

Rekurencja. *Liczby naturalne* to nieujemne liczby całkowite. Zbiór liczb naturalnych oznaczamy przez \mathbb{N} . Niech dana będzie własność \mathcal{P} liczb naturalnych, piszemy $\mathcal{P}(n)$ dla oznaczenia, że liczba n ma własność \mathcal{P} . Prawdziwa jest *zasada indukcji matematycznej*, która mówi:

Każda liczba naturalna ma własność \mathcal{P} o ile spełnione są następujące dwa warunki:

Podstawa indukcji: Zachodzi $\mathcal{P}(0)$.

Krok indukcyjny: Z tego, że zachodzi $\mathcal{P}(n)$ wynika, że zachodzi $\mathcal{P}(n+1)$.

Przykład. Określmy *liczby harmoniczne*:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} ,$$

dla $n > 0$. Pokażemy przez indukcję, że ma miejsce nierówność

$$H_{2^n} \leq n + 1 ,$$

dla każdej liczby naturalnej n . Zachodzenie tej nierówności dla liczby n to właśnie nasza własność $\mathcal{P}(n)$. Podstawa indukcji: $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 0 + 1 = 1$. Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} H_{2^{n+1}} &= H_{2^n} + \frac{1}{2^n + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &\leq H_{2^n} + 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \\ &= H_{2^n} + 1 \\ &\leq (n + 1) + 1 . \end{aligned}$$

◇

Zbiór X z relacją porządku częściowego \preceq nazywa się *ufundowanym* jeżeli jego każdy niepusty podzbiór A zawiera element minimalny $a \in A$, to znaczy taki, że nie zachodzi $x \preceq a$ dla żadnego $x \in A$ różnego od a . Niech \mathcal{P} będzie własnością elementów zbioru ufundowanego. Zasada indukcji w ogólnej postaci mówi:

Wszystkie elementy zbioru ufundowanego mają własność \mathcal{P} , jeżeli tylko prawdziwe jest stwierdzenie, że *z tego, że ma miejsce $\mathcal{P}(y)$ dla każdego $y \preceq x$ takiego, że $x \neq y$ wynika, że $\mathcal{P}(x)$* .

Rzeczywiście, przypuśćmy, że zbiór A tych elementów X które nie mają własności \mathcal{P} jest niepusty, i niech $a \in A$ będzie elementem minimalnym w A . Z minimalności a wynika, że $\mathcal{P}(a)$ jest prawdziwe, co daje sprzeczność.

Przykład: Niech X będzie zbiorem par liczb naturalnych $\langle x, y \rangle$, gdzie $x = 0$ lub $x = 1$. Niech $\langle a, b \rangle \preceq \langle c, d \rangle$ zachodzi gdy prawdziwa jest nierówność $a < c$ lub jednocześnie

$a = c$ oraz $b \leq d$. Ten porządek to dwie kopie zbioru liczb naturalnych ustawione jedna za drugą. Zwykła zasada indukcji matematycznej opiera się na kroku indukcyjnym, który mówi, że $\mathcal{P}(x)$ zachodzi gdy zachodzi $\mathcal{P}(y)$ dla y , który jest “bezpośrednim poprzednikiem” x . Nie obejmuje zatem zbioru X z porządkiem \preceq , ponieważ element $\langle 1, 0 \rangle$ nie ma bezpośredniego poprzednika. \diamond

Przykład: Niech Y będzie zbiorem par liczb naturalnych $\langle x, y \rangle$. Niech $\langle a, b \rangle \preceq \langle c, d \rangle$ zachodzi gdy $a \preceq c$ oraz $b \preceq d$. Przypuśćmy, że chcemy pokazać własność \mathcal{P} dla wszystkich par w Y . Wystarczy w tym celu sprawdzić to bezpośrednio dla par postaci $\langle 0, y \rangle$ lub $\langle x, 0 \rangle$, oraz że $\mathcal{P}(\langle x-1, y \rangle)$ i $\mathcal{P}(\langle x, y-1 \rangle)$, dla $x > 0$ i $y > 0$, pociąga za sobą $\mathcal{P}(\langle x, y \rangle)$. \diamond

Podobnie do zasady indukcji działa definiowanie przez indukcję ciągów, czyli funkcji określonych na liczbach naturalnych; są to *definicje rekurencyjne*. Oto ciąg liczb harmonicznym $\langle H_n \rangle$ zdefiniowany w taki sposób:

$$\begin{aligned} H_1 &= 1, \\ H_{n+1} &= H_n + \frac{1}{n+1}, \text{ dla } n \geq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

Definicję rekurencyjną typu (1) nazywamy też *równaniem rekurencyjnym*.

Uwaga o notacji: Używamy nawiasów trójkątnych gdy opisujemy ciąg. Ciąg liczbowy o kolejnych wyrazach f_0, f_1, f_2, \dots oznaczamy przez $\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle$ lub $\langle f_n \rangle_{n \geq 0}$ lub po prostu $\langle f_n \rangle$. Samo f_n to n -ty wyraz ciągu, ale czasami, gdy nie chcemy być zbyt formalni, zwykle f_n może oznaczać ciąg.

Przykład: Rozważmy równanie rekurencyjne:

$$\begin{aligned} P_0 &= 0; \\ P_{n+1} &= P_n + n + 1, \text{ dla } n \geq 0. \end{aligned}$$

Jego *rozwiązanie* to jak najprostsza formuła dająca sposób obliczania kolejnych wyrazów. Metoda, którą możemy łatwo rozwiązać to konkretne równanie to jego *rozwiniecie*, czyli cofanie się w rekursji:

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + n \\ &= P_{n-2} + (n-1) + n \\ &= P_0 + (1 + 2 + \dots + n) \\ &= n(n+1)/2. \end{aligned}$$

Otrzymana formuła ma postać *zamkniętą* lub *zwartą*, to znaczy określona jest przez stałą liczbę operacji arytmetycznych, niezależnych od wskaźnika n . \diamond

W szczególności, *równanie rekurencyjne rzędu k* dla ciągu $\langle f_n \rangle$ dane jest przez równość

$$F(n, f_n, f_{n+1}, \dots, f_{n+k}) = 0 \quad (2)$$

dla pewnej funkcji F , oraz przez *warunki brzegowe* (*początkowe*) dane równościami $f_0 = a_0, f_1 = a_1, \dots, f_{k-1} = a_{k-1}$, dla pewnych stałych a_0, \dots, a_{k-1} . Dla “rozsądnej” funkcji F

takie równanie jednoznacznie wyznacza ciąg $\langle f_n \rangle$. Jeżeli główna część równania (2) ma postać

$$f_{n+k} = b_0 f_n + b_1 f_{n+1} + \dots + b_k f_{n+k-1} + g(n) ,$$

to mamy *równanie liniowe*. Jeżeli b_0, \dots, b_k są stałymi, to równanie liniowe jest *o stałych współczynnikach*, a gdy $g(n) = 0$ to równanie jest *jednorodne*.

Przykład: Równanie liniowe o stałych współczynnikach

$$f_{n+1} - f_n - a = 0$$

ma rozwiązanie ogólne postaci $a \cdot n + b$, gdzie b zależy od warunków brzegowych. \diamond

Przykład: Równanie jednorodne o stałych współczynnikach

$$f_{n+1} - a \cdot f_n = 0$$

ma rozwiązanie ogólne postaci $b \cdot a^n$. \diamond

Przykład. Rozważmy równanie

$$f_{n+1}^2 - 5 \cdot f_n = 0 ,$$

gdzie $f_0 = 3$. Możemy je przekształcić do postaci $f_{n+1}^2 = 5 \cdot f_n$, wziąć logarytm obu stron: $2 \log_5 f_{n+1} = 1 + \log_5 f_n$, i podstawić $g_n = \log_5 f_n$, co prowadzi do równania liniowego $2g_{n+1} - g_n - 1 = 0$. Inny, bezpośredni sposób, to przekształcenie do postaci

$$f_{n+1} = 5^{1/2} \cdot f_n^{1/2} ,$$

co daje przez rozwinięcie rozwiązanie

$$f_n = 5^{1 - \frac{1}{2^n}} \cdot 3^{1/2^n} . \quad \diamond$$

Przykład: Rozważmy równanie liniowe

$$(n+1) \cdot f_{n+1} - f_n = 1 , \quad (3)$$

przy warunkach początkowych $f_0 = 1$. Mnożymy równanie (3) przez $n!$ i dostajemy

$$(n+1)! f_{n+1} - n! f_n = n! .$$

Podstawiamy $g_n = n! \cdot f_n$ i dostajemy równanie $g_{n+1} - g_n = n!$, dla $g_0 = 1$. Stąd $g_n = 1 + 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!$, dla $n > 0$, co daje także wartości ciągu $\langle f_n \rangle$. \diamond

W dalszych rozważaniach przyda nam się notacja, która pozwala wyrazić zaokrąglenie liczby rzeczywistej do całkowitej. Niech x liczba rzeczywista, stosujemy następujące oznaczenia:

$\lfloor x \rfloor$ to największa liczba całkowita $\leq x$, co czytamy: “podłoga x ”.

$\lceil x \rceil$ to najmniejsza liczba całkowita $\geq x$, co czytamy: “sufit x ”.

Przykład: Niech $x = 1.5$. Wtedy: $\lfloor x \rfloor = 1$, $\lfloor -x \rfloor = -2$, $\lceil x \rceil = 2$, $\lceil -x \rceil = -1$. \diamond

Niech $\lg x$ oznacza logarytm o podstawie równej 2. Skrót w.t.w. oznacza równoważność: “wtedy i tylko wtedy gdy”.

Przykład: Ma miejsce równość $\lceil (\lg \lceil x \rceil) \rceil = \lceil \lg x \rceil$, dla rzeczywistych $x \geq 1$. Następujące równoważności są dowodem jej prawdziwości:

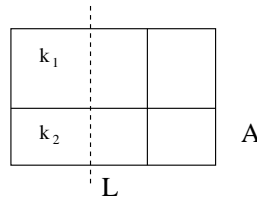
$$\begin{aligned} a = \lceil \lg \lceil x \rceil \rceil & \quad \text{w.t.w.} \quad a \geq \lg \lceil x \rceil > a - 1 \\ & \quad \text{w.t.w.} \quad 2^a \geq \lceil x \rceil > 2^{a-1} \\ & \quad \text{w.t.w.} \quad 2^a \geq x > 2^{a-1} \\ & \quad \text{w.t.w.} \quad a \geq \lg x > a - 1 \\ & \quad \text{w.t.w.} \quad a = \lceil \lg x \rceil. \end{aligned}$$

Korzystaliśmy z następujących własności funkcji sufit:

$$x > n \quad \text{w.t.w.} \quad \lceil x \rceil > n, \quad \text{oraz} \quad x \leq n \quad \text{w.t.w.} \quad \lceil x \rceil \leq n. \quad \diamond$$

Przykład: Pokażemy jak równanie rekurencyjne może posłużyć do oszacowania z góry wartości ciągu liczbowego. Dla uporządkowanego ciągu $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, jego *medianą* nazywamy wyraz $a_{\lceil n/2 \rceil}$. Rozważmy skończony zbiór k punktów na płaszczyźnie, z których każdy ma inne współrzędne: poziome x i pionowe y , i które są zawarte we wnętrzu prostokąta A o bokach równoległych do osi współrzędnych. Niech x_0 będzie medianą uporządkowanego ciągu współrzędnych x -owych punktów, podobnie y_0 dla współrzędnych y -kowych. Podzielmy A na cztery prostokąty odcinkami równoległymi do osi współrzędnych: pionowym o współrzędnej $x = x_0$ i poziomym o współrzędnej $y = y_0$. Następnie każdy z otrzymanych prostokątów dzielimy podobnie, rozważając mediany współrzędnych tylko punktów z wnętrza danego prostokąta, aż do sytuacji, gdy każdy z otrzymanych prostokątów ma puste wnętrze. Pokażemy, że dowolna pozioma lub pionowa prosta przecina nie więcej niż \sqrt{k} otrzymanych prostokątów o pustych wnętrzach, z dokładnością do stałej mnożnikowej.

Niech $T(k)$ oznacza maksymalną możliwą liczbę prostokątów przeciętych przez pionową prostą L , dla wszystkich możliwych konfiguracji k punktów. W pierwszym podziale A otrzymujemy 4 prostokąty, z których dwa są przecięte przez prostą L , patrz rysunek 1.



Rysunek 1: Prostokąt A przecięty przez prostą L .

Jeżeli te prostokąty zawierają k_1 i k_2 punktów odpowiednio, gdzie $k_1 + k_2 \leq \frac{k-1}{2}$, wtedy L przecina co najwyżej $T(k_1) + T(k_2)$ pustych prostokątów. Zatem funkcja $T(k)$ jest

określona przez następujące równanie rekurencyjne:

$$T(k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = 0 ; \\ \max_{0 \leq i \leq \lceil \frac{k-1}{2} \rceil} (T(i) + T(\lceil \frac{k-1}{2} \rceil - i)) & \text{gdy } k > 0 . \end{cases}$$

Pokażemy przez indukcję, że dla $k > 0$ zachodzi nierówność

$$T(k) \leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{k} .$$

Podstawa indukcji: Niech $k = 1$, wtedy $T(1) = 2 \cdot T(0) = 2 \leq 1 + \sqrt{2}$.

Krok indukcyjny: Załóżmy najpierw, że $\lfloor k/2 \rfloor > i > 0$. Szacujemy

$$\begin{aligned} T(i) + T\left(\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil - i\right) &\leq (1 + \sqrt{2}) \left(\sqrt{i} + \sqrt{\frac{k}{2} - i} \right) \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{k} . \end{aligned}$$

Pozostał przypadek, gdy $i = 0$. Szacujemy następująco:

$$\begin{aligned} T(0) + T\left(\left\lceil \frac{k-1}{2} \right\rceil\right) &\leq 1 + (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{\frac{k}{2}} \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{k} , \end{aligned}$$

dla $k \geq 1$, skorzystaliśmy z odpowiedniej własności liczby $1 + \sqrt{2}$. \diamond

Przykład: Na ile sposobów można pokryć prostokąt rozmiaru $2 \times n$ kostkami domino rozmiaru 1×2 ? Niech G_n będzie szukaną liczbą. Wartości dla małych n : $G_1 = 1$, $G_2 = 2$, $G_3 = 3$, $G_4 = 5$, itd. Z lewej strony prostokąta może leżeć bądź jedna kostka 2×1 , wtedy pozostaje prostokąt o boku $n - 1$, bądź dwie kostki 1×2 , wtedy pozostaje prostokąt o boku $n - 2$. Stąd wynika, że liczby G_i spełniają zależność rekurencyjną: $G_n + G_{n+1} = G_{n+2}$. \diamond

Liczby Fibonacci'ego określone są przez następujące jednorodne równanie liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach:

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 , \\ F_1 &= 1 , \\ F_{n+2} &= F_n + F_{n+1} , \text{ dla } n \geq 0 . \end{aligned}$$

Stąd wynika równość $G_n = F_{n+1}$, gdzie liczby G_n są z poprzedniego przykładu. Oto początkowe wartości ciągu F_n :

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \text{ itd.}$$

Liczby Fibonacci'ego występują w wielu problemach kombinatorycznych i mają ciekawe własności, pokażemy kilka w przykładach.

Przykład: Zaczniemy od definiującej równości rekurencyjnej $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, zwiększamy wskaźnik n i jednocześnie sprowadzamy prawą stronę do kombinacji liniowej liczb F_n

oraz F_{n+1} :

$$\begin{aligned} F_{n+3} &= F_{n+2} + F_{n+1} = 2 \cdot F_{n+1} + 1 \cdot F_n ; \\ F_{n+4} &= F_{n+3} + F_{n+2} = 3 \cdot F_{n+1} + 2 \cdot F_n ; \\ F_{n+5} &= F_{n+4} + F_{n+3} = 5 \cdot F_{n+1} + 3 \cdot F_n . \end{aligned}$$

Ogólnie:

$$F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n .$$

Położmy $k = n$, dostajemy: $F_{2n} = F_n \cdot F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_n$. Podobnie, dla $k = 2n$ mamy $F_{3n} = F_{2n} \cdot F_{n+1} + F_{2n-1} \cdot F_n$. W szczególności widzimy, że F_{kn} jest wielokrotnością F_n , dowód formalny przez indukcję. \diamond

Przykład. Pokażemy, że ma miejsce równość

$$F_{n+1} \cdot F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n ,$$

dla $n > 0$. Dowód przez indukcję. Podstawa: $n = 1 : 1 \cdot 0 - 1^2 = -1$. Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 &= (F_n + F_{n+1})F_n - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 + F_nF_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= F_n^2 - F_{n+1}^2 + F_{n+1}(F_{n+1} - F_{n-1}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} \\ &= (-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

\diamond

Przykład: Pokażemy przez indukcję wzór

$$\sum_{j=1}^n F_j = F_{n+2} - 1 ,$$

dla $n \geq 1$. Podstawa: $n = 1 : F_1 = 1 = 2 - 1 = F_3 - 1$. Krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n+1} F_j &= \sum_{j=1}^n F_j + F_{n+1} \\ &= F_{n+2} + F_{n+1} - 1 \\ &= F_{n+3} - 1 , \end{aligned}$$

co kończy dowód. \diamond

Przykład: Każda liczba naturalna $n > 0$ ma jednoznaczne przedstawienie w postaci

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \cdots + F_{i_s} , \quad (4)$$

gdzie $i_{j+1} \geq i_j + 2$, oraz $i_1 \geq 2$. Dowód przez indukcję. Najpierw istnienie. Dla $n = 1$ bierzemy $i_1 = 2$. Jeżeli $n = F_i$ to oczywiście przedstawienie istnieje. Załóżmy $F_i < n < F_{i+1}$, czyli $0 < n - F_i < F_{i+1} - F_i = F_{i-1}$. Stąd $n - F_i = F_{i_2} + \cdots + F_{i_s}$, gdzie

$i_s \leq i - 2$. Teraz jednoznaczność. Niech $F_i \leq n < F_{i+1}$. Liczba F_i musi wchodzić w rozkład (4) jako F_{i_s} ponieważ w przeciwnym przypadku największą możliwą do zapisania liczbą byłaby

$$F_{i-1} + F_{i-3} + \dots + F_{x_n} = F_i - 1 ,$$

gdzie $x_n = 2$ lub $x_n = 3$. Zatem i_s wyznaczona jednoznacznie, dalej przez indukcję. \diamond

Przykład. Liczby F_n rosną wykładniczo. Niech mianowicie $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pokażemy, że zachodzi nierówność $F_n > \phi^{n-2}$, dla $n \geq 3$. Dowód przez indukcję. Podstawa: $\phi < 2 = F_3$. Zachodzi $\phi^2 = 1 + \phi$. Stąd mamy krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} \phi^{n-1} &= \phi^2 \cdot \phi^{n-3} \\ &= (\phi + 1) \cdot \phi^{n-3} \\ &= \phi^{n-2} + \phi^{n-3} \\ &< F_n + F_{n-1} \\ &= F_{n+1} . \end{aligned}$$

\diamond

Wyprowadzimy teraz formułę zamkniętą dającą liczby Fibonacciego. Potraktujemy liczby F_n jako kolejne współczynniki szeregu potęgowego $F(z)$, na który patrzymy po prostu jak na nieskończenie długi wielomian:

$$F(z) = F_0 + F_1 z + F_2 z^2 + F_3 z^3 + \dots \quad (5)$$

Rozważmy także dwa inne podobne równania:

$$zF(z) = F_0 z + F_1 z^2 + F_2 z^3 + \dots \quad (6)$$

$$z^2 F(z) = F_0 z^2 + F_1 z^3 + \dots \quad (7)$$

Rozważmy kombinację liniową (5) – (6) – (7) powyższych równań. Grupując potęgi z dostajemy równanie $F(z) - zF(z) - z^2 F(z) = z$, czyli

$$F(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} . \quad (8)$$

Znajdziemy liczby a , b , c , i d takie że zachodzi

$$\frac{a}{1 - cz} + \frac{b}{1 - dz} = \frac{z}{1 - z - z^2} .$$

Przekształcając równoważnie dostajemy układ równań:

$$\begin{aligned} a(1 - dz) + b(1 - cz) &= z ; \\ (1 - cz)(1 - dz) &= 1 - z - z^2 . \end{aligned}$$

Porównując wielomiany obliczamy:

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} , \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}} , \quad c = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} , \quad d = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} .$$

Korzystając z rozwinięcia w szereg potęgowy ułamka

$$\frac{t}{1-sz} = t + tsz + ts^2z^2 + ts^3z^3 + \dots,$$

które zachodzi w dostatecznie małym otoczeniu 0, dostajemy równanie

$$\frac{a}{1-cz} + \frac{b}{1-dz} = \sum_{n \geq 0} (ac^n + bd^n) z^n.$$

To daje nam szukane przedstawienie:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right). \quad (9)$$

Ponieważ ma miejsce nierówność

$$\left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < \frac{1}{2},$$

zatem liczba F_n jest najbliższą liczbą całkowitą przy liczbie $\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n$.

Uwaga: Nie rozważaliśmy problemu zbieżności rozwinięcia w szereg (5) funkcji $F(z)$. Na przykład podstawiając 1 z prawej strony (5) dostajemy ∞ , natomiast w (8) mamy wtedy -1 , co razem może budzić zaniepokojenie. Na szczęście, gdy już odkryliśmy wzór (9), możemy jego prawdziwość pokazać przez indukcję.

Zadania

1. Które z następujących równoważności są prawdziwe, dla rzeczywistych x i całkowitych n :

- a) $x \geq n$ w.t.w. $\lceil x \rceil \geq n$,
 b) $x < n$ w.t.w. $\lceil x \rceil < n$.

2. Notacja $\ln x$ oznacza logarytm o podstawie naturalnej z x .

Czy równość

$$\lceil (\ln \lceil x \rceil) \rceil = \lceil \ln x \rceil$$

zachodzi dla każdego rzeczywistego $x \geq 1$?

3. Czy dla każdej liczby całkowitej n zachodzi równość

$$\left\lfloor \frac{n+2-\lfloor n/25 \rfloor}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{8n+24}{25} \right\rfloor ?$$

4. Pokaż następujące równości, gdzie $n, k > 0$ całkowite, oraz x rzeczywiste.

- a) $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+k-1}{k} \right\rfloor$;
 b) $\left\lfloor \frac{\lfloor x \rfloor}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$;
 c) $n = \left\lfloor \frac{n+k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k+1}{2} \right\rfloor$.

Wskazówka: w a) rozważ dwa przypadki, w zależności od tego czy k dzieli n ;

5. Niech n to liczba naturalna. Ile rozwiązań x ma następujące równanie:

$$(n+1)x - \lfloor n \cdot x \rfloor = c ?$$

6. Pokaż przez indukcję, że zachodzi nierówność:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

7. Zgadnij zamkniętą formułę równą sumie

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

i pokaż równość przez indukcję.

8. Pokaż przez indukcję, że zachodzi nierówność

$$H_{2^n} \geq \frac{n}{2} + 1.$$

9. Pokaż przez indukcję *nierówność Bernoulli'ego*:

$$1 + nh \leq (1 + h)^n,$$

która zachodzi dla rzeczywistego $h \geq -1$ i naturalnego n .

10. Rozwiąż następujące równania rekurencyjne:

- | | |
|--|----------------------------|
| a) $f_{n+1} - (n+1) \cdot f_n = 1,$ | gdzie $f_0 = 1$; |
| b) $f_{n-1}^2 \cdot f_n = f_{n+1}^3,$ | gdzie $f_0 = 1, f_1 = 2$; |
| c) $n \cdot f_n - (n-2) \cdot f_{n-1} - 1 = 0,$ | gdzie $f_0 = 1/2$; |
| d) $n \cdot f_n = (n+2) \cdot f_{n-1} + n + 2,$ | gdzie $f_0 = 0$; |
| e) $n \cdot f_n = (n-2)! \cdot f_{n-1} \cdot f_{n-2},$ | gdzie $f_0 = 1, f_1 = 2$. |

11. Rozważmy skończony zbiór punktów we wnętrzu prostopadłościanu A o ścianach równoległych do osi współrzędnych. Prostopadłościan A dzielimy trzema płaszczyznami równoległymi do par osi współrzędnych na osiem mniejszych prostopadłościanów, współrzędne płaszczyzn wyznaczone są przez mediany odpowiednich współrzędnych punktów we wnętrzu prostopadłościanu A . Proces kontynuujemy aż do otrzymania prostopadłościanów o pustych wnętrzach, zawsze biorąc mediany tylko punktów zawartych w dzielonym prostopadłościanie. Oszacuj od góry liczbę prostopadłościanów o pustych wnętrzach, jakie może przeciąć dowolna płaszczyzna równoległa do dwóch osi współrzędnych.

12. Zgadnij formułę zamkniętą równą sumie

$$\sum_{j=1}^n F_{2j-1}$$

i pokaż ją przez indukcję.

13. Pokaż równość

$$\sum_{j=1}^n F_j^2 = F_n F_{n+1}$$

dla wszystkich $n \geq 1$.

14. Wyraż potęgę macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ przez liczby Fibonacciego.

Sumy. Skończone sumy wyrazów ciągu oznaczamy następująco:

$$a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n = \sum_{k=m}^n a_k ,$$

gdzie $m \leq n$ liczby całkowite. Zmienna całkowita k jest *wskaźnikiem sumowania*, może być zastąpiona dowolną inną różną od m i n . Czasami stosujemy ogólniejszą notację: $\sum_{i \in S} a_i$, gdzie S to zbiór wskaźników; gdy S jest pusty suma ma wartość równą 0. Zwykle zadaniem dotyczącym danej sumy jest wyrażenie jej wartości w jak najprostszy sposób. Czasem daje się osiągnąć metodami *ad hoc*:

Przykład: Pokażemy jak uprościć sumę przez podstawienie. Rozważmy sumę:

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^{2i} (k - i) .$$

Wprowadzimy nowy wskaźnik sumowania przez podstawienie $j = k - i$. Wtedy $j = 0$ dla $k = i$, oraz $j = i$ dla $k = 2i$. Podstawiając dostajemy:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i j \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 . \end{aligned}$$

Sprowadziliśmy zadanie do problemu obliczenia sumy kolejnych kwadratów. \diamond

Przykład. Znajdziemy zamkniętą postać dla sumy $\sum_{i=1}^n i a^i$, gdzie $a \neq 1$. Rozważmy wzór na sumę postępu geometrycznego

$$\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} .$$

Traktujemy obie strony tej równości jak wielomiany i różniczkujemy po a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a^i &= \frac{((n+1) a^n - 1)(a - 1) - (a^{n+1} - a)}{(a - 1)^2} \\ &= \frac{n a^{n+1} - a^n(n+1) + 1}{(a - 1)^2} . \end{aligned}$$

Mnożymy każde z wyrażeń przez a i dostajemy

$$\sum_{i=1}^n i a^i = \frac{n a^{n+2} - a^{n+1} (n+1) + a}{(a-1)^2} .$$

◇

Sumy wielokrotne to sumy po wielu wskaźnikach jednocześnie. *Sumy iterowane* to wykonanie sumy wewnątrz innej sumy. W poniżej równości lewa strona to suma wielokrotna, dokładnie podwójna, a prawa strona to suma iterowana:

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} .$$

Prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania możemy zapisać przez sumy iterowane:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=m}^n a_i \right) \cdot \left(\sum_{k=p}^q b_k \right) &= \sum_{i=m}^n \left(a_i \sum_{k=p}^q b_k \right) \\ &= \sum_{i=m}^n \sum_{k=p}^q a_i \cdot b_k . \end{aligned}$$

Skończona suma iterowana powinna być poprawna syntaktycznie aby mieć określoną wartość. Na przykład w wyrażeniu:

$$\sum_{i=k}^n \sum_{k=1}^i i \cdot k$$

zmienna k jest użyta w pierwszej sumie jako dolna granica sumowania, podczas gdy jest “zadeklarowana” dopiero w drugiej sumie. Przypomina to sytuację, gdy procedura A odwołuje się do zmiennej x oraz wywołuje procedurę B , podczas gdy zmienna x jest zadeklarowana i zainicjalizowana w B .

Zmiana kolejności sumowania w sumie iterowanej polega na przestawieniu sumy wewnętrznej i zewnętrznej, bez zmiany wyrażenia na składnik, być może modyfikując granice sumowania.

Przykład. Obliczmy sumę

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^i \frac{1}{k} .$$

Sumowane wyrazy można umieścić w trójkątnej tablicy, gdzie i jest numerem wiersza a k numerem kolumny, wiersze numerowane od góry do dołu:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n} & \end{array}$$

Zmienimy kolejność sumowania, czyli będziemy sumować najpierw po kolumnach a potem po wierszach:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{i=k}^n \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{i=k}^n 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n-k+1}{k} \\
 &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
 &= (n+1) H_n - n \\
 &= (n+1) (H_{n+1} - 1) .
 \end{aligned}$$

◇

Zaburzanie. Dla ciągu $\langle a_i \rangle_{i \geq 0}$ chcemy obliczyć sumy częściowe $S_n = \sum_{i=0}^n a_i$ dla każdego wskaźnika n . W tym celu przedstawiamy S_{n+1} jako

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^n a_{i+1} ,$$

i staramy się wyrazić $\sum_{i=0}^n a_{i+1}$ przez S_n .

Przykład: Obliczymy ponownie $S_n = \sum_{i=1}^n i b^i$, gdzie $b \neq 1$. Zaburzamy:

$$\begin{aligned}
 S_n + (n+1) b^{n+1} &= b + \sum_{i=1}^n (i+1) b^{i+1} \\
 &= b + \sum_{i=1}^n i b^{i+1} + \sum_{i=1}^n b^{i+1} \\
 &= b + b S_n + b^2 \frac{b^n - 1}{b - 1} .
 \end{aligned}$$

To daje równanie liniowe względem S_n , które wystarczy rozwiązać. Zauważmy że w tym specjalnym przypadku moglibyśmy zaburzyć inaczej:

$$\begin{aligned}
 b S_n &= \sum_{i=1}^n i b^{i+1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (i+1-1) b^{i+1} \\
 &= \sum_{i=1}^n (i+1) b^{i+1} - \sum_{i=1}^n b^{i+1} \\
 &= S_n - b + (n+1) b^{n+1} - b^2 \frac{b^n - 1}{b - 1} ,
 \end{aligned}$$

co ponownie daje równanie liniowe na S_n . ◇

Notacja Iwersona. Niech $\mathcal{P}(i)$ oznacza pewną własność liczby całkowitej i . Wprowadźmy notację $[\mathcal{P}(i)]$ określoną następująco:

$$[\mathcal{P}(i)] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \mathcal{P}(i) \text{ zachodzi;} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Używamy jej na przykład w przekształceniach sum, gdzie pierwszy krok jest następujący:

$$\sum_{\mathcal{P}(i)} a_i = \sum_i a_i \cdot [\mathcal{P}(i)] .$$

W takiej sytuacji, gdy nie ma zaznaczonych ograniczeń na indeks sumowania i , zawsze przyjmujemy, że przebiega on *wszystkie liczby całkowite*. Notacja staje się szczególnie przydatna gdy wprowadzamy nowe wskaźniki sumowania. Wtedy możemy cały ciężar opisu wskaźników sumowania przenieść do składników, co ułatwia zapis przekształceń.

Przykład: Obliczymy sumę $\sum_{1 \leq i < n} \lfloor \lg i \rfloor$. Wprowadzamy nowy wskaźnik sumowania i rozważamy następującą sumę podwójną:

$$\begin{aligned} \sum_{i, x \geq 1} x [i < n] [x = \lfloor \lg i \rfloor] &= \sum_{i, x \geq 1} x [i < n] [x \leq \lg i < x + 1] \\ &= \sum_{i, x \geq 1} x [i < n] [2^x \leq i < 2^{x+1}] \\ &= \sum_{i, x \geq 1} x [2^x \leq i < 2^{x+1} \leq n] + \sum_{i, x \geq 1} x [2^x \leq i < n < 2^{x+1}] . \end{aligned}$$

W pierwszej z dwóch otrzymanych sum najpierw sumujemy wewnątrz po i i dostajemy:

$$\begin{aligned} \sum_{x \geq 1} x \sum_{i \geq 1} [2^x \leq i < 2^{x+1} \leq n] &= \sum_{x \geq 1} x \cdot 2^x \cdot [2^{x+1} \leq n] \\ &= \sum_{x=1}^{\lfloor \lg n \rfloor - 1} x \cdot 2^x \\ &= (\lfloor \lg n \rfloor - 2) \cdot 2^{\lfloor \lg n \rfloor} + 2 . \end{aligned}$$

W drugiej sumie wartość x jest wyznaczona jednoznacznie, dostajemy:

$$\sum_{2^{\lfloor \lg n \rfloor} \leq i < n} \lfloor \lg n \rfloor = (n - 2^{\lfloor \lg n \rfloor}) \cdot \lfloor \lg n \rfloor ,$$

co daje razem ostateczny wynik $n \lfloor \lg n \rfloor - 2^{1+\lfloor \lg n \rfloor} + 2$. \diamond

Różnice skończone. Rozważamy *operator różnicy skończonej*

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) ,$$

który przyporządkowuje $\Delta f(x)$ funkcji $f(x)$. Jest on dobrze zdefiniowany dla każdej funkcji określonej na podzbiorze liczb (zespólonych) takiej, że jeżeli x należy do dziedziny funkcji f , to $x+1$ też należy. Będziemy stosowali Δ do takich funkcji, które jako

dziedzinę mają liczby rzeczywiste lub naturalne. Operator Δ jest podobny do *operatora różniczkowania*

$$Df(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

w tym sensie, że iloraz różnicowy jest równy różnicy skończonej dla $h = 1$, a 1 jest najmniejszą odległością pomiędzy różnymi liczbami w dziedzinie liczb naturalnych. Funkcja określona na liczbach naturalnych to po prostu ciąg, wtedy mamy $\Delta f_n = \langle f_{n+1} - f_n \rangle$, czyli w tym przypadku Δ przyporządkowuje ciągowi $\langle f_0, f_1, f_2, \dots \rangle$ ciąg

$$\langle f_1 - f_0, f_2 - f_1, f_3 - f_2, \dots \rangle.$$

Operator Δ możemy iterować, liczbę złożań zaznaczamy w wykładniku:

$$\Delta^{k+1} f = \Delta(\Delta^k f),$$

gdzie dodatkowo przyjmujemy $\Delta^0 f = f$.

Przykład. Niech $\langle f_n \rangle = \langle 0, 1, 4, 9, 16, \dots \rangle = \langle n^2 \rangle$. Wtedy mamy kolejno ciągi:

$$\begin{aligned} \Delta f_n &= \langle 1, 3, 5, 7, \dots \rangle; \\ \Delta^2 f_n &= \langle 2, 2, 2, 2, \dots \rangle; \\ \Delta^3 f_n &= \langle 0, 0, 0, 0, \dots \rangle. \end{aligned}$$

◇

Różniczkowanie jednomianów jest proste: $D(x^n) = n \cdot x^{n-1}$. Natomiast operator Δ od jednomianu daje bardziej złożony wielomian, na przykład

$$\begin{aligned} \Delta(x^3) &= (x+1)^3 - x^3 \\ &= 3x^2 + 3x + 1. \end{aligned}$$

Okazuje się, że są inne “dobre” wielomiany dla Δ , które określamy następująco:

$$x^{\underline{n}} = \underbrace{x(x-1) \cdots (x-n+1)}_n,$$

co czytamy: “ x dolna silnia n ”, gdzie także $x^{\underline{0}} = 1$. Rzeczywiście, zachodzi:

$$\begin{aligned} \Delta x^{\underline{n}} &= (x+1)^{\underline{n}} - x^{\underline{n}} \\ &= (x+1)x(x-1) \cdots (x-n+2) - x(x-1) \cdots (x-n+1) \\ &= n \cdot x^{\underline{n-1}}. \end{aligned}$$

Podobnie określamy “ x górna silnia n ”:

$$x^{\overline{n}} = \underbrace{x(x+1) \cdots (x+n-1)}_n.$$

Każdy wielomian $p(x)$ stopnia k można przedstawić jednoznacznie w postaci $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i \cdot x^{\underline{i}}$, bowiem ciąg dolnych silni x jest bazą przestrzeni liniowej wielomianów.

Współczynniki a_i znajdujemy rozważając wartości w punkcie 0 kolejnych różnic $p(x)$. Dostajemy: $a_0 = p(0)$, $a_1 = (\Delta p)(0)$, $a_2 = (\Delta^2 p)(0)/2$, i ogólnie

$$p(x) = \sum_{i=0}^k \frac{(\Delta^i p)(0)}{i!} \cdot x^i, \quad (1)$$

co jest podobnym wzorem do tego, które daje twierdzenie Taylora dla wielomianów.

Operatory różniczkowania D i całkowania \int są do siebie odwrotne. Jak mógłby wyglądać operator Δ^{-1} odwrotny do Δ ? Niech $\langle g_n \rangle = \Delta^{-1} f_n$. Z zależności $\Delta(\Delta^{-1} f_n) = \langle f_n \rangle$ wynika $f_n = g_{n+1} - g_n$, $f_{n-1} = g_n - g_{n-1}$, ..., $f_0 = g_1 - g_0$, dla $n \geq 0$. Dodając te równości dostajemy $g_{n+1} - g_0 = \sum_{i=0}^n f_i$, dla $n \geq 0$, czyli

$$g_n = g_0 + \sum_{i=0}^{n-1} f_i,$$

dla $n > 0$, a wartość g_0 może być dowolną stałą. Pokazaliśmy zatem, że operator sumy jest odwrotny do operatora różnicy, co nie jest bardzo zaskakujące.

Operator Δ^{-1} (sumowania nieoznaczonego?) wyznacza ciąg $\Delta^{-1} f_n$ z dokładnością do stałej, podobnie jak całkowanie nieoznaczone. Rozważymy także *sumowanie oznaczone*, które wyrażamy przez nową notację $\mathcal{S}_a^b f_n$, jako że w Δ^{-1} miejsce na górny wykładnik jest już zajęte. Co oznacza $\mathcal{S}_a^b f_n$? Jeżeli $g_n = \Delta^{-1} f_n$, to naturalnie jest położyć

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a^b f_n &= g_n \Big|_a^b \\ &= g_b - g_a \\ &= \sum_{a \leq i < b} f_i. \end{aligned}$$

Zauważmy, że w ostatniej sumie przedział sumowania jest określony przez nierówności, z których jedna jest ostra a druga nieostra.

Jaki jest pożytek z takich rozważań? Przede wszystkim od razu wiemy jak obliczyć skończone sumy kolejnych wartości funkcji f , o ile znamy funkcję F taką, że ma miejsce równość $\Delta F(x) = f(x)$.

Przykład: Suma kolejnych wartości dolnej silni:

$$\sum_{a \leq i < b} i^k = \frac{i^{k+1}}{k+1} \Big|_a^b.$$

Powyższy wzór można zastosować do obliczenia sum postaci $\sum_{i=a}^b i^k$, gdzie występują już zwykle jednomiany. Na przykład dla $k = 2$ korzystamy z przedstawienia $x^2 = x^2 + x^1$ i dostajemy

$$\sum_{i=a}^{b-1} i^2 = \left(\frac{i^3}{3} + \frac{i^2}{2} \right) \Big|_a^b.$$

Jednomian x^2 możemy zastąpić dowolnym wielomianem, który przedstawiamy jako kombinację liniową dolnych silni posługując się różnicowym odpowiednikiem (1) twierdzenia Taylora dla wielomianów. \diamond

Dolne silnie można określić dla ujemnych wykładników wzorem

$$x^{-i} = \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+i)} ,$$

gdzie $i > 0$. Wzór $\Delta x^j = j \cdot x^{j-1}$ zachodzi także dla $j < 0$. Rzeczywiście, sprawdzamy:

$$\begin{aligned} \Delta x^{-i} &= \frac{1}{(x+2)(x+3)\cdots(x+i+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)\cdots(x+i)} \\ &= \frac{x+1 - (x+i+1)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+i+1)} \\ &= \frac{-i}{(x+1)(x+2)\cdots(x+i+1)} \\ &= -i \cdot x^{-i-1} . \end{aligned}$$

Funkcje rzeczywiste e^x i $\ln x$ mają pochodne $D e^x = e^x$ oraz $D \ln x = x^{-1}$. Ich naturalnymi odpowiednikami dla dziedziny ciągów z operatorem różnicy skończonej są ciągi $\langle 2^n \rangle$ oraz $\langle H_n \rangle$, bowiem $\Delta 2^n = \langle 2^n \rangle$ i $\Delta H_n = \langle \frac{1}{n+1} \rangle = \langle n^{-1} \rangle$.

Sumowanie przez części. Wyprowadzimy wzór na różnicę skończoną iloczynu:

$$\begin{aligned} \Delta [r(x)t(x)] &= r(x+1)t(x+1) - r(x)t(x) \\ &= r(x+1)t(x+1) - r(x)t(x+1) + r(x)t(x+1) - r(x)t(x) \\ &= t(x+1)\Delta r(x) + r(x)\Delta t(x) . \end{aligned}$$

Możemy to zapisać w postaci $\Delta (rt) = r\Delta t + E t \Delta r$, gdzie E jest *operatorem przesunięcia*: $E t(x) = t(x+1)$. Dostajemy następujący wzór, nazywany *wzorem na sumowanie przez części* przez analogię z całkowaniem:

$$\mathcal{S}_a^b r \cdot \Delta t = r \cdot t \Big|_a^b - \mathcal{S}_a^b E t \cdot \Delta r .$$

Przykład: Obliczymy $\sum_{a \leq n < b} n \cdot 2^n$. Podstawiamy $r(x) = x$ i $t(x) = 2^x$. Dostajemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a^b n \Delta 2^n &= n 2^n \Big|_a^b - \mathcal{S}_a^b 2^{n+1} \\ &= n 2^n \Big|_a^b - 2 \mathcal{S}_a^b \Delta 2^n \\ &= (n-2) \cdot 2^n \Big|_a^b , \end{aligned}$$

gdzie korzystamy z równości: $\Delta n = \langle 1 \rangle$ i $\Delta 2^n = \langle 2^n \rangle$. \diamond

Zadania

1. Oblicz następujące sumy:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sum_{0 \leq i < n} (-1)^i i^3 ; & \text{b)} \sum_{0 < i < n} i(i-1)3^i ; \\ \text{c)} \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)} ; & \text{d)} \sum_{0 < i < n} i^3 . \end{array}$$

2. Oblicz następujące sumy podwójne:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 2^i ; & \text{b)} \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} j - i ; \\ \text{c)} \quad \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{1}{k - j} ; & \text{d)} \quad \sum_{1 \leq k, j \leq n} k \cdot j . \end{array}$$

3. Oblicz następujące sumy nieskończone:

$$\text{a)} \quad \sum_{i \geq 0} i 2^{-i} ; \quad \text{b)} \quad \sum_{i \geq 0} i^2 2^{-i} ; \quad \text{c)} \quad \sum_{i \geq 1} H_i 2^{-i} .$$

4. Oblicz sumę $\sum_{i=1}^n i^2$ próbując obliczyć przez zaburzanie sumę $\sum_{i=1}^n i^3$.

5. Oblicz sumę

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \left\lceil \sqrt{i} \right\rceil$$

używając metody z notacją Iversona.

6. Niech $p(x)$ to wielomian stopnia k . Pokaż, że $\Delta^{k+1} p(n)$ jest ciągiem zer.

7. Znajdź wzór na $\Delta^k a^x$, dla stałej a .

8. Znajdź $\langle f_n \rangle$, gdy $\Delta f_n = \langle 3n \rangle$.

9. Wyprowadź wzór na różnicę skończoną ilorazu funkcji.

10. Pokaż że warunki $\Delta f(x) = f(x)$ i $f(0) = 1$ określają jednoznacznie $f(x) = 2^x$ na zbiorze liczb naturalnych.

11. Jaki jest ogólny wzór na $\mathcal{S}_a^b n^k$, gdzie sumujemy po n , dla ustalonego k całkowitego?

Wskazówka: występuje specjalny przypadek dla $k = -1$, podobnie jak dla całki $\int x^k dx$.

12. Pokaż następującą równość, sumując lewą stronę przez części:

$$\sum_{0 \leq i < n} i H_i = \frac{n^2}{2} \left(H_n - \frac{1}{2} \right) .$$

13. Pokaż tożsamość

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i = n \sum_{i=1}^n a_i b_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) (b_j - b_i) .$$

Wskazówka: rozważ sumy $\sum_i \sum_j (a_i b_i - a_i b_j)$, $\sum_i \sum_j (a_j b_j - a_j b_i)$.

14. Pokaż że jeżeli ciągi $\langle a_i \rangle$ oraz $\langle b_i \rangle$ są oba niemalejące lub oba nierosnące to prawdziwa jest następująca *nierówność Czebyszewa*:

$$\sum_{i=1}^n a_i \cdot \sum_{i=1}^n b_i \leq n \sum_{i=1}^n a_i b_i .$$

15. Pokaż *tożsamość Lagrange'a*:

$$\sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

Współczynniki dwumianowe. W rozważaniach kombinatorycznych często pojawiają się następujące *współczynniki dwumianowe*: $\binom{n}{k}$, dla n i k naturalnych, oznacza *liczbę podzbiorów k -elementowych ze zbioru n -elementowego*. Równoważną definicją jest następujący wzór:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.\end{aligned}\tag{1}$$

Rzeczywiście, licznik ułamka jest równy liczbie sposobów wyboru ciągu k elementów bez zwracania ze zbioru n elementowego, natomiast mianownik jest równy liczbie wyborów elementów ustalonego podzbioru k elementowego, jako wyrazów takiego ciągu. Zaletą wzoru (1) jest możliwość jego rozszerzenia dla górnego wskaźnika rzeczywistego poprzez *wielomiany czynnikiowe* $x^{\underline{k}}$. Określamy $\binom{r}{k}$ dla r rzeczywistego i k całkowitego następująco:

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} \frac{r^{\underline{k}}}{k!} & \text{dla } k \geq 0 ; \\ 0 & \text{dla } k < 0 . \end{cases}$$

Zwykle litery dalekie w alfabecie jak r, s, x w górnym wskaźniku oznaczają wartości rzeczywiste, natomiast litery i, j, k, n , oznaczają wartości całkowite. Nazwa współczynników dwumianowych bierze się z *twierdzenia o dwumianie*, które w najprostszej postaci jest następującą tożsamością, gdzie n to liczba całkowita nieujemna:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \cdot y^{n-i} .\tag{2}$$

Prawdziwość (2) wynika bezpośrednio z określenia współczynników dwumianowych. Podstawiając $x = y = 1$ do wzoru (2) dostajemy

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} .$$

Podobnie, podstawiając $x = 1$ i $y = -1$ dostajemy

$$0^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} .$$

Mamy $0^0 = \binom{0}{0} = 1$, oraz $0^n = 0$ dla $n > 0$, co można wyrazić zwięźle przez $0^n = [n = 0]$.

Można też wprowadzić *współczynniki trójmianowe*, jak we wzorze poniżej:

$$(x+y+z)^n = \sum_{\substack{0 \leq a, b \leq n \\ a+b \leq n}} \binom{n}{a, b} x^a \cdot y^b \cdot z^{n-a-b} .$$

Zachodzi następujący wzór:

$$\begin{aligned} \binom{n}{a, b} &= \binom{n}{a+b} \cdot \binom{a+b}{b} \\ &= \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot (n-a-b)!} . \end{aligned} \quad (3)$$

Iloczyn współczynników dwumianowych takie jak w środkowej części wzoru (3) można przekształcać następująco:

$$\binom{n}{k} \cdot \binom{k}{i} = \binom{n}{i} \cdot \binom{n-i}{k-i} , \quad (4)$$

co nazywamy *trójmianowym przestawieniem*. Wzór (4) ma prostą interpretację kombinatoryczną: liczymy na dwa sposoby pary $\langle A, B \rangle$ podzbiorów zbioru n -elementowego, takie, że $A \subseteq B$ oraz $|A| = i$, $|B| = k$.

Zrobimy teraz przegląd najprostszych własności współczynników dwumianowych. Zaczniemy od wzoru na *rozwiniecie w silnie*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} ,$$

przez modyfikację wzoru (1). Każdemu podzbirowi możemy jednoznacznie przyporządkować uzupełnienie, i dostajemy *własność symetrii*:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} .$$

Wyciągają pierwsze czynniki na zewnątrz we wzorze (1) dostajemy *prawo pochłaniania*:

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k} \cdot \binom{r-1}{k-1} . \quad (5)$$

Współczynniki dwumianowe, dla naturalnych wskaźników $k \leq n$, można określić rekurencyjnie:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = n ; \\ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} & \text{dla } k > 0 . \end{cases}$$

Dowód kombinatoryczny: wybieramy jeden element x ze zbioru n -elementowego, po czym dzielimy wszystkie k -elementowe podzbiory na dwie grupy w zależności od tego, czy x należy do nich czy nie. Tę zależność rekurencyjną nazywamy *tożsamością Pascala*. Przy jej pomocy możemy łatwo obliczać wartości współczynników dwumianowych, ustawiając częściowe wyniki w trójkątnej tablicy, gdzie wiersze i kolumny numerowane są odpowiednimi wskaźnikami. Taką tablicę można narysować przechyloną w postaci *trójkąta Pascala*, wtedy przekątne stają się poziome. Oto pierwsze pięć z takich przekątnych:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Zaletą takiego przedstawienia jest reguła otrzymywania kolejnych elementów jako sumy dwóch leżących bezpośrednio powyżej. Zachodzi ogólniejszy wzór dla x rzeczywistych:

$$\binom{x}{k} = \binom{x-1}{k} + \binom{x-1}{k-1}. \quad (6)$$

Zauważmy, że jest to równość wielomianów zmiennej x stopni $\leq k$. Na mocy poprawności rekurencyjnego określenia współczynników dwumianowych te dwa wielomiany mają równe wartości w nieskończenie wielu punktach $x = n \geq k$. Ich różnica jest też wielomianem stopnia $\leq k$ i ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, zatem jest zerowa.

Przykład. Rzeczywiste lub nawet tylko całkowite górne wskaźniki we współczynnikach dwumianowych dają większą elastyczność w przekształcaniu wyrażeń. Dla ilustracji rozważmy sumę

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{n}{i}, \quad (7)$$

dla naturalnych $k \leq n$. Zastąpimy naturalne n przez rzeczywiste x . Wtedy można przekształcić składnik tak, że $(-1)^i$ zostaje pochłonięty przez współczynnik dwumianowy:

$$(-1)^i \binom{x}{i} = \binom{i-1-x}{i}.$$

To przekształcenie nazywamy *negowaniem górnego wskaźnika*. Sprawdzamy poprawność tego przekształcenia rachując:

$$\begin{aligned} x^{\underline{i}} &= x(x-1)\cdots(x-i+1) \\ &= (-1)^i(-x)(1-x)\cdots(i-1-x) \\ &= (-1)^i(i-1-x)^{\underline{i}}. \end{aligned}$$

Otrzymaną sumę możemy zwinąć posługując się tożsamością (6), poczynawszy od najmniejszych wartości i :

$$\binom{0-1-x}{0} + \binom{1-1-x}{1} = \binom{2-1-x}{1},$$

gdzie korzystamy z równości

$$\binom{0-1-x}{0} = \binom{1-1-x}{0}.$$

Podobnie

$$\binom{2-1-x}{1} + \binom{2-1-x}{2} = \binom{3-1-x}{2}.$$

Razem dostajemy $\binom{k-x}{k}$. Zastosowane przekształcenie można opisać zwięźle jako

$$\sum_{i=0}^k \binom{y+i}{i} = \binom{y+k+1}{k},$$

co nazywamy *wzorem sumowania równoległego*. Wracając do sumy (7), w otrzymanym właśnie $\binom{k-x}{k}$ negujemy górny wskaźnik i dostajemy ostatecznie

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{x}{i} = (-1)^k \binom{x-1}{k} . \quad \diamond$$

Zachodzi *tożsamość Cauchy'ego*:

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} , \quad (8)$$

dla naturalnych n i m . Dowód kombinatoryczny: liczbę k -elementowych podzbiorów zbioru X o $n+m$ elementach obliczamy tak, że ustalamy podział X na dwa rozłączne podzbiory A i B o n i m elementach, odpowiednio, i wybieramy niezależnie i elementów z A oraz $k-i$ elementów z B . Prawdziwe jest uogólnienie:

$$\sum_i \binom{x}{m+i} \binom{y}{n-i} = \binom{x+y}{m+n} , \quad (9)$$

które jest tożsamością wielomianów od zmiennych x i y . Pokazujemy go ze wzoru (8), najpierw podstawiając x i y zamiast górnych wskaźników n i m , podobnie jak w (6):

$$\sum_i \binom{x}{i} \binom{y}{k-i} = \binom{x+y}{k} ,$$

a następnie podstawiamy $m+n$ zamiast k oraz $i+m$ zamiast i .

W takich sumach nie potrzebujemy określać granic sumowania poza to, że wskaźnik przebiega *wszystkie liczby całkowite*, co możemy zrobić ponieważ przyjęliśmy, że dla ujemnego dolnego wskaźnika współczynnik dwumianowy ma wartość zero. Ta konwencja jest szczególnie użyteczna przy zmianie kolejności sumowania i podstawieniach na wskaźnik sumowania. Przedstawimy to w dowodzie następującej równoważności, zwanej *wzorem na odwracanie dla współczynników dwumianowych*:

$$a(n) = \sum_i \binom{n}{i} (-1)^i b(i) \quad \text{w.t.w.} \quad b(n) = \sum_i \binom{n}{i} (-1)^i a(i) ,$$

gdzie a i b są dowolnymi funkcjami od argumentów całkowitych o wartościach rzeczywistych. Pokażemy wynikanie w prawą stronę, w lewą jest podobnie. Obliczamy sumę po prawej stronie, zakładając lewą i zmieniając kolejność sumowania:

$$\begin{aligned} \sum_i \binom{n}{i} (-1)^i a(i) &= \sum_i \binom{n}{i} (-1)^i \sum_k \binom{i}{k} (-1)^k b(k) \\ &= \sum_k b(k) \sum_i \binom{n}{i} \binom{i}{k} (-1)^{i+k} . \end{aligned}$$

Teraz przez przestawienie trójmianowe dostajemy, że powyższa suma jest równa:

$$= \sum_k b(k) \sum_i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i+k} = \sum_k b(k) \binom{n}{k} \sum_i \binom{n-k}{i-k} (-1)^{i+k}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k b(k) \binom{n}{k} \sum_i \binom{n-k}{i} (-1)^i \\
&= \sum_k b(k) \binom{n}{k} [n=k] \\
&= b(n) ,
\end{aligned}$$

gdzie podstawiliśmy $i+k$ zamiast i .

Przykład. Oto zastosowanie wzoru na odwracanie. *Nieporządkiem* na skończonym zbiorze A nazywamy wzajemnie jednoznaczne przekształcenie $f : A \rightarrow A$ taką, że $f(x) \neq x$ dla każdego $x \in A$. Obliczymy ile jest nieporządków na zbiorze n elementowym, oznaczamy tę liczbę przez D_n , gdzie przyjmujemy $D_0 = 1$. Liczba wzajemnie jednoznacznych przekształceń zbioru n elementowego takich, że $f(x) \neq x$ dla dokładnie i elementów jest równa $\binom{n}{i} D_i$. Stąd mamy równość

$$\begin{aligned}
n! &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} D_i \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (-1)^i (-1)^i D_i ,
\end{aligned}$$

a z wzoru na odwracanie dostajemy

$$\begin{aligned}
D_n &= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} i! \\
&= \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \frac{n!}{(n-i)!} \\
&= n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} .
\end{aligned}$$

◇

Ogólne twierdzenie o dwumianie mówi, że prawdziwe jest rozwinięcie w szereg potęgowy:

$$(1+x)^r = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k , \quad (10)$$

dla dowolnego ustalonego rzeczywistego r i zmiennej $|x| < 1$. W takiej postaci to twierdzenie dowodzi się metodami analizy matematycznej, na przykład szacując resztę z odpowiedniego wariantu twierdzenia Taylora. Ale jego odkrycie zabrało wiele czasu i nie było proste, bo analiza matematyczna była w tamtych pionierskich czasach w powijkach.

Dla r naturalnego wzór (10) sformułował Pascal. Newton rozszerzył go do r całkowitych. Jak można to odkryć? W tym celu rozważmy ujemne całkowite r . Negując górny wskaźnik przechodzimy do postaci

$$\binom{r}{k} = (-1) \cdot \binom{k-r-1}{k}$$

i szereg przyjmuje postać

$$\sum_{k \geq 0} \binom{k-r-1}{k} (-1)^k x^k .$$

Podstawiając $-r$ za r i $-x$ za x dostajemy wzór na dwumian

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k \geq 0} \binom{k+r-1}{k} x^k , \quad (11)$$

który jest równoważny (10), ale w tej chwili nas interesuje przypadek naturalnego r . Dla $r = 1$ wzór (11) przyjmuje postać $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + \dots$, która wynika od razu z wzoru na sumę postępu geometrycznego. Dla $r = 2$ mamy wzór

$$(1-x)^{-2} = \sum_{k \geq 0} (k+1) x^k .$$

Sprawdzenie: obliczamy sumę częściową $\sum_{k \geq 0}^n (k+1) x^k$, na przykład przez zaburzanie, przechodzimy z $n \rightarrow \infty$, i dostajemy $(1-x)^{-2}$ (ćwiczenie). Ogólnie możemy pokazać wzór (11) dla r naturalnego przez indukcję, mnożąc szereg z prawej strony wzoru (11) przez $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = (1-x)^{-1}$. Przy czym szeregi mnożymy bez wahania jak wielomiany, jako że nie dowodzimy a tylko odkrywamy:

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) x^n .$$

Indukcja działa, bo wykładniki w dwumianie się dodają.

Ta własność jest kluczowa dla rozszerzenia twierdzenia na wymierne wykładniki r , co odkrył z kolei Euler. Można to zrobić następująco. Zauważmy, że jeżeli funkcje $d_r(x)$ są określone wzorem $[f(x)]^r$, dla jakiejś ustalonej funkcji f , to mają następującą *własność tłumaczenia mnożenia na dodawanie*:

$$d_r(x) \cdot d_t(x) = d_{r+t}(x) .$$

Ale prawdziwy jest częściowo odwrotny fakt: *jeżeli funkcje $d_r(x)$ mają taką własność tłumaczenia, to $d_r(x) = [d_1(x)]^r$ dla wymiernych r* (ćwiczenie). Rozważmy funkcję

$$t_r(x) = \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k ,$$

określoną szeregiem z wzoru (10). (Czy jest ona dobrze określona? Nie będziemy w to wnikać, bo po pierwsze w czasach takich odkryć pojęcie funkcji było dosyć mgliste, po drugie nie jest to problem dyskretny, a po trzecie tylko odkrywamy.) Przypuśćmy, że pokazaliśmy, że $t_r(x)$ ma własność tłumaczenia, wtedy mamy równości

$$t_r(x) = [t_1(x)]^r$$

dla r wymiernych. Jednocześnie obliczamy $t_1(x) = 1 + x$, bowiem

$$\sum_{k \geq 0} \binom{1}{k} x^k = 1 + x ,$$

zatem nasz wzór dla r wymiernych byłby odkryty.

Jeżeli na dodatek funkcja $t_r(x)$, jako funkcja od dwóch zmiennych r i x , jest ciągła od argumentu r , to r może być rzeczywiste we wzorze (10). Problem ciągłości przeskoczmy, choćby dlatego, że nie jest dyskretny, ale własność tłumaczenia możemy sprawdzić:

$$\begin{aligned} t_r(x) \cdot t_s(x) &= \sum_{k \geq 0} \binom{r}{k} x^k \cdot \sum_{k \geq 0} \binom{s}{k} x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \left(\sum_{i \geq 0} \binom{r}{i} \binom{s}{k-i} \right) x^k \\ &= \sum_{k \geq 0} \binom{r+s}{k} x^k \\ &= t_{r+s}(x) , \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z tożsamości Cauchy'ego (9). Wzór (10) możemy zatem uznać za odkryty w całej ogólności.

Zadania

1. Dla jakich wartości i liczba $\binom{n}{i}$ przyjmuje wartość maksymalną, przy ustalonym n ?
2. Przedstaw następującą sumę jako współczynnik dwumianowy

$$\sum_{i_n=0}^m \sum_{i_{n-1}=0}^{i_n} \cdots \sum_{i_2=0}^{i_3} \sum_{i_1=0}^{i_2} \sum_{i_0=0}^{i_1} 1 ,$$

gdzie n, m liczby naturalne.

3. Wyprowadź wzór sumowania równoległego przez interpretację kombinatoryczną.
4. Oblicz różnicę skończoną $\Delta f(x)$, dla $f(x) = \binom{x}{n}$.
5. Pokaż wzór na *sumowanie po górnym wskaźniku*:

$$\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

na trzy sposoby: a) indukcja z tożsamości Pascala, b) interpretacja kombinatoryczna, oraz c) sumując przez różnice skończone, korzystając z zadania 4.

6. Pokaż wzór

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-1}{k} .$$

7. Pokaż następującą równość:

$$(-4)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \binom{2n}{n} .$$

8. Doprowadź następujące sumy do postaci zwartej, dla n, m naturalnych:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_i i \binom{n}{i} ; & \text{b)} \quad \sum_i i^2 \binom{n}{i} ; \\ \text{c)} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} ; & \text{d)} \quad \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{k} (3^k - 4^n) ; \\ \text{e)} \quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} 2^{2k} ; & \text{f)} \quad \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} . \end{array}$$

9. Oblicz sumę

$$\sum_{A, B \subseteq X} |A \cup B| ,$$

sumując po wszystkich parach $\langle A, B \rangle$ podzbiorów zbioru X , gdzie liczność X jest równa $|X| = n$. Na przykład suma ta jest równa 24 dla $|X| = 2$.

10. Pokaż następujące przedstawienie liczb Fibonacciego przez współczynniki dwumianowe:

$$F_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n-i}{i} .$$

11. Pokaż następujące przedstawienie liczb harmoniczych przez współczynniki dwumianowe:

$$H_n = \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} \binom{n}{i} .$$

12. Każdą liczbę naturalną n można zapisać jako iloczyn potęg liczb pierwszych:

$n = p_1^{c_1} p_2^{c_2} \cdots p_k^{c_k}$, gdzie liczby p_i są parami różne i $c_i > 0$, jednoznacznie z dokładnością do kolejności czynników. Funkcję Möbiusa określamy następująco:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } n = 1 ; \\ 0 & \text{jeżeli } c_i > 1 \text{ dla pewnego } i ; \\ (-1)^k & \text{jeżeli wszystkie } c_i = 1 . \end{cases}$$

Pokaż, że suma wartości $\mu(d)$, po wszystkich dzielnikach d liczby n , jest równa $[n = 1]$.

13. Pokaż następujący wzór na iterowanie operatora różnicy skończonej, dla $n \geq 0$:

$$\Delta^n f(x) = \sum_i \binom{n}{i} (-1)^{n-i} f(x+i) .$$

14. Pokaż, że liczby nieporządków spełniają następujące równania rekurencyjne:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad D_n &= n \cdot D_{n-1} + (-1)^n ; \\ \text{(b)} \quad D_{n+1} &= n \cdot (D_n + D_{n-1}) . \end{array}$$

15. Oblicz sumę nieskończoną

$$\sum_{k \geq 0} (k+1)(k+2)2^{-k-4}.$$

Wskazówka: zastosuj wzór (11).

16. Pokaż, że każdą liczbę naturalną z można przedstawić w dokładnie jeden sposób w postaci

$$z = \binom{x+y+1}{2} + x,$$

dla pewnych naturalnych x, y .

17. Pokaż, że liczba

$$\sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} F_{m+k}$$

jest liczbą Fibonacciego, dla całkowitych $n, m \geq 0$.

18. Ile jest ciągów złożonych z zer i jedynek, o długości $4n$, w których zero występuje $2n$ razy i jedynka $2n$ razy, i takich, że liczba wystąpień zera przed n -tym wystąpieniem jedynki jest nie większa od n ?

Permutacje i liczby Stirlinga. Dla skończonego zbioru X jego *permutacja* to wzajemnie jednoznaczna funkcja $f : X \rightarrow X$. Niech X ma n elementów, często przyjmujemy, że $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Permutację zbioru n -elementowego nazywamy *n -permutacją*. Permutacje można zapisywać na wiele sposobów. Pierwszy to wypisanie elementów X w odpowiedniej kolejności. Niech $n = 5$, oto przykładowa 5-permutacja: 4, 1, 5, 2, 3. Interpretujemy to następująco: jeżeli liczba i stoi na miejscu k , to $f(i) = k$. Tę samą permutację możemy zapisać jak niżej, gdzie jeżeli pod liczbą i stoi liczba k , to $f(i) = k$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Z postaci zapisu widać, że jest dokładnie $n!$ permutacji zbioru n elementowego: na pierwszym miejscu możemy ustawić każdy z n elementów, potem na drugim miejscu niezależnie $n - 1$ elementów, potem $n - 2$, i tak dalej. Liczby $k!$ można oszacować następująco:

$$\left(\frac{k}{e}\right)^k < k! \leq \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{k} \cdot e. \quad (2)$$

Dowód przez indukcję po $k \geq 1$. Korzystamy z nierówności

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e < \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

które z kolei wynikają z faktu, że ciąg $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ zbiega rosnąco do e , a ciąg $\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}$ zbiega malejąco do e . Pokażemy dowód lewej nierówności we wzorze (2). Dla $k = 1$ mamy $e^{-1} < 1$. Krok indukcyjny: wychodząc z lewej strony (3) dostajemy kolejno nierówności:

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{k}\right)^k < e &\implies \left(\frac{k+1}{k}\right)^k \frac{k+1}{e} < k+1 \\ &\implies \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \left(\frac{e}{k}\right)^k < k+1. \end{aligned}$$

Mnożymy ostatnią nierówność stronami przez pierwszą nierówność we wzorze (2) i dostajemy $\left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} < (k+1)!$.

Mają miejsce dokładniejsze nierówności (zadanie 2):

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^{n+\frac{1}{12n}}, \quad (4)$$

zdumiewająco bliskie szacowaniu silni w odpowiednio dokładnym wzorze Stirlinga.

Z wzoru (2) można wyprowadzić następujące użyteczne nierówności dla współczynników dwumianowych, które zachodzą dla $0 < k \leq n$:

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k. \quad (5)$$

Prawa nierówność w (5) wynika z lewej nierówności we wzorze (2):

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

Lewa nierówność bezpośrednio z definicji, grupujemy czynniki jak z prawa pochłaniania:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} \geq \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

Powiemy, że permutacja $s : Y \rightarrow Y$ jest *cyklem*, jeżeli s ma tę własność, że gdy zaczniemy od dowolnego elementu $y \in Y$, i iterujemy funkcję s , otrzymując kolejno: y , $s(y)$, $s(s(y)) = s^2(y)$, i tak dalej, to przejdziemy po drodze wszystkie elementy zbioru Y . Cykl zapisujemy podając ciąg kolejnych różnych elementów w nawiasach kwadratowych:

$$[y, s(y), s(s(y)), \dots] \quad (6)$$

Zwróćmy uwagę, że ten sam cykl można zapisać na wiele sposobów, w zależności od wyboru pierwszego elementu, na przykład:

$$[2, 4, 1, 3] = [4, 1, 3, 2] = [1, 3, 2, 4] = [3, 2, 4, 1].$$

Każda permutacja f zbioru X określa jego rozkład na rozłączne cykle: zaczynamy od dowolnego elementu x i iterujemy funkcję f : mamy kolejno $x = f^0(x)$, $f(x) = f^1(x)$, $f(f(x)) = f^2(x)$, i tak dalej. Zauważmy, że dla pewnego i znajdzie $f^i(x) = x$. Mianowicie, zbiór X jest skończony, i iterowanie f kiedyś spowoduje powrót do już rozważanego elementu $f^i(x) = f^k(x)$, gdzie $k < i$. Weźmy *najmniejsze* i takie, że $f^i(x) = f^k(x)$ dla pewnego $k < i$. Jeżeli $k \neq 0$ to dostajemy sprzeczność, bowiem $f^{i-1}(x) = f^{k-1}(x)$, jako że f jest permutacją. Elementy, przez które przeszliśmy, tworzą cykl. Jeżeli nie wyczerpalimy już wszystkich elementów zbioru X , to wybieramy dowolny z pozostałych, i powtarzamy to postępowanie.

Na przykład, permutacja (1) rozpada się na dwa cykle; wybierzmy najpierw 2, dostajemy kolejno 4 i 1 a następnie wracamy do 2, z pozostałych wybierzmy na przykład liczbę 5, za nią jest 3, i znów 5. Mówimy, że zapis

$$[2, 4, 1][5, 3]$$

jest dla permutacji (1) jej *rozkładem na cykle*. Jest to trzeci rodzaj zapisu tej permutacji, możliwy na 12 sposobów w tym przypadku. Jeden z nich można wyróżnić: zapisujemy cykl zaczynając od najmniejszego elementu, i cykle rozmieszczamy tak, że pierwsze elementy są w porządku rosnącym. Taki *kanoniczny* zapis jest jednoznaczny.

Przykład: Obliczymy prawdopodobieństwo, że w losowej n -permutacji liczby 1 i 2 są w tym samym cyklu. Rozważmy permutacje w zapisie kanonicznym. Pierwszy cykl zaczyna się od 1. Jeżeli 2 nie jest w pierwszym cyklu, to stoi na początku drugiego. Każdej permutacji, w której 1 i 2 występują w różnych cyklach, można przyporządkować permutację, w której 1 i 2 są w tym samym cyklu: usuwamy nawiasy kwadratowe rozdzielające pierwszy i drugi cykl. Takie przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczne, zatem prawdopodobieństwo jest równe $1/2$. \diamond

Liczbę permutacji zbioru n -elementowego, które rozkładają się dokładnie na k cykli, dla $k \geq 0$, oznaczamy przez $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ i nazywamy odpowiednią *liczbą Stirlinga pierwszego rodzaju*.

Przykład: Zachodzi $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$. Rzeczywiście, rozważmy liczbę zapisów postaci (6). Bez straty ogólności na początku jest zawsze ten sam element, pozostałe możemy ustawić dowolnie. \diamond

W szczególności: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 = 0!$. Zachodzi także wzór $\sum_{i=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = n!$ dla $n > 0$; jeżeli chcemy, by wzór ten był prawdziwy także dla $n = 0$, przyjmujemy $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0! = 1$. Stosujemy dodatkową konwencję, że $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = 0$ dla $i < 0$ lub $i > n$ całkowitych.

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju można obliczać rekurencyjnie, dla $0 \leq i \leq n$:

$$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} & \text{dla } i = 0 ; \\ (n-1) \cdot \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} & \text{dla } 0 < i \leq n . \end{cases}$$

Poprawność tej rekursji pokazujemy dzieląc permutacje na dwie części, w zależności od jednego wyróżnionego elementu x :

- a) jeżeli tworzy on sam pojedynczy cykl, to pozostałe dają $\begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix}$ permutacji;
- b) jeżeli x nie jest sam w swoim cyklu, to po usunięciu x mamy też permutację o i cyklach: jest ich $\begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$, a element x może być następnikiem każdego z pozostałych $n-1$ elementów.

Przykład: Ile jest cykli długości $k > 0$ zbudowanych z n elementów? Policzmy: każdy ciąg długości k , bez powtórzeń i ujęty w nawiasy kwadratowe, daje zapis cyklu. Takich napisów jest n^k . Ale ten sam cykl można zapisać na k różnych sposobów, zatem cykli długości k jest $n^k \cdot k^{-1}$. Inne pytanie: w ilu n -permutacjach występuje każdy z takich cykli? Policzmy: zostało $n-k$ elementów, mogą być one ustawione na $(n-k)!$ sposobów. Ostatnie pytanie: ile jest cykli we wszystkich $n!$ permutacjach? Z odpowiedzi na poprzednie pytania dostajemy, że jest ich:

$$\sum_{k=1}^n n^k \cdot k^{-1} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^n n! \cdot k^{-1} = n! \cdot H_n .$$

Tę liczbę można także wyrazić jako $\sum_{k=0}^n k \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną *permutacji losowych*, gdzie n -permutacje są zdarzeniami elementarnymi, każda ma prawdopodobieństwo $1/n!$. Niech zmienna losowa $\xi_n(\sigma)$ oznacza liczbę cykli w n -permutacji σ . Wartość oczekiwana $E \xi_n$, czyli średnia liczba cykli w n -permutacji losowej, jest równa $\frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \xi_n(\sigma)$, gdzie sumujemy po wszystkich n -permutacjach σ . Z powyższych rozważań wynika, że $E \xi_n = H_n$. \diamond

Podział na bloki skończonego zbioru X to pogrupowanie jego elementów w rozłączne i niepuste części zwane *blokami*. Dwa podziały α i β są *różne*, jeżeli istnieją takie dwa elementy $x_1 \in X$ oraz $x_2 \in X$, że albo x_1 i x_2 są w tym samym bloku w α i w różnych blokach w β albo odwrotnie. Liczbę podziałów zbioru n -elementowego na i bloków oznaczamy przez $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\}$ i nazywamy odpowiednią *liczbą Stirlinga drugiego rodzaju*. Stosujemy dodatkową konwencję, że $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} = 0$ dla $i < 0$ lub $i > n$ całkowitych.

Przykład: Zachodzi $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 2^{n-1} - 1$. Rzeczywiście: każdy niepusty właściwy podzbiór wyznacza podział na dwa bloki, przy czym ten sam podział na bloki dostajemy dla tego podzbioru i dla jego uzupełnienia. \diamond

Prawdziwa jest równość

$$\frac{1}{(k+1)!} \sum_{0 < i_1 < \dots < i_k < n} \binom{n}{i_k} \binom{i_k}{i_{k-1}} \dots \binom{i_2}{i_1} = \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\}. \quad (7)$$

Suma we wzorze (7) jest równa liczbie ciągów $\emptyset \subsetneq A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \dots \subsetneq \{1, \dots, n\}$. Każdy taki ciąg odpowiada ciągowi bloków $\langle B_1, \dots, B_{k+1} \rangle$ gdzie $B_1 = A_1, B_2 = A_2 - A_1, \dots, B_{k+1} = \{1, \dots, n\} - A_k$. Dzieląc przez $(k+1)!$ przechodzimy od ciągów do rodzin bloków.

Przykład. Dla przykładu obliczmy:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 3 \end{smallmatrix} \right\} &= \frac{1}{3!} \sum_{0 < j < i < n} \binom{n}{i} \binom{i}{j} = \frac{1}{6} \sum_{0 < i < n} \binom{n}{i} \sum_{0 < j < i} \binom{i}{j} = \frac{1}{6} \sum_{0 < i < n} \binom{n}{i} (2^i - 2) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{0 < i < n} \binom{n}{i} 2^i - \frac{1}{3} \sum_{0 < i < n} \binom{n}{i} = \frac{1}{6} (3^n - 1 - 2^n) - \frac{1}{3} (2^n - 2) = \frac{3^{n-1}}{2} - 2^{n-1} + \frac{1}{2}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju można obliczać rekurencyjnie, dla $0 \leq i \leq n$:

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right\} = \begin{cases} [n=0] & \text{dla } i=0; \\ i \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ i \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ i-1 \end{smallmatrix} \right\} & \text{dla } 0 < i \leq n. \end{cases}$$

Poprawność tej rekursji pokazujemy dzieląc podziały na dwie części, w zależności od jednego wyróżnionego elementu x :

- a) jeżeli x tworzy sam pojedynczy blok, to pozostałe dają $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ i-1 \end{smallmatrix} \right\}$ podziałów;
- b) jeżeli x nie jest sam w swoim bloku, to po usunięciu x mamy też podział o i blokach: jest ich $\left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ i \end{smallmatrix} \right\}$, a element x może należeć do każdego z i bloków.

Wprawdzie dwa rodzaje liczb Stirlinga są określone przez różne zależności rekurencyjne, ale dowody ich prawdziwości są podobne. Pokażemy teraz jak ściśle te dwa rodzaje liczb są ze sobą związane. Można wyrazić to w terminach przejść między bazami wielomianów. Rozważamy trzy bazy:

- a) wielomiany czynnikiowe wyznaczone przez górne silnie: $1, x^{\overline{1}}, x^{\overline{2}}, \dots$
- b) zwykłe jednomiany $1, x, x^2, \dots$
- c) wielomiany czynnikiowe wyznaczone przez dolne silnie: $1, x^{\underline{1}}, x^{\underline{2}}, \dots$

Liczby Stirlinga pierwszego rodzaju określają przejście pomiędzy a) i b), natomiast liczby Stirlinga drugiego rodzaju dają przejście od b) do c). Rozważmy pierwszy z tych przypadków. Zachodzi następujący wzór dla $n \geq 0$:

$$x^{\overline{n}} = \sum_i \left[\begin{smallmatrix} n \\ i \end{smallmatrix} \right] x^i. \quad (8)$$

Pokazujemy to przez indukcję po n . Podstawa indukcji jasna, krok indukcyjny:

$$\begin{aligned} x^{\overline{n}} &= x \cdot x^{\overline{n-1}} + (n-1) \cdot x^{\overline{n-1}} = x \cdot \sum_i \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} x^i + (n-1) \cdot \sum_i \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} x^i \\ &= \sum_i \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} x^i + \sum_i (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix} x^i = \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} x^i . \end{aligned}$$

Podobnie, korzystając z tożsamości $x^n = x \cdot x^{\underline{n-1}} - (n-1) \cdot x^{\underline{n-1}}$, pokazujemy wzór

$$x^n = \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} x^{\underline{i}} . \quad (9)$$

Ma miejsce następująca zależność pomiędzy dwoma rodzajami wielomianów czynniko-
wych:

$$\begin{aligned} (-x)^{\overline{k}} &= (-x)(-x+1)(-x+2) \dots (-x+k-1) \\ &= (-1)^k x(x-1)(x-2) \dots (x-k+1) = (-1)^k x^{\underline{k}} . \end{aligned}$$

Z niej wynikają wzory dualne do (8) i (9):

$$\begin{aligned} x^n &= (-1)^n (-x)^n = (-1)^n \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (-x)^i \\ &= (-1)^n \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (-1)^i x^{\overline{i}} = \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}} , \end{aligned}$$

oraz

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n (-x)^{\overline{n}} = (-1)^n \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-x)^i = \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^i .$$

Przechodząc od zwykłych jednomianów $\langle x^n \rangle$ do $\langle x^{\overline{n}} \rangle$ i z powrotem otrzymujemy:

$$x^n = \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}} = \sum_{i,k} \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-i} x^k .$$

Stąd mamy

$$\sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} \begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-i} = [n = k] ,$$

ze względu na jednoznaczność przedstawienia wielomianu jako kombinacji liniowej jedno-
mianów. Podobnie, przechodząc pomiędzy $\langle x^n \rangle$ i $\langle x^{\underline{n}} \rangle$, pokazujemy, że zachodzi dualny
wzór:

$$\sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-i} = [n = k] . \quad (10)$$

Podsumowaniem tych rozważań jest wzór na odwracanie dla liczb Stirlinga:

$$a(n) = \sum_i \left\{ \begin{matrix} n \\ i \end{matrix} \right\} (-1)^i b(i) \quad \text{w.t.w.} \quad b(n) = \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^i a(i) ,$$

który zachodzi dla dowolnych funkcji a i b . Pokażemy implikację w prawo, ta w lewo jest podobna. Obliczamy sumę z prawej strony, zakładając lewą:

$$\begin{aligned} \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^i a(i) &= \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} (-1)^i \sum_k \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^k b(k) = \sum_k \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{i+k} b(k) \\ &= \sum_k (-1)^{n+k} b(k) \sum_i \begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} i \\ k \end{matrix} \right\} (-1)^{n-i} = \sum_k (-1)^{n+k} b(k) [n = k] = b(n) . \end{aligned}$$

Zauważmy jak konwencja $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = 0$, dla $k < 0$ lub $k > n$, podobnie dla liczb $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$, upraszcza zapis granic sumowania w powyższym dowodzie, i w rezultacie operację zamiany kolejności sumowania.

Zadania .

1. Pokaż prawą nierówność we wzorze (2).

2. Pokaż nierówności (4), w której zamiast $\sqrt{2\pi}$ jest tylko pewna stała.

Wskazówki: Niech $f_n = \ln n! - \frac{1}{2} \ln n$. Pokaż $\int_{3/2}^n \ln x \, dx < f_n < \int_1^n \ln x \, dx$. Niech $g_n = \ln n! - (n + \frac{1}{2}) \ln n + n$. Oszacuj $g_n - g_{n+1} = (n + \frac{1}{2}) \ln \frac{n+1}{n} - 1$.

3. Pokaż nierówność

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$$

trzech sposobami: (a) indukcja, (b) wzór na dwumian, (c) interpretacja kombinatoryczna.

4. Pokaż nierówność

$$\binom{n}{\alpha n} \leq \left[\left(\frac{1}{\alpha} \right)^\alpha \left(\frac{1}{1-\alpha} \right)^{1-\alpha} \right]^n ,$$

zakładając, że αn jest całkowita.

Wskazówka: zadanie 3.

5. Pokaż, że zachodzi nierówność:

$$\binom{n}{i+k} \leq \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} .$$

Wskazówka: lewą stronę można pomnożyć przez współczynnik dwumianowy tak, aby zachodziła równość, jak w trójkianowym przestawieniu.

6. Powiemy że permutacja jest typu $1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}$ jeżeli ma dokładnie α_i cykli długości i . Pokaż, że liczba permutacji zbioru n elementowego, które są typu $1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n}$, jest równa

$$\frac{n!}{1^{\alpha_1} \dots n^{\alpha_n} \cdot \alpha_1! \dots \alpha_n!} .$$

7. Permutacja f jest *inwolucją* gdy złożenie f ze sobą jest identycznością. Pokaż:

1. n -permutacja f jest inwolucją w.t.w. gdy f jest typu $1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}$, gdzie $\alpha_1 + 2\alpha_2 = n$;
2. każda permutacja jest złożeniem dwóch inwolucji.

8. Pokaż tożsamość

$$x^n = \sum_k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k$$

przez interpretację kombinatoryczną.

Wskazówka: ile funkcji ze zbioru n -elementowego w m -elementowy przyjmuje dokładnie k wartości?

9. Sprawdź wzory (9) i (10).

10. Przedstaw inaczej wartości liczb Stirlinga $\left\{ \begin{matrix} n \\ 4 \end{matrix} \right\}$ i $\left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\}$.

11. Oblicz sumy:

$$\sum_k (-1)^k \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] \quad \text{i} \quad \sum_k (-1)^k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}.$$

12. Pokaż następujące wzory, gdzie nawiasy kwadratowe obejmujące ciągi nierówności to jak zwykle notacja Iwersona:

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-k}} i_1 \cdot i_2 \dots i_{n-k} \cdot [1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{n-k} \leq k],$$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{i_1, \dots, i_{n-k}} i_1 \cdot i_2 \dots i_{n-k} \cdot [0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k} < n].$$

13. Dane są liczby naturalne $n \geq k > 0$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowej n -permutacji jedynka należy do cyklu o długości k ?
14. Pokaż, że losowa n -permutacja z prawdopodobieństwem H_{n-1}/n składa się dokładnie z dwóch cykli.

Funkcje tworzące. Dla danego ciągu $\langle a_n \rangle$, jego *funkcją tworzącą* (f.t.) nazywamy wyrażenie

$$A(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n z^n. \quad (1)$$

Dodatkowo przyjmujemy umowę, że $a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0$. Na (1) można patrzeć dwójako: bądź jako *szereg formalny*, czyli w zasadzie tylko inny zapis ciągu $\langle a_n \rangle$, bądź jako *rozwinięcie w szereg potęgowy* funkcji (zmiennej zespolonej) $A(z)$, prawdziwe w jakimś obszarze.

Oto lista często stosowanych operacji na funkcjach tworzących, gdzie $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$:

1. Kombinacja liniowa:

$$\alpha A(x) + \beta B(x) = \sum_n (\alpha a_n + \beta b_n) x^n.$$

Wynikiem jest f.t. dla ciągu $\langle \alpha a_n + \beta b_n \rangle$.

2. Iloczyn:

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \dots = \sum_n \left(\sum_i a_i b_{n-i} \right) x^n.$$

Wynikiem jest f.t. *splotu* ciągów $\langle a_n \rangle$ i $\langle b_n \rangle$.

Przykład: Podstawiając $\frac{1}{1-z} = A(z)$, która jest f.t. dla ciągu $\langle 1, 1, \dots \rangle$, dostajemy, że

$$\frac{1}{1-z} \cdot B(z) = \sum_n \left(\sum_{i \geq 0} b_{n-i} \right) z^n = \sum_n \left(\sum_{i=0}^n b_i \right) z^n$$

jest f.t. dla $\langle \sum_{i=0}^n b_i \rangle$. Jeżeli $B(z) = \frac{1}{1-z}$, to mamy, że $(1-z)^{-2}$ jest f.t. ciągu $\langle n+1 \rangle$. \diamond

3. Różniczkowanie:

$$A'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{i \geq 1} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}.$$

4. Całkowanie:

$$\int_0^x A(t) dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \dots = \sum_{i \geq 0} \frac{a_i}{i+1} \cdot x^{i+1}.$$

Przykład: Wychodząc od szeregu $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, i korzystając z równości $\frac{d \ln(1+x)}{dx} = \frac{1}{1+x}$ dostajemy, że funkcja

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

jest f.t. ciągu $\langle 0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots \rangle$. Wychodząc od szeregu $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, i korzystając z równości $\frac{d \ln \frac{1}{1-x}}{dx} = (1-x)^{-2} \cdot (1-x) = \frac{1}{1-x}$ dostajemy, że funkcja

$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

jest f.t. ciągu $\langle 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \rangle$. \diamond

Różnica między szeregami formalnymi a potęgowymi polega na tym, że dla tych pierwszych powyższe opisy operacji są ich *definicjami*, a dla szeregów potęgowych są to własności, których dowodzi się pokazując, że prawe strony są zbieżne do lewych przy odpowiednich założeniach. Będziemy preferowali podejście formalne, gdy jest to możliwe. Na przykład, operacja dzielenia funkcji tworzących wydaje się dotyczyć szeregów potęgowych, ale można ją zdefiniować formalnie: powiemy, że $B(z) = A^{-1}(z)$ gdy $A(z) \cdot B(z) = 1$, gdzie tutaj 1 oznacza szereg formalny odpowiadający ciągowi $\langle 1, 0, 0, 0, \dots \rangle$. Na przykład $1 = (1-x)(1+x+x^2+\dots)$, stąd mamy równość $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$ bez odwoływania się do zbieżności sum częściowych szeregu geometrycznego. Zauważmy, że *każdy* szereg $A(z)$ którego wyraz wolny spełnia $a_0 \neq 0$ ma określoną formalną odwrotność $A^{-1}(z)$. Rzeczywiście, oznaczmy $A^{-1} = \sum_{i \geq 0} b_i z^i$. Z równości $1 = A(z) \cdot \sum_{i \geq 0} b_i z^i$ dostajemy $\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = [n=0]$. Dla $n=0$ mamy $a_0 \cdot b_0 = 1$, co określa jednoznacznie b_0 . Dla $n=1$ mamy $a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 = 0$, co określa jednoznacznie b_1 , i tak dalej.

Podstawienie αz zamiast z w $A(z)$ daje f.t. ciągu $\langle \alpha^n a_n \rangle$: $A(\alpha z) = \sum_n a_n (\alpha z)^n = \sum_n a_n \alpha^n z^n$. W podobny sposób możemy podstawić za z dowolny wielomian od z . Co się stanie gdy podstawimy szereg zamiast zmiennej? Dostaniemy nieskończoną sumę szeregów. Mianowicie, rozważmy $A(B(z))$. Jeżeli takiszerzeg ma mieć sens, to jego "początkiem" powinien być szereg

$$C_n(z) = a_0 + a_1 B(z) + a_2 B^2(z) + \dots + a_n B^n(z) ,$$

gdzie prawa strona jest dobrze określonym szeregiem formalnym. Określmy $A(B(z))$ jako odpowiednią *granice* szeregów $C_n(z)$, o ile istnieje. Oto dokładna definicja. Niech $D_n = \sum_{k \geq 0} d_{n,k} z^k$. Powiemy, że ciąg $\langle D_n \rangle$ jest *zbieżny* do szeregu $E = \sum_{k \geq 0} e_k z^k$, co zapisujemy $E = \lim_{n \rightarrow \infty} D_n$, gdy dla każdego k istnieje takie N_k , że $d_{n,k} = e_k$ dla $n > N_k$.

Przykład: Rozważmy $A(z) = 1 + z + z^2 + \dots$. Widzimy, że szereg $A(A(z))$ *nie jest* dobrze określony, bo w przeciwnym przypadku wyraz wolny $A(A(z))$ musiałby być równy $1 + A(0) + A(0)^2 + \dots = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$. Określmy $B(z) = z \cdot A(z) = z + z^2 + z^3 + \dots$. W tym przypadku szereg $B(B(z))$ *jest* dobrze określony, bowiem w wyrażeniu $B(z) + B^2(z) + B^3(z) + \dots$ każda potęga z^n występuje w skończonej liczbie wyrazów $B^i(z)$, i mamy $B(B(z)) = z + 2z^2 + 4z^3 + \dots$. \diamond

Oprócz nieskończonych sum szeregów możemy rozważać ich iloczyny $\prod_{i \geq 0} A_i(z)$, które określamy jako $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^n A_i(z)$, o ile ta granica istnieje. Na przykład $\prod_{i \geq 0} (1 + z^i)$ jest dobrze określony. Ten przykład można uogólnić. Dla szeregu $A = \sum_{i \geq 0} a_i z^i$, niech $w(A)$ oznacza najmniejsze $i > 0$ takie, że $a_i \neq 0$. Niech $\langle A_i \rangle$ będzie ciągiem szeregów, takim, że $A_i(0) = 1$. Zachodzi równoważność: szereg $\prod_{i \geq 0} A_i$ jest dobrze określony wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{i \rightarrow \infty} w(A_i) = \infty$.

Wykładniczą funkcją tworzącą (w.f.t.) ciągu $\langle b_n \rangle$ nazywamy f.t.

$$B(z) = b_0 + b_1 \frac{z}{1!} + b_2 \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!} . \quad (2)$$

Na przykład e^z jest w.f.t. ciągu $\langle 1, 1, \dots \rangle$. Funkcje tworzące rozpatrywane dotychczas nazywamy *zwyczajnymi*, dla odróżnienia używamy skrótu z.f.t..

Jeżeli $C(z)$ i $D(z)$ są w.f.t. dla ciągów, odpowiednio, $\langle c_n \rangle$ i $\langle d_n \rangle$, to iloczyn $C(z) \cdot D(z)$ jest w.f.t. ciągu $\langle f_n \rangle$ będącego *splotem dwumianowym* $\langle c_n \rangle$ i $\langle d_n \rangle$, gdzie $f_n = \sum_i \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$. Aby się o tym przekonać, zauważmy że zachodzi

$$\frac{f_n}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{i!} \cdot \frac{b_{n-i}}{(n-i)!}.$$

Usuwanie początkowych wyrazów ciągu lub dodawanie zer na początku można uzyskać przez różniczkowanie i całkowanie w.f.t.. Na przykład, dla w.f.t (2):

$$B'(z) = \sum_{n \geq 0} n \cdot b_n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n \geq 0} b_n \cdot \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} b_{n+1} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

jest w.f.t. ciągu $\langle b_1, b_2, \dots \rangle$, podobnie

$$\int_0^z \sum_{n \geq 0} b_n \frac{t^n}{n!} dt = \sum_{n \geq 1} b_{n-1} \frac{z^n}{n!}$$

jest w.f.t. ciągu $\langle 0, b_0, b_1, \dots \rangle$.

Funkcji tworzących można używać do rozwiązywania równań rekurencyjnych, podobnie jak znaleźliśmy wzory na liczby Fibonacciego. Metoda polega tym, że przechodzimy do równań funkcyjnych dla funkcji tworzących. Takie równania funkcyjne w przypadku rekurencyjnych równań liniowych o stałych współczynnikach są algebraiczne, ale w innej sytuacji mogą być na przykład różniczkowe.

Przykład: Rozważmy równanie

$$a_n \cdot n = 3(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1}), \quad (3)$$

dla $n > 0$, gdzie $a_0 = 1$. Pomnóżmy obie strony równania (3) przez x^{n-1} , i dodajmy stronami dla wszystkich $n \geq 1$. Dostajemy równość

$$A'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} = 3 \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) x^{n-1} = 3 \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) x^n = 3 \cdot \frac{A(x)}{1-x}, \quad (4)$$

gdzie $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ jest z.f.t. ciągu $\langle a_n \rangle$. Mnożymy obie strony równania (4) przez $1-x$ i dostajemy różniczkowe równanie funkcyjne

$$(1-x) \cdot A'(x) = 3 \cdot A(x). \quad (5)$$

Nie ma potrzeby rozwiązywania tego równania metodą właściwą dla równań różniczkowych. Wykonajmy mnożenia w lewej stronie równania (5) i dostaniemy:

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots) - (a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \dots) = (3a_0 + 3a_1x + 3a_2x^2 + \dots).$$

Stąd wynikają równości $a_1 = 3a_0$, $2a_2 - a_1 = 3a_1$, $3a_3 - 2a_2 = 3a_2$, i ogólnie: $n \cdot a_n = (n+2) \cdot a_{n-1}$. Dzielimy obie strony tego równania przez n i rozwijamy, co prowadzi do rozwiązania $a_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. \diamond

Zwykle f.t. stosuje się następująco do rozwiązywania równania rekurencyjnego $l(n) = r(n)$ określającego ciąg $\langle a_n \rangle$ dla $n \geq 0$:

1. Przyrównujemy do siebie sumy

$$\sum_{n \geq 0} l(n) \cdot x^n = \sum_{n \geq 0} r(n) \cdot x^n ,$$

po czym przekształcamy, starając się otrzymać równanie funkcyjne dla $A(x) = \sum_n a_n x^n$.

2. Rozwiązujemy otrzymane równanie względem $A(x)$ i przedstawiamy rozwiązanie w postaci szeregu.

Przykład: Rozważmy jednorodne równanie liniowe o stałych współczynnikach: $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ dla $n > 1$. Można je zapisać "w jednej linii" posługując się notacją Iversona: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + \alpha[n = 0] + \beta[n = 1]$, gdzie α i β są pewnymi stałymi. Wyznaczamy je podstawiając wartości 0 i 1 za n : Dla $n = 0$ dostajemy $1 = \alpha$, dla $n = 1$ dostajemy $1 = 2 + \beta$, czyli $\beta = -1$. Razem mamy równanie

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + [n = 0] - [n = 1] . \quad (6)$$

Mnożymy każdą ze stron równania (6) przez x^n i dodajemy:

$$\begin{aligned} \sum_n a_n x^n &= \sum_n 2a_{n-1} x^n + \sum_n a_{n-2} x^n + \sum_{n=0} x^n - \sum_{n=1} x^n \\ &= 2x \sum_n a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_n a_{n-2} x^{n-2} + 1 - x . \end{aligned}$$

Zauważmy, że $A(x) = \sum_n a_{n-k} x^{n-k}$ dla dowolnej stałej całkowitej $k > 0$, co razem daje równanie funkcyjne $A(x) = 2xA(x) + x^2 A(x) + 1 - x$, skąd wyznaczamy $A(x) = \frac{1-x}{1-2x-x^2}$. Rozwijanie w szereg takich funkcji omówimy później, patrz także zadania 14 oraz 15. \diamond

Przykład. Rozważmy liniowe równanie o stałych współczynnikach stopnia trzy:

$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + (-1)^{n+1}$ dla $n > 1$, gdzie $a_n = 0$ dla $n < 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$. Zapiszmy to równanie "w jednej linii" posługując się notacją Iversona:

$$a_n = -a_{n-1} - a_{n-2} - a_{n-3} + (-1)^{n+1}[n \geq 0] + 2 \cdot [n = 0] + 2 \cdot [n = 1] . \quad (7)$$

Mnożymy każdą z równości (7) przez z^n stronami i dodajemy po wszystkich całkowitych wartościach n :

$$\sum_n a_n z^n = \sum_n -a_{n-1} z^n + \sum_n -a_{n-2} z^n + \sum_n -a_{n-3} z^n - \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n + \sum_{n=0} 2z^n + \sum_{n=1} 2z^n .$$

Stąd dostajemy równanie funkcyjne na $A(z)$:

$$A(z) = -zA(z) - z^2 A(z) - z^3 A(z) - \frac{1}{1+z} + 2 + 2z .$$

Rozwiązujemy względem $A(z)$, z równania $A(z)(1+z+z^2+z^3) = 2z+2 - \frac{1}{1+z}$ dostajemy

$$A(z) = \frac{2z^2 + 4z + 1}{(1+z+z^2+z^3)(1+z)} . \quad (8)$$

Rozkładamy mianownik w (8) na czynniki:

$$1+z+z^2+z^3 = (1+z)(1+z^2) = (1+z)(1+iz)(1-iz) .$$

Znajdziemy przedstawienie $A(z)$ w postaci sumy ułamków prostych:

$$A(z) = \frac{2z^2 + 4z + 1}{(1+z)^2(1+iz)(1-iz)} = \frac{a}{(1+z)^2} + \frac{b}{(1+z)} + \frac{c}{(1+iz)} + \frac{d}{(1-iz)} .$$

W tym celu znosimy mianowniki i dostajemy równość wielomianów

$$2z^2 + 4z + 1 = a(1+z^2) + b(1+z)(1+z^2) + c(1+z)^2(1-iz) + d(1+z)^2(1+iz) . \quad (9)$$

Podstawiając $z = i$ dostajemy $c = 1 + \frac{i}{4}$, podstawiając $z = -1$ dostajemy $a = -\frac{1}{2}$. Moglibyśmy dalej podstawić $z = -i$ by otrzymać wartość d , ale możemy także zmienić teraz postępowanie i podstawić znane wartości a i c do równania (9); dostajemy:

$$\begin{aligned} 2z^2 + 4z + 1 &= -\frac{1}{2}(1+z^2) + b(1+z+z^2+z^3) \\ &+ \left(1 + \frac{i}{4}\right) \left(1 + (2-i)z + (1-2i)z^2 - iz^3\right) + d(1 + (2+i)z + (1+2i)z^2 + iz^3) , \end{aligned}$$

a stąd układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} b + id &= -\frac{1}{4} + i \\ b + (2+i)d &= \frac{7}{4} + \frac{i}{2} , \end{aligned}$$

który spełniają $b = -\frac{1}{2}$ oraz $d = 1 - \frac{i}{4}$. Ponieważ $(1-x)^{-2} = \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n$, podstawiamy $x = -z$ i dostajemy $(1+z)^{-2} = \sum_{n \geq 0} (n+1)(-1)^n z^n$. Pamiętamy także, że zachodzi $\frac{1}{1-cz} = \sum_{n \geq 0} c^n z^n$. Razem mamy

$$A(z) = a \sum_{n \geq 0} (n+1)(-1)^n z^n + b \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n + c \sum_{n \geq 0} (-i)^n z^n + d \sum_{n \geq 0} i^n z^n .$$

Stąd

$$a_n = \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot (-1)^{n+1} + \left(1 + \frac{i}{4}\right) \cdot (-i)^n + \left(1 - \frac{i}{4}\right) \cdot i^n .$$

◇

Iloraz dwóch wielomianów nazywamy *funkcją wymierną*. Rozważmy równanie liniowe o stałych współczynnikach postaci

$$a_n = g_1 a_{n-1} + g_2 a_{n-2} + \dots + g_k a_{n-k} + f(n) ,$$

gdzie g_i są stałymi, oraz f.t. ciągu $\langle f(n) \rangle$ jest funkcją wymierną. Stosując powyższą metodę możemy znaleźć f.t. ciągu $\langle a_n \rangle$ i będzie ona zawsze funkcją wymierną.

Wyjaśnimy teraz jak rozwijać w szereg funkcje wymierne. Niech $W(z) = R(z)/S(z)$ funkcja wymierna o współczynnikach zespolonych, gdzie licznik i mianownik nie są jednocześnie podzielne przez wielomian stopnia większego od zera, oraz stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika. Wielomian $S(z)$ można przedstawić w postaci

$$S(z) = a(1 - b_1 z)^{c_1} (1 - b_2 z)^{c_2} \dots (1 - b_i z)^{c_i} , \quad (10)$$

ponieważ każdy wielomian o współczynnikach zespolonych, różny od stałej, ma pierwiastek zespolony (patrz zadanie 8). Funkcję $W(z)$ można zawsze przedstawić w postaci *sumy ułamków prostych*, w tym przypadku funkcji wymiernych postaci

$$\frac{d_{j,k}}{(1 - b_j z)^k} ,$$

gdzie $1 \leq j \leq i$, $1 \leq k \leq c_j$, a $d_{j,k}$ są stałymi. Teraz wystarczy skorzystać z rozwinięcia

$$\frac{1}{(1 - bz)^k} = \sum_{n \geq 0} \binom{n+k-1}{k-1} b^n z^n .$$

Liczba $\binom{n+k-1}{k-1}$ jest wielomianem stopnia $k-1$ od n . Stąd mamy, że jeżeli f.t. ciągu $\langle a_n \rangle$ jest funkcją wymierną postaci $R(z)/S(z)$, gdzie $S(z) = a(1 - b_1 z)^{c_1} (1 - b_2 z)^{c_2} \dots (1 - b_i z)^{c_i}$ oraz b_1, \dots, b_i parami różne, to zachodzi równość

$$a_n = T_1(n) \cdot b_1^n + T_2(n) \cdot b_2^n + \dots + T_i(n) \cdot b_i^n , \quad (11)$$

gdzie $T_k(n)$ jest wielomianem stopnia $c_k - 1$. Ta wiedza pozwala uniknąć znajdowania rozkładu na ułamki proste: znając rozkład (10) znamy (11) z dokładnością do współczynników wielomianów $T_k(n)$, traktujemy te współczynniki jak zmienne i podstawiamy kolejne wartości $n = 0, 1, 2, \dots$ w (11) tak długo, aż uzyskamy układ równań liniowych jednoznacznie określających rozwiązanie, po czym rozwiązujemy ten układ równań.

Przykład: Jeżeli mianownik jest postaci $S(x) = (1+x)^2(1-2x)^3(1+3x)$ to rozwiązanie jest postaci $(a+bn) \cdot (-1)^n + (c+dn+en^2) \cdot 2^n + f \cdot (-3)^n$, dla pewnych stałych a, b, c, d, e, f wyznaczonych przez warunki początkowe. \diamond

Zadania

1. Znajdź f.t. ciągów $\langle H_n \rangle$ i $\langle n^2 \rangle$.
2. Wyraż f.t. postaci $\sum_n a_{2n} z^{2n}$ i $\sum_n a_{2n} z^n$ przez $A(z) = \sum_n a_n z^n$.
3. Znajdź wykładniczą f.t. ciągu $\langle n+1 \rangle$.
4. Oblicz

$$a_n = \sum_{0 \leq i \leq n} F_i \cdot F_{n-i} .$$

Wskazówka: Co jest funkcją tworzącą ciągu $\langle a_n \rangle$?

5. Niech $G_k(z) = \sum_n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} \frac{z^n}{n!}$ będzie w.f.t. dla liczb Stirlinga drugiego rodzaju, przy ustalonym dolnym wskaźniku. Pokaż że zachodzi $G_k(z) = \frac{(e^z - 1)^k}{k!}$, pokazując następujące trzy tożsamości:

$$\begin{aligned} \text{a) } \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} &= \sum_m \binom{n}{m} \left\{ \begin{smallmatrix} m \\ k \end{smallmatrix} \right\} & \text{b) } \left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\} (k+1) + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} ; \\ \text{c) } G_k e^z &= (k+1) G_{k+1} + G_k . \end{aligned}$$

6. Przypomnijmy, że permutacja f jest inwolucją gdy złożenie f ze sobą jest identytą. Pokaż, że wykładniczą f.t. dla liczby inwolucji jest $e^{z + \frac{z^2}{2}}$.

7. Pokaż, że wykładniczą f.t. liczb nieporządków $\langle D_n \rangle$ jest $\frac{1}{e^x(1-x)}$.

8. Uzasadnij dokładnie istnienie rozkładu w równaniu (10).

Wskazówka: c jest pierwiastkiem wielomianu $w(x)$ stopnia n w.t.w. gdy $1 - cx$ dzieli wielomian $x^n \cdot w(1/x)$.

9. Niech f.t. ciągu $\langle a_n \rangle$ będzie $\frac{3x-1}{x^2-2x+4}$. Znajdź równanie rekurencyjne opisujące $\langle a_n \rangle$.

10. Znajdź funkcję tworzącą ciąg $\langle a_n \rangle_{n \geq 0}$ i formułę zamkniętą dla a_n :

$$\begin{aligned} \text{a) } a_n &= 2a_{n-1} + a_{n-2} + 1 , & \text{gdzie } a_0 &= 1, a_1 = 3 ; \\ \text{b) } a_n &= 3a_{n-1} + 4a_{n-2} + [n \geq 0] , \\ \text{c) } a_n &= -a_{n-1} + 8a_{n-2} + 12a_{n-3} , & \text{gdzie } a_0 &= 1, a_1 = 1, a_2 = 17 ; \\ \text{d) } a_{n+2} &= 5a_{n+1} - 6a_n - 4 \cdot 2^n + 2 , & \text{gdzie } a_0 &= 1, a_1 = 5 . \end{aligned}$$

11. Dane jest równanie liniowe o stałych współczynnikach $a_n = u_1 \cdot a_{n-1} + u_2 \cdot a_{n-2} + \dots + u_s \cdot a_{n-s} + f(n)$, gdzie $\langle f(n) \rangle$ ma funkcję wymierną $s(x)/r(x)$ jako funkcję tworzącą. Warunki brzegowe podane są poprzez równości $a_{i_1} = b_1, a_{i_2} = b_2, \dots, a_{i_s} = b_s$, gdzie $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ są dowolnymi liczbami naturalnymi. Jak rozwiązywać takie równanie?

12. Rozwiąż równanie $a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} + 5 \cdot (-2)^{n-1}$, gdzie $a_0 = 1, a_2 = 1$.

Uwaga: wartość a_1 nie jest podana.

13. Co zrobić, jeżeli jako wynik szukania funkcji tworzącej $A(x)$ ciągu opisanego liniowym równaniem rekurencyjnym otrzymamy taką funkcję wymierną $p(x)/q(x)$, że $p(x)$ i $q(x)$ nie mają wspólnych dzielników oraz x dzieli $q(x)$?

Wskazówka: Jaką wartość ma liczba $A(0)$?

14. Rozważmy równanie liniowe jednorodne o stałych współczynnikach

$$a_n = u_1 \cdot a_{n-1} + u_2 \cdot a_{n-2} + \dots + u_s \cdot a_{n-s} , \quad (12)$$

i warunkach początkowych $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_{s-1} = b_{s-1}$.

Pokaż, że funkcją tworzącą $\langle a_n \rangle$ jest funkcja wymierna $A(x) = l(x)/m(x)$, gdzie

$m(x) = 1 - u_1x - u_2x^2 - \dots - u_sx^s$. Wielomian $m(x)$ nazywa się *wielomianem charakterystycznym* równania (12). Jak można wyrazić $l(x)$ przez $m(x)$ i wielomian $w(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{s-1}x^{s-1}$?

15. Rozwiąż równania:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & a_n = 2 \cdot a_{n-1} - a_{n-2} , \quad \text{gdzie } a_0 = 1, a_1 = 1 ; \\ \text{b)} & a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2 \cdot a_{n-2} , \quad \text{gdzie } a_0 = 0, a_1 = 1 . \end{array}$$

Wskazówka: Zaczynij od znalezienia wielomianu charakterystycznego, jego określenie podane jest w zadaniu 14.

16. Rozwiąż układ równań

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n &= a_{n-1} - b_{n-1} \end{aligned}$$

przy warunkach brzegowych $a_0 = 1$ oraz $b_0 = 2$.

17. Pokaż, że zbiór rozwiązań rzeczywistych równania (12) bez warunków brzegowych jest przestrzenią liniową. Jaki jest jej wymiar?

Zliczanie I. Liczba a_n danego rodzaju konfiguracji kombinatorycznych a_n zależy od rozmiaru n . Chcielibyśmy mieć bezpośredni algorytmiczny sposób obliczenia a_n . Zamknięta formuła algebraiczna jest najbardziej zadowalającym sposobem. Czasem taka formuła zawiera liczby specjalne, i wtedy uznanie jej za zadowalające rozwiązanie zależy od stopnia “akceptacji” tych liczb. O ile tego nie mamy, równanie rekurencyjne lub funkcja tworząca $\langle a_n \rangle$ jest częściowym wynikiem, który daje pewną metodę na obliczenie a_n . Zwykle taka metoda jest uciążliwa: równanie rekurencyjne trzeba rozwinać aż do warunków początkowych, natomiast szereg potęgowy $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ daje a_n wzorem $a_n = A^{(n)}(0)/n!$.

Zacniemy od dwóch prostych reguł, które są często stosowane niejawnie, a które dobrze sobie uświadomić. Niech dany będzie zbiór U , którego elementy mogą mieć własności A i B .

Reguła sumy: Jeżeli element U można wybrać na n sposobów tak, by miał własność A , oraz na m sposobów tak, by miał własności B , przy czym żaden element w U nie ma jednocześnie własności A i B , to element U mający własność A lub B można wybrać na $n + m$ sposobów.

Reguła iloczynu: Jeżeli element $x \in U$ o własności A można wybrać na n sposobów, i dla każdego takiego x można na m sposobów wybrać $y \in U$ taki, że para $\langle x, y \rangle$ ma własność B , to parę $\langle x, y \rangle$ elementów U o własności B takiej, że x ma własność A można wybrać na $n \cdot m$ sposobów.

Przykład: (1) W dowodzie wzoru Pascala $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$ przez indukcję: odwołujemy się do zasady sumy by otrzymać plus we wzorze.

(2) W dowodzie wzoru $n!$ na liczbę n -permutacji przez indukcję: w kroku indukcyjnym odwołujemy się do zasady iloczynu by otrzymać iloczyn $n \cdot (n-1)!$. \diamond

Niech zbiór U ma n elementów, czyli jest n -zbiorem. Używamy następującej terminologii:

r -permutacja z U to ciąg $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ elementów z U , w którym $a_i \neq a_j$, dla $i \neq j$.

r -permutacja z powtórzeniami z U to ciąg $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ elementów z U , w którym może być $a_i = a_j$, dla $i \neq j$. (r -permutacje nazywa się czasem wariacjami, odpowiednio, z powtórzeniami lub bez.)

r -kombinacja z U to podzbiór $T \subseteq U$ taki, że T ma r elementów.

r -kombinacja z powtórzeniami z U to podzbiór $T \subseteq U$ oraz krotność $k(x)$ określona dla każdego elementu $x \in T$, gdzie liczba całkowita $k(x) > 0$, oraz $\sum_{x \in T} k(x) = r$. Krotność x oznacza “ile razy element x występuje w T ”. Na przykład $\{a, a, b, d, d, d\}$ to 6-kombinacja z powtórzeniami ze zbioru $\{a, b, c, d, \dots\}$, gdzie krotność elementu jest zaznaczona liczbą jego powtórzeń w zapisie. Kombinacje z powtórzeniami nazywa się często *multizbiorami*.

Liczba r -permutacji ze zbioru n -elementowego jest równa n^r , z reguły iloczynu. Liczba

r -kombinacji ze zbioru n -elementowego jest równa $\binom{n}{r}$ z definicji współczynników dwumianowych. Liczba r -permutacji z powtórzeniami jest równa n^r , z reguły iloczynu. Liczba r -kombinacji z powtórzeniami ze zbioru n elementowego jest trochę trudniejsza do policzenia. Oznaczmy tę liczbę roboczo przez $g(n, r)$. Liczby $g(n, r)$ spełniają rekurencję

$$g(n, r) = g(n, r-1) + g(n-1, r) ,$$

przy warunkach brzegowych: $g(n, 1) = n$, $g(1, r) = 1$. Rzeczywiście: wyróżnijmy element x z n -zbioru U ; jest $g(n, r-1)$ konfiguracji z przynajmniej jednym x i $g(n-1, r)$ bez występowania x . Rozwiązaniem są liczby $g(n, r) = \binom{n+r-1}{r}$, ponieważ zachodzi

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-2}{r-1} + \binom{n+r-2}{r} ,$$

oraz spełnione są warunki brzegowe: $\binom{n+1-1}{1} = n$ i $\binom{1+r-1}{r} = 1$.

Oto inny sposób: niemalejącemu r -ciągowi z powtórzeniami $\langle a_1, a_2, \dots, a_r \rangle$ ze zbioru $\{1, \dots, n\}$ przyporządkowujemy rosnący r -ciąg bez powtórzeń $\langle a_1, a_2 + 1, a_3 + 2, \dots, a_r + r - 1 \rangle$ o wartościach ze zbioru $\{1, \dots, n + r - 1\}$. To przekształcenie wzajemnie jednoznacznie przeprowadza r -kombinacje z powtórzeniami na odpowiednie r -kombinacje bez powtórzeń.

W kontekście zliczania odpowiednie funkcje tworzą nazywa się *enumeratorami*. Na enumerator można czasem spojrzeć bardzo symbolicznie, używając nazw obiektów kombinatorycznych w jego opisie. Na przykład, oto enumerator r -kombinacji (bez powtórzeń) z 3-elementowego zbioru obiektów $\{x_1, x_2, x_3\}$:

$$(1 + x_1 t)(1 + x_2 t)(1 + x_3 t) = 1 + (x_1 + x_2 + x_3)t + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)t^2 + x_1 x_2 x_3 t^3 .$$

Z prawej strony mamy każdą spośród możliwych konfiguracji, napisanych jako iloczyn x_i . Podstawiamy $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ i dostajemy enumerator $1 + 3t + 3t^2 + t^3 = (1 + t)^3$. Jeżeli obiekt x_k może wystąpić $0, 1, \dots, j$ razy to odpowiednim czynnikiem jest

$$1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \dots + x_k^j t^j ,$$

podobnie dla dowolnej specyfikacji, mówiącej ile razy dany obiekt może wystąpić.

Przykład. Obliczamy r -kombinacje z powtórzeniami. Dla nieograniczonej dopuszczalnej liczby powtórzeń:

$$(1 + t + t^2 + \dots)^n = (1 - t)^{-n} = \sum_r \binom{-n}{r} (-t)^r = \sum_r \binom{n+r-1}{r} t^r .$$

Jeżeli dodatkowo każdy obiekt występuje co najmniej raz:

$$(t + t^2 + \dots)^n = t^n (1 - t)^{-n} = t^n \sum_r \binom{n+r-1}{r} t^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{r-n} t^r = \sum_{r=n}^{\infty} \binom{r-1}{n-1} t^r . \quad \diamond$$

Dla r -permutacji odpowiednim narzędziem są wykładnicze funkcje tworzące. Szereg

$$(1+t)^n = \sum_{r=0}^n n^r \cdot \frac{t^r}{r!}$$

jest wykładniczą f.t. r -permutacji z n -zbioru, czyli ciągów, w których każdy element może wystąpić 0 lub 1 raz. Byłoby naturalne, że dla przypadku gdy dany element może wystąpić 0, 1, ..., k razy, należy odpowiedni czynnik $1+t$ zastąpić czynnikiem:

$$c_k = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^k}{k!}.$$

Rozważmy taki iloczyn $(c_k)^n$ i co dostaniemy? Przy $t^r = t^{p+q+\cdots}$ będzie suma iloczynów postaci $\frac{1}{p!q!\cdots}$, dla każdego rozkładu r na sumę $p+q+\cdots=r$ takiego, że $p, q, \dots \leq k$. Zatem przy $\frac{t^r}{r!}$ będzie suma iloczynów postaci $\frac{r!}{p!q!\cdots}$, dla każdego takiego rozkładu $p+q+\cdots=r$. Wystarczy teraz zauważyć, że $\frac{r!}{p!q!\cdots}$ to liczba permutacji r obiektów, z których p jest nieodróżnialnych jednego rodzaju, q nieodróżnialnych drugiego rodzaju, i tak dalej. Ogólnie, jeżeli k -ty z elementów może wystąpić $\alpha_{0,k}, \alpha_{1,k}, \alpha_{2,k}, \dots$ razy, to wykładnicza funkcja tworząca ma postać

$$\prod_{k=1}^n \left(\frac{t^{\alpha_{0,k}}}{\alpha_{0,k}!} + \frac{t^{\alpha_{1,k}}}{\alpha_{1,k}!} + \cdots \right).$$

Przykład. r -permutacje z dowolną liczbą powtórzeń mają następującą wykładniczą f.t.:

$$\left(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)^n = e^{nt} = \sum_r n^r \frac{t^r}{r!}.$$

Jeżeli dodatkowo każdy element musi wystąpić co najmniej raz w r -permutacji:

$$\left(t + \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)^n = (e^t - 1)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j e^{(n-j)t} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^r. \quad \diamond$$

Zauważmy, że $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^r$ to wartość n -tej różnicy skończonej $\Delta^n x^r$ dla argumentu $x=0$. Dlatego często używa się oznaczenia

$$\Delta^n 0^r = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^r.$$

Liczby $\Delta^n 0^r$ są równe licznosci zbioru funkcji ze zbioru r -elementowego na zbiór n -elementowy.

r -permutacje z powtórzeniami odpowiadają rozmieszczeniom r rozróżnialnych obiektów w n rozróżnialnych komórkach. Na przykład 3-permutacje elementów zbioru $\{A, B\}$:

AAA AAB ABA BAA ABB BAB BBA BBB

odpowiadają (w jaki sposób?) rozmieszczeniom elementów $\{a, b, c\}$ w dwóch komórkach:

$abc| - \quad ab|c \quad ac|b \quad bc|a \quad a|bc \quad b|ac \quad c|ab \quad -|abc$

Niepustych rozmieszczeń jest $\{^r_n\}n!$, czyli $\Delta^n 0^r = \{^r_n\}n!$. Stąd dostajemy, że $(e^t - 1)^n/n!$ (jako funkcja od zmiennej t) jest wykładniczą f.t. liczb $\{^r_n\}$, przy ustalonym n , ponieważ $(e^t - 1)^n$ jest wykładniczą f.t. liczb $\Delta^n 0^r$, przy ustalonym n .

Przykład. Niech a_k oznacza liczbę ciągów z liter A, B, i C, takich, że litera A występuje co najmniej raz, a litera B nieparzystą liczbę razy, gdzie k jest długością ciągu.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} = (e^x - 1) \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) e^x = \frac{1}{2} (e^{3x} - e^x - e^{2x} + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (3^k - 2^k - 1) \frac{x^k}{k!} . \quad \diamond$$

Omówimy teraz *zasadę włączania-wyłączania*. Niech U będzie skończonym zbiorem. Dla A podzbioru U , $|A|$ to liczność A , A' oznacza $U - A$. Zamiast $x \in A$ mówimy też, że x ma własność A . Zamiast $|A \cap B|$ piszemy krócej $|AB|$. Uogólnimy następującą równość $|A'B'| = |U| - |A| - |B| + |AB|$, gdzie $A, B \subseteq U$. Mamy rodzinę podzbiorów-własności U , oznaczanych A_1, A_2, \dots, A_n . Wzór

$$|A'_1 A'_2 A'_3 \dots A'_{n-1} A'_n| = |U| - |A_1| - |A_2| - \dots + |A_1 A_2| + |A_1 A_3| + \dots + |A_{n-1} A_n| - |A_1 A_2 A_3| - |A_1 A_2 A_4| \dots \quad (1)$$

nazywamy *formułą sita* lub *formułą włączania-wyłączania*. Dowód przez indukcję po liczbie n własności. Z równości $|A'| = |U| - |A|$ wynika

$$|A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A'_n| = |A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1}| - |A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A_n| . \quad (2)$$

Założmy, że formuła sita zachodzi dla $n - 1$ własności:

$$|A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1}| = |U| - |A_1| - |A_2| - \dots - |A_{n-1}| + |A_1 A_2| + \dots + |A_{n-2} A_{n-1}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 A_2 \dots A_{n-1}| . \quad (3)$$

Zastosujemy wzór (3) do elementów mających własność A_n :

$$|A'_1 A'_2 \dots A'_{n-1} A_n| = |A_n| - |A_1 A_n| - |A_2 A_n| - \dots - |A_{n-1} A_n| + |A_1 A_2 A_n| + \dots + |A_{n-2} A_{n-1} A_n| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n| . \quad (4)$$

Zgodnie z (2), odejmujemy (4) od (3) i dostajemy tezę, czyli wzór (1).

Przykład: Obliczymy ile liczb naturalnych z przedziału $[1..20]$ nie jest podzielnych przez żadną z liczb 2, 3, ani 7, bez znajdowania tych liczb. Własność A_i to podzielność przez i -tą spośród liczb 2, 3, 7. Dostajemy:

$$20 - \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{3 \cdot 7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{20}{2 \cdot 3 \cdot 7} \right\rfloor = 20 - 10 - 6 - 2 + 3 + 1 = 6 .$$

Sprawdzamy: tymi liczbami są 1, 5, 11, 13, 17, 19. \diamond

Przykład. Wyprowadzimy powtórnie wzór na liczbę funkcji ze zbioru $B = \{1, \dots, t\}$ na zbiór $C = \{1, \dots, n\}$. Uniwersum U , czyli zbiorem wszystkich konfiguracji kombinatorycznych, jest zbiór *wszystkich* funkcji z B w C , niekoniecznie “na”, jest ich n^t . Niech własności A_i oznacza, że i nie jest wartością funkcji. Mamy $|A_i| = (n - 1)^t$,

$|A_i A_j| = (n-2)^t$, dla $i < j$, i ogólnie $|A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_k}| = (n-k)^t$ dla $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. Stąd dostajemy:

$$\begin{aligned} |U - \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i| &= |A'_1 A'_2 \dots A'_n| = |U| - \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j| - \dots \\ &= n^t - n(n-1)^t + \binom{n}{2}(n-2)^t - \binom{n}{3}(n-3)^t + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)^t = \Delta^n 0^t. \end{aligned} \quad \diamond$$

Przykład. Obliczymy iloma sposobami można rozsadzić przy okrągłym stole n par małżeńskich w taki sposób, żeby mężczyźni i kobiety siedzieli na przemian, ale żadne małżeństwo nie siedziało obok siebie. Umówmy się, że kobiety siedzą na miejscach o numerach nieparzystych: $1, 3, \dots, 2n-1$. Można je rozsadzić na $(n-1)!$ sposobów. Dla każdego takiego rozsadzenia jest M_n sposobów rozsadzenia mężczyzn. Razem mamy $(n-1)! \cdot M_n$ rozsadzeń, z reguły iloczynu. Niech i -ta kobieta siedzi na miejscu $2i-1$ -szym. Jej mąż, i -ty mężczyzna, nie powinien usiąść na miejscach o numerach $2i-2, 2i$, jeżeli $i > 1$, lub $2n, 2$, gdy $i = 1$. Przenumerujmy miejsca kobiet i mężczyzn od 1 do n . Rozważmy permutacje f miejsc mężczyzn. Następujące $2n$ własności takich permutacji ma dla nas znaczenie:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{f : f(1) = n\} ; & A_2 &= \{f : f(1) = 1\} ; \\ A_3 &= \{f : f(2) = 1\} ; & A_4 &= \{f : f(2) = 2\} ; \\ \dots & & \dots & \\ A_{2n-3} &= \{f : f(n-1) = n-2\} ; & A_{2n-2} &= \{f : f(n-1) = n-1\} ; \\ A_{2n-1} &= \{f : f(n) = n-1\} ; & A_{2n} &= \{f : f(n) = n\} . \end{aligned}$$

Zachodzi wzór

$$|A_{i_1} \dots A_{i_k}| = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \{i_1, \dots, i_k\} \text{ zawiera dwie kolejne liczby bądź } 1 \text{ i } n ; \\ (n-k)! & \text{w przeciwnym przypadku} . \end{cases}$$

Niech $Z(n, k)$ oznacza liczbę takich podzbiorów k -elementowych zbioru $\{1, \dots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb ani zbioru $\{1, n\}$. Z formuły sita mamy

$$M_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (-1)^i \cdot Z(2n, i) \cdot (n-i)! .$$

Obliczymy $Z(n, k)$. Niech $b(n, k)$ oznacza liczbę takich podzbiorów k -elementowych zbioru $\{1, \dots, n\}$, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb. Zachodzi równość $b(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$ - ćwiczenie. Podzbiory $\{1, \dots, n\}$ bez dwóch kolejnych elementów i bez $\{1, n\}$ rozpadają się na dwie grupy w zależności od tego, czy zawierają n czy nie. Stąd mamy:

$$Z(n, k) = b(n-3, k-1) + b(n-1, k) = \binom{n-k-1}{k-1} + \binom{n-k}{k} = \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} .$$

Szukana przez nas liczba rozmieszczeń jest zatem równa

$$(n-1)! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! . \quad \diamond$$

Rozważmy te elementy U , które spełniają *dokładnie* k spośród własności A_i , dla $1 \leq i \leq n$. Oznaczmy ich licznosc przez $L(k)$. Dziela sie one na $\binom{n}{k}$ rozłącznych podzbiorów, być może pustych, postaci $x = D_1 D_2 \cdots D_n$, gdzie każdy D_i jest równy A_i lub A'_i , przy czym dokładnie k spośród D_i to własności bez primów. Licznosc każdego takiego x można wyznaczyć z formuły sita jako odpowiednią sumę s_x , gdzie uniwersum wyznaczają te spośród własności A_i , które występują w x bez primów, a formułę stosujemy do tych spośród własności A_i , które występują w x z primami. Stąd $L(k)$ można przedstawić jako sumę sum s_x , po wszystkich takich wyrażeniach x . W tej dużej sumie składnik $|A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_m}|$, gdzie $m \geq k$, występuje ze znakiem $(-1)^{m-k}$, przy czym dokładnie tyle razy, w ilu sumach s_x sie pojawia, bowiem w każdej występuje co najwyżej jeden raz. Otóż wystąpi $\binom{m}{k}$ razy, bowiem tylko w tych spośród sum s_x , dla których k spośród $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$ są wszystkimi własnościami bez primów w x . Oznaczmy

$$S_1 = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| ; \quad S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j| ; \quad S_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i A_j A_k| ,$$

aż do $S_n = |A_1 A_2 \cdots A_n|$. Uzasadniliśmy zatem *ogólną formułę włączania-wyłączania*:

$$L(k) = S_k - (k+1)S_{k+1} + \binom{k+2}{k} S_{k+2} - \cdots + (-1)^{n-k} \binom{n}{k} S_n . \quad (5)$$

Przykład. Obliczymy, ile liczb z przedziału $[1..500]$ dzieli się *dokładnie przez dwie* spośród liczb 2, 5, 7. Uniwersum jest $U = [1..500]$. Własność A_i zachodzi, gdy liczba z U dzieli się przez i -tą spośród liczb 2, 5, 7. Ze wzoru (5) dostajemy:

$$S_2 - 3 \cdot S_3 = \left\lfloor \frac{500}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{2 \cdot 7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{500}{5 \cdot 7} \right\rfloor - 3 \left\lfloor \frac{500}{2 \cdot 5 \cdot 7} \right\rfloor = 50 + 35 + 14 - 3 \cdot 7 = 78 .$$

◇

Zadania

1. Rozważmy funkcje z przedziału $[1..k]$ w przedział $[1..n]$. Oblicz ile z nich jest rosnących, ile niemalejących, a ile przyjmuje dokładnie 5 wartości.
2. Ile jest funkcji $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ takich, że $f(i+1) > f(i) + i$ dla każdego $1 \leq i < n$?
3. Pokaż, że liczba rozmieszczeń n obiektów w k komórkach, gdy obiekty są nierozróżnialne natomiast komórki są rozróżnialne, wynosi $\binom{n+k-1}{n}$.

Wskazówka: Rozważmy ciąg $n+k-1$ elementów, wystarczy wybrać, które n z nich są obiektami, a które $k-1$ są granicami między kolejnymi komórkami.

4. Oblicz na ile sposobów można zapisać liczbę naturalną n jako sumę k nieujemnych całkowitych składników, gdzie rozkłady $n = s_1 + \cdots + s_k$ i $n = t_1 + \cdots + t_k$ są *różne*, gdy $s_i \neq t_i$ dla pewnego $1 \leq i \leq k$.

Wskazówka: Patrz zadanie 3.

5. Oblicz liczbę rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ w liczbach naturalnych takich, że $0 \leq x_i \leq i + 4$.

Wskazówka: Zadanie 4 i formuła sita.

6. Niech n liczba naturalna. Znajdź liczbę rozwiązań równania $x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = n$ w liczbach naturalnych x_1, x_2, x_3 .
7. Pokaż, że liczba podzbiorów k elementowych z $\{1, \dots, n\}$ bez dwóch kolejnych liczb wynosi $\binom{n-k+1}{k}$.
8. Pokaż wzór rekurencyjny:

$$\Delta^n 0^{r+1} = n \Delta^n 0^r + n \Delta^{n-1} 0^r.$$

9. Oblicz sumę

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^j (n-j)^{n+k},$$

dla całkowitych $n, k \geq 0$.

10. Niech $T_n = \sum_{k=0}^n n^k$, gdzie $n^0 = 1$. Pokaż, że:

1. Liczby T_n spełniają równanie rekurencyjne: $T_n = n \cdot T_{n-1} + 1$, dla $n \geq 0$.
2. Funkcja

$$\frac{e^x}{1-x}$$

jest wykładniczą funkcją tworzącą dla ciągu $\langle T_n \rangle$.

11. Podaj wzór na $|\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i|$ analogiczny do wzoru (1).
12. Wyprowadź wzór na liczbę n -nieporządków z formuły sita.
13. Oblicz $\sum_{n \in A} 2^{-n}$, gdzie zbiór A składa się z takich liczb całkowitych $n > 0$, że dokładnie dwie spośród liczb 2, 3, 5, 7 dzielą n .
14. Ile jest permutacji liczb naturalnych od 1 do $2n$ takich, że liczby $2k$ i $2k+1$ nie występują obok siebie, dla wszystkich $1 \leq k \leq n$?
15. Oblicz, ile jest takich permutacji zbioru liczb naturalnych od 1 do $3n$, które mają następującą własność:
1. Nie przeprowadzają żadnej liczby podzielnej przez 3 na liczbę też podzielną przez 3;
 2. Liczby podzielne przez 3 nie występują obok siebie, gdy zapiszemy kolejno wartości permutacji;
 3. Dla każdego k takiego, że $1 \leq k \leq n$, bezpośrednio po liczbie $3 \cdot k$ nie występuje żadna z liczb $3 \cdot k - 1$ ani $3 \cdot k - 2$, gdy zapiszemy kolejno wartości permutacji.

16. Znajdź wzór na liczbę ciągów długości $2n$, w których każda liczba z przedziału $[1..n]$ występuje dokładnie dwa razy i takich, że sąsiednie liczby są różne.
17. Oblicz, ile jest permutacji zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$ bez cykli jednoelementowych, takich, że w każdym cyklu nie ma obok siebie dwóch liczb parzystych lub nieparzystych.
18. Rozważamy funkcje $f : [1..n] \rightarrow [1..n]$, które mają własność $f(f(x)) = f(x)$. Niech a_n oznacza ich liczbę, dodatkowo $a_0 = 1$. Pokaż:

1. Dla $n > 0$ zachodzi równość

$$a_n = \sum_{1 \leq m \leq n} \binom{n}{m} \cdot m^{n-m};$$

2. Wykładniczą funkcją tworzącą ciągu $\langle a_n \rangle$ jest funkcja e^{xe^x} .

Ile jest takich funkcji, które dodatkowo są niemalejące?

Zliczanie II. Kontynuujemy metody zliczania konfiguracji kombinatorycznych. Oto klasyczny przykład, który przez równanie rekurencyjne i funkcję tworzącą prowadzi do prostego rozwiązania.

Przykład: Rozważmy wykonanie łącznej operacji, na przykład mnożenia, na ciągu $n + 1$ argumentów $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$, przy czym każdy sposób jest jednoznacznie opisany przez wstawienie do iloczynu $n - 1$ par nawiasów. Chcemy obliczyć na ile sposobów można to zrobić. Na przykład dla $n = 3$ mamy 5 możliwości:

$$x_0(x_1(x_2x_3)); \quad x_0((x_1x_2)x_3); \quad (x_0x_1)(x_2x_3); \quad (x_0(x_1x_2))x_3; \quad ((x_0x_1)x_2)x_3.$$

Niech C_n będzie szukaną liczbą, gdzie przyjmujemy $C_0 = 1$, a dalszymi wartościami są: $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$. Ułożymy i rozwiążemy równanie rekurencyjne: Równanie dostajemy rozważając możliwe miejsce ostatniego mnożenia:

$$C_n = C_0 \cdot C_{n-1} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + \dots + C_{n-1} \cdot C_0 ,$$

dla $n > 0$, a “w jednej linii”:

$$C_n = \sum_k C_k \cdot C_{n-1-k} + [n = 0] .$$

Przechodzimy do funkcji tworzącej $C(z)$, zamieniając spłot ciągów na iloczyn funkcji:

$$\begin{aligned} C(z) &= \sum_n C_n z^n = \sum_{k,n} C_k \cdot C_{n-1-k} z^n + \sum_{n=0} z^n \\ &= \sum_k C_k z^k \cdot \sum_n C_{n-1-k} z^{n-k} + 1 = z \cdot C(z)^2 + 1 . \end{aligned}$$

Rozwiązujemy równanie kwadratowe na $C(z)$ i dostajemy: $C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$. Znak plus w liczniku prowadzi do $C(0) = \infty$, a powinniśmy mieć $C(0) = C_0 = 1$. Zatem powinien być minus i dostajemy:

$$C(z) = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} .$$

Rozwijamy z twierdzenia o dwumianie:

$$(1 - 4z)^{1/2} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/2}{k} (-4z)^k = 1 + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^k .$$

Korzystamy z następującej tożsamości (patrz zadania do wykładu o współczynnikach dwumianowych):

$$\binom{-1/2}{n} = \left(-\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} .$$

Dostajemy

$$\frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z} = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \binom{-1/2}{k-1} (-4z)^{k-1} = \sum_{n \geq 0} \binom{-1/2}{n} \frac{(-4z)^n}{n+1} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{z^n}{n+1} .$$

Znaleźliśmy zatem rozwiązanie:

$$C_n = \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} ,$$

gdzie C_n nazywa się *liczbami Catalana*. \diamond

Powyższy przykład pokazuje jak przy problemie zliczania można posłużyć się funkcją tworzącą, i pod tym względem jest kształcący. Ale może istnieje prosty i czysto kombinatoryczny sposób dojścia do wzoru na liczby Catalana?

Przykład: Rozważamy *wyrażenia nawiasowe*, to znaczy ciągi $\delta = \langle d_1, \dots, d_m \rangle$, których wyrazami d_i są nawiasy: *otwierający*, na przykład '(', i *zamykający*, na przykład ')'. W wyrażeniu $(())()$ nawiasy otwierające i zamykające można “poprawnie” połączyć w pary, natomiast wyrażenie $(())()$ “nie ma sensu.” To jak oznaczamy nawiasy nie ma znaczenia, niech otwierający nawias będzie oznaczany przez -1 a zamykający przez $+1$. Wyrażenie δ nazwiemy *poprawnym*, gdy $\sum_{1 \leq i \leq k} d_i \leq 0$, dla każdego $1 \leq k \leq m$, oraz $\sum_{1 \leq i \leq m} d_i = 0$. Wyrażenie δ nazwiemy *prawie poprawnym*, gdy $\sum_{1 \leq i \leq m} d_i = 0$, to znaczy, gdy δ zawiera tyle samo wystąpień nawiasu każdego rodzaju. Jeżeli δ jest prawie poprawne to m jest liczbą parzystą. Obliczymy, ile jest poprawnych wyrażeń $\alpha = \langle a_1, \dots, a_{2n} \rangle$ długości $2n$. Wyrażeń prawie poprawnych jest $\binom{2n}{n}$, tyle jest bowiem sposobów na określenie miejsc nawiasów jednego rodzaju. Wystarczy zatem obliczyć ile jest wyrażeń prawie poprawnych, które nie są poprawne. Niech α będzie takim wyrażeniem, i niech $1 \leq k \leq 2n$ najmniejsza liczba taka, że $\sum_{1 \leq i \leq k} a_i = 1$. Przyporządkujmy wyrażeniu α wyrażenie

$$f(\alpha) = \langle -a_1, \dots, -a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2n} \rangle . \quad (1)$$

Otóż f jest wzajemnie jednoznaczny odwzorowaniem pomiędzy wyrażeniami długości $2n$, które są prawie poprawne, ale nie poprawne, oraz wyrażeniami długości $2n$, w których jest dokładnie $n+1$ wystąpień nawiasu otwierającego -1 . Różnowartościowość f pozostawiamy jako ćwiczenie, pokażemy, że istnieje przekształcenie f^{-1} odwrotne do f , to znaczy takie, że złożenie f^{-1} z f daje identyczność. Niech $\beta = \langle b_1, \dots, b_{2n} \rangle$ ma $n+1$ wystąpień nawiasu otwierającego -1 . Istnieje liczba j , gdzie $1 \leq j < 2n$, taka, że $\sum_{1 \leq i \leq j} b_i = -1$. Niech k będzie najmniejszą spośród takich liczb j . Wyrażenie

$$\gamma = f^{-1}(\beta) = \langle -b_1, \dots, -b_k, b_{k+1}, \dots, b_{2n} \rangle$$

ma następujące własności: jest prawie poprawne, nie jest poprawne, oraz $f(\gamma) = \beta$. Zatem poprawnych wyrażeń długości $2n$ jest

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{2n!}{n!n!} - \frac{2n!}{(n-1)!(n+1)!} = 2n! \cdot \frac{(n+1) - n}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} .$$

Dostaliśmy znów liczby Catalana. Czyżby ten przykład miał związek z poprzednim bliższy niż na pozór wygląda? \diamond

Problem rozmieszczeń to zadanie znalezienia liczby podziałów obiektów na kategorie. Dla łatwiejszego wyobrażania sytuacji, można go rozważyć jako policzenie liczby konfiguracji otrzymanych przez wkładanie n kul, czyli naszych obiektów, do k skrzynek, czyli

kategorii. Obiekty i kategorie mogą być rozróżnialne lub nie. *Obiekty są rozróżnialne*, gdy zamiana miejscami dwóch obiektów z różnych kategorii daje nową konfigurację. *Kategorie są rozróżnialne*, gdy wzajemna wymiana wszystkich obiektów między dwoma kategoriami prowadzi do nowej konfiguracji. Interesuje nas przypadek ogólny liczby rozmieszczeń, oraz liczba konfiguracji w których każda z k kategorii jest niepusta. Okazuje się, że im więcej rozróżnialności, tym zliczanie łatwiejsze.

Jeżeli zarówno kategorie jak i obiekty są rozróżnialne to konfiguracja jest równoważna z funkcją ze zbioru n elementowego w zbiór k elementowy: mamy k^n konfiguracji. Jeżeli każda kategoria niepusta, to funkcje są “na”, jest ich $\Delta^k 0^n = k! \cdot \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$.

Jeżeli nierozróżnialne są zarówno obiekty jak i kategorie, to konfiguracji, dla wszystkich kategorii niepustych, odpowiada przedstawienie $n = a_1 + \dots + a_k$, gdzie $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 1$. Liczbę takich konfiguracji oznaczamy $p_k(n)$ i nazywamy *liczbą podziałów n na k składników*. Liczbę $P(n) = p_1(n) + p_2(n) + \dots + p_n(n)$ nazywamy *liczbą podziałów n* .

Zwykle podział zapisujemy jako ciąg rozmiarów kolejnych składników, w wykładniku podając liczbę składników danego rozmiaru, na przykład podział liczby 3 na trzy składniki oznaczamy przez 1^3 . Mamy na przykład:

$$\begin{aligned} P(3) &= 3, \quad \text{gdyż wszystkimi podziałami są} \quad 3, 21, 1^3; \\ P(4) &= 5, \quad \text{gdyż wszystkimi podziałami są} \quad 4, 31, 2^2, 21^2, 1^4. \end{aligned}$$

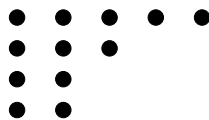
Jeżeli obiekty są nierozróżnialne natomiast kategorie rozróżnialne to mamy odpowiedniość między badanymi konfiguracjami a n -kombinacjami z powtórzeniami ze zbioru k elementowego: liczba wystąpień kategorii oznacza liczbę obiektów w tej kategorii. Stąd mamy $\binom{n+k-1}{n}$ konfiguracji, a gdy dodatkowo każda kategoria niepusta, to $\binom{n-1}{k-1}$.

Odwrotnie, jeżeli obiekty są rozróżnialne, natomiast kategorie nie, to rozmieszczeń z wszystkimi k niepustymi kategoriami mamy $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, a ogólnie $b_n - 1$, gdzie b_n to *liczby Bella*:

$$b_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\},$$

zwróćmy uwagę, że indeks $k = 0$ nie ma odpowiedniości w rozmieszczeniach.

Omówimy dokładniej liczby podziałów. Podziały można reprezentować graficznie przez *diagramy Ferrersa*, na przykład podział 532^2 ma diagram przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1: Diagram Ferrersa.

Niech funkcją tworzącą liczb podziałów będzie

$$\mathcal{P}(z) = P(0) + P(1)z + P(2)z^2 + \dots$$

Można ją przedstawić w postaci iloczynu

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(z) &= (1 + z + z^2 + \cdots)(1 + z^2 + z^4 + \cdots) \dots (1 + z^k + z^{2k} + \cdots) \dots \\ &= 1/(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^k) \dots\end{aligned}$$

Taki iloczyn oznacza szereg, w którym przy jednomianie z^n stoi współczynnik równy liczbie sposobów na które można otrzymać z^n wybierając po jednym jednomianie z pewnych czynników (skończenie wielu) i mnożąc przez siebie, z pozostałych wybierając 1. Jeżeli wybierzemy jednomian z^{ik} z k -tego czynnika $1 + z^k + z^{2k} + \cdots$ to interpretujemy to jako obecność w podziale dokładnie i składników o rozmiarze k .

Przykład: Można rozważać warianty tej konstrukcji. Funkcją tworzącą liczby podziałów w których *każdy ze składników jest nie większy niż k* jest

$$1/(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^k) .$$

Liczby podziałów na *różne części* mają funkcję tworzącą

$$r(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^3) \dots ,$$

a podziałów na *części nieparzyste*

$$n(z) = 1/(1 - z)(1 - z^3)(1 - z^5) \dots .$$

Mamy $r(z) = n(z)$, gdyż korzystając z $1 - z^{2k} = (1 - z^k)(1 + z^k)$ dostajemy

$$r(z)(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots = (1 - z^2)(1 - z^4)(1 - z^6) \dots .$$

Pokazaliśmy, że podziałów liczby na różne części jest tyle samo co na części nieparzyste.

◇

Przykład: Rozważmy f.t. dwóch zmiennych

$$\begin{aligned}A(z, y) &= (1 + yz + y^2z^2 + y^3z^3 + \cdots)(1 + yz^2 + y^2z^4 + \cdots) \dots (1 + yz^k + y^2z^{2k} + \cdots) \dots \\ &= 1/(1 - yz)(1 - yz^2) \dots (1 - yz^k) \dots .\end{aligned}$$

Grupując jednomiany od y dostajemy

$$A(z, y) = \sum_k p(z, k) \cdot y^k ,$$

gdzie $p(z, 0) = 1$, a $p(z, k)$ jest f.t. podziałów na dokładnie k części. Zachodzi równość $(1 - yz) A(z, y) = A(z, zy)$, czyli $p(z, k) - z \cdot p(z, k - 1) = z^k \cdot p(z, k)$. Stąd

$$p(z, k) = p(z, k - 1) \cdot \frac{z}{1 - z^k} .$$

Rozwijając tę rekurencję dostajemy

$$p(z, k) = \frac{z^k}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^k)} .$$

Stąd wynika, że liczba podziałów n na składniki nie większe niż k jest równa liczbie podziałów $n + k$ na dokładnie k składników.

Ten fakt można także otrzymać posługując się diagramami Ferrersa. Wystarczy przedstawić wzajemnie jednoznaczne przyporządkowanie pomiędzy diagramami dla podziałów obu rodzajów. Weźmy podział liczby n na nie więcej niż k części, gdzie części reprezentujemy jako wiersze. Dodajmy kolumnę k elementów do diagramu. Dostajemy podział liczby $n + k$ na dokładnie k części. To przyporządkowanie ma przyporządkowanie odwrotne: wystarczy teraz z każdego wiersza usunąć jeden element. \diamond

Rozważmy inną f.t. dwóch zmiennych

$$G(z, x) = (1 + xz)(1 + xz^2)(1 + xz^3) \dots = \sum_k D(z, k)x^k,$$

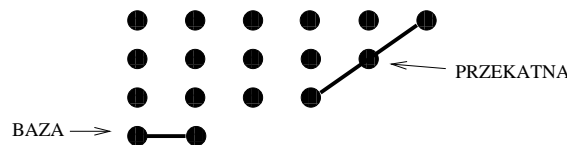
gdzie $D(z, k)$ jest f.t. liczb podziałów na k różnych części. Dla $x = -1$ dostajemy

$$(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots = D(z, 0) + D(z, 2) + D(z, 4) + \dots - [D(z, 1) + D(z, 3) + \dots]$$

Niech E_n i O_n będą liczbami podziałów n na parzystą i nieparzystą, odpowiednio, liczbę różnych składników. Widzimy, że iloczyn nieskończony $(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots$ jest f.t. liczb $E_n - O_n$. Na przykład, mamy następujące podziały na różne części dla pewnych n :

$$\begin{aligned} n = 2 : & \quad 2 ; & E_2 - O_2 &= 0 - 1 = -1; \\ n = 7 : & \quad 7 ; 1, 6; 2, 5; 3, 4; 1, 2, 4; & E_7 - O_7 &= 3 - 2 = 1; \\ n = 10 : & \quad 10 ; 1, 9; 2, 8; 3, 7; 4, 6; 1, 2, 7; 1, 3, 6; 1, 4, 5; 2, 3, 5; 1, 2, 3, 4; & E_{10} - O_{10} &= 5 - 5 = 0. \end{aligned}$$

Okazuje się, że jakimś magicznym sposobem liczby $E_n - O_n$ nie przyjmują innych wartości, oprócz tych trzech! Pokażemy to przez interpretację na diagramach Ferrersa. Połączymy w pary diagramy dla parzystej i nieparzystej liczby składników, oprócz sytuacji, gdy będzie jeden diagram bez pary. W diagramie Ferrersa wyróżniamy *bazę* i *przekątną*, patrz rysunek 2.



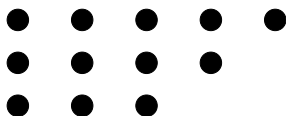
Rysunek 2: Baza i przekątna, dla podziału na różne części.

Pomysł polega na przeniesieniu bazy i umieszczeniu jej elementów jako nowej przekątnej, lub odwrotnie, co zmienia parzystość podziału. Niech d i b będą długościami przekątnej i bazy, odpowiednio. Rozważamy przypadki:

Jeżeli $b < d$ to można przenieść bazę, patrz rysunek 2.

Jeżeli $b = d$ to przekątnej nie można przenieść, ale bazę można, chyba, że przecina przekątną jak na rysunku 3.

Wtedy podział jest postaci: $b, b + 1, b + 2, \dots, 2b - 1$, czyli $n = (3b^2 - b)/2$.



Rysunek 3: Baza i przekątna mają część wspólną.

Jeżeli $b > d$ to można przenieść przekątną, chyba że $b = d + 1$ i baza przecina przekątną, wtedy podział postaci $d + 1, d + 2, \dots, 2d$, czyli $n = (3d^2 + d)/2$.

Zatem $E_n - O_n = 0$ oprócz przypadku, gdy $n = (3k^2 \pm k)/2$, wtedy $E_n - O_n = (-1)^k$. Dostaliśmy wzór Eulera:

$$\begin{aligned} (1-t)(1-t^2)(1-t^3)\dots &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(t^{(3k^2-k)/2} + t^{(3k^2+k)/2} \right) \\ &= 1 - t - t^2 + t^5 + t^7 - t^{12} - t^{15} + \dots \end{aligned}$$

Ten szereg jest odwrotnością f.t. liczby podziałów: $\mathcal{P}(t) \cdot (1-t)(1-t^2)\dots = 1$. Stąd

$$P_n - P_{n-1} - P_{n-2} + P_{n-5} + P_{n-7} - \dots + (-1)^k (P_{n-k_1} + P_{n-k_2}) + \dots = 0 \quad (2)$$

dla $n > 0$, gdzie $k_1 = (3k^2 - k)/2$ i $k_2 = (3k^2 + k)/2$. Dostaliśmy równania określające rekurencyjnie liczby podziałów.

Zadania

1. Pokaż, że przekształcenie f , określone wzorem (1), jest różnowartościowe.
2. Pokaż przez interpretację kombinatoryczną, że jest tyle samo sposobów pomnożenia ciągu $n + 1$ elementów co poprawnych wyrażeń nawiasowych zbudowanych z n par nawiasów.
3. Oblicz, iloma sposobami można podzielić n -kąt wypukły na trójkąty za pomocą przekątnych, które się nie przecinają, gdzie wierzchołki są rozróżnialne.
4. Na ile sposobów można rozmieścić $3n$ rozróżnialnych kul w n rozróżnialnych skrzynkach tak, że w każdej skrzynce są co najmniej dwie kule?
5. Znajdziemy wykładniczą funkcję tworzącą $b(z)$ liczb Bella.

1. Pokaż, że liczby Bella spełniają rekurencyjne równanie:

$$b_0 = 1 ; \quad b_{n+1} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot b_i .$$

2. Korzystając z tego, że prawa strona powyższego równania ma postać splotu dwumianowego, znajdź i rozwiąż równanie różniczkowe na funkcję $b(z)$.

3. Jeżeli nie wiesz jak to równanie rozwiązać, można znaleźć $b(z)$ wychodząc od

$$\frac{(e^z - 1)^k}{k!} = \sum_n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \cdot \frac{z^n}{n!}$$

i sumując po k . Sprawdź, że $b(z)$ spełnia równanie z punktu 2.

6. Pokaż następujące rekurencje na liczby $p_k(n)$:

$$\begin{aligned} p_k(n) &= p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k) ; \\ p_k(n) &= p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + \dots + p_1(n-k) . \end{aligned}$$

7. Oblicz $p_2(n)$ i $p_3(n)$.

8. Pokaż szacowanie

$$\frac{1}{k!} \cdot \binom{n-1}{k-1} \leq p_k(n) \leq \frac{1}{k!} \cdot \left(n + \frac{k(k-1)}{2} - 1 \right) .$$

9. Pokaż, że liczba $P(n) - P(n-1)$ jest równa liczbie podziałów n na składniki większe niż 1.

10. Określ rodzaj podziałów, których licznosci mają szereg

$$\prod_k (1 + x^k + x^{2k})$$

jako funkcję tworzącą.

11. Pokaż że jest tyle samo podziałów n na k części co podziałów n na części z których największą jest k .
12. Pokaż, że podziałów n na nie więcej niż k części parzystych jest tyle samo ile jest podziałów $n+k$ na dokładnie k części nieparzystych.
13. Czy jest prawdą, że jest tyle samo podziałów n na nie więcej niż k części co podziałów n na części nie większe niż k ?
14. Dla jakiego k prawdziwe jest stwierdzenie: liczba podziałów n na m różnych składników jest równa liczbie podziałów $n - \binom{k}{2}$ na m składników?
15. Znajdź wartości $P(0)$, $P(1)$, \dots , $P(10)$ korzystając z rekurencji (2).
16. Niech $D(n; a_1, \dots, a_m)$ oznacza liczbę podziałów n na części rozmiarów należących do zbioru $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$.

1. Pokaż, że ciąg tych licz ma $1/(1-t^{a_1})(1-t^{a_2})\dots(1-t^{a_m})$ jako swoją f.t..

2. Z przedstawienia na ułamki proste

$$\frac{1}{(1-t)(1-t^2)} = \frac{1}{2(1-t)^2} + \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)}$$

wyprowadź wzór na $D(n; 1, 2)$.

3. Podobnie wyprowadź wzór $72 \cdot D(n; 1, 2, 3) = 6n^2 + 36n + s(n)$, gdzie $s(n)$ jest pewną funkcją o okresie 6.

Asymptotyka I. Nie zawsze potrzebujemy znać dokładne rozwiązanie równania rekurencyjnego lub dokładną wartość sumy skończonej, czasem wystarczy oszacowanie. Można szacować poprzez nierówności, ale język samych nierówności jest krępujący w manipulowaniu wyrażeniami, gdyż jest zbyt dokładny. Nierówności są zwykle wyprowadzane metodami analizy matematycznej, na przykład znajdując ekstrema funkcji, dlatego nie będziemy się nimi zajmować. Zamiast tego skoncentrujemy się na szacowaniu przy użyciu specjalnych oznaczeń do opisu asymptotycznego zachowania badanych ciągów czy funkcji. Asymptotyczne szacowanie opisuje zachowanie się ciągu wraz ze wzrostem indeksów, lub ogólniej funkcji w odpowiednim obszarze argumentów. Istotą takiego szacowania jest celowe ograniczenie się w wyrażaniu naszej wiedzy o ciągu lub funkcji, aby tym wyraźniej przedstawić, w postaci krótkiej i prostej formuły, te informacje, które mają dla nas znaczenie. Jest w tym podobieństwo do pokazywania zbieżności: wyrażenie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ mówi, że dla dużych wartości wskaźnika n wyrazy a_n są bliskie a , przy czym jest to użyteczne nawet gdy nie wiemy dokładnie dla jak dużych n i jak są bliskie.

Najważniejszym z oznaczeń asymptotycznych jest \mathcal{O} występujące w asymptotycznych wyrażeniach postaci $f = \mathcal{O}(g)$, co czytamy “ f jest rzędu nie większego niż g ” lub “ f jest duże \mathcal{O} od g ”. Oto jego definicja, gdzie A jest zbiorem liczb, najczęściej przedziałem na prostej lub zbiorem liczb naturalnych:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \text{ dla } x \in A, \text{ oznacza, że istnieje stała } c > 0 \text{ taka, że nierówność } |f(x)| \leq c \cdot |g(x)| \text{ zachodzi dla } x \in A.$$

Na przykład, $x = \mathcal{O}(1)$ dla $x \in A$ oznacza, że A jest ograniczony. Można także użyć notacji łączącej symbol asymptotyczny z przejściem granicznym:

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)), \text{ dla } x \rightarrow x_0, \text{ oznacza istnienie stałych } a \text{ i } \epsilon > 0 \text{ takich, że zachodzi } |f(x)| \leq a \cdot |g(x)| \text{ dla } |x - x_0| < \epsilon.$$

Jeżeli zmienna przebiega liczby naturalne, wtedy \mathcal{O} określamy następująco:

$$f(n) = \mathcal{O}(g(n)), \text{ dla } n \rightarrow \infty, \text{ jeżeli istnieją stała } a > 0 \text{ oraz liczba naturalna } n_0 \text{ takie, że zachodzi nierówność } |f(n)| \leq a \cdot |g(n)|, \text{ dla } n > n_0.$$

W tym ostatnim przypadku zwykle piszemy tylko $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$, opuszczając $n \rightarrow \infty$. Zamiast pisać $x \rightarrow x_0$ mówimy czasem że szacowanie asymptotyczne zachodzi w otoczeniu x_0 , gdzie może też być $x_0 = \infty$, co oznacza zachodzenie odpowiedniej nierówności dla dostatecznie dużych argumentów.

W praktyce wygodnie jest używać asymptotycznych szacowań tak jakby to były zwykłe algebraiczne wyrażenia. Na przykład, gdy piszemy $f(n) = \ln n + \mathcal{O}(n^{-1})$, to rozumiemy to jako inną postać wyrażenia $f(n) - \ln n = \mathcal{O}(n^{-1})$. Tu jednak uwaga: “równości” z \mathcal{O} nie zawsze spełniają prawa równości liczb! Na przykład, prawdziwe są szacowania $n = \mathcal{O}(n^3)$ i $n^2 = \mathcal{O}(n^3)$, ale stąd nie wynika $n = n^2$. Formalnie, możemy interpretować $\mathcal{O}(f)$ jako

zbiór funkcji g takich, że g spełnia warunek w definicji $g = \mathcal{O}(f)$. Właściwszą byłaby notacja $g \in \mathcal{O}(f)$, ale tradycyjnie używa się znaku $=$. Podobnie piszemy $n^2 + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n^2)$ chociaż naturalniej byłoby $n^2 + \mathcal{O}(n) \subseteq \mathcal{O}(n^2)$. Z tego powodu nie nazywamy wyrażeń asymptotycznych równościami, a wyrażenia $f = \mathcal{O}(g)$ nie czytamy “ f równa się duże \mathcal{O} od g ”, tylko “ f jest duże \mathcal{O} od g ”.

Przykład: Jeżeli $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, to $f(x) = \mathcal{O}(x^n)$. Rzeczywiście, niech stała $c > 0$, wtedy dla $|x| \leq c$ mamy $f(x) = \mathcal{O}(1)$, natomiast dla $|x| > c$ przedstawiamy f w postaci

$$f(x) = a_n \cdot x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right),$$

i zauważamy, że wyrażenie w nawiasie jest $\mathcal{O}(1)$. \diamond

Używana jest także dualna notacja, która zastępuje duże \mathcal{O} przez duże Ω . Wyrażenie $f = \Omega(g)$ oznacza to samo co $g = \mathcal{O}(f)$, czytamy je “ f jest rzędu co najmniej g ” lub “ f jest duże Omega od g ”. Mówimy, że f i g są tego samego rzędu, lub f jest rzędu g , co zapisujemy $f = \Theta(g)$, jeżeli zachodzą $f = \mathcal{O}(g)$ i $f = \Omega(g)$ jednocześnie. Na przykład: jeżeli $a, b > 1$ to $\log_a n = \Theta(\log_b n)$.

Czasem szacujemy wyrażenie zawierające wystąpienie dwóch lub więcej zmiennych, definicje notacji asymptotycznej przenoszą się bez zmian. Jest tu jednak miejsce na wątpliwości czy nawet nadużycia: na przykład możemy stwierdzić, że $n \cdot k^2 = \mathcal{O}(n)$, bowiem k potraktowaliśmy jak stałą. Rozszerzmy definicję: powiemy, że szacowanie $f(x, y) = \mathcal{O}(g(x, y))$, dla $x \in A, y \in B$, jest *jednostajne względem y* , gdy stała c w warunku $|f(x, y)| \leq c|g(x, y)|$ nie zależy od y . Dla przykładu rozważmy wyrażenie i/j^2 dla całkowitych $1 \leq i \leq n$ oraz $j > 0$. Mamy $i/j^2 = \mathcal{O}(i)$ oraz $i/j^2 = \mathcal{O}(j^{-2})$, przy czym pierwsze szacowanie jest jednostajne względem j a drugie nie jest jednostajne względem i . Przypuśćmy, że chcemy oszacować $\sum_{1 \leq i \leq n, j > 0} i/j^2$, odwołując się do jakiegoś oszacowania składników i/j^2 . Wybierając szacowanie niejednostajne możemy dostać błędny wynik:

$$\sum_{1 \leq i \leq n, j > 0} i \cdot j^{-2} = \sum_{j > 0} \mathcal{O}(j^{-2}) \stackrel{?}{=} \mathcal{O}\left(\sum_{j > 0} j^{-2}\right) = \mathcal{O}(1).$$

Nie jest to prawdziwe, bowiem $\sum_{1 \leq i \leq n, j > 0} i \cdot j^{-2} \geq \sum_{1 \leq i \leq n} i = \Omega(n^2)$. Natomiast wybierając szacowanie jednostajne wewnątrz sumy możemy \mathcal{O} wyciągnąć przed znak sumy:

$$\sum_{1 \leq i \leq n, j > 0} i \cdot j^{-2} = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathcal{O}(i) = \mathcal{O}\left(\sum_{1 \leq i \leq n} i\right) = \mathcal{O}(n^2).$$

Następujące przykłady użycia notacji z Θ dotyczą klasy równań rekurencyjnych występujących przy analizie algorytmów zaprojektowanych zgodnie z paradygmatem “dziel i zwyciężaj”. Interesujące nas równania są postaci

$$T(n) = a \cdot T\left(\left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor\right) + f(n),$$

gdzie $f(n) \geq 0$ oraz $a, b > 0$ całkowite. Zauważmy, że dla każdej liczby n w przedziale $[n..bn]$ istnieje liczba postaci b^k , oraz że ciąg $\langle T(n) \rangle$ jest niemalejący. Stąd wynika, że

jeżeli wyznaczymy rząd $T(n) = \Theta(S(n))$ dla $n \rightarrow \infty$ i n będących potęgami b oraz $S(b \cdot n) = \Theta(S(n))$, to taki sam rząd $T(n) = \Theta(S(n))$ będzie miał ciąg $T(n)$ dla wszystkich $n \rightarrow \infty$.

Obliczymy $T(b^k)$ rozwijając rekursję:

$$\begin{aligned} T(b^k) &= a \cdot T(b^{k-1}) + f(b^k) = a(a \cdot T(b^{k-2}) + f(b^{k-1})) + f(b^k) \\ &= a^2 T(b^{k-2}) + a f(b^{k-1}) + f(b^k) = a^2 (a T(b^{k-3}) + f(b^{k-2})) + a f(b^{k-1}) + f(b^k) \\ &= a^3 T(b^{k-3}) + a^2 f(b^{k-2}) + a f(b^{k-1}) + f(b^k) . \end{aligned}$$

Rozwijając do końca dostajemy:

$$T(b^k) = a^k \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{k-1} a^i \cdot f(b^{k-i}) . \quad (1)$$

Poniżej pokazujemy jak oszacować (1) w konkretnych przypadkach.

Przykład: Rozważmy równanie $T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + 1$. Podstawiając do (1) dostajemy

$$T(3^k) = 2^k \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k \cdot T(1) + 2^k - 1 = \Theta(2^k) .$$

Dla $n = 3^k$ mamy $T(n) = \Theta(2^{\log_3 n}) = \Theta(3^{\log_3 2 \cdot \log_3 n}) = \Theta(n^{\log_3 2})$. Ponieważ $(3n)^{\log_3 2} = \Theta(n^{\log_3 2})$, więc $T(n) = \Theta(n^{\log_3 2})$ dla $n \rightarrow \infty$. \diamond

Przykład: Rozważmy równanie $T(n) = 3 \cdot T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n$. Podstawiając do (1) dostajemy

$$T(3^k) = 3^k \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 3^{k-i} = 3^k \cdot T(1) + k \cdot 3^k = \Theta(k \cdot 3^k) .$$

Dla $n = 3^k$ mamy $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$. Ponieważ $3n \log_3(3n) = \Theta(n \log n)$, więc $T(n) = \Theta(n \cdot \log n)$ dla $n \rightarrow \infty$. \diamond

Przykład: Rozważmy równanie $T(n) = 4 \cdot T(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor) + n^2$. Podstawiając do (1) dostajemy

$$T(3^k) = 4^k \cdot T(1) + \sum_{i=0}^{k-1} 4^i 3^{2(k-i)} = 4^k \cdot T(1) + 9^k \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{4}{9}\right)^i = \Theta(4^k) + \Theta(9^k) = \Theta(9^k) .$$

Dla $n = 3^k$ mamy $T_3(n) = \Theta(9^{\log_3 n}) = \Theta(n^2)$. Ponieważ $(3n)^2 = \Theta(n^2)$, więc $T(n) = \Theta(n^2)$ dla $n \rightarrow \infty$. \diamond

Powiemy, że funkcja f jest asymptotyczna z g , lub f i g są sobie asymptotyczne, w otoczeniu x_0 , co oznaczamy $f(x) \sim g(x)$ dla $x \rightarrow x_0$, gdy zachodzi równość

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)/g(x) = 1 .$$

W przypadku ciągów naturalne jest otoczenie nieskończoności: mówimy, że ciągi a_n i b_n są sobie asymptotycznie, co oznaczamy $a_n \sim b_n$, gdy ma miejsce równość

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 1 .$$

Powiemy, że *ciąg* $f(n)$ *jest mniejszego rzędu niż* $g(n)$, co zapisujemy $f(n) = o(g(n))$, gdy dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi nierówność $f(n) \leq \epsilon \cdot g(n)$, dla dostatecznie dużych n zależnych od ϵ . Wyrażenie $o(f(n))$ czytamy czasem krócej “małe o od $f(n)$ ”. Zauważmy, że $f(n) = o(g(n))$ to inny zapis warunku $f(n)/g(n) \rightarrow 0$ przy $n \rightarrow \infty$, o ile $g(n) \neq 0$.

Przykład: Następujące ciągi podane są w kolejności rosnących rzędów:

$$a^n, n^{-2}, 1, \log \log n, \log n, n^a, n, n^b, n^{\log n}, b^n, n^n, b^{n^b}, b^{b^n},$$

gdzie $0 < a < 1 < b$. \diamond

Analogiczna definicja mniejszego rzędu w przypadku argumentu rzeczywistego jest często używana w analizie matematycznej. Mianowicie, mówimy, że $f(x) = o(g(x))$ w otoczeniu punktu a , gdy $f(x)/g(x) \rightarrow 0$, dla $x \rightarrow a$; ogólnie może być także $a = \infty$. Dla przykładu: twierdzenie Taylora, w najprostszej wersji z resztą w postaci Peano, mówi, że jeżeli funkcja rzeczywista f określona w otoczeniu punktu a jest n razy różniczkowalna, to ma miejsce asymptotyczne szacowanie

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

w otoczeniu a . Wynika z niego słabszy wzór

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + \mathcal{O}((x-a)^n).$$

Przykład: Na mocy odpowiedniego wzoru Taylora zachodzi $\ln(1+z) = \mathcal{O}(z)$, lub dokładniej $\ln(1+z) = z + \mathcal{O}(z^2)$, dla $|z| < 1$. Stąd $\log(1 + \mathcal{O}(f(z))) = \mathcal{O}(f(z))$ o ile $f(z) = o(1)$. Podobnie $e^z = 1 + \mathcal{O}(z)$, lub dokładniej $e^z = 1 + z + \mathcal{O}(z^2)$, dla $z = \mathcal{O}(1)$.

Niech $c_n = (1 + \mathcal{O}(a_n))^{\mathcal{O}(b_n)}$, gdzie zachodzi $a_n = o(1)$ i $a_n \cdot b_n = \mathcal{O}(1)$. Używając szacowania logarytmu w otoczeniu 1 mamy: $\ln c_n = \mathcal{O}(b_n) \cdot \ln(1 + \mathcal{O}(a_n)) = \mathcal{O}(a_n \cdot b_n)$. Stąd dostajemy

$$(1 + \mathcal{O}(a_n))^{\mathcal{O}(b_n)} = e^{\ln c_n} = 1 + \mathcal{O}(a_n \cdot b_n), \quad (2)$$

na podstawie szacowania funkcji wykładniczej. Wzór (2) pomaga często uprościć wyrażenia algebraiczne przez wprowadzenie notacji asymptotycznej. Rozważmy dla przykładu ciąg $d_n = (\lceil \sqrt{n} \rceil + 2n^{1/4} - 3)^3$. Przekształcamy:

$$d_n = (n^{1/2} + 2n^{1/4} + \mathcal{O}(1))^3 = (n^{1/2}(1 + 2n^{-1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2})))^3,$$

gdzie ostatni krok stwarzający wyrażenie postaci $1 + 2n^{-1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2})$ to *wyciągnięcie największej części*. Przekształcając dalej dostajemy:

$$d_n = n^{3/2} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/4}))^3 = n^{3/2} (1 + \mathcal{O}(3 \cdot n^{-1/4})) = n^{3/2} + \mathcal{O}(n^{5/4}),$$

na podstawie wzoru 2, podstawiając $a_n = n^{-1/4}$ i $b_n = 3$. \diamond

Następne przykłady pokazują że podstawienie znanego szacowania może prowadzić do otrzymania lepszego szacowania. Taka metoda nazywa się często *bootstrapowaniem*.

Przykład: Rozważmy równanie:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 ; \\ a_n &= n^{-3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a_i . \end{aligned}$$

Chcemy oszacować wielkość liczb a_n . Najpierw pokazujemy, przez indukcję, że $0 < a_n \leq 1$, czyli $a_n = \mathcal{O}(1)$. Podstawiamy to szacowanie do równania:

$$a_n = n^{-3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{O}(1) = n^{-3} \cdot \mathcal{O}\left(\sum_{i=0}^{n-1} 1\right) = \mathcal{O}(n^{-3} \cdot n) = \mathcal{O}(n^{-2}) .$$

Podstawiamy nowe szacowanie do równania:

$$a_n = n^{-3} \left(a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \right) = n^{-3} + n^{-3} \cdot \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{n-1} i^{-2}\right) = \mathcal{O}(n^{-3}) ,$$

gdzie korzystamy z ograniczoności szeregu odwrotności kwadratów (patrz zadanie do pierwszego wykładu). Widzimy, że dwa kolejne podstawienia dają coraz to lepsze szacowania; następne już nie, bowiem $a_n \geq 1/n^3$, razem mamy $a_n = \Theta(n^{-3})$. \diamond

Przykład: Niech liczba g_n będzie rozwiązaniem równania $x \ln x = n$, czyli $g_n \cdot \ln g_n = n$. Z monotoniczności funkcji $x \ln x$ wynika pierwsze oszacowanie $g_n < n$. Podstawiamy je zamiast drugiego wystąpienia g_n w równaniu $g_n \ln g_n = n$, co prowadzi do $n = g_n \ln g_n < g_n \ln n$, czyli do drugiego szacowania $g_n > n/\ln n$. Podstawiamy powtórnie i dostajemy $n = g_n \ln g_n > g_n \ln \frac{n}{\ln n}$ a stąd $g_n < \frac{n}{\ln n - \ln \ln n}$. Stąd mamy $g_n = \Theta(n/\log n)$. \diamond

Przykład: Niech ciąg f_n określony równaniem $f_n - \ln f_n = n$. Mamy $f_n \leq 2n$ ponieważ $2n - \ln(2n) \geq n$. Stąd $f_n = n + \ln f_n \leq n + \ln(2n) = n(1 + \mathcal{O}(\frac{\log n}{n}))$. Prawą stronę tego szacowania podstawiamy do $\ln f_n$ w równaniu definiującym f_n . Korzystamy z rozwinięcia $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$, które jest prawdziwe dla $|x| < 1$. Dostajemy

$$f_n = n + \ln n + \ln\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = n + \ln n + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = n\left(1 + \frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) .$$

Podstawiamy powtórnie:

$$\begin{aligned} f_n &= n + \ln f_n = n + \ln n + \ln\left(1 + \frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \\ &= n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)^3 \\ &= n + \ln n + \frac{\ln n}{n} - \frac{\ln^2 n}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) . \end{aligned}$$

Można to kontynuować i dostawać coraz dokładniejsze przybliżenia wartości ciągu f_n . \diamond

Omówimy ogólniej sytuację gdy możemy pokazywać coraz lepsze szacowania. Niech $\alpha = \langle \alpha_0(n), \alpha_1(n), \alpha_2(n), \dots \rangle$ ciąg funkcji takich, że $\alpha_{i+1}(n) = o(\alpha_i(n))$. Niech $\langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ ciąg liczb. Dla ciągu $\langle f_n \rangle$ wyrażenie

$$f_n \approx a_0 \cdot \alpha_0(n) + a_1 \cdot \alpha_1(n) + a_2 \cdot \alpha_2(n) + \dots \quad (3)$$

oznacza, że prawdziwe jest $f_n = a_0 \cdot \alpha_0(n) + a_1 \cdot \alpha_1(n) + \dots + a_k \cdot \alpha_k(n) + \mathcal{O}(\alpha_{k+1}(n))$ dla każdego k . Prawą stronę (3) nazywamy *szeregiem asymptotycznym względem ciągu α* , mówimy o nim, że jest *rozwinięciem asymptotycznym dla f_n* . Podobnie definiujemy szeregi asymptotyczne w otoczeniu punktów na prostej. Zwykle nie można zastąpić znaku \approx przez $=$. Mianowicie, zauważmy, że symbol \approx mówi, że dla każdego k pewne wyrażenie asymptotyczne dotyczące k pierwszych wyrazów szeregu jest prawdziwe dla $n \rightarrow \infty$, natomiast znak $=$ oznacza zbieżność dla każdego n indywidualnie. W szczególności szereg asymptotyczny (3) nie musi być zbieżny, a nawet jeżeli jest, to niekoniecznie do f_n . Na przykład weźmy $f_n = 2^{-n}$: mamy $f_n = \mathcal{O}(n^{-k})$ dla każdego k , czyli prawdziwe jest asymptotyczne rozwinięcie $2^{-n} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot n^{-1} + 0 \cdot n^{-2} + \dots$, ale jak zastąpimy \approx przez symbol $=$ to dostaniemy fałszywą równość.

Zadania

1. Czy istnieją dwie funkcje monotoniczne $f(x)$ i $g(x)$ takie, że nie zachodzi ani $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ ani $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$, dla $x > 0$?
2. Uporządkuj podane niżej funkcje względem niemalejących rzędów:

a) $100n - 45$;

b) $\frac{n^3}{100} + \frac{1}{2}$;

c) $\lg(n^2 - 10)$;

d) $17(n + 5)^{1/3}$;

e) $3^{-n} \cdot n^2$;

f) $\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$;

g) $\frac{12n^2 - 7}{\sqrt{3n^4 + 8n^{7/2}}}$;

h) $\lg n \cdot n^{-1/2}$.
3. Przypuśćmy, że $a_n = \mathcal{O}(n^2/k) + \mathcal{O}(k^2/n)$, jednostajnie względem k . Pokaż, że zachodzi $a_n = \mathcal{O}(n)$.
4. Pokaż, że własność $f(x) = 1 + x + c \cdot x^2 + \mathcal{O}(x^3)$, gdzie $c > 0$, implikuje nierówność $f(x) \geq 1 + x$ w pewnym otoczeniu 0. Podaj przykład funkcji g takiej, że $g(x) = 1 + x + \mathcal{O}(x^2)$ ale nierówność $g(x) \geq 1 + x$ nie zachodzi w żadnym otoczeniu 0.
5. Przy jakich założeniach o x prawdziwe jest $\frac{1}{1+\mathcal{O}(x)} = 1 + \mathcal{O}(x)$?
6. Pokaż, że jeżeli $g(x) \neq 0$ w otoczeniu x_0 , to asymptotyczność $f(x) \sim g(x)$, dla $x \rightarrow x_0$, jest równoważna $f(x) = g(x)(1 + o(1))$.
7. Pokaż, że jeżeli f_n jest asymptotyczny z g_n to f_n jest rzędu g_n . Czy z tego, że $a_n = \Theta(b_n)$ wynika, że $a_n \sim b \cdot b_n$ dla pewnej stałej b ?
8. Dane są funkcje $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Znajdź jak najlepsze asymptotyczne oszacowanie funkcji $f(g(n))$, jeżeli wiemy, że prawdziwe są następujące szacowania:

- a) $f(n) = \ln n + \frac{1}{n} + \mathcal{O}(n^{-2})$

oraz

$g(n) = \frac{2^n}{n} \cdot (1 + \mathcal{O}(n^{-1}))$;

b) $f(n) = \ln n + \mathcal{O}(n^{-1})$

oraz

$g(n) = 3^{n/\ln n} (1 + \mathcal{O}(n^{-2}))$.

9. Oszacuj asymptotycznie ciąg $\langle a_n \rangle$ z dokładnością $\mathcal{O}(n^{-2})$, gdzie liczby a_n są określone równościami $a_n + \ln a_n = n$, dla $n > 0$.

10. Niech ciąg $\langle a_n \rangle$ będzie określony rekurencją: $a_0 = 2$, $a_{n+1} = a_n \cdot (a_n + 1)$. Pokaż, że $\log \log a_n = \Theta(n)$.

11. Określmy ciąg $\langle f_n \rangle$ poprzez $f(n) = \max \{k : k! \leq n \text{ po } k > 0 \text{ całkowitych}\}$. Pokaż, że $f(n) = \Theta(\log n / \log \log n)$.

Wskazówka: skorzystaj z nierówności $(k/2)^{k/2} \leq k! \leq k^k$.

12. Podaj przykład równania liniowego o stałych współczynnikach, w którym można zmienić rząd rozwiązania zmieniając warunki początkowe.

13. Znajdź rozwiązania następujących równań z dokładnością do rzędu:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } T(n) = 1 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + f(n) & \text{b) } T(n) = 2 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + f(n) \\ \text{c) } T(n) = 3 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + f(n) & \text{d) } T(n) = 4 \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil\right) + f(n) \end{array}$$

dla przypadków gdy $f(n)$ jest rzędu 1, lub $\log n$, lub n , lub n^2 .

14. Znajdź rząd rozwiązania równania rekurencyjnego

$$A(n) = 5 \cdot A\left(\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor\right) + 2 \cdot n \cdot \log n .$$

15. Dla jakich funkcji $f_{a,b}(n) \geq 0$, gdzie $a, b > 0$ całkowite, rozwiązanie równania

$$T(n) = a \cdot T\left(\left\lceil \frac{n}{b} \right\rceil\right) + f_{a,b}(n)$$

spełnia $T(n) = \Theta(f_{a,b}(n))$?

16. Znajdź asymptotyczne rozwinięcie $\frac{n}{n^2-1}$ względem ciągu funkcji n^{-k} , dla $k \geq 1$.

17. Niech g_n określony równaniem $g_n \ln g_n = n$. Pokazaliśmy, że $g_n = \Theta(n / \log n)$.

1. Pokaż, że prawdziwe jest szacowanie

$$g_n = \frac{n}{\ln n} + \mathcal{O}\left(\frac{n \log \log n}{\log^2 n}\right) .$$

2. Niech $\ln^{(1)} n = \ln n$ oraz indukcyjnie $\ln^{(i+1)} = \ln(\ln^{(i)} n)$. Pokaż rozwinięcie asymptotyczne

$$\frac{n}{g_n} \approx \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \ln^{(i)} n .$$

18. Pokaż, że jeżeli zachodzi $f_n \approx a_0 \cdot \alpha_0(n) + a_1 \cdot \alpha_1(n) + a_2 \cdot \alpha_2(n) + \dots$, to współczynniki a_0, a_1, \dots są wyznaczone jednoznacznie przez ciąg $\langle f_n \rangle$.

19. Pokaż, że jeżeli prawdziwe jest rozwinięcie w szereg potęgowy

$$f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i \cdot x^i ,$$

dla dostatecznie małych x , to ma miejsce także asymptotyczne rozwinięcie

$$f(x) \approx \sum_{i \geq 0} a_i \cdot x^i ,$$

dla dostatecznie małych x .

Asymptotyka II. Omówimy wybrane metody szacowania sum. Zaczniemy od szacowań przez całki. Są one skuteczne, gdy kolejne składniki wahają się dosyć łagodnie.

Niech f funkcja niemalejąca, o wartościach większych od zera, określona na przedziale $[a-1, b+1]$, dla całkowitych a i b . Prawdziwe są nierówności:

$$\int_{a-1}^b f(x) dx \leq \sum_{i=a}^b f(i) \leq \int_a^{b+1} f(x) dx . \quad (1)$$

Mianowicie, mamy ogólne szacowanie $|d-c| \cdot m \leq \int_c^d f(x) dx \leq |d-c| \cdot M$, które zachodzi o ile $m \leq |f(x)| \leq M$ dla $c \leq x \leq d$, skąd wynikają nierówności $\int_{i-1}^i f(x) dx \leq f(i) \leq \int_i^{i+1} f(x) dx$, prawdziwe dla $f(x)$ niemalejącej i nieujemnej. Sumując po i dostajemy (1). Dla funkcji f nierosnącej mamy odpowiednie odwrotne nierówności.

Przykład: Oszacujemy $\sum_{n>y} n^{-a}$, dla $a > 1$. Ponieważ $\int_b^c x^{-a} dx = \frac{x^{1-a}}{1-a} \Big|_b^c$, dostajemy $\sum_{n>y} n^{-a} = \mathcal{O}(y^{1-a})$ na podstawie nierówności (1). (Patrz także zadanie 4.) \diamond

Sumowanie przez części. Opiszemy metodę szacowania sum postaci $\sum_{a \leq i \leq b} x_i \cdot y_i$. Będzie to zastosowania znanego nam już wzoru

$$\mathcal{S}_a^b r \cdot \Delta t = r \cdot t \Big|_a^b - \mathcal{S}_a^b E t \cdot \Delta r .$$

Określmy $x_{b+1} = 0$ oraz $y_i = 0$ dla $i < a$. Połóżmy $X(i) = x_{i+1}$ oraz $Y(i) = \sum_{k \leq i} y_k$. Następujący wzór nazywa się też *przekształceniem Abela*:

$$\begin{aligned} \sum_{a \leq i \leq b} x_i \cdot y_i &= \mathcal{S}_{a-1}^b X \cdot \Delta Y = X \cdot Y \Big|_{a-1}^b - \mathcal{S}_{a-1}^b E Y \cdot \Delta X \\ &= -Y(b)(x_{b+1} - x_b) - \mathcal{S}_{a-1}^{b-1} E Y \cdot \Delta X = x_b \cdot Y(b) + \sum_{a \leq i < b} Y(i)(x_i - x_{i+1}) , \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie skorzystaliśmy z $X \cdot Y \Big|_{a-1}^b = 0$. Oto jego mały ale konkretny przykład:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = (y_1 + y_1 + y_3) x_3 + y_1 (x_1 - x_2) + (y_1 + y_2) (x_2 - x_3) .$$

Dodatkowo przypuśćmy, że istnieje funkcja x określona i różniczkowalna na przedziale $[1, n]$, gdzie $x(i) = x_i$. Rozszerzmy Y na cały przedział $[1, n]$ wzorem $Y(t) = \sum_{1 \leq i \leq t} y_i$. Teraz wzór (2) możemy zapisać w następującej postaci:

$$\sum_{a \leq i \leq b} x_i \cdot y_i = x_b \cdot \sum_{a \leq i \leq b} y_i - \int_a^b Y(t) \cdot x'(t) dt . \quad (3)$$

Przykład: Oszacujemy

$$\sum_{2 \leq i \leq n} i \cdot \left(\frac{1}{\ln i} - \frac{1}{\ln(i+1)} \right) = - \sum_{2 \leq i \leq n} i \cdot \Delta \ln^{-1} i .$$

Z przekształcenia Abela przy $y_i = 1$ i $x_i = \ln^{-1} i$ dostajemy, że badana suma jest równa

$$- \sum_{2 \leq i \leq n} i \cdot \Delta \ln^{-1} i = -\frac{n}{\ln(n+1)} + \sum_{2 \leq i \leq n+1} \frac{1}{\ln i} . \quad (4)$$

Stosujemy wzór (3) do sumy $\sum x_i y_i$, gdzie $Y(t) = \lfloor t \rfloor$, $x(t) = \frac{1}{\ln t}$ oraz $x'(t) = -\frac{1}{t \ln^2 t}$, skąd

$$\sum_{2 \leq i \leq n+1} \frac{1}{\ln i} = \frac{n}{\ln(n+1)} + \int_2^{n+1} \frac{\lfloor t \rfloor dt}{t \ln^2 t} .$$

Szacujemy całkę, zmieniając granice całkowania kosztem stałej addytywnej:

$$\int_{e^4}^n \frac{\lfloor t \rfloor dt}{t \ln^2 t} \leq \int_{e^4}^n \frac{dt}{\ln^2 t} \leq 2 \cdot \int_{e^4}^n \frac{\ln^2 t - 2 \ln t}{\ln^4 t} dt = 2 \cdot \int_{e^4}^n \left(\frac{t}{\ln^2 t} \right)' dt \leq \frac{2n}{\ln^2 n} = \mathcal{O}(n / \log^2 n) ,$$

skąd na mocy (4) mamy $-\sum_{2 \leq i \leq n} i \cdot \Delta \ln^{-1} i = \mathcal{O}(n / \log^2 n)$. \diamond

Wzór sumacyjny Eulera-MacLaurina. Chcielibyśmy przybliżyć sumę $\sum_{i=a}^{b-1} f(i)$ przez całkę $\int_a^b f(x) dx$, w sytuacji gdy $f(x)$ nie jest koniecznien monotoniczna ale jest gładką funkcją, która się waha niezbyt szybko. Pierwszą próbą może być wzór

$$(i+1)f(i+1) - if(i) = xf(x) \Big|_i^{i+1} = \int_i^{i+1} xf'(x) dx + \int_i^{i+1} f(x) dx$$

otrzymany przez całkowanie przez części. Próba jest nieudana, ponieważ sumując lewe strony po i dostajemy wyrażenie odległe od badanej sumy. Zastąpimy funkcję x w pierwszej całce przez inną funkcję liniową, tak by lewa strona była proporcjonalna do $f(i+1) + f(i)$. Taką funkcją może być $x - i - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_i^{i+1} \left(x - i - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= f(x) \left(x - i - \frac{1}{2} \right) \Big|_i^{i+1} - \int_i^{i+1} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (f(i+1) + f(i)) - \int_i^{i+1} f(x) dx . \end{aligned}$$

Oznaczając $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ i sumując po i dostajemy:

$$\int_a^b \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \sum_{a \leq i < b} f(i) - \frac{f(a)}{2} + \frac{f(b)}{2} - \int_a^b f(x) dx .$$

Dostaliśmy *wzór Eulera-MacLaurina*:

$$\sum_{a \leq i < b} f(i) = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2} (f(b) - f(a)) + \int_a^b B_1(\{x\}) f'(x) dx , \quad (5)$$

gdzie $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Druga z całek we wzorze (5) nazywa się *resztą*.

Przykład: Oszacujemy $H_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}$. Mamy $f(x) = x^{-1}$ i $f'(x) = -x^{-2}$. Stąd:

$$H_{n-1} = \int_1^n \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} - \int_1^n B_1(\{x\}) \cdot x^{-2} dx .$$

Ale $\int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n$, oraz $\int_1^n B_1(\{x\})x^{-2} dx = \int_1^\infty B_1(\{x\})x^{-2} dx - \int_n^\infty B_1(\{x\})x^{-2} dx$. Ponieważ $B_1(\{x\}) = \mathcal{O}(1)$, oraz $\int_a^b x^{-2} dx = -x^{-1}|_a^b$, dostajemy:

$$H_n = H_{n-1} + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \mathcal{O}(n^{-1}) , \quad (6)$$

gdzie $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) = \frac{1}{2} - \int_1^\infty B_1(\{x\})x^{-2} dx$ nazywa się stałą Eulera. \diamond

Resztę we wzorze (5) można przekształcić całkując przez części:

$$\int_i^{i+1} B_1(\{x\})f'(x) dx = b_2(x)f'(x)\Big|_i^{i+1} - \int_i^{i+1} b_2(x)f^{(2)}(x) dx , \quad (7)$$

gdzie $b_2(x) = C + \int_0^x B_1(\{t\}) dt$, dla dowolnej stałej C . Ponieważ $\int_0^1 B_1(\{t\}) dt = 0$, funkcja $b_2(x)$ jest okresowa o okresie 1, czyli $b_2(x) = b_2(\{x\})$ oraz $b_2(i) = b_2(0)$. Wybierzmy stałą C tak, żeby $\int_0^1 b_2(t) dt = 0$, co później się przyda. Obliczamy: $b_2(t) = \frac{\{t\}^2}{2} - \frac{\{t\}}{2} + C$, $\int_0^1 b_2(t) dt = \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + Ct\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + C$, skąd $C = \frac{1}{12}$. Oznaczmy $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, wtedy $2b_2(x) = B_2(\{x\})$. Sumując (7) po i dostajemy

$$\int_a^b B_1(\{x\})f'(x) dx = \frac{B_2(0)}{2}(f'(b) - f'(a)) - \frac{1}{2} \int_a^b B_2(\{x\})f^{(2)}(x) dx ,$$

co po podstawieniu do (5) prowadzi do wzmocnienia wzoru Eulera-MacLaurina:

$$\sum_{a \leq i < b} f(i) = \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{2}f(x)\Big|_a^b + \frac{1}{12}f'(x)\Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b B_2(\{x\})f^{(2)}(x) dx . \quad (8)$$

Przykład: Oszacujemy asymptotyczne zachowanie $n!$. W tym celu rozważamy $\sum_{i=1}^{n-1} \ln i$. Podstawiamy do wzoru (8), gdzie $f(x) = \ln x$, $f'(x) = x^{-1}$ i $f^{(2)}(x) = -x^{-2}$. Mamy:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \ln i = \int_1^n \ln x dx - \frac{1}{2} \ln n + \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) + \frac{1}{2} \int_1^n B_2(\{x\})x^{-2} dx .$$

Podstawiamy $\int_1^n \ln x dx = n(\ln n - 1) + 1$. Obliczamy

$$\int_1^n B_2(\{x\})x^{-2} dx = \int_1^\infty B_2(\{x\})x^{-2} dx - \int_n^\infty B_2(\{x\})x^{-2} dx ,$$

gdzie pierwsza całka jest $\mathcal{O}(1)$ a druga $\mathcal{O}(n^{-1})$. Razem dostajemy:

$$\ln n! = \ln n + \sum_{i=1}^{n-1} \ln i = n \cdot \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + \alpha + \mathcal{O}(n^{-1}) ,$$

dla pewnej stałej α . Stąd otrzymujemy *wzór Stirlinga*:

$$n! = \exp(\ln n!) = e^\alpha \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \exp\left(\mathcal{O}(n^{-1})\right) = e^\alpha \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{n} \cdot \left(1 + \mathcal{O}(n^{-1})\right) . \quad (9)$$

Można pokazać, że $e^\alpha = \sqrt{2\pi}$. \diamond

Dla metodologicznego porównania: we wzorze (6) mamy *błąd bezwzględny* $\mathcal{O}(n^{-1})$, natomiast w (9) *błąd względny* $\mathcal{O}(n^{-1})$.

Jeżeli funkcję f można różniczkować dowolną liczbę razy, to proces całkowania przez części w reszcie wzoru Eulera-MacLaurina można zawsze wykonać, co prowadzi do wzorów z resztami, w których występują dowolne k -te pochodne $f^{(k)}$ funkcji f . Do takiego wzoru będziemy się odwoływać jako do wzoru $\text{EM}^{(k)}$, przedstawia się go zwykle w postaci

$$\sum_{a \leq i < b} f(i) = \int_a^b f(x) dx + \sum_{0 \leq j < k} \frac{B_{j+1}(0)}{j!} f^{(j)}(x) \Big|_a^b + \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \int_a^b B_k(\{x\}) f^{(k)}(x) dx, \quad (10)$$

gdzie $\langle B_j(x) \rangle_{j \geq 1}$ to *wielomiany Bernoulliego*, z których $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$ już poznaliśmy. Proces powstawania tych wielomianów najlepiej prześledzić przeprowadzając dowód indukcyjny wzoru (10).

Założmy zatem prawdziwość $\text{EM}^{(k)}$ i pokażemy $\text{EM}^{(k+1)}$. Dodatkowym założeniem indukcyjnym jest równość $\int_0^1 B_j(t) dt = 0$ dla $1 \leq j \leq k$. Przekształcamy resztę w (10) zaczynając od całkowania przez części:

$$\int_i^{i+1} B_k(\{x\}) f^{(k)}(x) dx = b_{k+1}(x) f^{(k)}(x) \Big|_i^{i+1} - \int_i^{i+1} b_{k+1}(x) f^{(k+1)}(x) dx,$$

gdzie $b_{k+1}(x) = C + \int_0^x B_k(\{t\}) dt$ dla dowolnej stałej C . Ponieważ $\int_0^1 B_k(t) dt = 0$, widzimy, że funkcja $b_{k+1}(x)$ jest okresowa o okresie 1, czyli $b_{k+1}(x) = b_{k+1}(\{x\})$ oraz $b_{k+1}(i) = b_{k+1}(0)$. Wybierzmy stałą C tak, żeby $\int_0^1 b_{k+1}(t) dt = 0$ oraz oznaczmy przez $B_{k+1}(x)$ wielomian taki, że $(k+1)b_{k+1}(x) = B_{k+1}(\{x\})$. Sumujemy po i co prowadzi do nowej postaci reszty, która po wstawieniu do wzoru (10) powoduje pojawienie się w sumie z prawej strony dodatkowego składnika $\frac{(-1)^{k+1}}{k!} \frac{B_{k+1}(0)}{k+1} (f^{(k)}(b) - f^{(k)}(a))$, a reszta zmienia się w $\frac{(-1)^{k+2}}{(k+1)!} \int_a^b B_{k+1}(\{x\}) f^{(k+1)}(x) dx$. Wygląda to tak jakbyśmy popełnili błąd opuszczając czynnik $(-1)^{j+1}$ w sumie z prawej strony (10), ale ten czynnik nie ma znaczenia bowiem $B_i(0) = 0$ dla $i > 1$ nieparzystych (patrz zadanie 14). To kończy dowód (10).

Liczby $B_i(0)$ są wymierne, ale te które nie są zerami mają “dziwne” wartości jak na ciąg, który został określony dosyć naturalnie: na przykład już $B_{12}(0) = -\frac{691}{2730}$, a B_{120} ma w liczniku 113 cyfr a mianownikiem jest 2328255930.

Szybko zmieniające się składniki. Jeżeli składniki zmieniają się gwałtownie, dobrze jest zlokalizować i jak najdokładniej zsumować *dominujące* spośród nich, to znaczy takie, które dają znaczący wkład do sumy, oraz wystarczająco dokładnie oszacować pozostałe *ogonowe* składniki. W końcu sztuka asymptotycznego szacowania polega zwykle na tym, żeby wiedzieć kiedy liczyć dokładnie a kiedy przybliżać.

Przykład: Oszacujemy $a_n = \sum_{k=1}^n k^k$. W tej sumie największy wkład jest od ostatniego składnika n^n :

$$\begin{aligned} a_n &= n^n + (n-1)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} k^k \leq n^n + (n-1)^{n-1} + (n-2) \cdot (n-2)^{n-2} \\ &= n^n + \mathcal{O}(n^{n-1}) = n^n(1 + \mathcal{O}(n^{-1})). \end{aligned}$$

To daje a_n z błędem względnym $\mathcal{O}(n^{-1})$. Oszacujemy ten błąd lepiej:

$$a_n = n^n + (n-1)^{n-1} + \mathcal{O}((n-2)^{n-2}) = n^n \left(1 + \frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} + \mathcal{O}(n^{-2}) \right). \quad (11)$$

Potrzebujemy szacowania z błędem bezwzględnym $\mathcal{O}(n^{-2})$ dla $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n-1}$. Pierwszy z tych czynników to około $1/e$, dokładniej:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} = e^{-n \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} n^{-k}} = e^{-1} \cdot e^{\mathcal{O}(n^{-1})} = e^{-1} \cdot (1 + \mathcal{O}(n^{-1})),$$

gdzie skorzystaliśmy z rozwinięcia $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$, prawdziwego dla $|x| < 1$. Razem $\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{en} + \mathcal{O}(n^{-2})$, bowiem $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \mathcal{O}(n^{-2})$. Podstawiamy do (11) i dostajemy $n^{-n} \cdot a_n = 1 + \frac{1}{en} + \mathcal{O}(n^{-2})$. \diamond

Przykład. Chcemy oszacować $\sum_{i \geq 0} t_n(i)$ w zależności od n , gdzie $t_n(i) = \frac{\sqrt{n+i}}{2^i}$ dla n naturalnego. Korzystamy z $(n+i)^{1/2} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{1/2}$ oraz z rozwinięcia $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathcal{O}(x^3)$, prawdziwego dla $|x| < 1$. Zbiór wskaźników i dzielimy na dominujące $D = \{i : 0 \leq i < n\}$ oraz ogonowe $M = \{i : n \leq i\}$. Dla $i \in D$ zachodzi:

$$\begin{aligned} 2^i \cdot t_n(i) &= \sqrt{n} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^{1/2} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{i}{2n} - \frac{i^2}{8n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{i^3}{n^3}\right)\right) \\ &= \sqrt{n} + \frac{i}{2\sqrt{n}} - \frac{i^2}{8n^{3/2}} + \mathcal{O}\left(i^3 n^{-5/2}\right). \end{aligned}$$

Określamy $u_n(i)$ i $w_n(i)$ następująco:

$$\begin{aligned} u_n(i) &= \left(\sqrt{n} + \frac{i}{2} n^{-1/2} - \frac{i^2}{8} n^{-3/2}\right) \cdot 2^{-i}; \\ w_n(i) &= i^3 \cdot n^{-5/2} \cdot 2^{-i}. \end{aligned}$$

Szukaną sumę przekształcamy *handlując ogonami*:

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} t_n(i) &= \sum_{i \in D} [u_n(i) + \mathcal{O}(w_n(i))] + \sum_{i \in M} t_n(i); \\ &= \sum_{i \geq 0} u_n(i) - \sum_{i \in M} u_n(i) + \mathcal{O}\left(\sum_{i \in D} w_n(i)\right) + \sum_{i \in M} t_n(i). \end{aligned}$$

Otrzymane sumy szacujemy bezpośrednio:

$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{i \geq 0} u_n(i) &= \sqrt{n} \sum_{i \geq 0} 2^{-i} + \frac{1}{2} n^{-1/2} \sum_{i \geq 0} i 2^{-i} - \frac{1}{8} n^{-3/2} \sum_{i \geq 0} i^2 2^{-i} \\ &= 2\sqrt{n} + c_1 n^{-1/2} + c_2 n^{-3/2}, \end{aligned}$$

dla stałych $c_1 = \sum_{i \geq 0} i 2^{-i}$ i $c_2 = \sum_{i \geq 0} i^2 2^{-i}$, podobnie

$$S_2 = - \sum_{i \in M} u_n(i) = - \sum_{i \geq 0} \left(\sqrt{n} + \frac{n+i}{2\sqrt{n}} - \frac{(n+i)^2}{8n^{3/2}} \right) \cdot 2^{-n-i} = \mathcal{O}(\sqrt{n} \cdot 2^{-n});$$

$$S_3 = \mathcal{O}\left(\sum_{i \in D} w_n(i)\right) = \mathcal{O}\left(n^{-5/2} \sum_{i=0}^{n-1} i^3 2^{-i}\right) = \mathcal{O}\left(n^{-5/2}\right) ;$$

$$S_4 = \sum_{i \in M} t_n(i) = \sum_{i \geq 0} \frac{\sqrt{2n+i}}{2^{n+i}} = \mathcal{O}\left(\sqrt{n} \cdot 2^{-n}\right) .$$

Razem dostajemy:

$$\sum_{i \geq 0} \frac{\sqrt{n+i}}{2^i} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2\sqrt{n} + c_1 \cdot n^{-1/2} + c_2 \cdot n^{-3/2} + \mathcal{O}\left(n^{-5/2}\right) . \quad (12)$$

◇

Zadania

1. Pokaż oszacowanie

$$\sum_{i=1}^{n-1} i a^i = \frac{n a^n}{a-1} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})) ,$$

dla $a > 1$, badając odpowiednią całkę zgodnie ze wzorem (1).

2. Pokaż, że dla $a \geq 0$ zachodzi

$$\sum_{i=1}^n i^a = \frac{n^{a+1}}{a+1} + \mathcal{O}(n^a) .$$

Wskazówka: zastosuj (1) i skorzystaj z równości $(1+x)^c = 1 + \mathcal{O}(x)$ dla $|x| < 1$.

3. Dane są dwa ciągi $\langle a_i \rangle_{i=0}^n$ oraz $\langle b_i \rangle_{i=0}^n$, gdzie $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq 0$. Pokaż, że ma miejsce szacowanie

$$c \cdot b_1 \leq \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq d \cdot b_1 ,$$

o ile tylko zachodzą nierówności $c \leq \sum_{i=1}^k a_i \leq d$, dla $k = 1, \dots, n$.

Wskazówka: przekształcenie Abela.

4. Zastosuj $\text{EM}^{(1)}$ i pokaż że dla $b > 1$ i dla pewnej funkcji $\zeta(x)$ zachodzi:

$$\sum_{i=1}^n i^{-b} = \frac{n^{1-b}}{1-b} + \zeta(b) + \mathcal{O}(n^{-b}) .$$

Funkcja $\zeta(x)$ nazywa się *funkcją dzeta Riemanna*, pokaż równość

$$\zeta(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^b} ,$$

dla $b > 1$.

5. Zastosuj $EM^{(2)}$ i pokaż dokładniejsze szacowanie liczb harmoniczych:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathcal{O}(n^{-2}) .$$

6. Wyprowadź dokładniejszy wzór Stirlinga stosując $EM^{(3)}$. Porównaj otrzymane szacowanie z nierównością (4) z wykładu 4 o permutacjach.

7. Oszacuj sumę podwójną

$$\sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{k \cdot j} .$$

8. Oszacuj liczby Catalana.

Wskazówka: wzór Stirlinga.

9. Pokaż, że wielomiany Bernoulliego $B_i(x)$ mają następujące własności:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad B_1(x) &= x - \frac{1}{2} , \\ \text{(b)} \quad B'_i(x) &= i B_{i-1}(x) , & \text{dla } i > 1 , \\ \text{(c)} \quad B_i(0) &= B_i(1) , & \text{dla } i > 1 . \end{aligned}$$

oraz że warunki (a)–(c) określają wielomiany $B_i(x)$ jednoznacznie, dla $i \geq 1$.

10. Dla jakich całkowitych $i \geq 1$ funkcja $B_i(\{x\})$ jest ciągła na prostej?

11. Liczby Bernoulliego B_n określamy przez ciąg równań

$$\sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \cdot B_j = [m=0] , \tag{13}$$

dla wszystkich całkowitych $m \geq 0$. Oblicz wartości liczb B_n dla $0 \leq n \leq 7$.

12. Zdefiniujmy wielomiany $\hat{B}_n(x)$ wzorem

$$\hat{B}_n(x) = \sum_k \binom{n}{k} \cdot B_k \cdot x^{n-k} .$$

Pokaż że $\hat{B}_n(x) = B_n(x)$ to wielomiany Bernoulliego, oraz że $B_n(0) = B_n$.

13. Przekształć lewą stronę równania (13) tak by była splotem dwumianowym. Stąd pokaż, że funkcja

$$\frac{z}{e^z - 1}$$

jest wykładniczą funkcją tworzącą ciąg $\langle B_n \rangle$.

14. Pokaż, że funkcja

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2}$$

jest parzysta, to znaczy jej wartość nie zależy od znaku argumentu. Wywnioskuj stąd, że $B_n = 0$ dla $n > 1$ nieparzystych.

15. Zastosujac wzór $EM^{(k+1)}$ do sumy $\sum_{i=0}^{n-1} i^k$ i wyprowadź wzór:

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^k = \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} B_j \cdot n^{k+1-j}.$$

16. Oblicz sumę

$$n^{-n} \cdot \sum_{k=0}^n k^k$$

z dokładnością $\mathcal{O}(n^{-3})$.

17. Znajdź początek asymptotycznego rozwinięcia sumy

$$(n!)^{-1} \sum_{k=1}^n k!$$

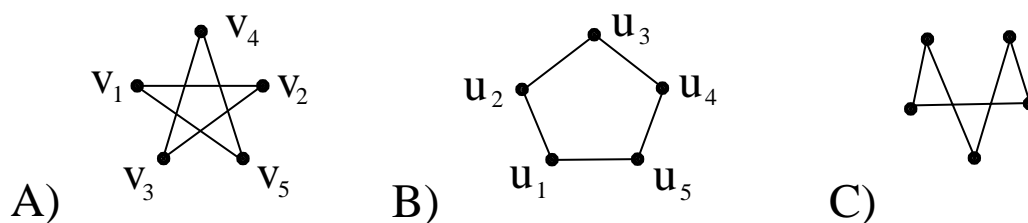
względem funkcji n^{-i} , dla $i \geq 0$, z dokładnością $\mathcal{O}(n^{-5})$.

18. Oszacuj następujące sumy, jako funkcje od n :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sum_{i=1}^n e^i \ln i ; & \text{b)} \quad \sum_{i \geq 0} \frac{\ln(n+i)}{e^i} ; \\ \text{c)} \quad \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i \ln i ; & \text{d)} \quad \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{\ln(n+i)} . \end{array}$$

Grafy: podstawowe pojęcia. Graf $G = \langle V, E \rangle$ składa się ze zbioru *wierzchołków* V i zbioru krawędzi E , gdzie *krawędź* to nieuporządkowana para (różnych) wierzchołków. W zasadzie będziemy rozważali grafy skończone, dla których $|V| < \infty$. Jeżeli $x, y \in V$ i $e = \{x, y\} \in E$ to x i y są *sąsiednie*; krawędź e jest *incydentna* z każdym z wierzchołków x i y ; wierzchołki x i y są *końcami* krawędzi e . Krawędzie incydentne ze wspólnym wierzchołkiem nazywamy incydentnymi ze sobą.

Nazwa graf bierze się z naturalnego sposobu wizualnego przedstawiania grafu: wierzchołki reprezentujemy przez punkty na płaszczyźnie a krawędzie przez łączące je krzywe ciągłe. Oto graf $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}, \{1, 5\}\}$ narysowany na trzy różne sposoby na rysunku 1:

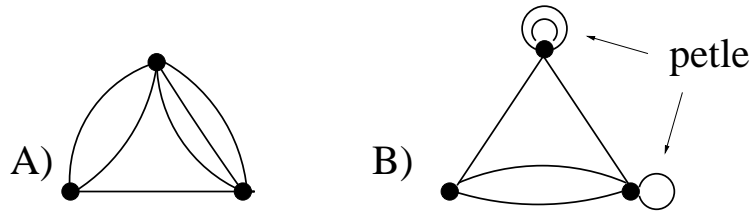


Rysunek 1: Różne graficzne przedstawienia tego samego grafu.

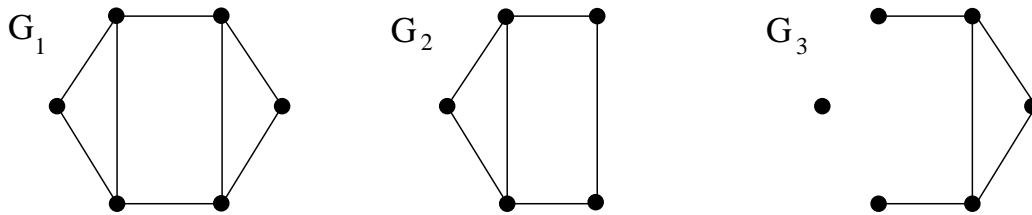
Dwa grafy są *izomorficzne* gdy istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość między wierzchołkami zachowująca relację sąsiedztwa. Na przykład grafy A i B na rysunku 1 są izomorficzne przy odpowiedniości $v_i \rightarrow u_i$. Jeżeli w grafie wierzchołki mają przyporządkowane *etykiety*, to znaczy (różne) nazwy lub numery, to graf nazywamy *etykietowanym*. Na rysunku 1, grafy A i B są etykietowane, graf C nie jest, ale wszystkie trzy są izomorficzne (jako grafy nieetykietowane). Dwa grafy G_1 i G_2 o n wierzchołkach etykietowane etykietami z tego samego zbioru etykiet są *izomorficzne jako grafy etykietowane* gdy odpowiedniość, która wierzchołkowi G_1 przyporządkowuje wierzchołek o tej samej etykietce w G_2 , jest izomorfizmem G_1 i G_2 jako grafów nieetykietowanych.

Nie ma terminologii grafowej uznawanej powszechnie. Dotyczy to nawet samego pojęcia grafu, dlatego często dodaje się do niego przymiotnik by uściślić znaczenie. Na przykład zdefiniowany przez nas grafy nazywa się często *grafami prostymi* dla odróżnienia od *multigrafów*, które mają *wielokrotne krawędzie*, to znaczy: każda krawędź ma *krotność*, czyli liczbę mówiącą, ile razy występuje w grafie. Dodatkowo multigrafy mogą mieć *pętle*, czyli krawędzie łączące pojedyncze wierzchołki ze sobą. Rysunek 2 przedstawia przykłady multigrafów, gdzie krotność krawędzi jest przedstawiona przez liczbę krzywych łączących daną parę wierzchołków ze sobą.

Graf $G_1 = \langle V_1, E_1 \rangle$ jest *podgrafem* grafu $G_2 = \langle V_2, E_2 \rangle$ gdy $V_1 \subseteq V_2$ oraz $E_1 \subseteq E_2$. Jeżeli $V_1 = V_2$ to G_1 jest *rozpinającym* podgrafem G_2 . Dla $S \subseteq V_1$, *podgraf G_1 indukowany przez S* to maksymalny podgraf G_1 o wierzchołkach w S . Na rysunku 3, grafy G_2 i G_3 są podgrafami G_1 , G_2 jest indukowany ale nie jest rozpinający, G_3 jest rozpinający ale nie jest indukowany.



Rysunek 2: Przykłady multigrafów.

Rysunek 3: Graf G_1 i jego podgrafy G_2 i G_3 .

Uwaga: słowo *maksymalny* lub *minimalny* jako własność zbiorów będzie dla nas zwykle oznaczało *maksymalny* (lub *minimalny*) w sensie zawierania. Na przykład w określeniu indukowanego podgrafu grafu G mamy na myśli maksymalność jego zbioru krawędzi jako podzbioru wszystkich krawędzi G . Wyjaśnijmy formalnie co oznacza taka maksymalność, aby uniknąć wątpliwości. Niech dany zbiór X i własność \mathcal{P} jego podzbiorów. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest maksymalnym zbiorem o danej własności \mathcal{P} , gdy A ma własność \mathcal{P} ale nie ma takiego zbioru $B \subseteq X$, że $A \subseteq B$, $A \neq B$, oraz B też ma własność \mathcal{P} . Zauważmy, że może być wiele takich maksymalnych zbiorów, nawet o różnej liczności. Jeżeli będziemy mieli na myśli *maksymalność lub minimalność zbioru w sensie liczności jego elementów*, to będzie to wyraźnie zaznaczone.

Czasem zmieniamy graf poprzez dodanie lub usunięcie wierzchołków lub krawędzi grafu. *Usunięcie wierzchołka v* z grafu pozostawia maksymalny podgraf bez v , w szczególności bez incydenentnych krawędzi. *Usunięcie krawędzi e* pozostawia maksymalny podgraf o tych samych wierzchołkach ale bez krawędzi e . Graf G z usuniętymi wierzchołkami lub krawędziami a_1, a_2, \dots, a_k oznaczamy przez $G - \{a_1, \dots, a_k\}$. W przypadku $k = 1$ opuszczamy nawias. Dodanie wierzchołka lub krawędzi grafu ma oczywiste znaczenie. Graf G z dodanymi wierzchołkami lub krawędziami a_1, a_2, \dots, a_k oznaczamy przez $G + \{a_1, \dots, a_k\}$, gdy $k = 1$ to opuszczamy nawias. Jest jeszcze operacja *utożsamienia końców krawędzi e* , co polega na zastąpieniu końców e jednym wierzchołkiem. Może to doprowadzić do powstania krawędzi wielokrotnych. Graf otrzymany przez utożsamienie końców e oznaczamy przez $G : e$; ten zapis nie oznacza, że e jest krawędzią G . Zauważmy, że graf $G : e$ ma o jeden mniej wierzchołek niż każdy z grafów $G - e$ oraz $G + e$.

Stopień wierzchołka v , oznaczany $\deg v$, to liczba krawędzi incydenentnych z v . Przez $\Delta(G)$ oznaczamy maksymalny stopień wierzchołka w G , a przez $\delta(G)$ stopień minimalny. Dla każdego grafu $G = \langle V, E \rangle$ zachodzi *lemat o uściskach dłoni*, czyli równość:

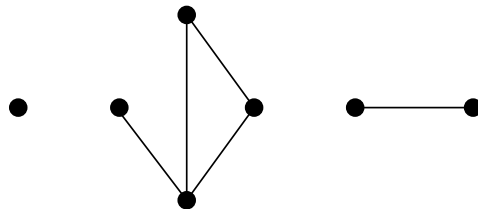
$$2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v .$$

Po prostu krawędź ma dwa końce i jest liczona podwójnie w sumie stopni. W szczególności liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta. Wierzchołek v jest *izolowany* gdy $\deg v = 0$, a jest *wiszący* lub *końcowy*, gdy $\deg v = 1$. Jeżeli wszystkie wierzchołki są tego samego stopnia r to graf jest r -*regularny* lub *regularny stopnia r* . Grafy 3-regularne nazywamy *kubicznymi*. *Uzupełnienie* \overline{G} grafu G ma ten sam zbiór wierzchołków, przy czym dwa z nich są sąsiednie w \overline{G} w.t.w. gdy nie są sąsiednie w G . Graf *zupełny* lub *klika* K_n ma n wierzchołków i wszystkie są nawzajem sąsiednie; graf $\overline{K_n}$ składa się tylko z wierzchołków izolowanych.

Marszrutą w grafie nazywamy ciąg wierzchołków $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ taki, że v_k i v_{k+1} są sąsiednie. Liczba n to *długość* tej marszruty. Marszruta jest *zamknięta* gdy zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku. *Droga* lub *ścieżka* to marszruta bez powtórzeń wierzchołków. *Odległość* między parą różnych wierzchołków v_1 i v_2 to długość najkrótszej marszruty łączącej v_1 z v_2 ; taka marszruta jest drogą, bowiem, jeżeli v byłby wierzchołkiem, który się w niej powtarza, to moglibyśmy wyciąć krawędzie marszruty między dwoma pierwszymi wystąpieniami v i dostać krótszą marszrutę łączącą v_1 z v_2 . Największa odległość między parą wierzchołków grafu G nazywamy jego *średnicą* i oznaczamy $\text{diam}(G)$.

Cykl to marszruta zamknięta $\langle v_0, v_1, \dots, v_n = v_0 \rangle$ o długości co najmniej 3, taka, że marszruta $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$, otrzymana przez opuszczenie ostatniego wierzchołka, jest drogą. Cykl długości n oznaczamy przez C_n .

Graf jest *spójny* gdy każda para wierzchołków jest połączona drogą. *Spójna składowa* G to maksymalny (w sensie zawierania) podgraf spójny G . Przykład grafu, który nie jest spójny przedstawia rysunek 4.



Rysunek 4: Graf niespójny o trzech składowych.

Graf $G = \langle V, E \rangle$ jest *dwudzielny* gdy istnieje podział $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ taki, że każda krawędź ma jeden z końców w V_1 a drugi w V_2 . Taki graf oznaczamy przez $\langle V_1 \cup V_2, E \rangle$. Jeżeli w grafie dwudzielnym *każda* para wierzchołków $v_1 \in V_1$ i $v_2 \in V_2$ jest krawędzią, to graf jest *pełny dwudzielny*, oznaczamy go przez $K_{n,m}$, gdzie $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$. Zachodzi następujące użyteczne kryterium: graf jest dwudzielny w.t.w. gdy każdy cykl jest parzystej długości. Oto uzasadnienie. Jeżeli G dwudzielny, to marszruta wychodząca z V_1 potrzebuje dwóch kolejnych krawędzi by wrócić do V_1 . Dla pokazania wynikania w drugą stronę, założmy, że każdy cykl ma parzystą długość. Możemy ograniczyć się do spójnej składowej o co najmniej dwóch wierzchołkach. Dla wierzchołka v , określamy podział wierzchołków w ten sposób, że do V_1 trafiają wierzchołki dla których najkrótsza droga z v ma parzystą długość (być może równą 0) a do V_2 gdy ma nieparzystą długość. Przypuśćmy, że istnieje krawędź $e = \{v_1, v_2\}$ taka, że $v_1, v_2 \in V_i$, dla

$i = 1$ lub $i = 2$. Weźmy najkrótsze drogi łączące v z v_1 i v_2 i dodajmy jeszcze e . Razem jest nieparzysta liczba krawędzi. Odrzućmy te, które występują w obu drogach. Nadal mamy nieparzystą liczbę krawędzi, ale teraz można je przedstawić jako sumę krawędziowo rozłącznych cykli, zatem jeden z tych cykli ma nieparzystą długość, co kończy dowód.

Wierzchołek, którego usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych nazywamy *rozcinającym*. Niech v wierzchołek spójnego grafu. Następujące warunki są równoważne:

1. Wierzchołek v jest rozcinający;
2. Istnieją wierzchołki u i w , różne od v , takie, że każda droga łącząca wierzchołek u z wierzchołkiem w przechodzi przez v .

Oto uzasadnienie:

(1) \Rightarrow (2) Gdyby nie istniały takie wierzchołki, to usunięcie v nie zwiększyłoby liczby składowych.

(2) \Rightarrow (1) Po usunięciu v , wierzchołki u i w znajdują się w różnych spójnych składowych.

Krawędź, której usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych nazywamy *mostem*. Niech e krawędź grafu spójnego. Następujące własności są równoważne:

1. Krawędź e jest mostem;
2. Krawędź e nie należy do żadnego cyklu;
3. Istnieją wierzchołki u i v takie, że e jest na każdej drodze łączącej u z v .

Oto uzasadnienie:

(1) \Rightarrow (2) Gdyby e należała do cyklu, to jej usunięcie nie rozspójni grafu, bowiem pozostała część cyklu może ją zastąpić w marszrutach.

(2) \Rightarrow (3) Niech $e = \{x, y\}$. Możemy położyć $u = x$ i $v = y$. Gdyby istniała droga łącząca x z y nie przechodząca przez e to razem z e tworzyłyby cykl.

(3) \Rightarrow (1) Usunięcie v powoduje, że u i v znajdują się w różnych składowych, co kończy dowód.

Zbiór krawędzi R nazywamy *rozcięciem*, gdy jego usunięcie zwiększa liczbę spójnych składowych grafu, ale żaden podzbiór właściwy R nie ma tej własności. Czyli most to jednoelementowe rozcięcie.

Zbiór wierzchołków X jest *niezależny* gdy żadne dwa elementy X nie są sąsiednie. Tę definicję można przenieść na krawędzie, ale w tym przypadku używamy innej terminologii: zbiór Y krawędzi nazywamy *skojarzeniem* gdy żadne dwa elementy Y nie są incydentne. Dla określenia niezależności na zbiorze krawędzi posługujemy się pojęciem matroidu.

Matroidem jest para $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ gdzie X to niepusty zbiór skończony, w którym jest wyróżniona rodzina \mathcal{S} podzbiorów *niezależnych*, która spełnia następujące warunki:

Własność dziedziczenia: podzbiór zbioru niezależnego jest niezależny;

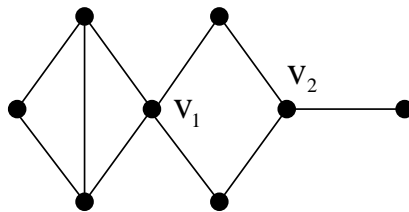
Własność wymiany: jeżeli A i B są zbiorami niezależnymi oraz $|B| > |A|$ to istnieje $e \in B - A$ taki, że $A \cup \{e\}$ jest niezależny.

Każda skończona przestrzeń liniowa jest matroidem, o ile niezależność liniową zbioru wektorów przyjmiemy jako niezależność w sensie matroidu. Prostym przykładem matroidu jest także skończony zbiór X i rodzina wszystkich podzbiorów X liczności nie większej niż k , gdzie k to ustalona liczba naturalna.

Możemy określić matroidy poprzez odpowiednie relacje niezależności na krawędziach grafu. Powiemy, że zbiór krawędzi jest *cyklowo niezależny* gdy nie zawiera cyklu, a *rozcięciowo niezależny* gdy nie zawiera rozcięcia. Okazuje się, że przy takich definicjach niezależności dostajemy matroidy, nazywane *matroidem cykli* i *matroidem rozcięć*, odpowiednio.

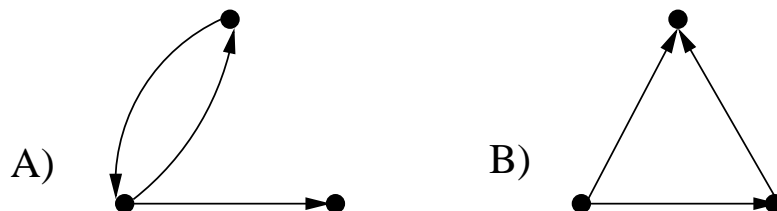
Maksymalny niezależny podzbiór matroidu nazywamy *bazą*. Z aksjomatów matroidu od razu wynika, że każde dwie bazy są równoliczne. *Rangą* ρA zbioru elementów A matroidu nazywamy licznosc maksymalnego niezależnego zbioru $B \subseteq A$. *Ranga matroidu* to ranga każdej jego bazy.

Graf G jest *niepodzielny* lub *2-spójny* gdy jest spójny, bez wierzchołków rozcinających, i ma co najmniej dwa wierzchołki. *Blok* grafu, lub *składowa 2-spójna*, to maksymalny, w sensie zawierania, podgraf niepodzielny. Na rysunku 5 widzimy graf, który ma trzy bloki, wierzchołki v_1 i v_2 należą każdy do dwóch bloków.



Rysunek 5: Przykład grafu, który ma trzy bloki.

Graf skierowany lub *digraf* $D = \langle V, A \rangle$ składa się, podobnie jak nieskierowany, z wierzchołków i krawędzi, tylko że krawędzie są *uporządkowanymi* parami różnych wierzchołków. Rysunek 6 pokazuje dwa digrafy, strzałki określają orientację krawędzi.



Rysunek 6: Grafy skierowane.

Krawędź $\langle u, v \rangle$ zapisujemy prościej jako uv lub $u \rightarrow v$. Graf skierowany bez symetrycznej pary krawędzi $u \rightarrow v$ i $v \rightarrow u$ to *graf zorientowany*. Na rysunku 6, digraf B jest grafem

zorientowanym, natomiast A nie jest. Krawędź uv wychodzi z u i wchodzi do v . *Stopień wejściowy* v to liczba krawędzi wchodzących do v , a *stopień wyjściowy* to liczba krawędzi wychodzących z v . Pojęcia marszruty i drogi przenoszą się bez zmian, tylko dodatkowo wymagamy zgodnej orientacji krawędzi w każdej marszrucie: $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots$. Podobnie dla cyklu, chociaż teraz najkrótszy cykl może mieć długość 2. Jeżeli istnieje droga z u do v to v jest osiągalny z u . Digraf D jest *silnie spójny* gdy każda para wierzchołków D jest wzajemnie osiągalna. Digraf D jest *słabo spójny* gdy graf prosty otrzymany z D przez zaniedbanie orientacji krawędzi (i usunięciu zbędnych kopii krawędzi) jest spójny. *Silne* i *słabe* składowe to maksymalne podgrafy odpowiednio spójne. Digraf jest *acykliczny* gdy nie ma (skierowanych) cykli. Dla digrafu D , rozważmy digraf D^* , którego wierzchołkami są silnie spójne składowe S_1, \dots, S_n , gdzie $S_i \rightarrow S_j$ gdy istnieje $u \rightarrow v$ taka, że $u \in S_i$ oraz $v \in S_j$. D^* jest oczywiście acykliczny. Następujące warunki są równoważne:

1. Digraf D jest acykliczny;
2. Digraf D^* jest izomorficzny z D ;
3. Każda marszruta w digrafie D jest drogą.

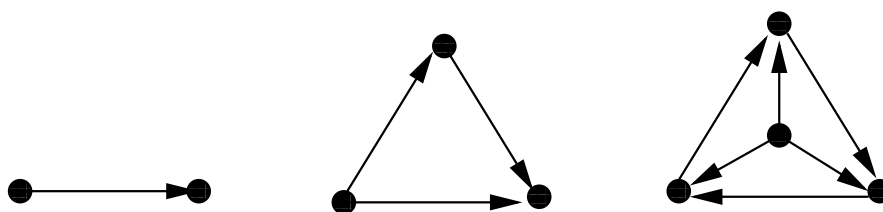
Oto uzasadnienie:

(1) \Rightarrow (2) Każda silnie spójna składowa składa się z dokładnie jednego wierzchołka.

(2) \Rightarrow (3) Gdyby istniała marszruta, która przechodzi wielokrotnie przez ten sam wierzchołek v , to do spójnej składowej v należałyby inne wierzchołki, zatem D^* miałby mniej wierzchołków niż D .

(3) \Rightarrow (1) D nie zawiera cykli, ponieważ cykl można obejść wielokrotnie marszrutą.

Turniej to zorientowana klika. Na rysunku 7 widzimy turnieje małych rozmiarów, dwa z nich są acykliczne, jeden zawiera cykl:



Rysunek 7: Turnieje.

Każdy turniej ma drogę rozpinającą, to znaczy taką, która przechodzi przez wszystkie wierzchołki. Pokażemy to przez indukcję po liczbie wierzchołków n . Dla $n = 2$ jasne. Załóżmy dla pewnego n , rozważmy turniej T o $n + 1$ wierzchołkach. Niech v_0 wierzchołek T . Turniej $T - v_0$ ma drogę rozpinającą $v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n$. Jeżeli któraś z par $v_0 \rightarrow v_1$ lub $v_n \rightarrow v_0$ jest krawędzią w T , to dodajemy ją i dostajemy dłuższą drogę. W przeciwnym przypadku pary $v_1 \rightarrow v_0$ oraz $v_0 \rightarrow v_n$ są krawędziami w T . Niech i

najmniejsza liczba taka, że $v_0 \rightarrow v_i$ to krawędź. Wtedy droga

$$v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_0 \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \dots$$

jest tą, której szukamy.

Zadania

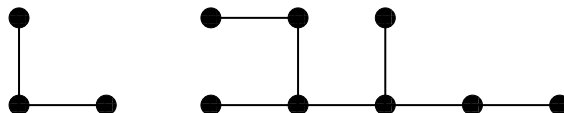
1. Ile jest etykietowanych grafów prostych o n wierzchołkach? Grafy uważamy za różne, gdy nie są izomorficzne jako grafy etykietowane.
2. Pokaż następujące *twierdzenie Ramseya*: graf nieskończony zawiera bądź nieskończoną klikę bądź nieskończony niezależny zbiór wierzchołków.
3. Niech $G = \langle V, E \rangle$ graf prosty. Pokaż, że G zawiera drogę o długości równej co najmniej $2|E|/|V|$.
4. Pokaż, że grafy G i \overline{G} nie mogą być jednocześnie niespójne, gdzie G jest grafem prostym.
5. Udowodnij, że następujące własności są równoważne 2-spójności, dla grafu spójnego o co najmniej trzech wierzchołkach:
(a) każde dwa wierzchołki leżą na cyklu; (b) każde dwie krawędzie leżą na cyklu.
6. Czy istnieje dwudzielny, 2-spójny graf kubiczny o 10 wierzchołkach?
7. Pokaż, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n istnieje graf prosty dwudzielny o $3n$ wierzchołkach, w którym co najmniej $2n$ wierzchołków ma różne stopnie. Czy istnieje graf prosty dwudzielny o $3n$ wierzchołkach, w którym co najmniej $2n+1$ wierzchołków ma różne stopnie?
8. Podział $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ liczby $2m$ nazywamy *grafowym* gdy istnieje graf o n wierzchołkach i m krawędziach taki, że i -ty wierzchołek ma stopień d_i . Pokaż, że podział $d_1 + \dots + d_n = 2m$, gdzie $n-1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$, jest grafowy w.t.w. gdy podział $(d_2 - 1) + (d_3 - 1) + \dots + (d_{d_1+1} - 1) + d_{d_1+2} + \dots + d_n$ jest grafowy.
9. Pokaż, że istnieje graf, w którym osiem wierzchołków ma stopień 6, jeden stopień 5, i pięć stopień 3. Czy istnieje taki graf, który jest dodatkowo dwudzielny?
10. Podaj przykład dwóch grafów spójnych i bez cykli które nie są izomorficzne, ale mają taki sam podział podwojonej liczby krawędzi na stopnie wierzchołków.
11. Pokaż, że jeżeli w grafie G istnieje cykl to długość najkrótszego cyklu w G jest nie większa niż $2 \cdot \text{diam}(G) + 1$.
12. *Obwodem* grafu prostego G nazywamy długość najdłuższego cyklu, to znaczy liczbę krawędzi w takim cyklu. Pokaż, że jeżeli $G = \langle V, E \rangle$ jest spójny, i ma obwód $k < |V|$ to G zawiera drogę długości k .

13. Niech G graf prosty. Określamy *krawędziową spójność grafu* G , oznaczaną $ks(G)$, jako liczbę równą minimalnej liczbie krawędzi G , których usunięcie rozspójni G . Podobnie, określamy *wierzchołkową spójność grafu* G , oznaczaną $ws(G)$, jako liczbę równą minimalnej liczbie wierzchołków G których usunięcie rozspójni G . Pokaż, że zachodzą nierówności: $ws(G) \leq ks(G) \leq \delta(G)$. Podaj przykład grafu G , dla którego wszystkie te nierówności są ostre.
14. Niech $G = \langle V, E \rangle$ graf prosty. Pokaż nierówność $ws(G) \leq 2 \cdot |E|/|V|$.
15. Niech G graf prosty. Określamy *graf krawędzi* $L(G)$ jako graf mający krawędzie G jako swoje wierzchołki, które są sąsiednie, gdy w G są incydentne. Pokaż, że jeżeli G ma n wierzchołków v_1, \dots, v_n i m krawędzi, to liczba krawędzi grafu $L(G)$ jest równa $-m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\deg v_i)^2$.
16. Pokaż, że G i $L(G)$ są izomorficzne w.t.w. gdy G jest regularny stopnia 2.
Wskazówka: Pokaż, że jeżeli G i $L(G)$ są izomorficzne, to stopień każdego wierzchołka jest co najmniej 2 i skorzystaj z zadania 15.
17. Graf skierowany jest *jednostronnie spójny* gdy, dla każdych dwóch wierzchołków, jeden jest osiągalny z drugiego. Czy każdy taki digraf ma rozpinającą marszrutę?
18. Graf prosty jest *orientowalny* gdy można tak zorientować jego krawędzie, że otrzymany digraf jest silnie spójny. Pokaż, że graf spójny jest orientowalny w.t.w. gdy każda krawędź należy do cyklu.
19. Matroidy można określić przez podanie zbioru elementów X i wyróżnienie rodziny \mathcal{B} podzbiorów X , które są bazami. Pokaż, że taka metoda działa poprawnie w.t.w. gdy \mathcal{B} ma następującą własność: dla każdych $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, jeżeli $a \in A_1 - A_2$ to istnieje $b \in A_2 - A_1$ taki, że $A_1 \cup \{b\} - \{a\}$ jest bazą.
20. Pokaż, że funkcja rangi ρ w matroidzie ma następującą własność:

$$\rho(A \cap B) + \rho(A \cup B) \leq \rho A + \rho B .$$

21. Pokaż, że w każdym turnieju istnieje wierzchołek v taki, że dla każdego wierzchołka w istnieje droga z v do w długości co najwyżej 2.

Drzewa i cykle. Graf prosty bez cykli nazywamy *lasem*, spójny las to *drzewo*. Przykład lasu pokazuje rysunek 1.



Rysunek 1: Dwa drzewa, czyli już las.

Jeżeli G jest grafem prostym o n wierzchołkach i m krawędziach, to następujące warunki są równoważne:

1. G jest drzewem.
2. Każde dwa wierzchołki G są połączone dokładnie jedną drogą.
3. G jest lasem i dodanie nowej krawędzi tworzy dokładnie jeden cykl.
4. G jest spójny i $m = n - 1$.
5. G jest lasem i $m = n - 1$.

Pokażemy to przez cykliczny ciąg wyników.

(1) \Rightarrow (2) Co najmniej jedna droga istnieje ze spójności. Gdyby istniały dwie drogi to istniałby też cykl.

(2) \Rightarrow (3) Nie istnieje cykl, bowiem gdyby $e = \{x, y\}$ krawędź w cyklu, to z x do y można przejść bądź e bądź pozostałą częścią cyklu. Jeżeli do G dodamy krawędź, na przykład $\{t, u\}$, to powstanie cykl, bo t i u już były połączone drogą w G . Gdyby powstały dwa cykle to istniałyby dwie drogi łączące t i u .

(3) \Rightarrow (4) G jest spójny, bowiem w przeciwnym przypadku można by do niego dodać krawędź bez utworzenia cyklu. Dodajmy jedną krawędź: powstanie graf G' z jednym cyklem. Wierzchołków i krawędzi w cyklu jest tyle samo. Każdy wierzchołek x nie leżący na cyklu jest połączony dokładnie jedną drogą z najbliższym wierzchołkiem cyklu. Niech następnym wierzchołkiem na tej drodze będzie x' . Przyporządkujmy wierzchołkowi x krawędź $\{x, x'\}$. To przyporządkowanie jest wzajemnie jednoznaczne. Stąd mamy, że poza cyklem też jest dokładnie tyle wierzchołków co krawędzi. Zatem $m = n - 1$.

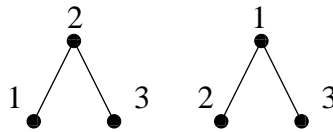
(4) \Rightarrow (5) Graf spójny mający cykl ma co najmniej n krawędzi, podobnie jak w wyniku (3) \Rightarrow (4).

(5) \Rightarrow (1) Przypuśćmy, że G jest lasem o $k > 1$ składowych drzewach. Mają one odpowiednio n_1, \dots, n_k wierzchołków i $n_1 - 1, \dots, n_k - 1$ krawędzi. Razem w G jest $n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 \leq n - 2$ krawędzi, co kończy dowód.

Omówimy teraz *drzewa ukorzenione*. Są to drzewa z wyróżnionym jednym wierzchołkiem nazywanym *korzeniem*. Drzewo ukorzenione ma naturalną orientację krawędzi.

Dla każdej krawędzi drzewa $\{u, v\}$, albo u leży na jedynej drodze z korzenia do v albo jest odwrotnie; w pierwszym przypadku krawędź orientujemy od u do v , a w drugim od v do u . Wierzchołki z których nie wychodzą krawędzie nazywane są *liśćmi*. Krawędzie wychodzące z wierzchołka wskazują na jego *dzieci*, których jest on *rodzicem*. Jeżeli każdy rodzic ma dokładnie dwoje dzieci to drzewo nazywa się *binarnym*.

Zliczanie drzew etykietowanych. Niech wierzchołki drzewa o n wierzchołkach będą etykietowane liczbami $1, \dots, n$. Dwa takie drzewa etykietowane są *różne* gdy nie są izomorficzne jako grafy etykietowane, to znaczy gdy w jednym pewne dwie liczby i, j są etykietami sąsiednich wierzchołków a w drugim nie – patrz rysunek 2.



Rysunek 2: Dwa różne drzewa etykietowane.

Oznaczmy przez $T(n; d_1, \dots, d_n)$ liczbę takich drzew, w których d_1, \dots, d_n jest ciągiem stopni wierzchołków $1, 2, \dots, n$, odpowiednio. Pokażemy równość

$$T(n; d_1, \dots, d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_n-1}, \quad (1)$$

gdzie *współczynniki wielomianowe* $\binom{a}{b_1, \dots, b_i}$ są określone tożsamością

$$(x_1 + \dots + x_i)^n = \sum_{k_1, \dots, k_i} \binom{n}{k_1, \dots, k_i} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_i^{k_i}.$$

Dowód równości (1) przez indukcję. Dla $n = 3$ są trzy drzewa o stopniach odpowiednio $\langle 2, 1, 1 \rangle$, $\langle 1, 2, 1 \rangle$, $\langle 1, 1, 2 \rangle$, co jest w zgodzie z formułą $(x_1 + x_2 + x_3)^{(3-2)} = x_1 + x_2 + x_3$.

Krok indukcyjny wynika stąd, że lewa i prawa strona (1) spełniają zależność rekurencyjną o takim samym kształcie. Mianowicie, po pierwsze ma miejsce

$$T(n; d_1, \dots, d_{n-1}, 1) = \sum_{i=1}^{n-1} T(n-1; d_1, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1}). \quad (2)$$

Równość (2) wynika stąd, że jeżeli wierzchołek n jest wiszący to może być sąsiedni z każdym z pozostałych wierzchołków, a usunięcie n obniża o 1 stopień sąsiada. A po drugie

$$\binom{n}{b_1, \dots, b_j} = \sum_{k=1}^j \binom{n-1}{b_1, \dots, b_k-1, \dots, b_j}. \quad (3)$$

Równość (3) wynika z formuły $(x_1 + \dots + x_j)^n = (x_1 + \dots + x_j)^{n-1} \cdot (x_1 + \dots + x_j)$.

W drzewie istnieje zawsze wierzchołek wiszący, pokażemy krok indukcyjny dla przypadku gdy jest nim n :

$$\begin{aligned}
T(n; d_1, \dots, d_{n-1}, 1) &= \sum_{i=1}^{n-1} T(n-1; d_1, \dots, d_i-1, \dots, d_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-3}{d_1-1, \dots, d_i-2, \dots, d_{n-1}-1} = \binom{n-2}{d_1-1, \dots, d_{n-1}-1, 0}.
\end{aligned}$$

Podstawiając $x_i = 1$ do wyrażenia $(x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$ dostajemy n^{n-2} jako liczbę wszystkich możliwych drzew etykietowanych o n wierzchołkach; jest to *twierdzenie Cayleya*.

Cykle i rozcięcia. Niech graf prosty G ma n wierzchołków i m krawędzi e_1, e_2, \dots, e_m . Rozważamy formalne kombinacje liniowe krawędzi grafu, to znaczy sumy postaci $\sum_i a_i \cdot e_i$ gdzie a_i są elementami jakiegoś ciała F . Zbiór takich kombinacji liniowych tworzy przestrzeń liniową rozmiaru m , gdy traktujemy je jak ciągi m -elementowe elementów F , z działaniami po współrzędnych. Niech ciałem będzie $\text{GF}(2)$, które składa się z 0 i 1, a działania są modulo 2. Wtedy otrzymaną przestrzeń liniową nazywamy *przestrzenią krawędzi*. Bazą jest zbiór kombinacji, w których jeden współczynnik jest równy 1 a pozostałe są zerami. Dowolny zbiór $H \subseteq E$ możemy utożsamiać z kombinacją $H^* = \sum_i a_i \cdot e_i$, gdzie $a_i = 1$ w.t.w. gdy $e_i \in H$. Słowo *suma* będzie oznaczało do końca wykładu sumę wektorową w przestrzeni krawędzi, można ją interpretować jako graf rozpinający G o dokładnie tych krawędziach, przy których stoi 1 w wyniku sumy. Są dwie ciekawe podprzestrzenie: jedna jest generowana przez elementy C^* gdzie C cykl w G , a druga przez elementy R^* dla R będących rozcięciami. Te podprzestrzenie nazywamy, odpowiednio, *przestrzenią cykli* oraz *przestrzenią rozcięć*. Elementy przestrzeni cykli nazywamy *pseudocyklami*, a przestrzeni rozcięć – *pseudorozcięciami*.

Pokażemy, że pseudocykle to podgrafy o wszystkich stopniach parzystych. Po pierwsze, suma cykli to graf o wszystkich stopniach parzystych: przejdźmy te cykle kolejno, jeżeli cykl wchodzi do wierzchołka to i z niego wychodzi, jeżeli krawędź wchodzi lub wychodzi drugi raz to znika. W drugą stronę: zaczynamy obchodzić graf w wierzchołku o stopniu niezerowym, idąc kolejnymi krawędziami marszruty. Jeżeli dochodzimy do nowego wierzchołka to możemy z niego wyjść inną krawędzią, co wynika z parzystości stopni. Kiedyś wrócimy tam gdzie już byliśmy, to da nam cykl; po jego usunięciu postępujemy rekurencyjnie.

Zamkniętą marszrutę przechodzącą przez każdą krawędź grafu prostego dokładnie jeden raz nazywamy *cyklem Eulera*. Graf jest *eulerowski*, gdy istnieje dla niego taka marszruta. Oto proste kryterium: Jeżeli G jest prostym spójnym grafem, to jest on eulerowski w.t.w. gdy jest pseudocyklem, czyli ma każdy stopień parzysty. To, że graf eulerowski jest pseudocyklem wynika bezpośrednio z poprzednich rozważań. Załóżmy, że G spójny i ma parzyste stopnie wierzchołków. Jeżeli G jest cyklem, to kończy dowód, w przeciwnym przypadku jest sumą cykli. Usuńmy z G krawędzie dowolnego cyklu C . Pozostały graf rozpada się na spójne składowe G_1, \dots, G_k , każda z nich jest pseudocyklem o mniejszej liczbie krawędzi, więc zawiera cykl Eulera z założenia indukcyjnego. Zaczniemy obchodzić C , ale za każdym razem jak docieramy po raz pierwszy do wierzchołka nowej składowej G_i to zatrzymujemy się na C i obchodzimy cykl Eulera G_i , potem idziemy dalej poprzez C . To razem daje obejście wszystkich krawędzi G i powrót do punktu wyjścia.

Wróćmy do przestrzeni krawędzi i jej podprzestrzeni dla grafu $G = \langle V, E \rangle$. Pokazaliśmy

charakteryzację pseudocykli, oto odpowiednia równoważna własność dla pseudorozcięć. Niech $Z(W)$, dla $W \subseteq V$, oznacza zbiór krawędzi o jednym końcu w W a drugim w $V - W$. Pokażemy, że pseudorozcięcia to dokładnie zbiory postaci $Z(W)$. Niech R będzie rozcięciem w grafie spójnym G , po jego usunięciu mamy dwie spójne składowe indukowane przez zbiory wierzchołków W i $V - W$. R składa się z wszystkich krawędzi łączących W i $V - W$, trzeba je *wszystkie* usunąć by rozspójnić graf: czyli $R = Z(W)$. Gdy G nie jest spójny, te fakty zachodzą dla pewnej składowej. Niech $E(x)$, dla $x \in V$, będzie zbiorem krawędzi incydentnych z x . Zachodzi

$$Z^*(W) = \sum_{x \in W} E^*(x) \quad (4)$$

bowiem krawędź jest liczona dokładnie raz z prawej strony tylko wtedy gdy dokładnie jeden z końców jest w W . Korzystając z (4) dostajemy, że pseudorozcięcie jest postaci

$$Z^*(W_1) + Z^*(W_2) + \dots = \sum_{x \in \bigcup W_i} E^*(x) = Z^*(U)$$

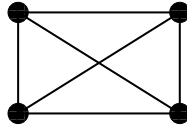
gdzie U składa się z wierzchołków należących do nieparzystej liczby zbiorów W_i . To kończy dowód charakteryzacji pseudorozcięć.

Niech T drzewo rozpinające G . *Cięciwą* T jest krawędź z G nie należąca do T . Dodanie cięciwy do T tworzy dokładnie jeden cykl, zbiór tych cykli oznaczamy $C(T)$. Elementy $C(T)$ są liniowo niezależne bo każda cięciwa należy tylko do jednego z nich. Każdy pseudocykl C jest liniową kombinacją cykli z $C(T)$: wystarczy wziąć sumę cykli wyznaczonych przez cięciwy leżące w C . Rzeczywiście, przedstawmy C jako $C = (T \cap C) \cup (-T \cap C)$. Zbiór $-T \cap C$ jest niepusty bowiem T nie może zawierać cyklu. Jeżeli jest to zbiór o jednym elemencie e to końce e są połączone jedyną drogą D w T , i to razem jednoznacznie określa $C = D \cup \{e\}$. Jeżeli $-T \cap C$ zawiera więcej niż jedną krawędź, niech e jedna z nich. Wtedy $C_1 = C \cup D - \{e\}$ oraz $C_2 = D \cup \{e\}$ są pseudocyklami, zachodzi równość $C^* = C_1^* + C_2^*$, oraz do C_1 można zastosować rozumowanie indukcyjne. Stąd dostajemy, że $C(T)$ jest bazą przestrzeni cykli, której wymiar jest równy $m - (n - 1) = m - n + 1$, bo tyle jest cięciw.

W podobny sposób z drzewa rozpinającego T można otrzymać bazę przestrzeni rozcięć. Niech mianowicie $G - T$ będzie grafem otrzymanym z G przez usunięcie krawędzi T . Ten graf nie zawiera rozcięć, bo jego uzupełnienie jest spójne, ale po dodaniu dowolnej krawędzi e z T zawiera dokładnie jedno rozcięcie. Rzeczywiście, istnienie rozcięcia jasne, bowiem usunięcie krawędzi z $G - T$ oraz e rozspójnia graf. Gdyby były dwa, to każdy zawierałby e . Wystarczy pokazać, że jeżeli każde z dwóch różnych pseudorozcięć A i B zawiera krawędź e to $A \cup B - \{e\}$ zawiera pseudorozcięcie. Niech $A = Z(W_1)$, $B = Z(W_2)$, $e = \{v_1, v_2\}$; możemy założyć, że $v_1 \in W_1 \cap W_2$, wtedy $v_2 \notin W_1 \cup W_2$. Niech $W_1 \oplus W_2$ to wierzchołki należące tylko do jednego spośród W_1 i W_2 ; jest to zbiór niepusty bowiem $W_1 \neq W_2$. Zauważmy, że $Z(W_1 \oplus W_2) \subseteq A \cup B$ oraz $e \notin Z(W_1 \oplus W_2)$. To razem daje jednoznaczność.

Niech $R(T)$ będzie zbiorem tych rozcięć. Stanowią one bazę przestrzeni rozcięć. Niezależność elementów $R(T)$ pokazujemy tak samo jak dla $C(T)$. Dla dowolnego rozcięcia

R grafu G , można je otrzymać jako sumę rozcięć z $R(T)$ wyznaczonych przez krawędzie T należące do $R(T)$ (ćwiczenie). Stąd rozmiar przestrzeni rozcięć jest równy $n - 1$. Zauważmy, że suma rozmiarów przestrzeni cykli i rozcięć jest równa rozmiarowi całej przestrzeni krawędzi, która jednak nie musi być ich sumą prostą, bowiem może istnieć cykl będący rozcięciem, na przykład jak na rysunku 3, gdzie krawędzie pionowe i ukośne są jednocześnie cyklem i rozcięciem.



Rysunek 3: Graf zawierający cykl będący jednocześnie rozcięciem.

Niech $G = \langle V, E \rangle$ graf prosty. Rozważmy parę $\langle E, \mathcal{S} \rangle$, gdzie \mathcal{S} to podzbiory krawędzi E , które nie zawierają cyklu. Tak określiliśmy matroid cykli, pokażemy, że jest on rzeczywiście matroidem. Trzeba sprawdzić dwa warunki. Własność dziedziczenia jest jasna: jeżeli $X \subseteq Y \in \mathcal{S}$ to $X \in \mathcal{S}$. Drugi warunek to własność wymiany: jeżeli X i Y są w \mathcal{S} oraz $|X| < |Y|$ to istnieje $y \in Y - X$ taki, że $X \cup \{y\} \in \mathcal{S}$. W celu jego sprawdzenia rozważmy grafy G_X o krawędziach X i wierzchołkach będących ich końcami, i podobnie G_Y o krawędziach Y . Są to lasy. Jeżeli w G_Y istnieje krawędź, która łączy dwie różne składowe drzewa G_X to możemy ją dodać do G_X i nadal dostaniemy las. W przeciwnym przypadku każde drzewo T z G_Y łączy wierzchołki jakiegoś drzewa T' z G_X , a zatem T ma nie więcej krawędzi niż T' . Jeżeli dla tego T' jest więcej takich drzew, to są rozłączne. Stąd dostajemy, że $|Y| \leq |X|$ – sprzeczność.

Cyklem matroidu nazywamy zbiór zależny minimalny w sensie zawierania. Biorąc rozcięcia grafu G jako cykle dostajemy jego *matroid rozcięć*.

Sieci elektryczne. Niech G nieskierowany spójny multigraf. Krawędzie interpretujemy jako przewodniki elektryczne o pewnym oporze: r_{xy} oznacza opór krawędzi $\{x, y\}$. Wyróżniamy dwa wierzchołki: *źródło* s i *ujście* t , które jako jedyne mają połączenia zewnętrzne. Przykładamy różnicę napięcia między źródłem a ujściem, co powoduje, że przez sieć płynie prąd. Używamy następujących zmiennych: a_{xy} oznacza wielkość prądu (natężenie) płynące krawędzią $\{x, y\}$ od x do y ; v_{xy} oznacza spadek napięcia na krawędzi $\{x, y\}$ od x do y . Jest dodatkowa zmienna $a_{\infty s} = a_{t\infty}$ oznaczająca wielkość prądu wpływającego do s i wypływającego w t . Natężenia i różnice napięcia są skierowane, natomiast opory nie, to znaczy $a_{xy} = -a_{yx}$, $v_{xy} = -v_{yx}$, $r_{xy} = r_{yx}$. Rozkład spadków napięcia i natężeń na krawędziach wyznaczony jest jednoznacznie przez następujące prawa:

Prawo Ohma: $a_{xy} \cdot r_{xy} = v_{xy}$;

Prawo Kirchhoffa o napięciach: suma spadków napięcia wokół cyklu (skierowanego) jest równa zero.

Prawo Kirchhoffa o natężeniach: z każdego wierzchołka wypływa tyle prądu co do niego wpływa.

Jeżeli różnica napięć między s i t jest równa V_{st} to do s wpływa a z t wypływa pewien prąd A_{st} . *Efektywnym oporem* sieci między parą wierzchołków s i t nazywamy wielkość $R_{st} = V_{st}/A_{st}$, poprawność tej definicji pozostawiamy jako ćwiczenie.

Dla sieci elektrycznej G z oporami na krawędziach, o n wierzchołkach i m krawędziach, możemy ułożyć układ równań liniowych wiążących wprowadzone $2m + 1$ zmienne zgodnie z powyższymi prawami. Okazuje się, że w układaniu układu równań i w opisie jego rozwiązania główną rolę grają drzewa rozpinające G . Prawo Ohma daje m równań. Wybieramy drzewo rozpinające G , które określa bazę cykli, dla każdego z nich bierzemy odpowiednie równanie z prawa Kirchhoffa o napięciach, razem $m - n + 1$ równań. Dla każdego wierzchołka mamy równanie z prawa Kirchhoffa o natężeniach, czyli razem n równań, ale zauważmy że jedno z tych równań wynika z pozostałych. Dodatkowo wybieramy dowolną drogę skierowaną od źródła s do ujścia t i dodajemy równanie określające sumę spadków napięcia po krawędziach równą V_{st} . Razem mamy $2m + 1$ zmiennych i $2m + 1$ równań.

Ten układ ma dokładnie jedno rozwiązanie, oto szkic uzasadnienia: Określmy $A_{st} = 1$, jest to dozwolone z liniowości praw Ohma i Kirchhoffa. Rozważymy tylko najprostszy przypadek, gdy opory na wszystkich krawędziach są równe 1. Niech W to liczba wszystkich drzew rozpinających. Niech $D(x, y)$ oznacza liczbę takich drzew rozpinających, w których jedyna droga z s do t przechodzi krawędzią $\{x, y\}$, od x do y w tej kolejności. Okazuje się, że rozwiązanie ma postać

$$a_{xy} = \frac{D(x, y) - D(y, x)}{W}.$$

Wystarczy sprawdzić (ćwiczenie), że przy tym określeniu: z s wypływa a do t wpływa prąd o natężeniu 1, a do pozostałych wierzchołków tyle samo wpływa co wypływa, oraz suma spadków napięcia $v_{xy} = a_{xy}$ po cyklach jest zerowa. Pokażemy jednoznaczność rozwiązania. Przypuśćmy że istnieją dwa rozwiązania. Ich różnica jest niezerowym rozwiązaniem przy zerowej różnicy napięcia między s i t , otrzymujemy ją przykładając pewne napięcia V i $-V$ między s i t . Z niezerowości wynika istnienie prądu $a_{xy} > 0$ dla pewnej krawędzi $\{x, y\}$. Z prawa Kirchhoffa o natężeniach ten prąd skądś przychodzi i dokądś odpływa. Nie mogą to być źródło ani ujście bowiem między nimi jest zerowy spadek napięcia, zatem są to inne wierzchołki w sieci. Przedłużając krawędzie zbudujemy drogę dla prądu, która kiedyś wróci do wierzchołka gdzie już była: jest to cykl, po którym dodatni prąd płynie w jedną stronę, co jest sprzeczne z prawem Kirchhoffa o napięciach.

Zadania

1. Pokaż, że drzewo o co najmniej dwóch wierzchołkach ma co najmniej dwa wierzchołki wiszące.
2. *Ekscentryczność* wierzchołka w grafie spójnym G to maksymalna odległość od wierzchołka G . Wierzchołek G jest *centralny* gdy ma minimalną ekscentryczność. Pokaż, że drzewo ma jeden lub dwa sąsiednie wierzchołki centralne.
3. Pokaż, że liczba drzew binarnych o n wierzchołkach jest równa n -tej liczbie Catalana.

4. Określmy *drzewo bloków* spójnego grafu prostego G następująco: wierzchołkami są bloki i wierzchołki rozcinające G , wierzchołki rozcinające połączone krawędziami z blokami, do których należą. Pokaż, że drzewo bloków jest drzewem.
5. Niech $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ będzie podziałem, dla $n > 1$. Pokaż, jak zbudować takie drzewo T o n wierzchołkach, że liczba d_i jest stopniem odpowiedniego wierzchołka v_i w T .
6. Pokaż następujący wzór na współczynniki wielomianowe:

$$\binom{n}{a, b, c, \dots} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c! \cdot \dots}.$$

7. Oto zarys *dowodu Prüfera* twierdzenia Caley'a. Dane drzewo etykietowane $T = T_1$ o wierzchołkach z numerami od 1 do n . Niech x_1 wierzchołek wiszący o najmniejszym numerze w T_1 , sąsiedni z y_1 . Drzewo T_2 powstaje z T_1 przez usunięcie wierzchołka x_1 . Podobnie powstają drzewa T_i dla $3 \leq i \leq n - 1$ i wierzchołki y_i dla $2 \leq i \leq n - 2$. Ciąg $\langle y_1, \dots, y_{n-2} \rangle$ nazwiemy *kodeksem* drzewa T . Pokaż odpowiedniość między kodami i drzewami, i jak stąd wynika wzór Caley'a.
8. Znajdź prosty warunek w terminach stopni wierzchołków grafu, który jest równoważny, dla grafów prostych spójnych, temu, że istnieje marszruta przechodząca przez każdą krawędź i dokładnie jeden raz, bez wymagania by marszruta była zamknięta.
9. Zamknięta marszruta w digrafie jest *eulerowska*, gdy przechodzi przez każdą krawędź grafu i to dokładnie jeden raz. Digraf jest *eulerowski*, gdy ma taką marszrutę. Pokaż, że dla słabo spójnych digrafów własność bycia eulerowskim jest równoważna temu, że każdy wierzchołek ma równe stopnie wejściowy i wyjściowy.
10. Pokaż, że silnie spójny turniej o n wierzchołkach ma cykle skierowane długości i dla każdej liczby $3 \leq i \leq n$.
11. Niech T drzewo rozpinające G i R rozcięcie w G . Pokaż, że R jest kombinacją liniową nad $\text{GF}(2)$ rozcięć z $R(T)$, a dokładniej tych wyznaczonych przez krawędzie z $T \cap R$.
12. Matroid można określić jako parę $\langle X, \mathcal{C} \rangle$, gdzie elementy \mathcal{C} to podzbiory X które są cyklami. Pokaż, że taka metoda działa poprawnie w.t.w. gdy $\langle X, \mathcal{C} \rangle$ ma następującą własność: Jeżeli $x \in C_1 \cup C_2$, dla $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, to $C_1 \cup C_2 - \{x\}$ zawiera cykl.
13. Pokaż, że matroid rozcięć jest rzeczywiście matroidem.
Wskazówka: Patrz zadanie 12.
14. Co byłoby niewłaściwego w takiej definicji “matroidu rozcięć” grafu G w której rozcięcia G to bazy?
15. Dany jest graf spójny o n wierzchołkach i m krawędziach. Jakie są rangi jego matroidów cykli i rozcięć?

16. Znajdź opór efektywny dla wszystkich par wierzchołków w sieci mającej krawędzie jak w sześciacie, opór każdej krawędzi jednostkowy.
17. Pokaż, że w sieci elektrycznej można tak wierzchołkom x przyporządkować napięcia v_x , że $v_{xy} = v_x - v_y$.
18. Rozważmy ukorzenione drzewo o n wierzchołkach. Przypuśćmy, że każdy wierzchołek ma co najwyżej dwoje dzieci. Z korzenia wysyłane są kolejno *pociski*, które posuwają się zgodnie z orientacją krawędzi, to znaczy w kierunku liści. Kolejny pocisk jest wysyłany dopiero wtedy gdy poprzedni zniknął. Jeżeli wierzchołek mający dwoje dzieci otrzyma pocisk, to kieruje go naprzemiennie do różnych spośród swoich dzieci. Jeżeli wierzchołek v różny od korzenia ma mniej niż dwoje dzieci i otrzyma pocisk, to jest usuwany z grafu, dzieci v (o ile istnieją) stają się dziećmi rodzica v , a pocisk znika. W pewnym momencie korzeń nie ma dzieci i wtedy sam ginie przy próbie wysłania kolejnego pocisku. Każdy pocisk zabija pewien wierzchołek, najpóźniej wtedy gdy osiągnie liść. Pokaż, że suma długości dróg przebytych przez wszystkie pociski, które korzeń zdoła wystrzelić, jest $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$.
19. Graf jest *3-drzewem*, gdy jest drzewem, którego każdy wierzchołek ma stopień równy 1 lub 3. Jeśli G jest 3-drzewem, to $S(G, x)$ oznacza sumę odległości w G od wierzchołka wiszącego $x \in G$ do wszystkich innych wierzchołków wiszących w G . Niech $v(G)$ to zbiór wierzchołków wiszących G , oraz

$$S(G) = \max_{x \in v(G)} S(G, x) .$$

Pokaż, że istnieje ciąg 3-drzew $\langle A_n \rangle$, po wszystkich parzystych n taki, że A_n ma n wierzchołków i $S(A_n) = \Omega(n^2)$. Pokaż, że istnieje ciąg 3-drzew $\langle B_n \rangle$, po wszystkich parzystych n taki, że B_n ma n wierzchołków i $S(B_n) = \mathcal{O}(n \log n)$.

Problemy optymalizacji. W wielu zastosowaniach graf ma dodatkowe parametry liczbowe związane z wierzchołkami i/lub krawędziami, które interpretujemy jak “wagi” lub “pojemności”. Mogą nas interesować jakieś konfiguracje kombinatoryczne związane z takim grafem, każdą z nich traktujemy jak dopuszczalne rozwiązanie. Rozwiązaniom nadajemy wartości w terminach wag lub pojemności związanych z grafem, przy czym szukamy optymalnego rozwiązania. Rozważymy dwa takie problemy: znajdowanie minimalnych drzew rozpinających, z omówieniem ogólnych algorytmów zachłannych, oraz znajdowanie maksymalnych przepływów.

Algorytmy zachłanne. Niech w grafie prostym spójnym G z każdą krawędzią e będzie związana waga $w(e)$, która jest dowolną liczbą rzeczywistą. Określamy wagę zbioru krawędzi $H \subseteq E$ jako $w(H) = \sum_{e \in H} w(e)$. Chcemy znaleźć w G drzewo rozpinające G o minimalnej wadze. Opiszemy *algorytm Kruskala* rozwiązujący ten problem. W czasie jego działania każda krawędź jest albo zielona albo czerwona albo bez koloru; zaczynamy z wszystkimi krawędziami bez koloru. Zachowany jest niezmiennik, że zielone krawędzie tworzą las. Niech $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$ ciąg krawędzi G uporządkowany tak, że $w(e_i) \leq w(e_{i+1})$. Krawędzie rozważamy kolejno, począwszy od e_1 . Krok algorytmu: Weź krawędź e_i ; jeżeli jej końce należą do różnych składowych zielonego lasu to nadaj e_i kolor zielony, w przeciwnym przypadku czerwony.

Po rozpatrzeniu wszystkich krawędzi dostaniemy zielone drzewo rozpinające T . Pokażemy, że ma ono minimalną wagę. Niech $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ krawędzie drzewa T uporządkowane tak, że $w(a_k) \leq w(a_{k+1})$. Niech T' inne drzewo rozpinające o krawędziach $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$, gdzie także $w(b_k) \leq w(b_{k+1})$. Pokażemy, że $w(a_k) \leq w(b_k)$ dla $1 \leq k \leq n$. W przeciwnym przypadku $w(b_i) < w(a_i)$ dla pewnego $1 \leq i \leq n$. W chwili wyboru a_i każda krawędź b_j , dla $1 \leq j \leq i$, ma oba końce w tej samej składowej zielonego lasu wyznaczonego przez $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$, a takich składowych jest $n - i + 1$. Stąd liczba składowych rozpinającego grafu wyznaczonego przez krawędzie $\{b_1, \dots, b_i\}$ jest nie mniejsza niż $n - i + 1$. Z drugiej strony jest równa $n - i$ bowiem jest to las – sprzeczność.

Większość znanych algorytmów znajdujących minimalne drzewo rozpinające można określić jako “zachłanne”, w tym sensie, że rozszerzają drzewo lub las dodając kolejno coraz cięższe krawędzie. Rozważymy ogólną sytuację, kiedy algorytm można określić jako zachłanny. Niech dane będą: zbiór X , dla każdego $x \in X$ waga $w(x)$, i rodzina \mathcal{S} podzbiorów X . Waga $Y \subseteq X$ to suma wag elementów Y . Szukamy zbioru Y o minimalnej wadze maksymalnego w sensie zawierania w \mathcal{S} . *Algorytm zachłanny* postępuje następująco: Porządkujemy elementy X w kolejności niemalejących wag: $w(x_1) \leq w(x_2) \leq \dots \leq w(x_i) \leq \dots$. Zaczynamy od $Y = \emptyset$ i najmniejszego elementu x_1 . Krok algorytmu: rozpatrujemy kolejny element x_i , jeżeli $Y \cup \{x_i\} \in \mathcal{S}$ to rozszerzamy Y do $Y \cup \{x_i\}$. Wynikiem jest ostatnia wartość Y .

Pokażemy *twierdzenie Rado-Edmonsa*:

1. Jeżeli $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ jest matroidem o dowolnych dodatkowych wagach na elementach X , to algorytm zachłanny znajdzie bazę (czyli maksymalny zbiór niezależny) o minimalnej

wadze.

2. Jeżeli $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ nie jest matroidem, to można tak określić wagi na X , że maksymalny podzbiór X z \mathcal{S} , który znajdzie algorytm zachłanny, nie ma wagi minimalnej wśród takich podzbiorów.

Dowód części pierwszej przypomina dowód poprawności algorytmu Kruskala. Niech algorytm zachłanny znajduje $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Jest to baza: w przeciwnym przypadku, niech $x \notin A$ element o minimalnej wadze spośród takich, że $A \cup \{x\}$ niezależny; algorytm powinien był dołączyć x do A , gdy go rozważał. Niech $\{b_1, \dots, b_n\}$ dowolna baza, gdzie $w(b_1) \leq w(b_2) \leq \dots \leq w(b_n)$. Pokażemy $w(a_i) \leq w(b_i)$ dla $1 \leq i \leq n$. Dla $i = 1$ jasne. Przypuśćmy, że istnieje $i > 1$ taki, że $w(a_i) > w(b_i)$. Zbiór $\{a_1, \dots, a_{i-1}\}$ można rozszerzyć do niezależnego dodając element zbioru $\{b_1, \dots, b_i\}$, niech będzie nim b_j . Zatem $w(b_j) \leq w(b_i) < w(a_i)$, co jest sprzeczne z zasadą działania algorytmu zachłannego.

Przypuśćmy, że $\langle X, \mathcal{S} \rangle$ nie jest matroidem. Najpierw rozważmy przypadek gdy nie zachodzi własność dziedziczenia, to znaczy: istnieje podzbiór niezależny $A \in \mathcal{S}$ oraz $B \subset A$ taki, że $B \notin \mathcal{S}$. Określamy wagi:

$$w(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in B, \\ 0 & \text{dla } x \notin B. \end{cases}$$

Algorytm zachłanny najpierw rozpatrzy elementy B , z których co najmniej jeden odrzuci. W ten sposób znajdzie zbiór o wadze większej niż $-|B|$, a taką wagę ma A , który zatem jest lepszy. Teraz założmy, że własność dziedziczenia zachodzi, ale nie zachodzi własność wymiany: istnieją $A, B \in \mathcal{S}$ takie, że $|A| < |B|$ oraz $A \cup \{x\} \notin \mathcal{S}$, dla dowolnego $x \in B - A$. Stąd wynika, że $A - B \neq \emptyset$ oraz $|B - A| > |A - B| > 0$. Określmy wagi:

$$w(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x \in A, \\ -1 + \epsilon & \text{dla } x \in B - A, \\ 0 & \text{dla } x \in X - (A \cup B), \end{cases}$$

gdzie $0 < \epsilon < 1$. Algorytm najpierw rozważy i zaakceptuje A a potem odrzuci $B - A$, dostając w końcu zbiór o wadze $-|A| = -|A - B| - |A \cap B|$. Natomiast waga B jest równa $-|A \cap B| + (\epsilon - 1) \cdot |B - A|$. Dobierzemy ϵ tak, by waga A była większa, niż waga B . Wystarczy, by zachodziła nierówność

$$-|A \cap B| + (\epsilon - 1) \cdot |B - A| < -|A - B| - |A \cap B| ,$$

co jest równoważne

$$\epsilon < 1 - \frac{|A - B|}{|B - A|} .$$

Istnieje takie $0 < \epsilon < 1$, co kończy dowód twierdzenia Rado-Edmondsa.

Przepływy w sieciach. Siecią przepływową nazwiemy graf skierowany słabo spójny $G = \langle V, A \rangle$, w którym dodatkowo każdej krawędzi skierowanej przyporządkowana jest liczba $c(e) \geq 0$ nazywana jej *pojemnością*, oraz wyróżnione są dwa wierzchołki: *źródło* s

i *ujście* t . Interesuje nas sytuacja taka, że jeżeli $e = \langle v_1, v_2 \rangle$ jest krawędzią sieci G , to w G nie ma innej krawędzi o tych samych końcach co e , w szczególności nie ma krawędzi odwrotnej $e' = \langle v_2, v_1 \rangle$. Technicznie wygodniej jest założyć, że każda para wierzchołków G jest krawędzią, ale dodatkowo, jeżeli $c(e) > 0$ to $c(e') = 0$; nic to nie zmienia, bo liczą się tylko krawędzie o niezerowych pojemnościach. Wyobraźmy sobie, że z s do t płynie strumień płynu przez sieć, który nazywamy *przepływem*. Formalnie, przepływ jest to funkcja p , która każdej krawędzi e przyporządkowuje liczbę rzeczywistą $p(e)$, tak, że spełnione są następujące warunki:

1. Przepływ nie przekracza pojemności krawędzi: $0 \leq p(e) \leq c(e)$;
2. Przepływ jest zachowany w wierzchołkach pośrednich: jeżeli $v \neq s, t$ to $\sum_{e \in do(v)} p(e) = \sum_{e \in od(v)} p(e)$, gdzie $od(v)$ oznacza zbiór krawędzi wychodzących z v , a $do(v)$ oznacza zbiór krawędzi wchodzących do v .

Wartością przepływu nazywamy liczbę

$$\sum_{e \in od(s)} p(e) - \sum_{e \in do(s)} p(e) .$$

Przepływ jest *maksymalny*, gdy jego wartość jest największa możliwa. Problemami, które nas interesują są istnienie a także znalezienie takiego przepływu.

Rozważmy przekroje sieci, które są podobne do rozcięć grafu prostego otrzymanego przez zaniechanie orientacji krawędzi sieci i utożsamienie otrzymanych krawędzi wielokrotnych. Dokładniej: niech $X \subseteq V$ zbiór wierzchołków, przez $P(X)$ oznaczamy zbiór krawędzi o dodatnich pojemnościach, których początek jest w X a koniec nie, podobnie $T(X)$ oznacza zbiór krawędzi o dodatnich pojemnościach, których koniec jest w X a początek nie. *Przekrój* $R(X)$ wyznaczony przez X to $P(X) \cup T(X)$. Jeżeli $s \in X$ a $t \notin X$ to taki przekrój nazywamy *s-t-przekrojem*. *Pojemnością s-t-przekroju* $R(X)$ nazywamy liczbę

$$c(X) = \sum_{e \in P(X)} c(e) .$$

Pokażemy najpierw, że wartość przepływu jest nie większa niż pojemność dowolnego *s-t*-przekroju $R(X)$. W tym celu rozważmy sumę

$$\sum_{v \in X} \left(\sum_{e \in od(v)} p(e) - \sum_{e \in do(v)} p(e) \right) . \quad (1)$$

Jest ona równa wartości $w(p)$ przepływu p . Zauważmy, że jeżeli oba końce krawędzi e należą do X , to $p(e)$ znosi się ze sobą, a jeżeli żaden z końców e nie należy do X , to e nie występuje wcale w sumie (1). Zatem możemy przekształcić (1) do następującej postaci:

$$w(p) = \sum_{e \in P(X)} p(e) - \sum_{e \in T(X)} p(e) . \quad (2)$$

Teraz jest jasne, że $w(p) \leq c(X)$.

Resztową pojemnością krawędzi e , względem przepływu p , nazywamy liczbę $r_p(e) = c(e) - p(e) + p(e')$. Zwróćmy uwagę, że albo $p(e) = 0$ albo $p(e') = 0$, bowiem albo $c(e) = 0$ albo $c(e') = 0$. Resztową pojemnością s - t -przekroju nazywamy liczbę

$$r_p(X) = \sum_{e \in P(X)} r_p(e) .$$

Przypuśćmy, że przepływ p o wartości $w(p)$ możemy powiększyć do przepływu p' o wartości $w(p') = w(p) + d$. Zatem

$$w(p) + d \leq c(X),$$

dla przekroju $R(X)$. Stąd, uwzględniając równanie (2), dostajemy:

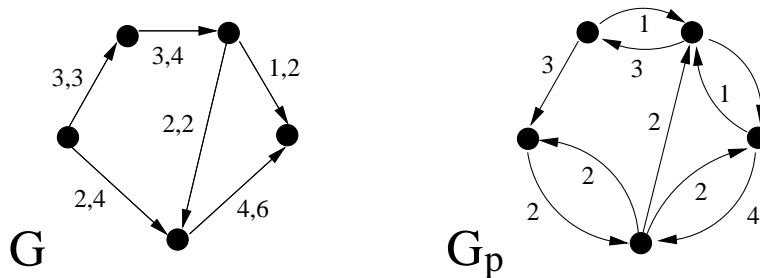
$$\begin{aligned} d \leq c(X) - w(p) &= \sum_{e \in P(X)} c(e) - \sum_{e \in P(X)} p(e) + \sum_{e \in T(X)} p(e) \\ &= \sum_{e \in P(X)} (c(e) - p(e)) + \sum_{e \in T(X)} p(e) = \sum_{e \in P(X)} c(e) - p(e) + p(e') = r_p(X) . \end{aligned}$$

Stąd wynika, że wartość o którą możemy powiększyć przepływ jest nie większa niż resztowa pojemność dowolnego s - t -przekroju.

Sieć reszty przepływu (*s.r.p.*), dla danego przepływu p w sieci $G = \langle V, A \rangle$, określamy następująco: Jest to graf skierowany $G_p = \langle V, A_p \rangle$, dla każdej krawędzi e grafu G zachodzi:

1. Jeżeli $p(e) < c(e)$ to krawędź e jest w A_p z pojemnością $c_p(e) = c(e) - p(e)$;
2. Jeżeli $p(e) > 0$ to krawędź e' , odwrotna do e , jest w A_p z pojemnością $c_p(e') = p(e)$.

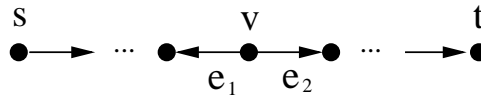
Zauważmy, że zarówno krawędź e jak i krawędź e' skierowana odwrotnie mogą być jednocześnie w A_p , oraz że wszystkie krawędzie A_p mają pojemności dodatnie. Przykład sieci reszty przepływu pokazuje rysunek 1.



Rysunek 1: Sieć G z przepływem p i jego sieć reszty przepływu G_p . W grafie G przy krawędzi e umieszczona jest para liczb $p(e), c(e)$, tylko krawędzie o niezerowych pojemnościach są pokazane.

Skierowaną drogę od źródła do ujścia w sieci reszty przepływu nazywamy *ścieżką powiększającą*. Minimalna pojemność krawędzi na takiej ścieżce to *pojemność ścieżki*

powiększającej. Mając taką ścieżkę, możemy zwiększyć wartość przepływu o jej pojemność w następujący sposób: jeżeli krawędź e na ścieżce odpowiada takiej samej krawędzi w sieci wyjściowej, to zwiększamy na niej przepływ, a jeżeli odpowiada krawędzi odwrotnej e' to na e' zmniejszamy przepływ, za każdym razem o pojemność ścieżki. Poprawność pokazujemy sprawdzając przypadki orientacji krawędzi w G odpowiadających kolejnym krawędziom na ścieżce. Niech na przykład będą nimi krawędzie e_1 i e_2 , obie wychodzące z jednego wierzchołka v , jak na rysunku 2.



Rysunek 2: Krawędzie e_1 i e_2 są w G i odpowiadają dwóm kolejnym krawędziom na ścieżce powiększającej, która zawiera krawędzie z G_p .

W takiej sytuacji zmniejszając odpływ krawędzią e_1 zwiększamy go jednocześnie o taką samą wartość na krawędzi e_2 , zatem warunek zachowania przepływu w v jest spełniony.

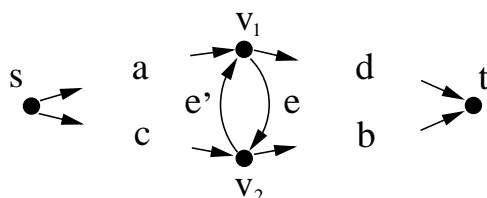
Pokażemy, że ma miejsce równoważność: istnieje ścieżka powiększająca w.t.w. gdy przepływ nie jest maksymalny. W tym celu rozważmy następujący proces zaznaczania wierzchołków: zaczynamy od zaznaczenia źródła s , jeżeli jakiś wierzchołek jest zaznaczony, to zaznaczmy także wierzchołki, do których można z niego dojść w s.r.p. Niech X będzie zbiorem tych wierzchołków, które zostały zaznaczone. Jeżeli $t \in X$ to istnieje ścieżka powiększająca od s do t , przepływ możemy powiększyć o jej pojemność. Jeżeli $t \notin X$ to nie istnieje taka ścieżka powiększająca. W tym przypadku X wyznacza przekrój o specjalnych własnościach. Rozważmy krawędzie $e \in P(X)$. Z określenia s.r.p. wynika, że $c(e) = p(e)$, bo w przeciwnym przypadku istniałaby krawędź w G_p z X do $V - X$ o pojemności $c(e) - p(e) > 0$. Także $p(e') = 0$ bowiem $c(e') = 0$. Zatem $r_p(e) = 0$, czyli resztowa pojemność przekroju $R(X)$ jest równa 0. Zatem przepływu nie można powiększyć.

Założmy, że X jak wyżej istnieje, taki, że nie istnieje ścieżka powiększająca. Rozważmy dla niego także krawędzie $e \in T(X)$, Mamy $p(e) = 0$ bowiem w przeciwnym przypadku istniałaby krawędź w G_p z X do $V - X$ o pojemności $p(e) > 0$. Rozważmy sumę (2), równą wartości przepływu: z powyższych rozważań wynika, że w pierwszej podsumie $p(e) = c(e)$ a w drugiej $p(e) = 0$, razem dostajemy $w(p) = c(X)$. Jest to *twierdzenie o maksymalnym przepływie i minimalnym przekroju*: maksymalna wartość przepływu jest równa minimalnej pojemności przekroju. Dla pełności dowodu potrzebujemy istnienia takiego X . To wynika z istnienia przepływu maksymalnego, co z kolei pokazujemy poniżej konstruktywnie, patrz także zadanie 13.

Algorytm znajdowania maksymalnego przepływu mógłby działać następująco: znajdujemy ścieżkę powiększającą, powiększamy przepływ o pojemność ścieżki, uaktualniamy s.r.p.; iterujemy dopóki istnieje ścieżka powiększająca. Są dwa problemy z takim ogólnym schematem: (1) ciąg ścieżek powiększających nie musi być skończony; (2) ciąg kolejnych wartości przepływu nie musi zbiegać do maksymalnej wartości przepływu. Ale zauważmy, że jeżeli pojemności krawędzi są liczbami całkowitymi, gdzie liczba C jest

największą pojemnością krawędzi, to ciąg kolejnych ścieżek powiększających ma zawsze $\mathcal{O}(C)$ elementów: pojemność każdej ścieżki powiększającej jest równa co najmniej 1. Stąd także wynika, że jeżeli pojemności są liczbami całkowitymi to istnieje taki maksymalny przepływ p że $p(e)$ jest liczbą całkowitą dla każdej krawędzi e .

Uściślijmy algorytm znajdowania maksymalnego przepływu w następujący sposób: za każdym razem, gdy szukamy nowej ścieżki powiększającej, wybieramy najkrótszą możliwą, gdzie długość mierzymy liczbą krawędzi. Pokażemy, że tak określony ciąg ścieżek powiększających będzie zawsze skończony. Trudność polega tu na tym, że gdy uaktualniamy s.r.p., to mogą pojawić się nowe krawędzie, co może prowadzić do powstania nowych ścieżek powiększających. Przyjrzyjmy się takiej sytuacji: zwiększamy przepływ na krawędzi e , co powoduje, że w s.r.p. pojawia się nowa krawędź e' . Rysunek 3 pokazuje stare i nowe ścieżki, dalsza notacja ma znaczenie jak na tym rysunku; jest to najprostszy przypadek, gdy nowa ścieżka korzysta z dokładnie jednej nowej krawędzi, ogólny przypadek podobny.



Rysunek 3: Cztery ścieżki powiększające.

Stara ścieżka idzie od s do v_1 poprzez a krawędzi, potem do v_2 krawędzią e , potem do t poprzez b krawędzi. Przypuśćmy, że powstaje jakaś nowa ścieżka od s do v_2 poprzez c krawędzi, potem idąca e' do v_1 , potem do t poprzez d krawędzi. Zauważmy, że w starej s.r.p. istniały dwie inne ścieżki powiększające o długościach odpowiednio $a + d$ oraz $c + b$, patrz rysunek 3. Z zasady wyboru ścieżki wynika, że musiały zachodzić nierówności $a + d \geq a + b + 1$ oraz $c + b \geq a + b + 1$. Dodając stronami te nierówności i skracając dostajemy $c + d \geq a + b + 2 > a + b$. Stąd wynika, że nowo powstała ścieżka o długości $c + d + 1$ ma długość większą od długości $a + b + 1$ bieżącej najkrótszej ścieżki. Zatem nie nastąpi zapętlenie. Po wyczerpaniu wszystkich ścieżek dostaniemy maksymalny przepływ.

Zadania

1. Niech T minimalne drzewo rozpinające grafu G . Czy droga w T łącząca dwa wierzchołki G ma zawsze najmniejszą wagę spośród wszystkich takich dróg w G ? Nazwijmy m -wagą H maksymalną wagę krawędzi podgrafu H . Czy droga w T łącząca dwa wierzchołki G ma zawsze najmniejszą m -wagę spośród wszystkich takich dróg w G ?
2. Oto *algorytm Boruvki* znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego: Rozpoczynamy od lasu wierzchołków izolowanych, traktujemy je jak drzewa o krawędziach zielonych. W kroku algorytmu: Dla każdego drzewa o zielonych krawędziach wybierz incydentną krawędź o minimalnej wadze spośród prowadzących do wierzchołków nie w drzewie, i pokoloruj na zielono. Pokaż że otrzymamy jedno zielone drzewo i że będzie to rozwiązanie, zakładając, że wagi krawędzi są parami różne.

3. Jak znaleźć drzewo rozpinające o *maksymalnej* wadze?
4. Pokaż, jak można zmienić definicję algorytmu zachłannego i przeformułować twierdzenie Rado-Edmonsa, tak, by pozostało poprawne ale dotyczyło podzbiorów o *maksymalnej* wadze.
5. W dowodzie drugiej części twierdzenia Rado-Edmonsa definiowaliśmy wagi zawsze jako liczby niedodatnie. Czy to przypadek, wybór, czy konieczność?
6. Dana jest macierz $A = [a_{ij}]$, gdzie $a_{ij} > 0$. Chcemy znaleźć podzbiór X pozycji $\langle i, j \rangle$ w A takich, że suma wartości A po X jest minimalna wśród X spełniających pewien dodatkowy warunek. Oto możliwe warunki:

1. W każdej kolumnie jest co najwyżej jedna pozycja w X .
2. W każdej kolumnie i w każdym wierszu jest co najwyżej jedna pozycja w X .

Dla którego z tych warunków algorytm zachłanny jest poprawny?

7. Pokaż, że wartość przepływu jest równa liczbie

$$\sum_{e \in do(t)} p(e) - \sum_{e \in od(t)} p(e) .$$

8. Czy prawdą jest, że jeżeli wszystkie pojemności są całkowitymi liczbami parzystymi (nieparzystymi, odpowiednio) to wartość przepływu maksymalnego też jest liczbą parzystą (nieparzystą, odpowiednio)?
9. Podaj przykład sieci przepływowej o pojemnościach całkowitych, największej pojemności równej C , dla której istnieje ciąg $\Theta(C)$ ścieżek powiększających.
10. Podaj przykład sieci przepływowej, dla której istnieje nieskończony ciąg ścieżek powiększających taki, że odpowiednie wartości przepływu nie zbiegają do wartości maksymalnego przepływu.

Wskazówka: niech niektóre pojemności będą liczbami niewymiernymi.

11. Przypuśćmy, że także wierzchołki mają pojemności nieujemne. Interesują nas tylko takie przepływy, dla których przez żaden wierzchołek nie przepływa więcej niż wynosi jego pojemność. Pokaż jak sprowadzić problem znajdowania maksymalnego przepływu w takim przypadku do sytuacji bez pojemności wierzchołków.
12. Uzupełnij dowód poprawności algorytmu znajdującego maksymalny przepływ metodą najkrótszych ścieżek powiększających: rozważ przypadki, gdy powstają nowe ścieżki powiększające przechodzące przez więcej niż jedną nową krawędź.
13. Udowodnij istnienie przepływu maksymalnego nie posługując się pojęciem ścieżki powiększającej.

Wskazówka: pokaż, że kres górny wartości przepływów jest wartością przepływu.

Problemy ekstremalne. Omówimy przykłady problemów kombinatorycznych, które dotyczą minimalnych lub maksymalnych wartości pewnych parametrów liczbowych.

Zasada szufladkowa Dirichleta. W najprostszej postaci mówi ona, że jeżeli $n + 1$ obiektów rozmieścimy w n szufladach, to w pewnej szufladzie będą co najmniej dwa obiekty. Oto ogólniejsze sformułowanie: jeżeli $f : X \rightarrow Y$ funkcja, gdzie X i Y skończone zbiory, to istnieje taki $y \in Y$, że $|f^{-1}(y)| \geq \lceil |X|/|Y| \rceil$. Przypuśćmy, że $|f^{-1}(y)| < \lceil |X|/|Y| \rceil$ dla każdego $y \in Y$. Zauważmy, że $|X| = \sum_{y \in Y} |f^{-1}(y)|$. Jeżeli Y dzieli X to $|X| < |Y| \cdot \frac{|X|}{|Y|} = |X|$, a w przeciwnym przypadku $|X| \leq |Y| \cdot \lfloor |X|/|Y| \rfloor < |X|$ - sprzeczność.

Przykład: Rozważmy 5 punktów na płaszczyźnie, każdy o współrzędnych całkowitych. Pokażemy, że istnieje taka para a, b spośród nich, że odcinek o końcach a i b ma środek o współrzędnych całkowitych. Niech szufladami będą cztery zbiory odpowiadające czterem możliwościom: współrzędna x jest lub nie jest parzysta, i współrzędna y jest lub nie jest parzysta. Istnieje co najmniej jedna szuflada zawierająca co najmniej dwa punkty a i b , wtedy różnice obu współrzędnych a i b są parzyste. \diamond

Twierdzenie Turána. Niech H ustalony graf prosty. Dla każdej liczby naturalnej n , równej co najmniej liczbie wierzchołków w H , istnieje takie najmniejsze ograniczenie $e_H(n)$, że jeżeli graf prosty $G = \langle V, E \rangle$ spełnia warunki, że $|V| = n$ oraz $|E| > e_H(n)$, to G zawiera H jako podgraf indukowany. *Twierdzenie Turána* opisuje jaka jest funkcja e_H gdy H jest kliką. Rozważmy najprostszy przypadek, gdy H jest *trójkątem*, czyli K_3 . Pokażemy przez indukcję po liczbie n wierzchołków grafu, że jeżeli nie ma trójkątów to ma nie więcej niż $n^2/4$ krawędzi, czyli, że $e_{K_3} = n^2/4$. Niech G o n wierzchołkach będzie grafem bez trójkątów. Przypuśćmy najpierw, że G ma cykl C nieparzystej długości $2k+1$, niech $k \geq 2$ najmniejsza taka liczba. Cykl C ma następujące własności:

1. Żadna przekątna C nie jest w G , bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy krótszy cykl nieparzystej długości.
2. Jeżeli $v_1 \notin C$ i v_1 sąsiedni z $v_2 \in C$ to v_1 nie sąsiaduje z sąsiadami v_2 w C , bowiem w przeciwnym przypadku mielibyśmy trójkąt.

Stąd i z założenia indukcyjnego G ma nie więcej niż

$$\frac{[n - (2k + 1)]^2}{4} + 2k + 1 + [n - (2k + 1)] \cdot k < \frac{n^2}{4} - 1 \quad (1)$$

krawędzi. Jeżeli G nie ma cyklu nieparzystej długości to jest dwudzielny i ma nie więcej krawędzi niż odpowiedni graf pełny dwudzielny $K_{i, n-i}$. Spośród takich grafów najwięcej krawędzi ma $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, mianowicie $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$. Tak naprawdę pokazaliśmy więcej: grafy $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ są *ekstremalne bez trójkątów*, to znaczy, o największej możliwej liczbie krawędzi przy ustalonej liczbie n wierzchołków. Rzeczywiście, jeżeli graf G bez trójkątów nie jest dwudzielny, to nierówność (1) pokazuje, że G ma mniej krawędzi niż graf $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Ogólnie możemy rozważać pojęcie grafów ekstremalnych dla własności grafów, które są monotoniczne w takim sensie, że dodanie krawędzi (odpowiednio, usunięcie krawędzi) nie psuje własności, o ile ona zachodzi dla grafu wyjściowego. Na przykład, jeżeli graf nie ma cykli, to usunięcie krawędzi nie spowoduje pojawienia się cyklu. Zatem możemy pytać o grafy mające maksymalną liczbę krawędzi (przy ustalonym zbiorze wierzchołków) i bez cykli: są nimi oczywiście drzewa. Alternatywnie moglibyśmy zapytać o grafy mające minimalną liczbę krawędzi a posiadające cykl: są nimi trójkąty z dodanymi wierzchołkami izolowanymi. Podobnie, jeżeli graf jest spójny, to dodanie krawędzi nie zepsuje spójności. Możemy pytać o grafy mające minimalną liczbę krawędzi i spójne: są nimi znów drzewa. Lub o grafy mające maksymalną liczbę krawędzi a niespójne: takie grafy to kliki z dodanym wierzchołkiem izolowanym.

Twierdzenia Mengera. Dwie drogi d_1 i d_2 w grafie łączące wierzchołki s i t są *wierzchołkowo rozłączne* gdy ich jedynymi wierzchołkami wspólnymi są s i t . Podobnie drogi takie są *krawędziowo rozłączne*, gdy nie mają wspólnych krawędzi. Twierdzenia typu Mengera dotyczą maksymalnej liczby wierzchołkowo (odpowiednio, krawędziowo) rozłącznych dróg od s do t i minimalnej liczby wierzchołków (odpowiedni, krawędzi), których usunięcie powoduje brak dróg łączących s z t . Oto wariant twierdzenia Mengera dla grafów skierowanych: maksymalna liczba krawędziowo rozłącznych dróg od s do t jest równa minimalnej liczbie krawędzi, których usunięcie powoduje brak (skierowanej) drogi od s do t . Uzasadnienie: Niech $G = \langle V, A \rangle$ graf skierowany, s, t dowolne wierzchołki. Określmy pojemność każdej krawędzi jako równą 1. To razem daje sieć przepływową. Skorzystamy z faktu, że wartość maksymalnego przepływu jest równa minimalnej pojemności s - t -przekroju. Zauważmy, że liczności maksymalnych (w sensie zawierania) zbiorów dróg od s do t rozłącznych krawędziowo i wartości maksymalnych przepływów są sobie równe: Zbiór takich dróg oczywiście wyznacza przepływ o wartości równej liczbie dróg; z drugiej strony istnieje maksymalny przepływ, który ma wartości całkowite na każdej krawędzi, wtedy krawędzie o przepływie 1 wyznaczają rozłączne krawędziowo drogi. Niech $R(X) = P(X) \cup T(X)$ będzie s - t -przekrojem o minimalnej pojemności, gdzie $X \subseteq V$. Pojemność $R(X)$ w tym przypadku to liczność $P(X)$. Niech D maksymalny zbiór rozłącznych krawędziowo dróg od s do t . Liczność D jest równa liczności $P(X)$. Każda droga od s do t zawiera krawędź z $P(X)$, co kończy dowód.

Twierdzenie Dilwortha. Porządek częściowy $\langle X, \leq \rangle$ jest *liniowy* gdy każde dwa elementy $x_1, x_2 \in X$ są porównywalne, to znaczy zachodzi $x_1 \leq x_2$ lub $x_2 \leq x_1$. Podzbiór $Y \subseteq X$ taki, że Y z porządkiem \leq z $\langle X, \leq \rangle$ jest porządkiem liniowym nazywamy *łańcuchem* w $\langle X, \leq \rangle$. Podzbiór $Y \subseteq X$ taki, że żadne dwa elementy Y nie są porównywalne w $\langle X, \leq \rangle$ nazywamy *antyłańcuchem* w $\langle X, \leq \rangle$.

Twierdzenie Dilwortha mówi, że jeżeli $\langle X, \leq \rangle$ jest skończonym zbiorem częściowo uporządkowanym to maksymalna liczność antyłańcucha w $\langle X, \leq \rangle$ jest równa minimalnej liczbie łańcuchów, którymi można pokryć X . Oto dowód: Elementy antyłańcucha muszą być w różnych łańcuchach, zatem pokrycie ma co najmniej tyle łańcuchów co liczność maksymalnego antyłańcucha. Pokażemy nierówność w drugą stronę, to znaczy że jeżeli A maksymalny w sensie liczności antyłańcuch, to istnieje nie więcej niż $|A|$ łańcuchów pokrywających X . Indukcja po liczności X . Niech $C \subseteq X$ łańcuch maksymalny w

sensie zawierania, to znaczy nie można go rozszerzyć do większego. Niech $\{x_1, \dots, x_n\}$ maksymalny w sensie liczności antyłańcuch w $X - C$. Jeżeli $n < |A|$ to wystarczy skorzystać z założenia indukcyjnego. Niech zatem $n = |A|$. Rozważmy następujące podzbiory X :

$$L = \{x \in X : x \leq x_i \text{ dla pewnego } 1 \leq i \leq n\} ;$$

$$P = \{x \in X : x \geq x_i \text{ dla pewnego } 1 \leq i \leq n\}.$$

Zauważmy, że element minimalny z C nie jest w P a maksymalny z C nie jest w L . Zatem $|L| < |X|$ i $|P| < |X|$, i założenie indukcyjne daje istnienie n łańcuchów, które pokrywają L i n łańcuchów, które pokrywają P . Każdy spośród x_i należy do dokładnie jednego takiego łańcucha w L i jednego łańcucha w P , co pozwala je połączyć i pokryć cały X .

Równości Gallai. Niech $G = \langle V, E \rangle$ graf prosty. Nazwijmy podzbiór $X \subseteq V$ *pokryciem wierzchołkowym* G gdy każda krawędź ma co najmniej jeden z końców w X . Podobnie *pokrycie krawędziowe* to zbiór $Y \subseteq E$ taki, że każdy wierzchołek G jest końcem co najmniej jednej krawędzi z Y . Gdy mówimy o pokryciach krawędziowych ograniczamy się do grafów, w których nie ma wierzchołków izolowanych. Określamy liczby $\text{pw}(G)$ i $\text{pk}(G)$ jako minimalne liczności pokryć, odpowiednio, wierzchołkowych i krawędziowych w G . Definiujemy także liczby $\text{nw}(G)$ i $\text{sk}(G)$ jako, odpowiednio, maksymalne możliwe liczności zbioru niezależnych wierzchołków i skojarzenia w G .

Niech $G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ graf dwudzielny, gdzie V_1, V_2 to podział wierzchołków. Możemy określić częściowy porządek na $V_1 \cup V_2$ następująco: $v_1 \leq v_2$ w.t.w. gdy $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$, oraz $\{v_1, v_2\}$ krawędź G . Twierdzenie Dilwortha w tym przypadku mówi, że

$$\text{pk}(G) = \text{nw}(G) . \quad (2)$$

Ma miejsce także dualny fakt

$$\text{pw}(G) = \text{sk}(G) , \quad (3)$$

zwany *twierdzeniem Königa*. Równość (3) wynika z równości (2) na mocy następujących tożsamości, zwanych *równościami Gallai*:

$$\text{nw}(G) + \text{pw}(G) = n = \text{sk}(G) + \text{pk}(G) , \quad (4)$$

gdzie $n = |V_1 \cup V_2|$. Pierwsza z równości wynika z obserwacji, że $X \subseteq V$ jest pokryciem wierzchołkowym w.t.w. gdy $V - X$ jest zbiorem niezależnym. Pokażemy drugą równość w (4). Niech S skojarzenie maksymalne. Zbiór X wierzchołków nie pokrytych przez S jest niezależny oraz $|X| = n - 2|S|$. Dołączmy do S krawędzie o końcach w X , po jednej dla każdego elementu X . Dostajemy pokrycie krawędziowe o liczności $n - |S|$, zatem $\text{pk}(G) \leq n - |S|$, czyli zachodzi nierówność

$$\text{sk}(G) \leq n - \text{pk}(G) .$$

Niech P minimalne pokrycie krawędziowe. Graf rozpinający o krawędziach z P jest lasem, który składa się z $n - |P|$ drzew. Wybierzmy po jednej krawędzi z każdego takiego drzewa: dostaniemy skojarzenie. Stąd mamy $\text{sk}(G) \geq n - |P|$, czyli zachodzi nierówność

$$\text{pk}(G) \geq n - \text{sk}(G) .$$

To kończy dowód równości Gallai i zarazem twierdzenia Königa.

Rozważmy macierz $A = [a_{i,j}]$ prostokątną, której elementami są zera i jedynki. Niech *linią* tej macierzy będzie wiersz lub kolumna. Zbiór X pozycji macierzy A jest *rozproszony*, gdy żadne dwie pozycje w X nie leżą na tej samej linii. Zbudujemy graf dwudzielny, w którym wierzchołkami są linie: z jednej strony wiersze a z drugiej kolumny. Niech dwie linie będą połączone krawędzią, gdy na ich przecięciu leży jedynka. Zauważmy, że w tym grafie pokrycie wierzchołkowe to zbiór linii pokrywających wszystkie jedynki, a skojarzenie to zbiór rozproszony zawierający tylko jedynki. Z twierdzenia Königa dostajemy, że minimalna liczba linii pokrywających wszystkie jedynki jest równa maksymalnej liczności rozproszonego zbioru jedynek. Ten fakt znany jest jako *twierdzenie węgierskie*.

Twierdzenie Halla. Dla danego grafu prostego i wierzchołka v , niech $S(v)$ oznacza zbiór wierzchołków sąsiednich z v . Skojarzenie, które jest pokryciem krawędziowym nazywamy *skojarzeniem całkowitym*.

Niech $G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ graf dwudzielny. *Twierdzenie Halla* mówi, że w G istnieje skojarzenie całkowite w.t.w. gdy spełniony jest następujący *warunek Halla*:

$$\text{dla każdego } X \subseteq V_1 \text{ zachodzi nierówność } \left| \bigcup_{v \in X} S(v) \right| \geq |X|. \quad (5)$$

Oto dowód, przez indukcję po liczności zbioru wierzchołków. Konieczność warunku Halla jest oczywista, pokażemy, że jest on wystarczający dla istnienia skojarzenia. Jeżeli dla każdego $X \subsetneq V_1$ nierówność w warunku (5) jest ostra, to wybierzmy dowolną krawędź do skojarzenia, usuńmy jej końce z grafu, warunek (5) nadal zachodzi, stosujemy indukcję. W przeciwnym przypadku istnieje $X \subsetneq V_1$ taki, że $|\bigcup_{v \in X} S(v)| = |X|$. Z założenia indukcyjnego istnieje całkowite skojarzenie w podgrafie indukowanym o wierzchołkach $X \cup \bigcup_{v \in X} S(v)$. Usuńmy wierzchołki i krawędzie tego podgrafu indukowanego. Dostaniemy nowy graf, w którym zbiór sąsiadów wierzchołka v oznaczmy przez $S'(v)$. Zauważmy, że w tym grafie też możemy zastosować założenie indukcyjne, bowiem warunek (5) nadal zachodzi: w przeciwnym przypadku istniałby zbiór $Y \subseteq V_1$ rozłączny z X taki, że zachodziłaby nierówność

$$\left| \bigcup_{v \in Y} S'(v) \right| < |Y|;$$

ale wtedy także w wyjściowym grafie mielibyśmy

$$\left| \bigcup_{v \in X \cup Y} S(v) \right| = \left| \bigcup_{v \in X} S(v) \right| + \left| \bigcup_{v \in Y} S'(v) \right| < |X| + |Y|,$$

co daje sprzeczność. Zatem z założenia indukcyjnego istnieje skojarzenie całkowite na zbiorze wierzchołków $V_1 - X$, łączymy dwa skojarzenia razem i dostajemy skojarzenie na V_1 .

Jako przykład zastosowania twierdzenia Halla pokażemy, że każdy regularny graf dwudzielny $G = \langle V_1 \cup V_2, E \rangle$ ma skojarzenie całkowite. Przypuśćmy bowiem, że zbiór sąsiadów $Y \subseteq V_2$ zbioru $X \subseteq V_1$ ma mniej elementów: $|Y| < |X|$. Niech d to stopień każdego wierzchołka G . Ponieważ do Y wchodzi co najmniej $d \cdot |X|$ krawędzi, z zasady szufladkowej istnieje taki wierzchołek $v \in Y$, do którego wchodzi więcej niż d krawędzi – sprzeczność.

Oto inne sformułowanie twierdzenia Halla: Niech $\alpha = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ ciąg podzbiorów $A = \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$. Mówimy, że ciąg $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ jest *ciągami reprezentantów dla α* gdy $a_i \in A_i$ dla każdego $1 \leq i \leq n$, oraz $a_i \neq a_j$ dla wszystkich $1 \leq i, j \leq n$ takich, że $i \neq j$. Niech graf dwudzielny G_α będzie określony następująco: $V_1 = A$, $V_2 = \{A_1, \dots, A_n\}$, para $\{a, A_i\}$ jest krawędzią w.t.w. gdy $a \in A_i$. Jest wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy całkowitymi skojarzeniami w grafie G_α oraz ciągami reprezentantów dla α . Twierdzenie Halla w języku systemów reprezentantów mówi, że istnieje taki system dla α w.t.w. gdy suma mnogościowa dowolnych k spośród zbiorów w α zawiera co najmniej k elementów.

Twierdzenie Ramseya. Ramsey pokazał, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna $r(n)$ że jeżeli graf prosty G ma co najmniej $r(n)$ wierzchołków to G lub jego uzupełnienie \overline{G} zawiera klikę K_n . Pokażemy to przez indukcję. W tym celu wzmocnimy tezę, pokażemy mianowicie istnienie *liczb Ramseya* $R(i, j)$, gdzie i, j całkowite dodatnie, które określone są jako minimalne liczby o takiej własności, że jeżeli G ma co najmniej $R(i, j)$ wierzchołków, to G zawiera K_i lub \overline{G} zawiera K_j . Oto dowód, przez indukcję po parach wskaźników. Jeżeli $i = 1$ lub $j = 1$ to oczywiście $R(i, j) = 1$. Pokażemy oszacowanie

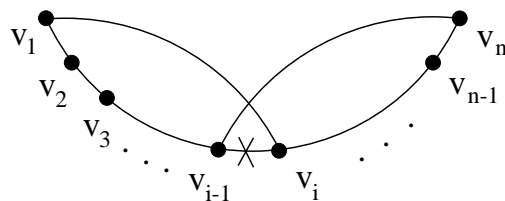
$$R(i, j) \leq R(i-1, j) + R(i, j-1). \quad (6)$$

Weźmy graf G o co najmniej $R(i-1, j) + R(i, j-1)$ wierzchołkach, niech v wierzchołek G . Albo stopień v w G jest równy co najmniej $R(i-1, j)$ albo stopień v w \overline{G} jest równy co najmniej $R(i, j-1)$. Są to przypadki symetryczne, niech zachodzi pierwszy. Rozważmy podgraf G' indukowany w G przez wierzchołki sąsiednie z v . Jeżeli $\overline{G'}$ zawiera K_j to także \overline{G} go zawiera. W przeciwnym przypadku G' zawiera K_{i-1} , który razem z v tworzą K_i .

Twierdzenie Ore. Droga rozpinająca w grafie prostym nazywa się *drogą Hamiltona*. Cykl rozpinający grafu prostego nazywa się *cyklem Hamiltona*. Przechodzi on przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz i wraca do wierzchołka początkowego. Jeżeli taki cykl istnieje w grafie, to graf nazywamy *hamiltonowskim*. W przeciwieństwie do własności bycia grafem eulerowskim, nie jest znany żaden prosty warunek równoważny byciu hamiltonowskim (w tym kontekście słowo 'prosty' oznacza nawet warunek, który można sprawdzić szybkim algorytmem). Natomiast znane są proste warunki implikujące bycie hamiltonowskim, zwykle oznaczają one, że graf ma "dużo krawędzi". Na przykład zachodzi *twierdzenie Ore*: jeżeli G ma $n \geq 3$ wierzchołków oraz stopnie każdej pary wierzchołków niesąsiednich w G v_1, v_2 spełniają nierówność

$$\deg v_1 + \deg v_2 \geq n, \quad (7)$$

to graf G jest hamiltonowski. Załóżmy, mianowicie, że dla pewnego grafu G warunek (7) zachodzi a G nie jest hamiltonowski. Dodajmy do G krawędzie tak, że dodanie każdej następnej spowoduje, że G będzie hamiltonowski. G nadal spełnia (7). Dodajmy do G jeszcze jedną krawędź e : dostaniemy cykl Hamiltona. Zatem w G istnieje droga $d = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ zawierająca wszystkie wierzchołki, gdzie v_1 i v_n nie są sąsiednie, bowiem to są końce dodanej krawędzi e . Pokażemy, że istnieje wierzchołek v_i sąsiedni z v_1 taki, że v_{i-1} jest sąsiedni z v_n , co da cykl Hamiltona jak na rysunku 1.



Rysunek 1: Cykl Hamiltona tworzą wszystkie widoczne krawędzie oprócz przekreślonej.

Rozważmy mianowicie zbiór X tych wierzchołków spośród v_3, v_4, \dots, v_{n-1} , z którymi sąsiaduje v_1 . Jeżeli żaden z wierzchołków poprzedzających wierzchołek w X na drodze d nie sąsiaduje z v_n , to v_n może sąsiadować najwyżej z

$$n - 3 - (\deg v_1 - 1) = n - 2 - \deg v_1$$

wierzchołkami spośród v_2, v_3, \dots, v_{n-2} . Dostajemy sprzeczność, ponieważ (7) pociąga za sobą, że v_n ma tam co najmniej $\deg v_2 - 1 \geq n - 1 - \deg v_1$ sąsiadów.

Zadania

1. Pokaż, że graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach zawiera co najmniej dwa wierzchołki o równych stopniach.
2. Pokaż, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych, gdzie $n \geq 1$, istnieją takie dwie, że $2n$ dzieli ich sumę lub różnicę.
3. Zaproponuj hipotezę określającą grafy ekstremalne bez K_4 .
4. Niech $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ będzie ciągiem liczb całkowitych takich, że $1 \leq x_i < 2n$, dla każdego $1 \leq i \leq n + 1$. Pokaż, że istnieją różne i, j, k takie, że $x_i + x_j = x_k$.
5. Pokaż, że dla zbiorów dróg rozłącznych, odpowiednio, wierzchołkowo i krawędziowo, łączących dwa ustalone wierzchołki w grafie, maksymalność w sensie zawierania i w sensie liczności takich zbiorów są równoważne.
6. Pokaż twierdzenia Mengersa w wersji dla wierzchołków dla grafów skierowanych, oraz dla grafów prostych w wersjach wierzchołkowej i krawędziowej.
7. Rozważmy rodzinę podzbiorów zbioru X z porządkiem częściowym danym relacją zawierania. Pokaż, że największa możliwa liczność antylańcucha jest równa $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ gdzie $|X| = n$.
8. Pokaż twierdzenie dualne do twierdzenia Dilwortha, w którym słowa 'łańcuch' i 'antylańcuch' są zamienione miejscami.
9. Pokaż, że każdy zbiór częściowo uporządkowany o $i \cdot j + 1$ elementach zawiera łańcuch liczności $i + 1$ lub antylańcuch liczności $j + 1$.

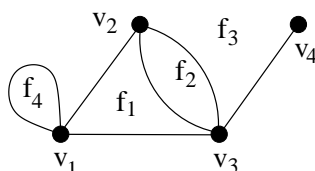
10. Pokaż, że każdy ciąg $n^2 + 1$ liczb rzeczywistych zawiera podciąg monotoniczny długości $n + 1$.
11. Niech $\alpha = \langle A_1, \dots, A_n \rangle$ ciąg podzbiorów zbioru A . Mówimy, że zbiór $\{b_1, \dots, b_k\} \subseteq A$ jest *transwelsalą* dla α gdy istnieje taka permutacja $\{b_1, \dots, b_k\}$, która jest systemem reprezentantów dla pewnego podciągu α . Pokaż, że jeżeli określimy zbiory niezależne A jako transwelsale to dostaniemy matroid.
12. Znajdź $R(3, 3)$ i oszacuj od góry $R(3, 4)$.
13. Zaproponuj definicję liczb $R(i, j, k)$, uogólniających liczby Ramseya $R(i, j)$, sformułowaną w terminach podziału krawędzi K_n na trzy rozłączne części. Pokaż że takie liczby istnieją.
14. Pokaż, że z nierówności (6) wynika szacowanie

$$R(i, j) \leq \binom{i + j - 2}{i - 1}.$$

15. Pokaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k , że z dowolnego zbioru k niewspółliniowych punktów płaszczyzny można wybrać n punktów, które są wierzchołkami wielokąta wypukłego.
16. Podaj przykład grafu prostego spójnego, który jest:

(a) eulerowski i hamiltonowski;	(b) eulerowski i nie hamiltonowski;
(c) nie eulerowski i hamiltonowski;	(d) nie eulerowski i nie hamiltonowski.
17. Niech $G = \langle V, E \rangle$ prosty spójny graf, $|V| \geq 3$, dla którego istnieje $k < |V|$ taka, że $\deg v_1 + \deg v_2 \geq k$ dla każdej pary niesąsiednich wierzchołków. Pokaż, że G zawiera drogę długości k . Jakie jest najlepsze dolne ograniczenie na długość cyklu, który musi zawierać G ?

Planarność i kolorowania. Multigraf G jest *planarny* gdy istnieje takie przedstawienie G na płaszczyźnie, w którym wierzchołkom v odpowiadają punkty $p(v)$ a krawędziom $e = \{v_1, v_2\}$ odpowiednie krzywe $p(e)$ łączące $p(v_1)$ z $p(v_2)$, oraz przedstawienie to odpowiada strukturze grafu, w tym sensie, że jeżeli krzywe odpowiadające różnym krawędziom przecinają się to wspólnymi końcami są tylko końce krzywych, i tylko takich, które odpowiadają wspólnym końcom odpowiednich krawędzi. Każde takie przedstawienie P grafu G na płaszczyźnie nazywamy *grafem płaskim*. Graf G' otrzymany w ten sposób z P , że jego wierzchołkami są końce krzywych P , dwa wierzchołki G' są krawędzią gdy są połączone krzywą w P jest izomorficzny z G . Dla przykładu rozważmy multigraf $G = \langle V, E \rangle$, gdzie $V = \{1, 2, 3, 4\}$ oraz krawędzie są multizbiorem $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1\}, \{3, 4\}\}$. Rysunek 1 pokazuje graf płaski będący przedstawieniem G .



Rysunek 1: Przykład grafu płaskiego.

Wprawdzie grafy płaskie nie są dokładnie grafami, bowiem ich “krawędziami” nie są pary wierzchołów tylko krzywe, ale pojęcia grafowe, jak na przykład droga czy spójność, przenoszą się na nie naturalnie, i nie będziemy ich powtórnie definiować. Przy rozważaniach dotyczących grafów płaskich będziemy korzystać bez dowodu z pewnych intuicyjnie jasnych własności krzywych na płaszczyźnie. *Krzywą* jest ciągły obraz odcinka przy przekształceniu różnowartościowym, poza możliwym wyjątkiem, gdy końce odcinka przechodzą na ten sam punkt, wtedy mamy *krzywą zamkniętą*. Najważniejszą dla nas jest własność wyrażona w *twierdzeniu Jordana*, które mówi, że każda krzywa zamknięta c na płaszczyźnie dzieli ją na dwa krawędziowo spójne obszary: wewnętrzny (ograniczony) i zewnętrzny (nieograniczony), co oznacza, że każde dwa punkty nie leżące na c można połączyć ze sobą krzywą rozłączną z c w.t.w. gdy należą one do tego samego obszaru. Podobnie graf płaski P będący przedstawieniem grafu G dzieli płaszczyznę na takie obszary, jako że każdemu cyklowi w G odpowiada krzywa zamknięta w P . Każdy z takich obszarów nazywamy *ścianą*. Na przykład, graf płaski na rysunku 1 ma cztery ściany oznaczone f_1, f_2, f_3, f_4 . Ściana f_3 jest nieograniczona, nazywamy ją *ścianą zewnętrzną*.

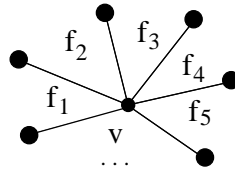
Czy dany graf planarny można narysować na dwa różne sposoby na płaszczyźnie? Najpierw uściślijmy co to znaczy narysować “tak samo”. Przede wszystkim, jeżeli jakaś marszruta jest brzegiem ściany wewnętrznej, to można graf narysować tak, by była brzegiem ściany zewnętrznej. Zatem nie będziemy tak rozróżniać ścian, i przyjmujemy, że dwie reprezentacje grafu planarnego przez grafy płaskie są takie same, gdy dowolna marszruta jest brzegiem ściany w jednym z nich w.t.w. gdy jest brzegiem ściany w drugim. Gdy graf planarny ma taką własność, to powiemy, że rysuje się go jednoznacznie na płaszczyźnie.

Pamiętamy, że graf $G = \langle V, E \rangle$ jest 2-spójny, gdy $|V| \geq 2$ oraz G nie ma wierzchołków rozcinających. Ogólnie, powiemy, że graf $G = \langle V, E \rangle$ jest k -spójny, gdy $|V| \geq k$ oraz usunięcie dowolnych $k - 1$ wierzchołków nie rozspójni grafu. Można pokazać, że jeżeli graf planarny jest 3-spójny to rysuje się go jednoznacznie na płaszczyźnie.

A może jakiś graf planarny można narysować na dwa sposoby tak, by uzyskać różne liczby ścian? Okazuje się, że tego nigdy nie można zrobić. Niech dany będzie graf prosty spójny $G = \langle V, E \rangle$, niech F będzie zbiorem ścian w odpowiadającym mu grafie płaskim. Ma miejsce następujący *wzór Eulera*:

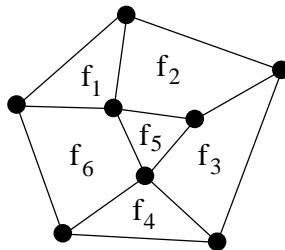
$$|V| - |E| + |F| = 2. \quad (1)$$

Pokażemy go przed indukcją po liczbie bloków G . Zaczniemy od pewnej obserwacji. Niech v wierzchołek grafu płaskiego, każda krawędź, której końcem jest v leży na brzegu ściany do której brzegu należy także v . Rozważmy oznaczenie obszarów, którymi ściany zblizają się do v , odpowiednimi nazwami ścian, jak na rysunku 2.



Rysunek 2: Ściany w otoczeniu wierzchołka v .

Jeżeli $f_i = f_j$, dla pewnej pary $i \neq j$, to usunięcie v rozspójni graf G ; w tym przypadku v leży przynajmniej dwukrotnie na marszrutce odpowiadającej brzegowi ścian $f_i = f_j$. Jeżeli $f_i \neq f_j$, dla każdej pary $i \neq j$, to usunięcie v nie rozspójni G : brzegi ścian f_i wyznaczają drogę, którą można obejść wszystkich sąsiadów v , nie przechodząc przez v ; w tym przypadku v występuje dokładnie raz w marszrutach odpowiadających brzegom ścian f_i . Wróćmy do dowodu indukcyjnego. Jeżeli G jest 2-spójny, czyli jest jednym blokiem, to każda ściana jest ograniczona cyklem. Wymiar R przestrzeni cykli dany jest wzorem $R = |E| - |V| + 1$. Cykle ograniczające ściany wewnętrzne są bazą cykli, bowiem cykl przebiega brzegami ścian: każda ściana w obszarze wewnętrznym cyklu jest brzegiem dwóch ścian, zatem jest liczona $1 + 1 \bmod 2 = 0$ razy, a krawędź zewnętrzna tylko 1 raz, patrz rysunek 3.



Rysunek 3: Cykl zewnętrzny jest sumą cykli wewnętrznych f_i , dla $1 \leq i \leq 6$.

Stąd mamy $R = |F| - 1$, co pokazuje równość (1). Teraz krok indukcyjny: rozważmy przypadek gdy G nie jest 2-spójny. Drzewo bloków G ma jako wierzchołki bloki G oraz

wierzchołki rozcinające G , krawędzie łączą wierzchołki rozcinające z blokami do których należą (patrz zadanie do wykładu 11). Niech blok B będzie wierzchołkiem wiszącym takiego drzewa, a C podgrafem G otrzymanym przez usunięcie wierzchołków, które należą tylko do B . Grafy B i C mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek. Niech N_1, M_1, F_1 to, odpowiednio, liczby wierzchołków, krawędzi i ścian B , podobnie N_2, M_2, F_2 to, odpowiednio, liczby wierzchołków, krawędzi i ścian dla C . Z założenia indukcyjnego $N_i - M_i + F_i = 2$, dla $i = 1, 2$. Dodając te równości stronami mamy

$$(N_1 + N_2) - (M_1 + M_2) + (F_1 + F_2) = 4. \quad (2)$$

Zauważmy, że $N_1 + N_2 = |V| + 1$, bowiem wierzchołek wspólny dla B i C jest liczony podwójnie. Podobnie $F_1 + F_2 = |F| + 1$, bowiem ściana zewnętrzna jest liczona podwójnie. Natomiast $M_1 + M_2 = |E|$. Po podstawieniu do (2) dostajemy (1).

Wzór Eulera pozwala oszacować liczbę krawędzi grafu planarnego. Jak wyglądają proste grafy *maksymalnie planarne*, to znaczy takie, które mają największą możliwą liczbę krawędzi przy ustalonej liczbie wierzchołków? Przede wszystkim w odpowiadających im grafach płaskich każda ściana musi być trójkątem, o ile graf zawiera co najmniej trzy wierzchołki. Ten warunek jednoznacznie wyznacza liczbę krawędzi. Mianowicie, rozważmy ogólniejszą sytuację: w grafie płaskim, przedstawiającym graf $G = \langle V, E \rangle$, brzeg każdej ściany jest cyklem długości c . Zachodzi równość $c \cdot |F| = 2 \cdot |E|$, bowiem każda krawędź leży na brzegu dwóch ścian. Podstawiając do wzoru Eulera (1) wartość $2|E|/c$ zamiast $|F|$ dostaniemy $|E| = \frac{c}{c-2} \cdot (|V| - 2)$. Dla grafów maksymalnych planarnych mamy $c = 3$ i dostajemy $|E| = 3 \cdot |V| - 6$. Stąd także wynika, że dla dowolnego grafu planarnego $G = \langle V, E \rangle$, gdzie $|V| \geq 3$, zachodzi nierówność

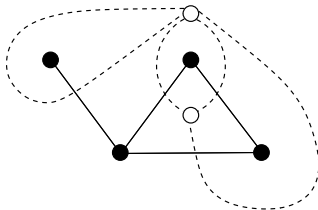
$$|E| \leq 3 \cdot |V| - 6. \quad (3)$$

Na przykład graf planarny o pięciu wierzchołkach może mieć co najwyżej $3 \cdot 5 - 6 = 9$ krawędzi. Stąd wynika, że K_5 nie jest planarny, ma bowiem dziesięć krawędzi.

Pokażemy, że każdy graf planarny ma co najmniej jeden wierzchołek stopnia co najwyżej 5. Mianowicie, lemat o uściskach dłoni mówi, że zachodzi równość $2 \cdot |E| = \sum_{v \in V} \deg v$. Gdyby zawsze zachodziły nierówności $\deg v \geq 6$, mielibyśmy nierówność $|E| \geq 3 \cdot |V|$, co jest sprzeczne z nierównością (3).

Mapą nazwiemy taki graf płaski, w którym każda krawędź leży na brzegach dwóch różnych ścian. *Kolorowaniem ścian mapy* nazywamy takie przyporządkowanie liczb naturalnych ścianom, w którym ściany o wspólnej krawędzi mają przyporządkowane różne liczby. W takim kontekście odpowiednie liczby nazywamy *kolorami*. Pokolorowanie k kolorami nazywamy także *k-kolorowaniem*. Interesują nas ekstremalne kolorowania, o minimalnej liczbie kolorów. Innym sposobem kolorowania grafu jest *kolorowanie wierzchołków*: kolory przyporządkowujemy wierzchołkom w taki sposób, że sąsiednie wierzchołki mają różne kolory. Kolorowania wierzchołkowe rozważamy tylko dla grafów bez pętli.

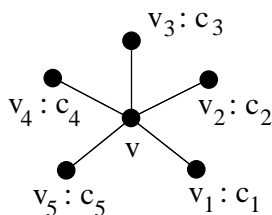
Dla danego grafu płaskiego P , jego *graf geometrycznie dualny* P^* otrzymujemy umieszczając punkty po jednym na każdej ścianie i przeprowadzając krzywą łączącą te punkty przez każdą krawędź grafu P . Przykład takiej konstrukcji pokazuje rysunek 4.



Rysunek 4: Wierzchołki grafu płaskiego są pełne a krawędzie ciągłe. Wierzchołki grafu dualnego są puste a krawędzie przerywane.

Jeżeli P ma n wierzchołków, m krawędzi i f ścian, to P^* ma f wierzchołków, m krawędzi i n ścian. Po powtórzeniu tej konstrukcji dostajemy graf płaski P^{**} taki, że odpowiadający mu graf jest izomorficzny z grafem odpowiadającym P . Graf płaski P jest mapą, w.t.w. gdy P^* nie ma pętli. Każde pokolorowanie ścian P (wierzchołków, odpowiednio) od razu tłumaczy się na pokolorowanie wierzchołków P^* (ścian, odpowiednio). Stąd wynika, że pytania dotyczące kolorowań ścian map można zastąpić równoważnymi pytaniami dotyczącymi wierzchołkowych kolorowań grafów planarnych.

Przez wiele lat takim otwartym pytaniem było: Jaka jest najmniejsza liczba kolorów, którymi można pokolorować ściany każdej mapy? Okazało się, że taką minimalną liczbą jest 4. Niestety znany dowód tego faktu jest skomplikowany. Zauważmy, że cztery kolory są czasem niezbędne, bowiem K_4 jest planarny a jego kolorowanie wierzchołkowe wymaga czterech kolorów. Pokażemy, że dowolny graf płaski P można pokolorować wierzchołkowo za pomocą nie więcej niż pięciu kolorów. Indukcja po liczbie wierzchołków P . Niech v wierzchołek stopnia nie większego niż 5. Pokolorujmy graf $P - v$. Jeżeli jeden z kolorów nie jest zajęty przez sąsiadów v to możemy go użyć dla v . Zatem pozostaje przypadek, gdy v ma dokładnie pięciu sąsiadów, używają oni razem wszystkich pięciu kolorów, jak na rysunku 5, wierzchołek v_i używa koloru c_i .



Rysunek 5: Sąsiedzi v i ich pokolorowanie.

Niech $P_{i,j}$ podgraf $P - v$ indukowany przez wierzchołki o kolorach c_i oraz c_j . Jeżeli wierzchołki v_1 i v_3 należą do różnych składowych $P_{1,3}$ to zamieniamy kolory między sobą w składowej zawierającej v_1 . Teraz v_1 używa c_3 i kolor c_1 jest zwolniony dla v . W przeciwnym przypadku istnieje droga łącząca v_1 i v_3 przechodząca tylko przez wierzchołki z kolorami c_1 i c_3 . Razem z v_1, v, v_3 odcina ona v_2 od v_4 . Zatem v_2 i v_4 leżą w różnych składowych $P_{2,4}$, możemy zamienić kolory między sobą w składowej $P_{2,4}$ zawierającej v_2 , co zwolni kolor c_2 . To kończy dowód twierdzenia o istnieniu 5-kolorowania wierzchołków dla każdego grafu planarnego.

Liczba chromatyczna grafu G , oznaczana $\chi(G)$, to najmniejsza liczba kolorów, którymi

można pokolorować wierzchołki G . Na przykład G jest dwudzielny w.t.w. gdy $\chi(G) = 2$. Niech $G = \langle V, E \rangle$ ma wierzchołki uporządkowane w ciąg $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Określmy kolorowanie wierzchołków G w następujący sposób. Niech v_1 ma kolor 1. Załóżmy, że v_1, \dots, v_{i-1} już mają przyporządkowane kolory. Niech v_i ma jako kolor najmniejszą dodatnią liczbę całkowitą różną od kolorów jego sąsiadów w $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$. O tym kolorowaniu mówimy, że jest *wyznaczone przez porządek* $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$. Dowolne uporządkowanie wierzchołków określa kolorowanie za pomocą co najwyżej $1 + \Delta(G)$ kolorów. Stąd mamy nierówność

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G). \quad (4)$$

Jest to najlepsze możliwe ogólne oszacowanie, bo równość może zachodzić, na przykład dla kliky lub cyklu nieparzystej długości. *Twierdzenie Brooksa* mówi, że są to jedyne przypadki, dla grafu spójnego, gdy w (4) zachodzi równość. Dowód przez indukcję po liczbie wierzchołków n . Przypadek $\Delta(G) = 2$ jasny, możemy założyć, że $\Delta(G) > 2$. Jeżeli G ma wierzchołek rozcinający v , to z założenia indukcyjnego kolorujemy składowe 2-spójne $G - v$ tak, by w każdej wierzchołek v miał kolor 1. Zatem pozostaje nam przypadek, gdy G jest 2-spójny. Jeżeli G nie jest regularny, to istnieje wierzchołek v_n stopnia mniejszego niż $\Delta(G)$. Określamy uporządkowanie wierzchołków $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, tak, by każdy v_i , dla $i < n$, był sąsiadem co najmniej jednego v_j , dla $j > i$; można tak zrobić ze spójności G . Wtedy to uporządkowanie określa kolorowanie za pomocą nie więcej niż $\Delta(G)$ kolorów: każdy wierzchołek v_i , oprócz v_n , ma w zbiorze $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ mniej niż $\Delta(G)$ sąsiadów, natomiast $\deg v_n < \Delta(G)$. Niech zatem G będzie regularny. Niech $S(v)$ oznacza zbiór sąsiadów wierzchołka v w (ustalonym) grafie G . Wystarczy pokazać istnienie wierzchołków v_1, v_2, v_n takich, że $v_1 \notin S(v_2)$, $v_n \in S(v_1) \cap S(v_2)$ oraz $G - \{v_1, v_2\}$ spójny. Wtedy bowiem istnieje uporządkowanie wierzchołków $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, takie, że każdy v_i , dla $i < n$, jest sąsiadem w $G - \{v_1, v_2\}$ jakiegoś wierzchołka w $\{v_{i+1}, \dots, v_n\}$. Takie uporządkowanie określamy zaczynając od v_n , jako v_{n-1} bierzemy sąsiada v_n różnego od v_1 i v_2 , który istnieje ponieważ $\Delta(G) > 2$, i tak dalej. Rozważmy kolorowanie wyznaczone przez ten porządek wierzchołków. Każdy wierzchołek v_i , oprócz v_n , ma mniej niż $\Delta(G)$ sąsiadów v_j takich, że $j < i$. Natomiast v_n sąsiaduje z v_1 i v_2 , one mają ten sam kolor, czyli sąsiedzi v_n używają mniej niż $\Delta(G)$ kolorów. Pokażemy istnienie takich v_1, v_2, v_n . Jeżeli G można rozpójnić usuwając dwa wierzchołki, weźmy jeden z nich, i nazwijmy go v_n . Graf $G - v_n$ nie jest 2-spójny, ma co najmniej dwa bloki, weźmy dwa bloki B_1 i B_2 wiszące w jego drzewie bloków. B_1 zawiera wierzchołek v_1 sąsiedni z v_n , podobnie B_2 zawiera wierzchołek v_2 sąsiedni z v_n , bowiem G jest 2-spójny. Natomiast v_1 nie sąsiaduje z v_2 , ponieważ $G - v_n$ nie jest 2-spójny. Jeżeli G nie można rozpójnić przez usunięcie dwóch wierzchołków, to weźmy *dowolną* trójkę wierzchołków v_1, v_2, v_n takich, że $v_1 \notin S(v_2)$, $v_n \in S(v_1) \cap S(v_2)$ oraz $G - \{v_1, v_2\}$ spójny. Pokażemy, że taka trójka istnieje. Weźmy dowolną krawędź $\{a, b\}$ w G , niech $X = \{a, b\}$. Będziemy zachowywali niezmiennik, że X indukuje klikę w G . Ze spójności istnieje wierzchołek v_1 poza X sąsiadujący z jakimś wierzchołkiem v_n w X . Jeżeli jednocześnie v_1 nie jest sąsiedni z pewnym $v_2 \in X$, to koniec szukania, w przeciwnym przypadku dołączamy v_n do X . Ta procedura da nam szukane wierzchołki najpóźniej po włączeniu $\Delta(G) + 1$ wierzchołków do X , bowiem G nie jest kliką. To kończy dowód twierdzenia Brooksa.

Grafy można kolorować na jeszcze inny sposób: *kolorowaniem krawędziowym* grafu

nazywamy takie przyporządkowanie kolorów krawędziom, że krawędzie incydentne mają różne kolory. Minimalna liczba kolorów w krawędziowym kolorowaniu grafu G nazywa się jego *chromatyczną liczbą krawędziową* i jest oznaczana przez $\chi'(G)$. Jest jasne, że $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, tym bardziej zaskakujące jest *twierdzenie Visinga*, które mówi, że $\chi'(G) \leq 1 + \Delta(G)$, o ile G jest grafem prostym. Zatem grafy proste dzielą się na dwie klasy: te dla których $\chi'(G) = \Delta(G)$ i te dla których $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Pokażemy *twierdzenie Königa*, które mówi, że jeżeli G jest dwudzielnym grafem prostym to $\chi'(G) = \Delta(G)$. Dowód przez indukcję po liczbie krawędzi. Weźmy takie kolorowanie grafu $G_1 = G - e$, gdzie krawędź $e = \{v_1, v_2\}$. Krawędzie incydentne z v_1 w G nie używają przynajmniej jednego spośród $\Delta(G)$ kolorów, niech będzie nim c_1 , podobnie określamy c_2 dla v_2 . Jeżeli $c_1 = c_2$ to kolorujemy e tym kolorem. W przeciwnym przypadku niech H podgraf G składający się z v_1 i wierzchołków do których można dojść z v_1 krawędziami o kolorach c_1 lub c_2 . Wierzchołek v_2 nie należy do H ponieważ G jest dwudzielnym. Zamieńmy kolory c_1 na c_2 i odwrotnie na krawędziach H . Dostajemy kolorowanie G_1 w którym krawędzie incydentne z v_1 i v_2 nie używają koloru c_2 , nim kolorujemy krawędź e .

Zadania

1. Pokaż, że graf można narysować na płaszczyźnie w.t.w. gdy na powierzchni sfery.
2. Pokaż, że jeżeli jakaś marszruta jest brzegiem ściany wewnętrznej, to graf można tak narysować, że będzie ona brzegiem ściany zewnętrznej.
3. Pokaż, że każdy graf można przedstawić w przestrzeni euklidesowej 3-wymiarowej tak jak grafy planarne na płaszczyźnie.
4. Jaki jest największy stopień regularnego grafu planarnego?
5. Pokaż wzór Eulera przez indukcję po liczbie krawędzi.
6. Czy wzór Eulera jest prawdziwy dla multigrafów?
7. Rozszerz wzór Eulera tak, by uwzględniał liczbę składowych spójnych grafu.
8. Ile ścian może mieć wielościan wypukły o n wierzchołkach i m krawędziach?
9. Pokaż, że jeżeli graf planarny $G = \langle V, E \rangle$ nie zawiera trójkątów oraz $|V| \geq 3$ to ma miejsce nierówność $|E| \leq 2|V| - 4$.
10. Pokaż, że $K_{3,3}$ nie jest planarny.
Wskazówka: Skorzystaj z zadania 9.
11. Niech d_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i grafu G . Pokaż, że jeżeli G jest spójny, planarny, o co najmniej trzech wierzchołkach, to ma miejsce nierówność

$$5d_1 + 4d_2 + 3d_3 + 2d_4 + d_5 - d_7 - 2d_8 - 3d_9 - 4d_{10} \cdots \geq 12,$$

która staje się równością gdy G maksymalny planarny.

12. Czy każde dwa maksymalne planarne grafy o takiej samej liczbie wierzchołków są izomorficzne?
13. Jaka jest największa liczba k taka, że każdy graf planarny o dostatecznie dużej liczbie wierzchołków zawiera co najmniej k wierzchołków stopnia nie większego niż 5?
14. Podaj przykład 5-spójnego grafu planarnego.
Wskazówka: taki graf ma co najmniej dwanaście wierzchołków.
15. Graf jest *zewnątrznie planarny* gdy można go tak narysować na płaszczyźnie, że wszystkie wierzchołki leżą na brzegu tej samej ściany. Pokaż, że maksymalny graf zewnętrze planarny $G = \langle V, E \rangle$ ma: co najmniej dwa wierzchołki stopnia 2, co najmniej trzy wierzchołki o stopniach nie większych niż 3, dokładnie $2|V| - 3$ krawędzi.
16. Niech P graf płaski. Pokaż, że podzbiór krawędzi P tworzy cykl w P w.t.w. gdy odpowiedni zbiór krawędzi w P^* jest rozcięciem.
17. Pokaż, że graf płaski P jest dwudzielny w.t.w. gdy P^* jest eulerowski.
18. Pokaż, że ściany mapy P można pomalować dwoma kolorami w.t.w. gdy P jest eulerowski.
19. Niech P mapa kubiczna, to znaczy regularna stopnia 3. Pokaż, że ściany P można pokolorować trzema kolorami w.t.w. gdy każda ściana P jest ograniczona parzystą liczbą krawędzi.
20. Pokaż, że jeżeli usunięcie każdego wierzchołka z G zmniejsza jego liczbę chromatyczną, to $\delta(G) \geq \chi(G) - 1$.
21. Wyznacz $\chi'(K_n)$ w zależności od tego czy n jest parzyste.
22. Niech G graf kubiczny hamiltonowski. Pokaż, że $\chi'(G) = 3$.
23. Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n podaj przykład multigrafu G_n , dla którego zachodzą równości $\Delta(G_n) = n$ oraz $\chi'(G_n) = \lfloor \frac{3}{2} \cdot n \rfloor$.

Wskazówka: Istnieje taki multigraf G_n , który ma tylko trzy wierzchołki.

Grafy: metody algebraiczne. Wiele kombinatorycznych własności grafu można wyrazić i zbadać odwołując się do algebraicznych własności reprezentujących je macierzy.

Niech G graf o n wierzchołkach v_k , $1 \leq k \leq n$, i m krawędziach e_k , $1 \leq k \leq m$. *Macierzą sąsiedztwa* grafu G nazywamy macierz $A(G) = \langle a_{ij} \rangle$, gdzie $a_{ij} = [v_i \text{ sąsiedni z } v_j]$, nawiasy kwadratowe to notacja Iwersona. Podobnie, jeżeli G jest grafem skierowanym, to *skierowaną macierz sąsiedztwa* dla G jest macierz zero-jedynkowa o wyrazach $a_{ij} = [v_i \rightarrow v_j \text{ jest krawędzią}]$.

Macierz incydencji grafu G jest także zero-jedynkowa o wyrazach $B(G) = \langle b_{ij} \rangle$, gdzie $b_{ij} = [v_i \text{ jest końcem } e_j]$; wiersze tej macierzy są indeksowane wierzchołkami G , a kolumny krawędziami G .

Macierz stopni grafu G jest $D(G) = \langle d_{ij} \rangle$, gdzie $d_{ii} = \deg v_i$ oraz $d_{ij} = 0$ dla $i \neq j$; podobnie jak macierz incydencji, macierz stopni też ma wiersze indeksowane wierzchołkami a kolumny krawędziami. Macierze sąsiedztwa $A(G)$, incydencji $B(G)$ i stopni $D(G)$ związane są tożsamością

$$B(G) \cdot B(G)^T = D(G) + A(G) . \quad (1)$$

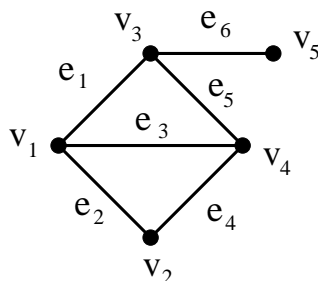
Rzeczywiście, w i -tym wierszu i k -tej kolumnie macierzy $B(G) \cdot B(G)^T$ znajduje się liczba

$$\langle B(G) \cdot B(G)^T \rangle_{ij} = \sum_k b_{ik} \cdot b_{jk} . \quad (2)$$

Jeżeli $i \neq j$ to $b_{ik} \cdot b_{jk} = 1$ tylko gdy v_i, v_j są końcami krawędzi e_k , w przeciwnym przypadku $b_{ik} \cdot b_{jk} = 0$. Jeżeli $i = j$ to liczba jedynek w sumie z prawej strony równości (2) wynosi $\deg v_i$.

Zorientowana macierz incydencji $C = C(G)$ powstaje z macierzy incydencji $B(G)$ przez zamianę jednego z wystąpień wartości 1 na -1 , w każdej kolumnie. Taka zamiana określa orientację krawędzi G .

Przykład. Rozważmy graf prosty G przedstawiony na rysunku 1. Oto odpowiednie ma-



Rysunek 1: Przykładowy graf prosty, z etykietami na wierzchołkach i krawędziach.

cierze dla grafu G , kolejno, sąsiedztwa $A(G)$, incydencji $B(G)$ oraz przykładowa zorien-

towana incydencji $C(G)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

Zauważmy, że jeżeli M jest kwadratową podmacierzą $C(G)$ to wyznacznik $\det M$ jest równy jednej z liczb $0, 1, -1$. Rzeczywiście, jeżeli każda kolumna M zawiera $+1$ i -1 to suma wierszy M jest wektorem zerowym, czyli $\det M = 0$. Podobnie jeżeli jedna z kolumn M zawiera tylko same zera. W przeciwnym przypadku istnieje kolumna tylko z jednym elementem niezerowym, równym ± 1 : rozwijamy wyznacznik względem tej kolumny. Dalej postępujemy rekurencyjnie.

Rozważmy szczególny przypadek podmacierzy M rozmiaru $(n-1) \times (n-1)$. Kolumny macierzy M odpowiadają zbiorowi $n-1$ krawędzi S . Pokażemy, że macierz M jest nieosobliwa w.t.w. gdy podgraf H rozpinający G o krawędziach z S jest drzewem. Niech wierzchołek v_i odpowiada numerowi wiersza i , którego nie ma w M . Jeżeli H nie jest drzewem, to ma co najmniej dwie spójne składowe. Weźmy składową A nie zawierającą wierzchołka v_i . Zauważmy, że zbiór wierszy W odpowiadających wierzchołkom tej składowej jest liniowo zależny. Rzeczywiście, każda krawędź z A ma końce różne od v_i , zatem w odpowiadającej jej kolumnie wiersze w których są 1 i -1 należą do W , stąd wynika, że suma elementów W daje wiersz zerowy. Przypuśćmy, że H jest drzewem. Pokażemy jak przekształcić H do macierzy H' poprzez permutacje wierszy i kolumn tak, że H' jest trójkątna i na przekątnej ma ± 1 . Zrobimy to przez określenie nowej numeracji wierzchołków i krawędzi. Niech wierzchołek w_1 oznacza różny od v_i wierzchołek końcowy H , a f_1 to krawędź, której jest końcem. Kolejno określamy: w_{j+1} to wierzchołek końcowy $H - \{w_1, \dots, w_j\}$, różny od wierzchołka v_i , a f_j to krawędź, której jest końcem. Teraz wystarczy przestawić wiersze i kolumny by ich kolejność odpowiadała nowej numeracji wierzchołków i krawędzi. To kończy dowód. W szczególności dostaliśmy, że jeżeli G jest spójny, to rząd C jest równy $n-1$.

Zachodzi następująca tożsamość podobna do (1):

$$C(G) \cdot C(G)^T = D(G) - A(G) . \quad (3)$$

Macierz $D(G) - A(G)$ nazywamy *macierzą Kirchhoffa grafu G* , i oznaczamy przez $K(G)$. *Twierdzenie Kirchhoffa* mówi, że liczba etykietowanych drzew rozpinających grafu G jest równa wartości dopełnienia algebraicznego dowolnego elementu macierzy $K(G)$.

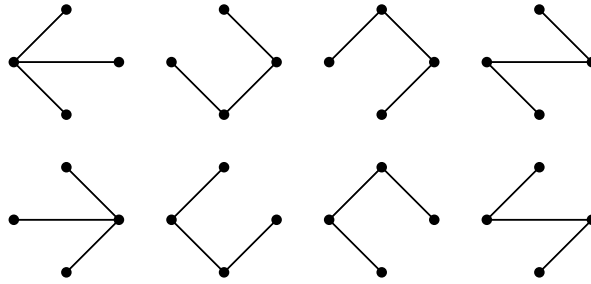
Przykład: Oto macierz Kirchhoffa dla grafu G z rysunku 1:

$$K(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Usuńmy środkowy wiersz i środkową kolumnę z macierzy $K(G)$. Otrzymana macierz ma same zera w ostatniej kolumnie, oprócz jednej jedynki. Rozwijamy jej wyznacznik względem tej kolumny i dostajemy wartość

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} &= 3 \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & - \end{bmatrix} \\ &= 15 - 4 - 3 = 8 . \end{aligned}$$

Każde drzewo rozpinające G musi zawierać e_6 , zatem możemy ją opuścić. Drzewa rozpinające grafu $G - e_6$ przedstawia rysunek 2.



Rysunek 2: Etykietowane drzewa rozpinające grafu $G - e_6$.

Zatem graf G ma osiem etykietowanych poddrzew rozpinających. \diamond

Przedstawimy teraz dowód twierdzenia Kirchhoffa. Skorzystamy z następującego *twierdzenia Cauchy-Bineta*: jeżeli F_1 i F_2 są macierzami $n_1 \times n_2$ i $n_2 \times n_1$ odpowiednio, gdzie $n_1 \leq n_2$, to $\det(F_1 F_2)$ jest sumą iloczynów wyznaczników dla odpowiadających podmacierzy F_1 i F_2 . Tutaj *odpowiadających* oznacza, że numery kolumn w F_1 są te same co numery odpowiadających wierszy w F_2 .

Usuając wiersz z $C(G)$ i kładąc otrzymaną macierz jako M_1 a M_1^T jako M_2 otrzymujemy, że $\det(M_1 \cdot M_2)$ jest minorem głównym macierzy $K(G)$, na mocy (3). Jest on postaci $\sum_F \det F \cdot \det F^T$, gdzie sumujemy po odpowiadających podmacierzach F i F^T . Jeżeli F odpowiada drzewu rozpinającemu, to $\det F \cdot \det F^T = (\det F)^2 = 1$. Zatem dowolny minor główny $K(G)$ jest równy liczbie drzew rozpinających G . A co z pozostałymi minorami? Też mają taką samą wartość, z dokładnością do modułu! Mianowicie, niech $\text{adj } F$ oznacza macierz dopełnień algebraicznych F , to znaczy $\text{adj } F = \langle f_{ij} \rangle$, $f_{ij} = (-1)^{i+j} F_{ij}$, F_{ij} jest minorem macierzy powstałej przez usunięcie i -tego wiersza i j -tej kolumny z F . Wiadomo, że prawdziwa jest równość

$$F \cdot \text{adj } F = (\det F) \cdot I_n , \quad (4)$$

gdzie I_n to macierz rozmiaru $n \times n$ mająca jedynki na przekątnej, a zera w pozostałych miejscach. Macierz postaci (4) jest zerowa dla $F = K(G)$, ponieważ rząd $K(G)$ jest równy rzędowi C , zatem jest co najwyżej $n - 1$. Interpretując $K(G)$ jako macierz przekształcenia liniowego widzimy, że każda kolumna $\text{adj } K(G)$ należy do jego jądra. Jeżeli graf G jest spójny, to rząd macierzy $K(G)$ równy dokładnie $n - 1$, wtedy wymiar jądra

jest równy 1. Niech $j_n = \langle 1, \dots, 1 \rangle$ oznacza wektor złożony z n jedynek. Wektor j_n należy do jądra, więc jest ono przez niego rozpięte. Zatem dwa elementy w tej samej kolumnie macierzy $\text{adj } K(G)$ są równe. Dodatkowo macierz $\text{adj } K(G)$ jest symetryczna, zatem ma wszędzie takie same elementy. To kończy dowód twierdzenia Kirchhoffa.

Wielomianem charakterystycznym grafu G nazywamy wielomian charakterystyczny jego macierzy sąsiedztwa. Podobnie *wartością własną* grafu G nazywamy wartość własną jego macierzy sąsiedztwa. Uporządkowany multizbiór wartości własnych grafu G nazywamy *spektrum* G .

Przykład: Graf K_4 ma następującą macierz sąsiedztwa:

$$A(K_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oto jej cztery ortogonalne wektory własne:

$$\begin{array}{ll} \langle 1, 1, 1, 1 \rangle & \text{o wartości własnej } 3 \\ \langle 1, 1, -1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } -1 \\ \langle 1, -1, 1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } -1 \\ \langle -1, 1, 1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } -1 \end{array}$$

Zatem ciąg $\langle -1, -1, -1, 3 \rangle$ jest spektrum grafu K_4 .

Graf $K_{2,2}$ ma następującą macierz sąsiedztwa:

$$A(K_{2,2}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oto jej cztery ortogonalne wektory własne:

$$\begin{array}{ll} \langle 1, 1, 1, 1 \rangle & \text{o wartości własnej } 2 \\ \langle 1, 1, -1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } -2 \\ \langle 1, -1, 1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } 0 \\ \langle -1, 1, 1, -1 \rangle & \text{o wartości własnej } 0 \end{array}$$

Zatem ciąg $\langle -2, 0, 0, 2 \rangle$ jest spektrum grafu $K_{2,2}$. \diamond

Macierz sąsiedztwa $A(G)$ jest rzeczywista i symetryczna, zatem wszystkie jej wartości własne są rzeczywiste i istnieje baza ortogonalna złożona z jej wektorów własnych. Niech $\lambda_{\min}(G)$ i $\lambda_{\max}(G)$ będą minimalną i maksymalną wartością własną G . Wielomian charakterystyczny $A(G)$ jest postaci

$$(-1)^n (x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^n a_n), \quad (5)$$

gdzie współczynnik a_i jest równy sumie minorów głównych $A(G)$ stopnia i . Ślad $A(G)$ jest równy 0, więc suma wartości własnych G , wliczając krotności, jest równa 0, w

szczegółności $\lambda_{\min}(G) \leq 0$. To także oznacza, że zachodzi równość $a_1 = 0$. Niezerowe minory główne rozmiarów 2×2 są postaci

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 ,$$

każdy z nich odpowiada krawędzi. Stąd mamy równość $a_2 = -m$. Niezerowe minory główne rozmiarów 3×3 są równe

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2 .$$

każdy z nich odpowiada trójkątowi K_3 , zatem współczynnik a_3 jest równe podwojonej liczbie trójkątów w grafie G .

Moduły wartości własnych G są nie większe niż $\Delta(G) = \Delta$, gdzie $\Delta(G)$ to maksymalny stopień wierzchołka grafu G . Rzeczywiście, niech $x = \langle x_i \rangle \neq 0$ będzie wektorem własnym o wartości własnej λ . Można założyć, że $|x_i| \leq |x_s| = 1$, dla pewnego $1 \leq s \leq n$. Niech $A(G) = \langle a_{ij} \rangle$. Rozważmy s -tą współrzędną wektora $A(G)x = \lambda x$. Jej moduł szacuje się następująco:

$$\left| \sum_{i=1}^n a_{si} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n a_{si} |x_i| \quad (6)$$

$$\leq |x_s| \deg(v_s) \quad (7)$$

$$\leq \Delta . \quad (8)$$

Jeżeli Δ jest wartością własną, to nierówności w (6–8) są równościami, i mamy kolejno: $\deg v_s = \Delta$, $x_s = 1$, oraz $x_i = 1$ gdy v_i sąsiaduje z v_s . Dla każdego takiego i możemy zastosować ten sam argument gdyż $x_i = 1$, a jeżeli G jest spójny to dla wszystkich wierzchołków. Stąd dostajemy, że jeżeli G jest spójny i Δ jest wartością własną, to G jest regularny stopnia Δ . To także pokazuje, że krotność Δ jest równa jeden. Sprawdzenie odwrotnej implikacji jest bezpośrednie: regularny graf ma wektor j_n jako wektor własny odpowiadający wartości własnej Δ .

Jeżeli natomiast $-\Delta$ jest wartością własną grafu, to podobnie zachodzą równości w szacowaniu (6–8). Zauważmy że wtedy $x_i = -1$, gdy v_i sąsiaduje z v_s , a jeżeli v_k sąsiaduje z takim v_i , to $x_k = 1$, i tak dalej, naprzemiennie. Zbiór wierzchołków spójnego grafu G możemy zatem podzielić na dwie części zależnie od znaku x_i , co pokazuje, że G jest dwudzielny, i regularny stopnia Δ .

Jedną z wartości własnych $K(G)$ jest 0 bowiem $K(G)$ jest osobliwa. W wielomianie charakterystycznym $K(G)$ przy x stoi współczynnik równy iloczynowi $(-1)^{n-1} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{n-1}$, gdzie $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$ pozostałe wartości własne. Z drugiej strony jest to suma n minorów głównych $K(G)$ stopnia $n - 1$, z dokładnością do znaku. Z twierdzenia Kirchhoffa liczba etykietowanych poddrzew rozpinających grafu G jest równa iloczynowi $n^{-1} \gamma_1 \dots \gamma_{n-1}$.

Przykład: Sprawdzamy, że ciąg $\langle -3, 0, 0, 0, 0, 3 \rangle$ jest spektrum grafu $K_{3,3}$. Ciąg wartości własnych macierzy Kirchhoffa $K(K_{3,3})$ dostajemy przesuwając spektrum grafu $K_{3,3}$ o 3,

zatem jest nim ciąg $\langle 0, 3, 3, 3, 3, 6 \rangle$. Dostajemy, że $K_{3,3}$ ma $6^{-1} \cdot 3^4 \cdot 6 = 81$ etykietowanych poddrzew rozpinających. \diamond

Liczność niezależnego zbioru X wierzchołków grafu regularnego G stopnia r można oszacować następującym wzorem *Hoffmana*:

$$|X| \leq \frac{n \cdot \lambda_{\min}}{\lambda_{\min} - r}, \quad (9)$$

gdzie $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(G)$. Oto jego uzasadnienie. Niech J_n oznacza macierz rozmiarów $n \times n$ złożoną z samych jedynek. Rozważamy macierz

$$U = A(G) - \lambda_{\min} \cdot I_n - (r - \lambda_{\min}) \cdot n^{-1} \cdot J_n.$$

Wektor j_n jest wektorem własnym macierzy $A(G)$, stąd mamy równość $U \cdot j_n = 0$. Każdy inny wektor własny $A(G)$ prostopadły do j_n jest wektorem własnym macierzy U odpowiadającym nieujemnej wartości własnej, ponieważ macierz $A(G) - \lambda_{\min} \cdot I_n$ ma nieujemne wartości własne. Niech \bar{X} oznacza ciąg $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, gdzie $x_i = [v_i \in X]$. Wprowadźmy także notację $a \circ b$ dla oznaczenia iloczynu skalarnego $a b^T$ wektorów a i b . Zbadajmy i -te współrzędne wektorów \bar{X} oraz $A(G) \bar{X}$. Jeżeli $v_i \in X$ to $A(G) \bar{X}$ ma zerową i -tą współrzędną z niezależności X . Jeżeli $v_i \notin X$ to \bar{X} ma zerową i -tą współrzędną z określenia \bar{X} . Stąd wynika równość

$$\bar{X} \circ A(G) \bar{X} = 0.$$

Rozważmy liczbę

$$\bar{X} \circ U \bar{X} = -\lambda_{\min} |X| - (r - \lambda_{\min}) \cdot n^{-1} \cdot |X|^2.$$

Trzeba pokazać, że jest ona nieujemna. Niech w_i ortogonalne wektory własne odpowiadające wartościom własnym b_i macierzy U , niech także $\bar{X} = \sum a_i \cdot w_i$. Wtedy $U \bar{X} = \sum a_i \cdot b_i \cdot w_i$, a stąd $\bar{X} \circ U \bar{X} = \sum b_i \cdot a_i^2$. Ale macierz U ma nieujemne wartości własne b_i , co kończy dowód nierówności (9).

Można oszacować liczbę chromatyczną grafu G następująco:

$$\chi(G) \geq 1 - \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}, \quad (10)$$

gdzie $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(G)$ oraz $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(G)$. Pokażemy nierówność (10) dla grafów regularnych. Podział zbioru wierzchołków grafu G na rozłączne niezależne podzbiory określa kolorowaniem wierzchołkowe: wierzchołki w tym samym bloku mają ten sam kolor. Zatem z nierówności Hoffmana (9) wynika nierówność

$$\chi(G) \geq n \cdot \frac{\lambda_{\min} - r}{n \cdot \lambda_{\min}} = 1 - \frac{r}{\lambda_{\min}},$$

co daje (10) ponieważ jeżeli r jest stopniem regularnego grafu G to mamy $\lambda_{\max} = r$.

Zachodzi także następujące szacowanie $\chi(G)$ od góry:

$$\chi(G) \leq 1 + \lambda_{\max}. \quad (11)$$

Oto jego uzasadnienie. Niech w_1, w_2, \dots numeracja wierzchołków, H_i oznacza podgraf indukowany przez pierwsze i spośród nich. Numeracja jest *dobra* dla liczby całkowitej dodatniej t gdy stopień w_i w H_i jest nie większy niż t . Jeżeli liczba t jest minimalna taka, że istnieje numeracja dla której t jest dobra, to t nazwijmy *liczbą stopniową*, i oznaczmy przez $\chi_s(G)$. Zachodzi nierówność $\chi(G) \leq \chi_s(G) + 1$: mianowicie, rozważajmy wierzchołki w kolejności numeracji, dla kolejnego wystarczy kolorów by pokolorować podgraf H_i . Stąd dla uzasadnienia (11) wystarczy pokazać nierówność

$$\chi_s(G) \leq \lambda_{max}.$$

Dowód przebiega przez indukcję po liczbie wierzchołków. Dla grafu G o dwóch wierzchołkach, jeżeli G jest krawędzią, to $\chi_s(G) = 1$, a spektrum jest równe $\langle -1, 1 \rangle$. W kroku indukcyjnym, wystarczy pokazać, że jeżeli H podgraf indukowany G to ma miejsce nierówność

$$\lambda_{max}(H) \leq \lambda_{max}(G) .$$

Skorzystamy z faktu, że maksymalna wartość własna macierzy symetrycznej M to maksimum funkcji $x \circ Mx$ na sferze o promieniu 1 (patrz zadanie 13). Niech H będzie podgrafem grafu G otrzymanym przez usunięcie jednego z wierzchołków. Niech x to wektor taki, że $x \circ A(H)x = \lambda_{max}(H)$ oraz $x \circ x = 1$. Rozszerzając x o jedną nową współrzędną 0 dostajemy wektor x' taki, że $x' \circ x' = 1$ oraz $x' \circ A(G)x' = \lambda_{max}(H)$, co kończy dowód.

Niech $\chi_G(i)$ oznacza liczbę pokolorowań grafu G za pomocą nie więcej niż i kolorów. Na przykład, jeżeli G jest kliką K_n to $\chi_G(i) = i(i-1) \dots (i-n+1)$, a jeżeli G składa się z n wierzchołków izolowanych, to $\chi_G(i) = i^n$. Dla drzewa też jest to łatwe do obliczenia. Jeżeli drzewo ma n wierzchołków, to wybierzmy wierzchołek końcowy. Możemy go pokolorować i sposobami; gdy wierzchołek ma już kolor, to każdy z jego sąsiadów może mieć $i-1$ kolorów. Znowu otrzymujemy wielomian, tym razem $i(i-1)^{n-1}$.

Niech e para wierzchołków grafu G , przypomnijmy, że $G : e$ oznacza graf powstały przez utożsamienie wierzchołków w e . Zachodzi równość

$$\chi_G(i) = \chi_{G-e}(i) - \chi_{G:e}(i) . \quad (12)$$

Dla uzasadnienia, rozważmy funkcje, które nadają wierzchołkom kolory, przy czym wierzchołki połączone krawędzią różną od e mają różne wartości. Składnik χ_{G-e} to liczba takich funkcji, natomiast składnik $\chi_{G:e}$ to liczba takich funkcji, które nadają końcom e ten sam kolor. Stosując rekurencyjnie zależność (12) widzimy, że $\chi_G(i)$ jest sumą liczb postaci $\pm \chi_H(i)$, gdzie H są grafami całkowicie niespójnymi o nie więcej niż n wierzchołkach. Zatem $\chi_G(x)$ jest wielomianem zmiennej x stopnia n , nazywanym *wielomianem chromatycznym*. Jego współczynnik przy x^n jest równy 1, bowiem sposób redukcji opisany równaniem (12) doprowadzi tylko do jednego podgrafu o n wierzchołkach. Ten sam argument daje, że będzie dokładnie tyle grafów o $n-1$ wierzchołkach ile wynosi liczba m krawędzi grafu G . Rzeczywiście, rozwijając równanie (12) najpierw przechodzimy do grafów postaci $G : e$, a potem tylko do grafów powstałych przez usuwanie krawędzi, bowiem liczba wierzchołków już nie może się zmniejszyć. To pokazuje, że współczynnik przy x^{n-1} w $\chi_G(x)$ jest równy $-m$.

Zadania

1. Pokaż równość (3).
2. Niech B macierz incydencji grafu G . Pokaż, że macierz sąsiedztwa grafu krawędzi $L(G)$ jest równa $B^T B - 2I_m$.
3. Niech A to skierowana macierz sąsiedztwa turnieju o n wierzchołkach. Pokaż, że rząd A jest nie mniejszy niż $n - 1$.
4. Niech $A = A(G)$. Pokaż:
 1. Liczba marszrut długości i w G łączących v_j z v_k jest równa elementowi macierzy A^i na pozycji $\langle j, k \rangle$.
 2. Jeżeli G jest grafem spójnym o średnicy d to macierze A^i , dla $1 \leq i \leq d$, są liniowo niezależne.
5. Wyprowadź wzór Caley'a z twierdzenia Kirchhoffa.
6. Podaj interpretację grafową współczynnika a_4 występującego w wielomianie charakterystycznym danym wzorem (5).
7. Znajdź spektra grafów pełnych K_n i $K_{n,m}$. Stąd wyznacz ich liczby etykietowanych poddrzew rozpinających.
8. Pokaż, że graf spójny o n wierzchołkach i średnicy d ma co najmniej $d + 1$ różnych wartości własnych.
Wskazówka: rozważ wielomian minimalny $A(G)$.
9. Pokaż, że macierz J_n jest skończoną kombinacją liniową potęg macierzy $A(G)$ w.t.w. gdy G spójny i regularny.
10. Pokaż, że wartości własne grafu krawędzi $L(G)$ są nie mniejsze niż -2 .
Wskazówka: Niech $B = B(G)$ macierz incydencji G ; wtedy macierz $B \cdot B^T$ ma nieujemne wartości własne.
11. Pokaż, że jeżeli G dwudzielny i ma wartość własną λ to $-\lambda$ też jest wartością własną, o tej samej krotności.
12. Pokaż równość

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m ,$$

gdzie λ_i to wartości własne $A(G)$, a m to liczba krawędzi G . Stąd wywnioskuj, że zachodzi nierówność $\lambda_{max} \leq \sqrt{2m}$.

13. Niech A macierz symetryczna o wartościach rzeczywistych. Niech λ_{\min} i λ_{\max} krańcowe wartości własne A . Pokaż, że funkcja $f(x) = x \circ Ax$ określona na sferze o promieniu 1 przyjmuje wartości λ_{\min} i λ_{\max} jako swoje minimum i maksimum, odpowiednio, na wektorach własnych A .

Wskazówka : Metoda mnożników Lagrange'a.

14. Pokaż, że współczynnik przy x^{n-2} w wielomianie chromatycznym $\chi_G(x)$ jest równy $\frac{m(m-1)}{2} - t$, gdzie t to liczba trójkątów w G .
15. Pokaż równość

$$\chi_G(i) = \chi_{G+e}(i) + \chi_{G:e}(i)$$

dla każdej pary wierzchołków e , która *nie jest* krawędzią G .

16. Pokaż, że wielomian chromatyczny grafu G o n wierzchołkach i k spójnych składowych jest postaci

$$\chi_G(x) = \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^k \cdot b_i \cdot x^{n-i},$$

gdzie $b_i > 0$, dla $0 \leq i \leq n - k$.

Wskazówka : indukcja, w oparciu o wzór z zadania 15.

17. Pokaż, że zero jest zawsze pierwiastkiem wielomianu chromatycznego. Jak zinterpretować jego krotność w terminach grafowych?
18. Pokaż, że gdy $\chi_G(x) = x(x-1)^{n-1}$ to G jest drzewem.
19. Znajdź wielomian chromatyczny cyklu C_n .