Sufity i podłogi:

$a = ceil(x) \Leftrightarrow a \geq x > a-1$

$n \geq x \Leftrightarrow n \geq ceil(x)$

$x > n \Leftrightarrow ceil(x) > n$

podłoga analogicznie

Fibonacci:

$$F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2} - 1$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^2 = F_n F_{n+1}$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{(5)}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{(5)}}{2}\right)^n$$

Sumy:

$$\sum_{k=0}^{n}(a+bk) = (n+1)\frac{2a+bn}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} a\cdot x^k = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$S_a^b f = \sum_{i=a}^{b-1} f_i$$

$$S_a^b f = \Delta^{-1} f|_a^b$$

$$Ef(x) = f(x+1)$$

$$S_a^b r\,\Delta t = rt|_a^b - S_a^b \Delta r\, Et$$

Współczynniki dwumianowe:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$(1+x)^r = \sum_{k\geq 0}\binom{r}{k}x^k, r\in \boldsymbol{R}, |x|<1$$

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k} = 2^n, n\geq 0$$

$$\sum_{k\geq 0}(-1)^k\binom{n}{k} = [n=0]$$

$$\binom{a}{b}\cdot\binom{b}{c} = \binom{a}{c}\cdot\binom{a-c}{b-c}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, k>0$$

$$(-1)^i\binom{x}{i} = \binom{i-1-x}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

$$a_n = \sum_{i\in \boldsymbol{Z}}\binom{n}{i}(-1)^i b_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$b_n = \sum_{i\in \boldsymbol{Z}}\binom{n}{i}(-1)^i a_n$$

Liczby szczególne:

Stirlinga I rodzaju (n permutacje o k cyklach):

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right]$$

Stirlinga II rodzaju (k-podziały n-zbioru):

$$\left\{{n \atop k}\right\} = k\left\{{n-1 \atop k}\right\} + \left\{{n-1 \atop k-1}\right\}$$

$$x^n = \sum_i \left\{{n \atop i}\right\} x^{\underline{i}}, \quad x^{\overline{i}} = \sum_i \left[{n \atop i}\right]$$

Catalana (nawiasowanie n-iloczynu):

$$C_0 = 1 \quad C_1 = 1 \quad C_2 = 2$$

$$C_n = \sum_k C_k C_{n-1-k} + [n=0], n\geq 0$$

$$C_n = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}x^k$$

Bella (podziały n-zbioru)

$$B_n = \sum_k \left\{{n \atop k}\right\}, B_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k}B_k \quad n\geq 0$$

Funkcje tworzące:

ftw:

- * x – przesunięcie w prawo
- / x – przesunięcie w lewo
- całka – podzielenie składników przez 'n'
- pochodna – pomnożenie składników przez 'n'
- $G(cx) = \sum_n c^n g_n x^n$
- $F(x)G(x) = \sum_n \left(\sum_k f_k g_{n-k}\right)x^n$
- $\frac{1}{1-x}G(x) = \sum_n \left(\sum_{k\leq n} g_k\right)x^n$

wft:

- pochodna – przesunięcie w lewo
- całka – przesunięcie w prawo
- splot dwumianowy

$$F(x)G(x) = \sum_n\left(\sum_k\binom{n}{k}f_k g_{n-k}\right)\frac{x^n}{n!}$$

konkretne ciągi:

$$\sum_{n\geq 0}x^n = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}$$

$$\sum_{n\geq 0}[m|n]x^n = \frac{1}{1-x^m}$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geq 0}c^n x^n = \frac{1}{1-cx}$$

$$\sum_{n\geq 0}\binom{c}{n}x^n = (1+x)^c$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n}x^n = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = \ln(1+x)$$

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}x^n = e^x$$

Zliczanie:

- r-kombinacje ze zbioru n-eltowego

bez powtórzeń: $\binom{n}{r}$

z powtórzeniami: $\binom{n+r-1}{r}$

enumerator r-kombinacji:

$$\alpha\in\{0,1\}$$

$$\left(\sum_n \alpha(x_1 t)^n\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_n \alpha(x_k t)^n\right)$$

- enumerator r-permutacji

$$\alpha\in\{0,1\}$$

$$\left(\sum_{n\geq 0}\alpha_1\frac{t^n}{n!}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sum_{n\geq 0}\alpha_1\frac{t^n}{n!}\right)$$

(alfa określa możliwość występowania krotności elementu)

- enumerator podziałów (wiadomo o co chodzi)

$$(1+x+x^2+\ldots)\ldots(1+z^k+z^{2k}+\ldots)\ldots = \\ = 1/(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)\ldots$$

składnik nie większy niż k:

$$1/(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)$$

różne części:

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^k)$$

części nieparzyste:

$$1/(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots$$

Zasada włączeń i wyłączeń:

$A_1 \ldots A_n$ - zbiory o danych cechach

$$S_j = \sum_{i_1<\ldots<i_j}|A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j}|, S_0 = |U|$$

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j S_j$$

uogólniona (mają dokładnie k-cech)

$$D(k) = \sum_{j\geq k}(-1)^{j-k}\binom{j}{k}S_j$$

tożsamość Eulera:

$$nP(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\sigma(n-k)P(k)$$

$$\sigma(m) = \sum_{\substack{k>0\\k|m}}k$$

Wieżomiany:

- $R_B(x)$ – funkcja tworząca ciągu rozstawień 'n' nieatakujących się wież na danej planszy
- permutacje kolumn i wierszy nic nie zmieniają
- jeśli przestawi się w niezależne układy B_1, B_2, to $R_B(x) = R_{B1}(x) * R_{B2}(x)$, np.:

B ≈

B_1	
	B_2

- Niech

$\alpha = \langle p, q\rangle \in B \subset Z_n \times Z_n$

$B_\alpha^- = B \setminus \{\alpha\}$

$B_\alpha^* = B$ z usuniętym p-tym wierszem i q-tą kolumną

wtedy:

$$R_B(x) = R_{B_\alpha^-}(x) + xR_{B_\alpha^*}(x)$$

wzór na dopełnienie planszy C:

$$r_k(B) = \frac{1}{(m-k)!}\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}(m-i)!\,r_i(C)$$

Teoria grafów:

$$\sum_{v\in V(G)} deg(v) = 2\cdot|E(G)|$$

G dwudzielny ⇔ nie ma cyklu niep. dł.

cykl Eulera – po krawędziach

G ma cykl E. $\Leftrightarrow \forall_{v\in G} 2|deg(v)$

G słabo spójny:

ma c. E. $\Leftrightarrow \forall_{v\in G}\ deg_{in}(v) = deg_{out}(v)$

Cykl Hamiltona – po wierzchołkach

H. $\Rightarrow \forall_{V'\subset V(G)}\omega(V(G)-V') \leq |V'|$

gdzie $\omega(G)$ to ilość składowych G

półhamil. (ma ścieżkę) jak $\leq |V'|+1$

G-spójny i

$|V(G)|>3, \{x,y\}\notin E(G) \Rightarrow$

$deg(x)+deg(y)\geq n$

to G nie ma cyklu hamiltona

$\forall_{v\in V(G)} deg(v) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$ hamiltonowski

turniej silnie spójny nie ma cykl ham.

- jest n^{k-2} drzew n-etykietowanych
- $v-e+f=2$ (Wzór Eulera)
- $e\leq 3v-6$ (dla $v\geq 3$)
- G-nieplanarny ⇔ zawiera podgraf homeomorficzny z $K_{3,3}$ lub K_5
- homeomorfizm gdy można dojść do takich samych grafów dostawiając wierzchołki na krawędziach
- G planarny zawiera v stopnia ≤ 5
- $X(G)$ - minimalna ilość kolorów do pokolorowania wierzchołków G

- G planarny to $X(G)\le 4$
- $X(G)=2\Leftrightarrow G$ jest dwudzielny
- $\Delta(G)$ - maks. stop. Wierzch.
  $X(G)\le\Delta(G)+1$
- G nie jest cyklem niep. dł. , ani kliką, to
  $X(G)\le\Delta(G)$
- $P_G(x)$ - liczba v-kolorowań *x* kolorami
  $e=\{v,w\}\notin E(G)\Rightarrow$
  $P_{G\cup\{e\}}(x)+P_{G/e}(x)$
  (pierwsze to dodanie, drugi sklejenie)

  $P_{K_n}(x)=x^n,\quad P_{\overline{K_n}}(x)=x^n$
- $X'(G)$ - min. il. kol. dla krawędzi
- $\Delta(G)\le\ X'(G)\ \le\Delta(G)+1$
- G dwudzielny $\Rightarrow X'(G)=\Delta(G)$

- graf dwudzielny ma skojarzenie z lewa w prawo, wtedy i tylko wtedy, gdy każdy podzbiór z lewej „zna"co najmniej tyle osób z prawej co sam liczy
- G dwudzielny, r-reguralny: $X'(G)=r$
- wspólny SRR:
  $\langle a_1..a_n\rangle$ parami różne
  $\pi:\{1..n\},\quad a_i\in A_i,\ B_{\pi(i)}$
  pi jest różnowartościowa, na

  istnieje jeśli
  $A_i\cap A_j=\emptyset,\ \ B_i\cap B_j=\emptyset,\ i!=j$
  $|A_i|=|B_i|=k\quad\forall_i$

Asymptotyka:

$$f\sim g\Leftrightarrow\lim\frac{f}{g}=1$$

$$f=o(g)\Leftrightarrow\lim\frac{f}{g}=0$$

$$n!=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\Pi_n\sim\frac{n}{\ln(n)}\quad(\textit{liczby pierwsze})$$

$$0<a<1<b$$

$$a^n,\ n^{-b},\ 1,\ lg\,lg(n),\ lg(n),\ (lg\,n)^b,\ n^a,\ n,\ n\,lg\,n,\ n^b,\ n^{lg\,n},\ b^n,\ n^n$$

$$\log(1+O(f(z)))=O(f(z)),\ f(z)=o(1)$$

$$(1+O(a_n))^{O(b_n)}=1+O(a_n b_n)$$
$$a_n=o(1),\ a_b b_b=O(1)$$

$$T(n)=aT\left(\frac{n}{floor(b)}\right)+f(n)$$

jeśli T, S niemalejące, nieujemne oraz
$T(b^k)=\Theta(S(b^k))$ to
$T(w)=\Theta(S(w))$

$$T(n)=\begin{cases}\Theta(n) & a<b\\ \Theta(n\,lg\,n) & a=b\\ \Theta(n^{\log_b a}) & a>b\end{cases}$$

$$\sum\nolimits_{a\le i<b}f(i)=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}f(i)|_b^a{}'+\int_a^b B_1(\{x\})f'(x)\,dx$$

$$\sum\nolimits_{a\le i<b}f(i)=\int_a^b f(x)dx-\frac{1}{2}f(i)|_b^a{}'+\frac{1}{12}f'(i)|_b^a{}'-\int_a^b B_2(\{x\})f^{(2)}(x)\,dx$$

$$B_1(\{x\}),B_2(\{x\})=O(1)$$

Teoria liczb:

$$NWD(a,b)=NWD(b,a\,mod\,b)$$

Rozszerzony Euklides:
liczymy NWD(a, b), przepisujemy 1 0 pod x,y.
Niech x_n, y_n będą z n-tego wiersza.

$$x_n=y_{n+1}\quad y_n=x_{n+1}-floor\left(\frac{a_n}{b_n}\right)y_{n+1}$$

a	b	x	y
7	5	−2	3
5	2	1	−2
2	1	0	1
1	0	1	0

Kongruencja:
Wspólny moduł $\Rightarrow *,+,-$ stronami jest ok
Można dzielić przez coś co nie dzieli modułu.
Jeśli moduły $n_1..n_k$ względnie pierwsze, to

$$a\equiv b(mod\ n_1\cdot..\cdot n_k)\Leftrightarrow\begin{matrix}a\equiv b(mod\ n_1)\\ ...\\ a\equiv b(mod\ n_k)\end{matrix}$$

Chińskie tw. o resztach

$$N=\prod n_i,\ \ n_i\perp n_j$$
$$\forall_{a_1..a_k}\exists!_{a\in\{0,..N-1\}}\,a\equiv a_i(mod\ n_i),\ \ i=1..k$$

Konstruktywnie:

$$b_j=\prod\nolimits_{i!=j}n_i,\ \ b'_j=b_j*(b_j^{-1}\,mod\ n_j)$$

odwrotności znajdujemy z rozszerzonego E.
Rozwiązanie jest ich kombinacją liniową.

Mały fermat (p – pierwsze)
$p\nmid a,\ \ a^{p-1}\equiv 1(mod\ p)$

Tw. Eulera (n – dowolna)
$a\perp n\Rightarrow a^{\phi(n)}\equiv 1(mod\,n)$
$\phi(n)=|1\le k\le n:k\perp n|,$
$m\perp n\Rightarrow\phi(m\cdot n)=\phi(m)\cdot\phi(n)$

$$\sum\nolimits_{d|n}\phi(d)=n$$

RSA:
$n=p\cdot q,\quad p,q$ pierwsze, niech
$e\perp\omega(n)=(p-1)(q-1)$
$d=e^{-1}mod\ \omega(n)$
działamy na liczbach $m\in M=\{0...n-1\}$
Szyfrowanie: $S(m)=m^e(mod\ n)$
Deszyfrowanie: $D(m)=M^d(mod\ n)$
$D(S(m))=S(D(m))$
Klucz to $\langle e,n\rangle\vee\langle d,n\rangle$ - jednym kodujesz, drugim odkodowujesz.

Teoria Grup:
$\langle T,*,e\rangle$ jest grupą gdy:
- * jest łączne
- e, element neutralny
- $\forall_{t\in T}$ istnieje odwrotność

jeśli dodatkowo * jest przemienne, to grupa jest *przemienna* (łał!) lub *abelowa*

rząd el-tu x to najmniejsze $i\in N,\ x^i=e$

rząd grupy $|G|$ to ilość jej elementów

$f:T\to T'$ jest homomorfizmem gdy
$\forall_{x,y\in T}f(x*y)=f(x)*'f(y)$

warstwa lewostronna G względem H, od x:
$xH=xh:h\in H$
prawostronna ma Hx

Tw. Lagrange'a:
- rząd podgrupy jest dzielnikiem rzędu grupy

Niech $G=G(g)$ - grupa cykliczna oraz $|G|=n$. Rząd g^i - $k=\frac{n}{NWD(n,i)}$.
Wniosek – jest $\phi(n)$ generatorów G.
Ilość elementów rzędu d - $s(d)=\phi(d)$

Grupa permutacji S_n to *grupa symetryczna*

Permutację wyznaczają cykle na jakie się rozpada.

Jeśli permutacja $f\in S_n$ o *k* cyklach, rozpada się na *t* transpozycji, to *t* ma parzystość taką samą jak $n-k$

Tw. Caleya
Każda grupa skończona rzędu *n* jest izomorficzna z jakąś podgrupą S_n

ZLICZANIE

Niech $\boldsymbol{G}=\langle G,o\rangle$ grupą permutacji zbioru *X* z działaniem składania. *G*-zbiór to para $\langle\boldsymbol{G},X\rangle$ i mówimy, że ***G*** działa na *X*.

Orbita $Gx=\{g(x)\in X:g\in G\}$ i zachodzi $y\in Gx\Leftrightarrow x\in Gy$.

Stabilizator $G_x=\{g\in G:g(x)=x\}$

$|Gx|\cdot|G_x|=|G|$

Lemat Burnside'a
$|X/G|=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|$
$X^g=\{x\in X\ \ :\ \ g(x)=x\}$
słowem – ilość orbit to średnia ilość punktów stałych permutacji

indeks permutacji
$\zeta_g(x_1,...,x_n)=x_1^{\alpha_1}\cdot...\cdot x_n^{\alpha_n}$ gdzie
n – liczność zbioru *X*
α_i – ilość cykli długości *i*

indeks grupy
$\zeta_G(x_1,...,x_n)=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\zeta_g(x_1,...,x_n)$

$\zeta_G(k,...,k)$ to ilość nieizomorficznych względem *G* kolorowań za pomocą *k* barw

Twierdzenie Polya:
funkcja tworząca kolorowań *k*-barwami nieizomorficznych względem *G*:
$U_D(x_1,...x_k)=\zeta_G(\sigma_1,...\sigma_n)$
$\sigma_i=x_1^i+x_2^i+...+x_k^i$

oczywiście każde x_i odpowiada za inny kolor, a potęga za krotność użycia.