Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin II, 3 III 2010

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno korzystać z*** *notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), ***powinny zawierać uzasadnienia*** *(tzn. dowody).* ***Należy się w nich powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także* ***pamiętać o sprawdzaniu założeń*** *koniecznych do ich użycia!*
Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 50 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o trzech ciągach”.

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia.

(C) [**10 pkt.**] Oblicz, jeśli istnieje, granicę ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant 8}$ danego wzorem $a_n = \dfrac{\left(\sqrt[n]{7^n+n}-\frac{1}{7}\right)^n}{7^n-n^7}$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium asymptotyczne zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ spełniającego $\dfrac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{a_n} \longrightarrow 1$

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ jest zbieżny? **b)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n}$ jest bezwzględnie zbieżny? **c)** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{5^n - n^{2010}4^n}{3n5^n + (\ln n)^{100}\left(\frac{9}{2}\right)^n}$.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów”.

(B) [**6 pkt.**] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [10;11] \cup [12;13] \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[-1;1]$, **b)** $[0;100) \cup (121;131]$, **c)** $[10;20) \cup (15;30]$.

(C) [**10 pkt.**] Czy funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \ln(e^x + e^9) - e^x$ osiąga któryś ze swych kresów? Znajdź zbiór wartości tej funkcji.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora.

(B) [**6 pkt.**] Niech T_3 oznacza 3-ci wielomian Taylora funkcji f w punkcie x_0 dla

a) $f(x) = 2x^3 + x - 6$, $x_0 = 0$; **b)** $f(x) = x^2$, $x_0 = 2$.

W obu przypadkach oblicz $T_3(1)$.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź pewne przybliżenie wymierne liczby $\sqrt[1000]{e}$ z dokładnością do 10^{-6}.