

Kolokwium z Analizy Matematycznej I

dla Informatyków, 1. XII. 2008

- Proszę o rozwiązania zadań na **osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu kartkach** (własne imię, nazwisko, numer indeksu, grupa ćwiczeniowa ew. „NSI” ; oraz poniżej — „Zadanie nr...”).
- Podczas kolokwium **nie wolno** korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.
- Wszystkie rozwiązania powinny zawierać **uzasadnienia** (tzn. dowody). **Należy** się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. **Należy** także pamiętać o sprawdzaniu koniecznych do ich użycia założeń!
- Za każde z zadań można otrzymać maksymalnie 15 punktów.
- Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 20 min.

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru

$$\left\{ \frac{nk}{1+2n+3k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Czy zbiór ten posiada element największy? A najmniejszy (uwaga: $0 \notin \mathbb{N}$)?

Zadanie 2. Zakładamy, że $\{r_n\}_{n \geq 1}$ jest pewnym ciągiem o wszystkich wyrazach niezerowych takim, że

$$r_{2n} \longrightarrow \frac{1}{2008}, \quad r_{2n+1} \longrightarrow \frac{1}{2009}.$$

Znajdź granicę ciągu $\{a_n\}_{n \geq 1}$ określonego rekurencyjnie warunkami:

$$a_1 = x, \quad a_{n+1} = r_n \cdot a_n \quad \text{dla } n \geq 1,$$

w zależności od wyboru $x \in \mathbb{R}$.

Zadanie 3. Znajdź granice ciągów o wyrazach zadanych następująco:

$$\text{a) } a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n}}; \quad \text{b) } b_n = \sqrt[n!]{\frac{1}{2^{(n!)}} - \frac{1}{3^{(n!)}}}.$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdzie

$$a_n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{2008}\right)^n} \cdot n^{2008} + \frac{\sqrt{n^3 + n} - \sqrt{n^3}}{\sqrt{n(n+1)} - 1}.$$