Idąc po najmniejszej linii menalnego oporu skorzystamy tu z dość mocnego Tw. Kirchoffa, które brzmi następująco:

Twierdzenie 1 *Twierdzenie Kirchoffa (macierzowe o drzewach)* [1]
Niech G będzie grafem spójnym o n wierzchołkach $v_1, v_2, ...v_n$. Niech A będzie laplasjanem grafu G. Wtedy liczba wszystkich drzew rozpinających grafu G będzie równa dopełnieniu algebraicznemu dowolnego wyrazu macierzy A.

Laplasjan etykietowanego grafu, to macierz n na n zdefiniowana następująco:

$$a_{ij} = \begin{cases} deg(v_i) & \text{dla } i = j \\ -1 & \text{gdy } i \neq j \text{ oraz } v_i,\ v_j \text{ połączone} \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

Jest m wierzchołków stopnia n oraz n wierzchołków stopnia m. Naturalnym etykietowaniem do zapisu naszego laplasjanu wydaje się (pogrubione liczby „wypełniają" wolną przestrzeń bloków swoimi kopiami):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} m & & \mathbf{0} & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{-1} & \\ \mathbf{0} & & m & & & \\ \hline & & & n & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{-1} & & & \ddots & \\ & & & \mathbf{0} & & n \end{array}\right)$$

Ale zrobimy trochę inaczej, przyjmiemy sobie etykietowanie reprezentujące macierz:

$$\left(\begin{array}{cc|ccc|ccc} m & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & -1 & m & & \mathbf{0} & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & & \mathbf{-1} & \\ 0 & -1 & \mathbf{0} & & m & & & \\ \hline -1 & 0 & & & & n & & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{-1} & & & \ddots & \\ -1 & 0 & & & & \mathbf{0} & & n \end{array}\right)$$

Warto zauważyć, że zakładamy przy tym niezerowość m oraz n (wtedy problem się trywializuje) oraz, że w skrajnym przypadku część bloków znika

[1]Dowód tego niebywałego twierdzenia można znaleźć pod adresem: http://www.math.fau.edu/locke/Graphmat.htm
Wykorzystuje on Wzór Bineta-Cauchy'ego, którego dowód znajduje się pod adresem: http://www.lacim.uqam.ca/ lauve/courses/su2005-550/BS3.pdf

(jest w nich $n-1$, lub $m-1$ elementów, czyli czasami zero). Nie przeszkadza nam to jednak w niczym, najwyżej zrobi się prościej oblicznowo.

Do policzenia dopełnienia algebraicznego musimy wybrać jakiś wiersz i kolumne i je usunąć. Robimy tak z wierszem nr 1 oraz kolumną nr 2 otrzymując:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & m & & \mathbf{0} & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \mathbf{-1} & \\
0 & \mathbf{0} & & m & & & \\
\hline
-1 & & & & n & & \mathbf{0} \\
\vdots & & \mathbf{-1} & & & \ddots & \\
-1 & & & & \mathbf{0} & & n
\end{array}\right)$$

Pragniemy (mocno...) uzyskać macierz trójkątną, w czym przeszkadza las jedynek na lewo od bloku z n-ami. Szczęśliwie - możemy je wszystkie zredukować korzystając z pierwszego wiersza nic przy tym nie psując. Robimy tak i dochodzimy do:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc}
-1 & -1 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
\hline
0 & m & & \mathbf{0} & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \mathbf{-1} & \\
0 & \mathbf{0} & & m & & & \\
\hline
0 & & & & n & & \mathbf{0} \\
\vdots & & \mathbf{0} & & & \ddots & \\
0 & & & & \mathbf{0} & & n
\end{array}\right)$$

Co jest macierzą trójkątną. Zatem wyznacznik jest iloczynem elementów na przekątnej równym $(-1)\cdot m^{n-1}n^{m-1}$. Dopełnienie każe nam to wymnożyć razy $(-1)^{a+b}$ gdzie a i b to numery usuniętego wiersza i kolumny. Zatem ostatecznie dopełnienie wynosi $(-1)^{1+1+2} \cdot m^{n-1}n^{m-1} = m^{n-1}n^{m-1}$. Co chcieliśmy udowodnić.