Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
(drugi termin) dla Informatyków, 4. III. 2008

Rozwiązania poszczególnych zadań należy pisać na ***osobnych, czytelnie podpisanych*** *kartkach — proszę o napisanie w lewym górnym rogu* ***każdej*** *kartki swego imienia, nazwiska i numeru indeksu oraz poniżej — numeru rozwiązywanego zadania.*

W czasie egzaminu z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp. korzystać ***nie wolno****.*

Rozwiązania, poza zad. 1. (A), 2. (A), 3. (A) oraz 4. (A), powinny zawierać uzasadnienia (tzn. dowody). ***Należy*** *się w nich powoływać na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń.*

Czas na rozwiązanie zadań: 160 min.

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj „kryterium porównawcze" zbieżności szeregów.

(B) [**6 pkt.**] Znajdź przykłady **a)** szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ zbieżnego warunkowo takiego, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n| < \frac{1}{n}$; **b)** szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ rozbieżnego takiego, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|a_n| < \frac{1}{n}$.

(C) [**10 pkt.**] Zakładamy, że $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Wykaż, że $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ jest bezwzględnie zbieżny. Czy przy założeniu jedynie zbieżności obu szeregów $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot b_n$ musi być zbieżny?

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie Weierstrassa „o osiąganiu kresów".

(B) [**6 pkt.**] O każdym z poniższych zbiorów rozstrzygnij, czy jest on obrazem pewnej funkcji ciągłej $f : [0;1] \cup [2;3] \longrightarrow \mathbb{R}$:

a) $[0;1]$, **b)** $[0;1) \cup (2;3]$, **c)** $[0;2) \cup (1;3]$.

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadana dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = \ln(x^2 + \frac{3}{4}) - x^2$ osiąga swój kres górny. Znajdź ten kres.

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Podaj wzory definiujące n-ty wielomian Taylora i n-tą resztę Taylora funkcji f w punkcie x_0. Sformułuj twierdzenie Lagrange'a „o postaci reszty Taylora".

(B) [**6 pkt.**] Niech $R(x) = \sin x - (x - \frac{x^3}{3!})$. Rozstrzygnij, czy jest możliwe by $|R(1)|$ było większe od $\frac{1}{24}$.

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$.

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o granicy iloczynu dwóch ciągów" (część tw. „o rachunkowych własnościach granicy" dla ciągów).

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia dla przypadku granic skończonych (można pominąć dowód lematu użytego na wykładzie w tym dowodzie).

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj, czy ciąg zadany wzorem

$$a_n = \frac{1 - \frac{1}{2}}{2 \cdot 1 + 1} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 \cdot 2 + 1} \cdot \ldots \cdot \frac{n - \frac{1}{2}}{2n + 1}$$

posiada granicę; znajdź ją w przypadku odpowiedzi twierdzącej.