Oblicz:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)}.$$

Stosując metodę pobożnych życzeń będę chciał rozwinąć szereg w różnicę wyrazów, by móc go "teleskopowo" zwinąć do postaci zwartej. Mianownik sugeruje dwie oddzielne sumy, więc zaryzykuję policzenie następnego wyrażenia:

$$\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+5}-\frac{2}{k+3}=\frac{2(k+3)}{(k+1)(k+5)}-\frac{2}{k+3}=$$

$$=\frac{2(k+3)^2-2(k+1)(k+5)}{(k+1)(k+3)(k+5)}=\frac{2((k^2+6k+9)-(k^2+6k+5))}{(k+1)(k+3)(k+5)}=$$

$$=\frac{8}{(k+1)(k+3)(k+5)}$$

I w ten sposób, dzięki sporej ilości szczęścia dowiedziałem się, że:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)}=\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)\right)=$$

(zakładając, że szukana suma jest skończona)

$$=\frac{1}{8}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)\right) \tag{1}$$

Teraz z rozpisania kilku pierwszych wyrazów, skracania, wyciągania wniosków i przejścia granicznego:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)=\frac{3}{2}$$

(oraz analogicznie)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+5}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)=\frac{7}{12}$$

Zatem, ponieważ powyższe szeregi są zbieżne, (1) faktycznie zachodzi i prawdziwa jest równość:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)(k+5)}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{12}\right)=\frac{11}{96}$$