Kolokwium z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków, 24. XI. 2009

- *Proszę o rozwiązania zadań na* ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu, grupa ćwiczeniowa; oraz poniżej — „Zadanie nr...”).*
- *Podczas kolokwium* ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
- *Wszystkie rozwiązania powinny zawierać* ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody). Należy się w nich* ***powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także pamiętać* ***o sprawdzaniu*** *koniecznych do ich użycia założeń!*
- *Za każde z zadań można otrzymać maksymalnie 15 punktów.*
- *Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 30 min.*

Zadanie 1. Wyznacz kresy (inf i sup) zbioru

$$\left\{ \frac{|3^n - k|}{n! + k + 30} \;:\; n, k \in \mathbb{N},\; 3^n \neq k \right\}.$$

Zadanie 2. Znajdź granicę bądź wykaż, że granica nie istnieje, dla ciągów o wyrazach zadanych następująco:

a) $a_n = \sqrt{2^n + n^2} - \sqrt{2^n + 1}$;

b) $b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt[5]{b_n}$ dla $n \geqslant 1$.

Zadanie 3.

a) Zakładamy, że $\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1$ oraz, że $\dfrac{b_n}{a_n} \longrightarrow g$, gdzie $g \in (0; +\infty)$. Udowodnij, że $\sqrt[n]{b_n} \longrightarrow 1$.

b) Znajdź przykład ciągu $\{c_n\}$ o wyrazach dodatnich, dla którego $\sqrt[n]{c_n} \longrightarrow 0$.

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, jeżeli

a) $a_n = \dfrac{10^n + n^{100} + n \cdot e^{2n}}{11^n - n^7 \cdot 10^n}$;

b) $a_n = \dfrac{10^n + n^{100} + n \cdot e^{2n}}{11^n - n^7 \cdot 10^n - (10 + \frac{1}{n})^n}$.