Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 4. II. 2008

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych, czytelnie podpisanych*** *kartkach — proszę o napisanie w lewym górnym rogu* ***każdej*** *kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania.*

W czasie egzaminu z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*

Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (B) oraz 4. (A), powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*

Czas na rozwiązanie zadań: 160 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o granicy ciągu monotonicznego”.

(B) [**6 pkt.**] Znajdź przykład takiego ciągu liczbowego $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, że dla dowolnego $N \in \mathbb{N}$ ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant N}$ **nie** jest monotoniczny oraz zachodzi $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź wszystkie takie $p > 0$, dla których jest zbieżny (tj. ma granicę skończoną) ciąg zadany dla $n \in \mathbb{N}$ wzorem $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p + k + 1}{k^3 - k^2 + 1}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o osiąganiu wartości pośrednich”(Bolzano „o własności Darboux”).

(B) [**6 pkt.**] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1] \cup (2;3) \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[0;1]$, **b)** $[0;1] \cup [2;3]$, **c)** zbiór trzyelementowy $\{1,\ 2,\ 3\}$.

(C) [**10 pkt.**] **a)** Wykaż, że równanie $\ln x = \frac{1}{3}x$ ma przynajmniej dwa rozwiązania $x > 0$. **b)** Czy istnieją trzy różne rozwiązania tego równania?

Zadanie 3.

(A) [**10 pkt.**] Niech $\alpha > 0$ i rozważmy funkcję $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = xe^{-\alpha x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$. Znajdź kres górny i kres dolny zbioru wartości tej funkcji.

(B) [**4 pkt.**] Podaj wzory definiujące n-ty wielomian Taylora i n-tą resztę Taylora funkcji f w punkcie x_0. Sformułuj twierdzenie Peano o postaci reszty Taylora.

(C) [**6 pkt.**] **a)** Czy funkcja g z punktu (A) dla $\alpha = 1$ jest sumą jakiegoś szeregu potęgowego o środku w $x_0 = 0$ (na całej swej dziedzinie)? **b)** Znajdź wartość pochodnej rzędu 1000 powyższej funkcji g w punkcie 0.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenia Rolle'a i Lagrange'a „o wartości średniej”.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód **jednego** twierdzenia wybranego spośród powyższych.

(C) [**10 pkt.**] Niech $f : [1;+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną taką, że $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = a$ oraz niech $a_n = f(n+1) - f(n)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wykaż, że $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.