastki rzeczywiste.

(C) [**10 pkt.**] Ile rozwiązań $x > 0$ posiada równanie $\sqrt{x} = 7\ln x$?

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Peano o postaci reszty Taylora.

(B) [**6 pkt.**] Wykaż, że jeśli $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna 2-krotnie w punkcie 0 oraz $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, to $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2} = 0$.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz, o ile istnieje, granicę

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^3)-x^3}{x^3\cdot\left(\frac{1}{1-x}-1-x-x^2\right)}.$$