Na pierwszy rzut oka widać, że mamy do czynienia z problemem rekurencyjnym. Zastanówmy się więc, czy mając policzony $(n-1)$szy trójkąt, jesteśmy jakoś w stanie policzyć n-ty.

Trójkąt o 1 większy, uzyskujemy dokładając (np. u dołu) dodatkowy rządek, o podstawie szerokości n. Nasza nowa figura zawiera wszystkie trójkąty z przypadku $n-1$ oraz pare dodatkowych. Łatwo zauważyć, że te "pare dodatkowych" musi zawierać w sobie fragment dołożonego rządku. Policzmy ile ich jest.

Warto odnotować, że dodany rządek składa się z dwóch rodzajów trójkątów. n z nich ma normalną orientację, $n-1$ jest obrócone o 180°.

Zacznijmy od tych z normalną orientacją. Licząc pojedynczo jest ich n, parami (wraz z trojkątami z rządka wyżej) tworzą $n-1$ trójkątów o boku 2, trójkami (wraz z 2 wyższymi rządkami) dają $n-2$ trójkątów o boku 3 itd. Zatem w sumie zawiera je w sobie $n+(n-1)+...+1=\frac{n(n+1)}{2}$ trójkątów.

Z tymi o orientacji odwrotnej będzie nieco gorzej. Pojedynczo jest ich $n-1$, z rządkiem wyżej są w stanie stworzyć trójkąty o boku 2, ale będzie ich już o 2 mniej (bo nasz trójkąt się zwęża u góry, one natomiast rozszerzają), czyli $n-3$ itd. W sumie daje to

$$(n-1)+(n-3)+...+(1+[2\backslash n])=\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}(n-1-2l)$$

(gdzie $[2\backslash n]$ to notacja Iversona z podzielnością n przez 2).

Podsumowując:

$$T_n=T_{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}+\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1}(n-1-2l) \tag{1}$$

Wzór ten rozwija się w prosty sposób w szereg, przy czym szczęśliwie $\frac{1(1+1)}{2}+\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{1}{2}\rfloor-1}(1-1-2l)=1+0=1=T_1$

zatem

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}+\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-1-2l)\right) \tag{2}$$

Teraz doprowadzę to cudowne wyrażenie do postaci jawnej metodą małych kroczków. Korzystając z właściwości sumy skończonej podzielę sobie 2 na kawałeczki:

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1}(k-1-2l)\right)=L+R$$

No to od lewej...

$$L = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k(k+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} k$$

(korzystajac z klasycznych wzorów na sumy)

$$L = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{12} =$$

$$\frac{n(n+1)((2n+1)+3)}{12} = \frac{n(n+1)(2n+4)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \tag{3}$$

Prawą stronę zaczniemy od sumy wewnętrznej:

$$\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k - 1 - 2l) = \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} k - \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 1 - 2 \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} l =$$

$$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1) \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor^2 + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor^2$$

Teraz, zauważmy, że dzięki notacji Iversona:

$$I_k = [\neg(2 \backslash k)]$$

$$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor = \frac{k - I_k}{2}$$

I wtedy:

$$\lfloor \frac{k}{2} \rfloor k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor^2 = \frac{k^2 - kI_k}{2} - \left(\frac{k - I_k}{2} \right)^2 = \frac{2k^2 - 2kI_k - (k^2 - 2kI_k + I_k^2)}{4} =$$

$$\frac{k^2 - I_k^2}{4} = \frac{k^2 - I_k}{4}$$

W tym momencie możemy wrócić do oblicznia R

$$R = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1} (k - 1 - 2l) \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 - I_k}{4} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - I_k) =$$

(ponieważ suma skończona)

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} I_k$$

$\sum_{k=1}^{n} I_k$ to ilość liczb nieparzystych w przedziale $[1; n]$, czyli dokładnie $\lceil \frac{n}{2} \rceil$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} I_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} - \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{4} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} \tag{4}$$

Uff... to teraz składając (3) i (4) razem, uzyskujemy ostatecznie (2):

$$T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{n(n+1)(2n+1) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} =$$

$$\frac{4n(n+1)(n+2) + n(n+1)(2n+1) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} =$$

$$\frac{n(n+1)(4(n+2) + (2n+1)) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} = \frac{n(n+1)(4n+8+2n+1) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} =$$

$$\frac{n(n+1)(6n+9) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} = \frac{3n(n+1)(2n+3) - 6\lceil \frac{n}{2} \rceil}{24} =$$

$$\frac{n(n+1)(2n+3) - 2\lceil \frac{n}{2} \rceil}{8}$$