G - graf silnie spójny, skierowany, skończony

$Kol(R)$ - 2-kolorowanie grafu R, takie, że każdy wierzchołek x jest połączony z pewnym wierzchołkiem y innego koloru, skierowaną krawędzią $< x, y >$

1. Kol(G) jest określone $\Rightarrow$ G zawiera cykl parzystej długości

   Weźmy G w kolorowaniu Kol(G). Teraz wybierzmy dowolny wierzchołek x. Z założenia, jest on połączony skierowaną krawędzią z jakimś wierzchołkiem y innego koloru niż on sam. Znajdźmy go i przejdźmy do niego. Teraz, ostatnie dwie czynności (znalezienie sąsiada w innym kolorze i przejście do niego) będziemy wykonywać tak długo, aż wrócimy do jakiegoś wierzchołka już odwiedzonego (możliwość powtarzania ponownie wynika z właściwości kolorowania). A wrócimy do niego na pewno, bo graf jest skończony i w każdym kroku ilość nieodwiedzonych wierzchołków zmniejsza się o 1. Zatem nastąpi moment, gdy na generowanej przez nas ścieżce domkniemy cykl.
   Ponieważ zawsze wybieraliśmy wierzchołek o przeciwnym kolorze, nasz cykl musi składać się z naprzemiennie kolorowanych wierzchołków. Zatem jest ich $2n$ dla pewnego naturalnego n i cykl jest parzystej długości.

2. Kol(G) jest określone $\Leftarrow$ G zawiera cykl parzystej długości

   G zawiera cykl parzystej długości, znajdźmy go sobie. Teraz, pokolorujmy cykl na zmianę dwoma kolorami, począwszy od dowolnego wierzchołka do niego należącego. W ten sposób, wszystkie wierzchołki w cyklu będą spełaniały warunek kolorowania.
   Teraz, weźmy dowolny niepokolorowany wierzchołek x i dowolny pokolorowany wierzchołek y. Z silnej spójności istnieje ścieżka z x do y. Weźmy z niej pierwszy wierzchołek pokolorowany idąc z x (istnieje, bo ścieżka jest skończona i zawiera przynajmniej jeden kolorowy wierzchołek - y) i oznaczmy sobie z. Teraz, pokolorujmy fragment $x..z$ naszej ścieżki, tak żeby było dobrze (zaczynamy w z i cofamy się zmieniając kolory, aż do x). W ten sposób wierzchołek x oraz wszystkie na ścieżce do z będą spełniały warunki kolorowania.
   W jednym takim kroku malujemy przynajmniej 1 wierzchołek otrzymując coraz wiekszy zbiór wierzchołków pokolorowanych spełniających Kol, a zatem - ponieważ graf skończony - powtarzając te czynności pomalujemy G do końca otrzymując $Kol(G)$