Zaczniemy od rozważenia funkcji $f(n,k)$ zwracającej ilość rozstawień k nieszachujących się wież na planszy A_n, zdefiniowanej następująco:

$$A_n = \{(i,j) : 1 \leq i \leq j \leq n\}$$

Spróbujemy znaleźć jakąś zależność rekurencyjną jej dotyczącą. Rozbijmy problem $f(n,k)$ na dwa przypadki

1. Pierwszy wiersz naszej planszy jest pusty. Wtedy mamy do rozstawienia k wież na planszy A_{n-1}, czyli $f(n-1,k)$ możliwości
2. W pierwszym wierszu planszy stoi jedna wieża (więcej wszak nie może). Rozstawmy najpierw pozostałe $k-1$ wiersz w pozostałych $n-1$ wierszach (czyli planszy A_{n-1}). Jest $f(n-1,k-1)$ takich kombinacji. Następnie dostawiamy wieżę w pierwszym wierszu. $k-1$ pól jest już szachowanych, dlatego zostaje $n-(k-1) = n+1-k$ miejsc. Razem daje to $(n+1-k)f(n-1,k-1)$ rozstawień.

W ten sposób uzyskaliśmy, że

$$f(n,k) = (n+1-k)f(n-1,k-1) + f(n-1,k)$$

Weźmy teraz funkcję $g(n,k) = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\}$, z definicji liczb stirlinga:

$$g(n,k) = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} = (n+1-k)\left\{ {n \atop n+1-k} \right\} + \left\{ {n \atop n-k} \right\} =$$
$$= (n+1-k)g(n-1,k-1) + g(n-1,k)$$

Ojej! Wygląda podobnie. Ale to jeszcze nic nie znaczy, trzeba jeszcze przyjrzeć się warunkom brzegowym.

$$f(n,n) = 1$$
$$f(n,1) = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$g(n,n) = \left\{ {n+1 \atop 1} \right\} = 1$$
$$g(n,1) = \left\{ {n+1 \atop n} \right\} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

A to wspaniała wiadomość, bowiem mamy dwie funkcja o takiej samej zależności rekurencyjnej, posiadające identyczne warunki brzegowe. Zatem

$$f(n,k) = g(n,k) = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\}$$

Mając takie narzędzie właściwy problem rozwiąże się dość szybko. Ile jest możliwych rozstawień na danej planszy $B = \{(i,j) : 1 \leq i \leq j \leq n\} \setminus \{(1,n)\}$? Weźmy wszystkie rozstawienia dla planszy $A_n a$ a następnie odejmijmy wszystkie te, w których na polu $(1,n)$ stoi jakaś wieża. Jest ich tyle co rozstawień $k-1$ wież na planszy A_{n-2} (wieża stojąca w $(1,n)$ zabiera skrajny wiersz i kolumnę). Jest tego dokładnie rzecz biorąc

$$f(n,k) - f(n-2,k-1) = \left\{ {n+1 \atop n+1-k} \right\} - \left\{ {n-1 \atop n-k} \right\}$$

co chcieliśmy udowodnić