Egzamin pisemny z Analizy Matematycznej I
dla Informatyków - termin I, 30. I. 2009

Proszę o rozwiązania zadań na ***osobnych, czytelnie oznaczonych w lewym górnym rogu*** *kartkach (własne imię, nazwisko, numer indeksu; oraz poniżej — numer rozwiązywanego zadania).*
Podczas egzaminu ***nie wolno*** *korzystać z notatek, kalkulatorów, telefonów, pomocy sąsiadów, itp.*
Rozwiązania, poza wszystkimi punktami (A), powinny zawierać ***uzasadnienia*** *(tzn. dowody). Należy się w nich* ***powoływać*** *na twierdzenia z wykładu, ew. z ćwiczeń. Należy także pamiętać* ***o sprawdzaniu*** *wszystkich koniecznych do ich użycia założeń! Czas na rozwiązanie zadań: 2 godz. i 40 min.*

Zadanie 1.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj kryterium Dirichleta zbieżności szeregów liczbowych.

(B) [**6 pkt.**] Czy to prawda, że dla dowolnego ciągu liczbowego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$
a) jeżeli $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny?
b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy oba szeregi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ są zbieżne?

(C) [**10 pkt.**] Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n^p(n+2009)}},$$

w zależności od parametru $p > 0$.

Zadanie 2.

(A) [**4 pkt.**] Podaj definicję ciągłości funkcji w punkcie w wersji Heinego i w wersji Cauchy'ego.

(B) [**6 pkt.**] Wskaż przykład funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ nieciągłej, która jest
a) ograniczona; **b)** nieograniczona.

(C) [**10 pkt.**] Wykaż, że równanie $x^5 - 5x = \sqrt{2}$ posiada przynajmniej 3 rozwiązania $x \in \mathbb{R}$. Czy posiada ich więcej niż 3?

Zadanie 3.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie „o ekstremach lokalnych".

(B) [**10 pkt.**] Podaj dowód powyższego twierdzenia dla przypadku maksimum lokalnego.

(C) [**10 pkt.**] Znajdź ekstrema lokalne funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = \frac{x^2+2x+2}{e^x}.$$

Zadanie 4.

(A) [**4 pkt.**] Sformułuj twierdzenie wiążące wypukłość funkcji z własnościami jej **pierwszej** pochodnej.

(B) [**6 pkt.**] Rozważamy wielomiany określone na całej prostej $\mathbb{R}$.
a) Podaj przykład wielomianu, który nie jest ani funkcją wypukłą, ani funkcją wklęsłą.
b) Podaj przykład wielomianu, który jest funkcją wypukłą i jednocześnie funkcją wklęsłą.
c) Wyjaśnij, dlaczego wielomian drugiego stopnia jest funkcją wypukłą lub funkcją wklęsłą.

(C) [**10 pkt.**] O dwukrotnie różniczkowalnej funkcji $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ wiadomo, że $g(0) = 999$, $g'(0) = 1000$ oraz że $|g''(x)| \leqslant 10000$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Niech $K := g\left(\frac{1}{1000}\right)$. Wykaż, że liczba K ma w zapisie dziesiętnym drugą cyfrę po przecinku równą 9 lub 0. Jakie są jej wcześniejsze cyfry (przed i po przecinku)?