Analiza matematyczna dla informatyków

Wykład dla pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

skrypt wykładu w roku akademickim 2009/2010

Marcin Moszyński

Skład w systemie TEX

w wersji 2007/8:

- Tomasz Idziaszek
- Tomasz Kazana
- Piotr Stańczyk

w kolejnych wersjach (ulepszenia, dodatki i ogólny „nadzór"):

- Tomasz Kazana

Szanowny Czytelniku!

Będę wdzięczny za wszelkie uwagi dotyczące skryptu. Można je np. przesyłać na mój adres e-mailowy: `mmoszyns@mimuw.edu.pl`

Autor

O wykładzie i o skrypcie

Niniejszy skrypt obejmuje moje wykłady dla studentów pierwszego roku informatyki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego na rok akademicki 2009/2010 (semestr zimowy i letni). To kolejna, zmodyfikowana wersja skryptu z lat 2007/8 i 2008/9. Jest ona sukcesywnie rozszerzana o kolejne rozdziały w miarę postępu wykładu.

Po każdym z rozdziałów zamieszczony jest zestaw zadań z wyróżnionymi paroma zadaniami do zrobienia we wszystkich grupach ćwiczeniowych.

Semestr zimowy wykładu (ok. 15 wykładów po 90 minut) to rozdziały I — VI. Obejmuje on kilka podstawowych działów analizy matematycznej ujętych w sposób dosyć skrótowy, choć zawierających najważniejsze pojęcia i twierdzenia. Omawiamy tu: szkic teorii aksjomatycznej liczb rzeczywistych, teorię ciągów i szeregów liczbowych, funkcje jednej zmiennej — granicę, ciągłość, rachunek różniczkowy oraz zbieżność ciągów i szeregów funkcyjnych.

Rozdziały VII — XI to semestr letni (ok. 21 wykładów). Poza rachunkiem całkowym jednej zmiennej (z całką Riemanna), stanowiącym uzupełnienie klasycznej tematyki „Analizy I" z semestru zimowego, jest to przegląd kilku dalszych ważnych działów analizy matematycznej lub innych działów matematyki z nią związanych. Z konieczności, w tej części wykładu bardzo wiele twierdzeń musi być formułowanych bez dowodów. Pojawiają się tu przestrzenie metryczne, funkcje wielu zmiennych — ciągłość i rachunek różniczkowy, teoria miary (z całką Lebesgue'a) użyta do całkowania funkcji wielu zmiennych oraz równania różniczkowe zwyczajne.

Wykład ten jest w zasadzie samowystarczalny, choć Czytelnik może z powodzeniem korzystać także z wielu pozycji bogatej literatury obejmującej powyższe tematy. Spośród zwięzłych ujęć tematyki o nieco zbliżonym zakresie polecam np.:

- (ad. rozdziały I — VII) Kazimierz Kuratowski, *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN (Biblioteka matematyczna, tom 22);
- (ad. rozdziały VIII — XI) wybrane fragmenty książki Witolda Kołodzieja *Analiza matematyczna*, PWN (Matematyka dla politechnik).

Oznaczenia edytorskie

(spis symboli matematycznych zamieszczony jest pod koniec skryptu)

$\square$ — koniec dowodu (ewentualnie jego szkicu)
B.D. — bez dowodu (choć czasem brak dowodu jest sygnalizowany inaczej)
$\forall$ — (w zestawie zadań po każdym rozdziale) zadanie „obowiązkowe", tj. do zrobienia we wszystkich grupach ćwiczeniowych
tekst mniejszej szerokości niż zazwyczaj, złożony taką właśnie czcionką — materiał dodatkowy lub nieco dłuższa dygresja...

Spis treści

I Liczby rzeczywiste — szkic teorii aksjomatycznej, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, potęga rzeczywista . . . 5
1. Nieco oznaczeń . . . 5
2. Aksjomaty liczb rzeczywistych . . . 5
3. Liczby naturalne, całkowite, wymierne . . . 9
4. Potęga rzeczywista . . . 11
Zadania do Rozdziału I . . . 16

II Ciągi liczbowe, granica . . . 18
1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia . . . 18
2. Własności arytmetyczne granicy . . . 20
3. Granica a nierówności . . . 23
4. Podciągi . . . 25
5. Zupełność (trochę inna) . . . 28
6. Informacja o dalszych twierdzeniach dotyczących granicy ciągu . . . 29
Zadania do Rozdziału II . . . 30

III Szeregi liczbowe . . . 32
1. Definicja „sumy nieskończonej” . . . 32
2. Ogólne twierdzenia i podstawowe przykłady . . . 33
3. Kryteria zbieżności bezwzględnej . . . 36
4. Kryteria zbieżności „niekoniecznie bezwzględnej” . . . 38
5. Zmiana kolejności sumowania . . . 40
6. Mnożenie szeregów . . . 41
Zadania do Rozdziału III . . . 43

IV Granica i ciągłość funkcji . . . 47
1. Granica funkcji . . . 47
2. Ciągłość funkcji w punkcie . . . 53
3. Funkcje ciągłe . . . 54
4. Szeregi potęgowe . . . 59
5. O kilku funkcjach elementarnych . . . 61
Zadania do Rozdziału IV . . . 65

V Rachunek różniczkowy . . . 69
1. Pochodna funkcji . . . 69
2. Różniczkowanie funkcji elementarnych . . . 72
3. Pochodna i ekstrema lokalne . . . 75
4. Twierdzenia o wartości średniej dla pochodnej . . . 76
5. Wyższe pochodne . . . 81
6. Druga pochodna i wypukłość . . . 83
7. Wzór Taylora . . . 85
Zadania do Rozdziału V . . . 91

VI Zbieżność ciągów i szeregów funkcji . . . 97
1. O różnych pojęciach zbieżności ciągu funkcji . . . 97

2. Szeregi funkcyjne . . . 100
3. Własności granic ciągów i szeregów funkcyjnych . . . 102
4. Aproksymacja funkcji ciągłych . . . 105
Zadania do Rozdziału VI . . . 106
Spis symboli i skrótów . . . 108
Skorowidz . . . 114

I Liczby rzeczywiste — szkic teorii aksjomatycznej, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, potęga rzeczywista

[około $2\frac{1}{2}$ wykładu]

1. Nieco oznaczeń

Punktem wyjścia do całej właściwie matematyki jest teoria mnogości (tj. zbiorów) i logika matematyczna. Potrzebujemy ich więc także w analizie matematycznej. Sporo elementów powyższych teorii poznacie Państwo na wykładzie „Podstawy matematyki". Oczekuję, że nie jest Państwu obca podstawowa symbolika logiczna (np. sens symboli $\Rightarrow$, $\vee$, $\wedge$) i rachunku zbiorów (np. sens $\cup$, $\cap$). Teraz wyjaśnię zatem tylko kilka potrzebnych nam symboli — liczę, że przynajmniej częściowo znajomych.

- **kwantyfikatory**:

  $\forall$ — „dla każdego" (od ang. **A**LL; wersja „szkolna" — $\bigwedge$),

  $\exists$ — „istnieje" (od **E**XISTS; wersja „szkolna" — $\bigvee$);

- **„indeksowane" działania na zbiorach** (uogólnienia $\cap$ i $\cup$):

  jeśli I to pewien zbiór („indeksów") oraz dla każdego $i \in I$ dany jest zbiór X_i będący podzbiorem pewnego zbioru X, to

  $\bigcap\limits_{i\in I} X_i := \{x \in X : \forall_{i\in I}\ x \in X_i\}$,[1)]

  $\bigcup\limits_{i\in I} X_i := \{x \in X : \exists_{i\in I}\ x \in X_i\}$;

- **funkcje**: $f : A \to B$ — funkcja ze zbioru A w zbiór B.

2. Aksjomaty liczb rzeczywistych

Co to są liczby rzeczywiste, tj. jak się nimi posługiwać, jakie obowiązują dla nich reguły — to dość dobrze każdy z Państwa wie; przynajmniej macie już Państwo wyrobione nawyki i rozwinięte intuicje ich dotyczące. Dla matematyka (i dla informatyka...) to jednak za mało. My potrzebujemy ścisłych reguł rozumowania i narzędzi weryfikowania hipotez. Zapewni nam to *teoria aksjomatyczna*. Najpierw przyjmujemy więc kilka podstawowych pojęć (tzw. *pojęć pierwotnych*), takich, które w naszej teorii przyjmujemy bez definicji. Są to: $\mathbb{R}$ — zbiór liczb rzeczywistych, dwie operacje $+$ i $\cdot$, dwa wyróżnione elementy zbioru $\mathbb{R}$ — mianowicie 0 i 1 oraz relację (porządku) $\leqslant$. Wszystkie pozostałe obiekty będziemy musieli zdefiniować.

Drugi „fundament" to *aksjomaty* (inaczej *pewniki*), czyli te własności dotyczące powyższych pojęć pierwotnych, które przyjmujemy za punkt wyjścia w naszej teorii. Przyjmujemy je zatem bez żadnego dowodu, jako fakty niepodważalne. Natomiast wszystkie inne twierdzenia (dla niektórych z nich będziemy używali też innych nazw: lemat, własność, wniosek, fakt itp.) będą już wymagały dowodu, który będzie musiał być ścisłym logicznie rozumowaniem, wykorzystującym wyłącznie aksjomaty (które właściwe także są twierdzeniami, tyle że niezbyt

[1)] Symbol $:=$ lub $=:$ z formalnego punktu widzenia to to samo co $=$, natomiast będziemy go używać głównie tylko wtedy, gdy wprowadzamy (definiujemy) jakieś nowe oznaczenie; dwukropek „:" jest wówczas po stronie definiowanego obiektu.

„trudnymi”...) lub twierdzenia wcześniej udowodnione[2)] . Oczywiście aksjomaty będą własnościami w pełni zgodnymi z naszą intuicją. Będzie ich na tyle dużo, by „wszystko co trzeba” dało się przy ich pomocy udowodnić. Ponadto (co już znacznie mniej ważne) na tyle mało, by jedne z drugich nie wynikały (tzw. *niezależność aksjomatów*).

Oto one (jest ich kilkanaście, podajemy je „po trochu”).

Aksjomaty ciała uporządkowanego

Pierwsze cztery mówią, że trójka $(\mathbb{R}, 0, +)$ jest *grupą przemienną*, tzn.:

(D1.) (*łączność +*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x + y) + z = x + (y + z)$;

(D2.) (*neutralność 0*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x + 0 = 0 + x = x$;

(D3.) (*istnienie elementu przeciwnego*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x + y = y + x = 0$;

(D4.) (*przemienność +*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x + y = y + x$.

Uwaga. Same aksjomaty (D1.)–(D3.) stanowią de facto definicję *grupy*. Jako sprawdzian zrozumienia powyższej uwagi, proponuję samodzielne dokończenie poniższej definicji.

Definicja. *Trójka $(G, e, \odot)$, gdzie G — zbiór, $e \in G$, $\odot$ — operacja w G (tzn. $\odot\colon G\times G \to G$) jest* ***grupą*** *wtedy i tylko wtedy, gdy*[3)] *... Grupa ta jest* ***przemienna*** *(inaczej* ***abelowa****) wtw ...*

Kolejne aksjomaty dotyczą mnożenia i liczby 1. Dla wygody oznaczymy $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(M1.) (*łączność ·*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

(M2.) (*neutralność 1*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$;

(M3.) (*istnienie elementu odwrotnego*) $\forall_{x\in\mathbb{R}^*}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ x \cdot y = y \cdot x = 1$;

(M4.) (*przemienność ·*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x \cdot y = y \cdot x$.

Analogia (M1.)–(M4.) do (D1.)–(D4.) narzuca się sama, choć widać pewną różnicę w (M3.) (jaką?). Gdy dodamy następny aksjomat, a mianowicie

(01.) $0 \neq 1$,

łatwo będzie dowieść (zachęcam), że $\forall_{x,y\in\mathbb{R}^*}\ x \cdot y \neq 0$, a zatem, że mnożenie $\cdot$ można „obciąć” do mnożenia $\tilde{\cdot}$ w $\mathbb{R}^*$ (tj. $\tilde{\cdot}\colon (\mathbb{R}^*) \times (\mathbb{R}^*) \to \mathbb{R}^*$ i $x\tilde{\cdot}y := x \cdot y$ dla $x, y \in \mathbb{R}^*$) i $(\mathbb{R}^*, 1, \tilde{\cdot})$ jest grupą (także przemienną).

Kolejny aksjomat opisuje ważną własność dotyczącą jednocześnie dodawania i mnożenia:

(DM.) (*rozdzielność mnożenia względem dodawania*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Wymienione dotąd aksjomaty stanowią razem definicję *ciała* (a dokładniej — ciała przemiennego — gdyż niektórzy wyłączają przemienność mnożenia z definicji ciała). Następne dwa aksjomaty wiążą ze sobą działania i relację $\leqslant$:

(DP.) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$,

(MP.) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge 0 \leqslant z) \Rightarrow xz \leqslant yz$.

Gdy dołożymy jeszcze cztery aksjomaty dotyczące samej relacji $\leqslant$:

(P1.) (*zwrotność*) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x \leqslant x$,

(P2.) (*słaba antysymetria*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge y \leqslant x) \Rightarrow x = y$,

(P3.) (*przechodniość*) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$,

(P4.) (*spójność*) $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ x \leqslant y \vee y \leqslant x$,

to otrzymamy *ciało uporządkowane*.

[2)] Uwaga! Ten idealistyczny program z konieczności będziemy realizowali z licznymi odstępstwami — niektóre dowody będziemy na wykładzie pomijali lub skracali, a niektóre znane, czy oczywiste dla Państwa twierdzenia (w tym pewne analogi sformułowanych już twierdzeń) będziemy przemilczali. A to, by Państwa nie zanudzić i by zdążyć na czas z obszernym programem.

[3)] Dalej „wtedy i tylko wtedy, gdy” skracamy do wtw.

Kresy i zupełność

Pytanie, czy to już wszystkie „potrzebne" aksjomaty. Nie, bo zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (ściśle zdefiniujemy go wkrótce) ze zwykłymi działaniami i nierównością wszystkie powyższe aksjomaty spełnia, a przecież $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ różnią się między sobą wieloma własnościami (np. jaką?). Na szczęście, to czego brakuje to tylko jeden aksjomat, choć już nie tak intuicyjny, jak wcześniejsze. By go zgrabnie sformułować, przyjmijmy następujące definicje:

Definicja. *Niech $A \subset \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.*

- *b jest* ***ograniczeniem górnym (dolnym)*** [4] *zbioru A wtw $\forall_{a\in A}\ a \leqslant b$ ($b \leqslant a$).*
- *Zbiór A jest* ***ograniczony z góry (z dołu)*** *wtw istnieje $b \in \mathbb{R}$, będące ograniczeniem górnym (dolnym) A.*
- *Zbiór A jest* ***ograniczony*** *wtw jest ograniczony z góry i z dołu.*
- *b jest* ***elementem największym (najmniejszym)*** *zbioru A wtw $b \in A \wedge \forall_{a\in A}\ a \leqslant b$ ($b \leqslant a$).*
- *b jest* ***kresem górnym****, czyli* ***supremum*** *(****kresem dolnym****, czyli* ***infimum****) zbioru A wtw b jest elementem najmniejszym (największym) zbioru wszystkich ograniczeń górnych (dolnych) A.*

Oczywiście, jeśli dla zbioru A istnieje kres górny (dolny), to A musi być ograniczony z góry (z dołu). Można wykazać, że implikacja odwrotna (dla $A \neq \emptyset$) nie wynika z wcześniejszych aksjomatów. Jest ona jednak treścią ostatniego aksjomatu:

(Z.) (*aksjomat zupełności* [5]) Dla każdego niepustego, ograniczonego z góry zbioru $A \subset \mathbb{R}$ istnieje $b \in \mathbb{R}$ taki, że b jest kresem górnym A.

A zatem „nasza" teoria liczb rzeczywistych opiera się na zestawie siedemnastu aksjomatów. Ale w skrócie $\mathbb{R}$ to po prostu ciało (przemienne) uporządkowane, zupełne.

Tu należy się Państwu jedna ważna uwaga. W całej matematyce, obowiązują dodatkowo pewne ogólne reguły. Obowiązują one zatem także w uprawianej przez nas teorii, niezależnie od podanych już aksjomatów. Są to przede wszystkim reguły teorii mnogości (czyli teorii zbiorów) oraz logiki. Zawierają one np. zasady posługiwania się formułami matematycznymi, kwantyfikatorami, czy relacją równości (choćby to, że jeśli $a = b$, to $b = a$; albo że jeśli $a = b$ i $b = c$, to $a = c$). Oczywiście nie jesteśmy w stanie ich wszystkich tu omówić, ale dla uspokojenia osób rozczarowanych wspomnę, że są one dość naturalne i intuicyjne oraz że więcej na ten temat dowiecie się Państwo na wykładach przedmiotu Podstawy Matematyki[6] .

Nie da się ukryć, że uprawianie teorii aksjomatycznej, szczególnie na samym początku, bywa dość żmudne. Ograniczymy się więc tylko do paru przykładów pokazujących „jak to działa", a inne znane nam dobrze elementarne własności liczb rzeczywistych przyjmiemy bez dowodu, choć zachęcam do samodzielnego uzupełniania tych luk.

Element przeciwny, odwrotny, odejmowanie i dzielenie

Twierdzenie I.1. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exists!_{y\in\mathbb{R}}$ [7] $x + y = 0$

---

[4] W ten sposób, używając nawiasów, będziemy często zapisywać dwie analogiczne definicje „za jednym zamachem".

[5] Bywa on często, a nawet częściej, nazywany aksjomatem *ciągłości.*

[6] Można też przejrzeć podręczniki o tytule zbliżonym do "Wstęp do matematyki", bądź inne, dotyczące teorii mnogości i logiki matematycznej.

[7] $\exists!$ — „istnieje dokładnie jeden".

Dowód.
Istnienie jakiegoś $y \in \mathbb{R}$ takiego, że $x + y = 0$ gwarantuje nam (D3.). By wykazać jednoznaczność, załóżmy, że $y, y' \in \mathbb{R}$ są takie, że $x + y = 0$ i $x + y' = 0$. Zatem dodając do drugiej równości y, dostajemy $y + (x + y') = y + 0$, zatem z (D1.) i (D2.) $(y + x) + y' = y$, skąd na mocy naszego pierwszego założenia i (D2.) $y' = y$. □

Powyższe twierdzenie pozwala nam zatem zdefiniować[8)] jednoznacznie *element przeciwny* do x jako taki $y \in \mathbb{R}$, że $x + y = 0$. Oznaczamy go $-x$. To z kolei pozwala zdefiniować operację *odejmowania* jako $a - b := a + (-b)$.
Analogicznie postępujemy w przypadku mnożenia i dla $x \neq 0$ uzyskujemy *element odwrotny* do x (oznaczany oczywiście $\frac{1}{x}$ lub x^{-1}), a następnie operację *dzielenia* („——" lub „:") przez liczby $\neq 0$.

Istnienie kresu dolnego

Inny prosty przykład elementarnego twierdzenia to dualna wersja aksjomatu zupełności (Z). Proszę ją sformułować samodzielnie zastępując ograniczoność z góry przez ograniczoność z dołu, a kres górny — dolnym, a następnie proszę pomyśleć nad ścisłym dowodem. Uzyskamy więc:

Twierdzenie I.2. ...

Dowód.
... □

Inne relacje nierówności, moduł

Dla wygody powinniśmy jeszcze przyjąć między innymi następujące definicje:

- $a \geqslant b \Leftrightarrow b \leqslant a$
- $a < b \Leftrightarrow (a \leqslant b \wedge a \neq b)$
- $a > b \Leftrightarrow b < a$

Definiujemy także *moduł* (inaczej *wartość bezwzględną*) liczby $x \in \mathbb{R}$ wzorem:

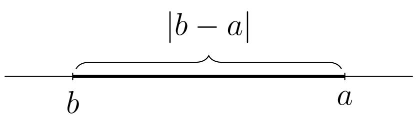
$$|x| := \begin{cases} x & \text{dla } x \geqslant 0 \\ -x & \text{dla } x < 0. \end{cases}$$

Nietrudny dowód poniższego faktu pozostawiam Państwu.

Fakt (nierówność trójkąta).

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

B.D.



Rysunek 1. Długość odcinka

[8)] Nie zawsze definicję poprzedzam tytułem „Definicja" — robię to jedynie przy „bardziej uroczystych" okazjach.

Moduł będzie nam służył między innymi do mierzenia „odległości” pomiędzy liczbami. Tę odległość pomiędzy a oraz b wyrażamy wzorem $|b-a|$ — geometrycznie interpretujemy ją jako długość odcinka łączącego a z b na osi liczbowej będącej z kolei geometryczną interpretacją zbioru $\mathbb{R}$ (patrz rys. 1).

Nieco uwag o kresach

Element największy zbioru $A \subset \mathbb{R}$, o ile takowy istnieje, jest na mocy aksjomatu (P2.) wyznaczony jednoznacznie. Oznaczamy go $\max A$. Podobnie jest z elementem najmniejszym; oznaczamy go $\min A$. Oczywiście $\max A$ jest jednocześnie kresem górnym A (a $\min A$ — kresem dolnym), ale np. przedział $(0; 1)$ [9] ma kres górny równy 1, a elementu największego nie posiada. Zatem kresy zbioru to coś w rodzaju prawego i lewego „końca” zbioru, które do tego zbioru mogą należeć lub nie. Także kresy, gdy istnieją, są oczywiście wyznaczone jednoznacznie (dlaczego?). Kres górny zbioru A oznaczamy symbolem $\sup A$, a kres dolny $\inf A$. Gdy A nie jest ograniczony z góry, to fakt ten oznaczamy $\sup A = +\infty$. Analogicznie dla A nieograniczonego z dołu umownie piszemy $\inf A = -\infty$. Są to jednak na razie tylko oznaczenia, tzn. samo $\pm\infty$ na razie nie jest jeszcze[10] żadnym „matematycznym” obiektem!

Odwołując się do przykładu z liczbami wymiernymi, który motywował nieco wcześniej dołączenie aksjomatu zupełności, warto tę motywację uzupełnić o uwagę, że w zbiorze liczb wymiernych nie ma zupełności. Znów wyprzedzając ścisłą definicję zbioru liczb wymiernych, można tu podać przykład zbioru $A = \{x \in \mathbb{Q} : x \cdot x \leqslant 2\}$, który jest niepusty i ograniczony w $\mathbb{Q}$ z góry, ale kresu górnego w $\mathbb{Q}$ nie posiada.

3. Liczby naturalne, całkowite, wymierne

Zbiór $\mathbb{N}$, indukcja matematyczna i inne własności $\mathbb{N}$

Zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ to podzbiór zbioru $\mathbb{R}$, który często jest określany jako

$$\{1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ \ldots\}.$$

Matematycy do tego zbioru dorzucają jeszcze chętnie 0. Na tym wykładzie tego nie zrobimy (tj. $0 \notin \mathbb{N}$), jednak to jedynie kwestia umowy. Tymczasem dużo ważniejszy problem to sprawa ścisłości powyższej „definicji”, a właściwie — braku ścisłości. Jak bowiem rozumieć ów trzykropek „. . . ”? Aby to uściślić postąpimy następująco.

Definicja. *Niech $B \subset \mathbb{R}$. Zbiór B* ***jest induktywny*** *wtw $1 \in B$ oraz $\forall_{x\in B}\ x+1 \in B$.*

Jak widać z tej definicji, zbiorów induktywnych jest wiele — np. $\mathbb{R}$, $(-1; +\infty)$, $[1; +\infty)$[11], ale zgodnie z naszą intuicją induktywne powinny być także inne, niezdefiniowane dotąd zbiory — przede wszystkim $\mathbb{N}$. Ta sama intuicja podpowiada nam, że $\mathbb{N}$ powinien być najmniejszym w sensie zawierania zbiorem induktywnym, czyli że jest zawarty w każdym zbiorze induktywnym. Stąd poniższa definicja.

Definicja.

$$\mathbb{N} := \bigcap_{B\in\mathbb{I}} B,$$

gdzie $\mathbb{I}$ oznacza zbiór wszystkich induktywnych podzbiorów $\mathbb{R}$.

---

[9] Zakładam, że definicje przedziałów otwartych, domkniętych, otwarto-domkniętych są znane ze szkoły. Używamy notacji $(a; b)$, $[a; b]$, $(a; b]$ i $[a; b)$.

[10] Ale wkrótce również samym symbolom $+\infty$ i $-\infty$ nadamy matematyczny sens.

[11] Znów użyliśmy niezdefiniowanego symbolu $+\infty$, ale to nie szkodzi, bo nawet nie używając tego symbolu możemy zdefiniować od razu cały „napis” oznaczający przedział nieskończony — mianowicie, dla $a \in \mathbb{R}$, oznaczamy (jak było chyba Państwu wiadomo...) $(a; +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$; $(-\infty; a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$ i analogicznie dla $[a; +\infty)$ i $(-\infty; a)$.

Wśród wielu własności zbioru $\mathbb{N}$ znaczenie zasadnicze ma dla nas twierdzenie znane Państwu chyba przynajmniej z nazwy, zwane *zasadą indukcji zupełnej* (w skrócie ZIZ). Sformułujemy je tak:

Twierdzenie I.3 (ZIZ). *Jeżeli* $A \subset \mathbb{N}$ *spełnia warunki*

1. („warunek początkowy") $1 \in A$

2. („krok indukcyjny") $\forall_{n \in \mathbb{N}}\ (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$,

to $A = \mathbb{N}$.

Dowód.
Zauważmy, że A jest induktywny, bowiem gdy $n \in A$, to na mocy faktu, że $A \subset \mathbb{N}$ oraz zał. 2. otrzymujemy $n+1 \in A$. Czyli $A \in \mathbb{I}$, a stąd $A \supset \bigcap_{B \in \mathbb{I}} B = \mathbb{N}$. Zatem $A = \mathbb{N}$. □

ZIZ bywa bardzo przydatna przy dowodzeniu wielu matematycznych faktów, w których pojawia się kwantyfikator $\forall_{n \in \mathbb{N}}$. Dowody używające ZIZ noszą nazwę *dowodów indukcyjnych*. Przykład takiego dowodu pojawi się jeszcze w tym rozdziale (patrz nierówność Bernoulli'ego).

Oto przykłady innych elementarnych własności $\mathbb{N}$. Podajemy je bez dowodów.

Twierdzenie I.4 (zamkniętość $\mathbb{N}$ względem $+$ i $\cdot$).

$$\forall_{m,n \in \mathbb{N}}\ m+n,\, m \cdot n \in \mathbb{N}.$$

Twierdzenie I.5 (zasada Archimedesa). *Dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}$ *oraz* $a > 0$ *istnieje* $n \in \mathbb{N}$ *takie, że* $n \cdot a > x$. *W szczególności* $\mathbb{N}$ *jest nieograniczony* [12] *z góry.*

Zapis dziesiętny liczb naturalnych

Oznaczmy przez C_{10} zbiór *cyfr* przy zapisie dziesiętnym, tzn. $C_{10} := \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \subset \mathbb{N}_0$, gdzie $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, ..., $9 := 8+1$.

Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $c_1, \ldots, c_n \in C_{10}$, gdzie $c_1 \neq 0$. Zdefiniujemy *rekurencyjnie*[13] liczbę, którą zapisywać będziemy $c_1c_2\ldots c_n$. Gdy $n = 1$, to liczba ta jest po prostu równa liczbie c_1. Ponadto dla dowolnego $n \in N$, $c_1c_2\ldots c_nc_{n+1} := c_{n+1} + (9+1) \cdot c_1c_2\ldots c_n$. ZIZ dowodzi, że tym sposobem liczba n-cyfrowa została zdefiniowana dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. W szczególności $9+1 = 10$ ... Zachodzi także:

Twierdzenie I.6. *Każda liczba naturalna ma jednoznaczny zapis w powyższej postaci.*

Dowód pomijamy, ograniczając się do wskazówki, że część dotycząca samego istnienia zapisu może być łatwo wykazana przez indukcję. Dlaczego przyjął się akurat zapis dziesiętny? To pytanie raczej z historii matematyki. Jednak czasem przydają się też inne typy zapisu — np. informatykowi bliski powinien być *zapis dwójkowy*, a także *zapis szesnastkowy*. Jak ogólnie, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}_2$, zdefiniować zapis „k–tkowy" proszę wymyślić samodzielnie! Proszę przy tym zauważyć, że **pojawi się tu pewien problem** dla $k > 10$, jeżeli jako elementów zbioru cyfr C_k zdecydujemy się użyć liczb zapisanych przy użyciu zapisu dziesiętnego (jaki to problem?).

---

[12] „jest nieograniczony = nie jest ograniczony", choć — uwaga! — nie zawsze w matematyce doklejenie do pojęcia słówka „nie" daje pojęcie będące zaprzeczeniem wyjściowego – np. niemalejący ...

[13] Tzn. opisując co należy zrobić dla n początkowego (tu np. dla $n = 1$) oraz sposób przejścia od dowolnego n do $n+1$. Jak widać idea definicji rekurencyjnej przypomina ideę zawartą w ZIZ i stąd niektórzy nazywają ten rodzaj definicji definicją *indukcyjną*.

Zbiór liczb całkowitych

Zbiór liczb *całkowitych* oznaczamy przez $\mathbb{Z}$ i definiujemy następująco

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R} : -x \in \mathbb{N}\}.$$

Oto pewna ważna własność $\mathbb{Z}$.

Twierdzenie I.7 (zasada maksimum). *Każdy niepusty, ograniczony z góry podzbiór zbioru $\mathbb{Z}$ posiada element największy.*

Dowód znów pomijamy. Oczywiście można także wykazać analogiczną „zasadę minimum”.

Powyższe twierdzenie pozwala (dlaczego?...) na sformułowanie następującej definicji:

Definicja. ***Część całkowita*** *liczby $x \in \mathbb{R}$ to* $\max\{m \in \mathbb{Z} : m \leqslant x\}$. *Oznaczamy ją $[x]$.* [14)]

Przy użyciu tego pojęcia łatwo będzie wykazać lemat, który ułatwi nam wkrótce dowód pewnej własności liczb wymiernych.

Lemat.

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \ \Big(y - x \geqslant 1 \Rightarrow \exists_{m\in\mathbb{Z}} \ x \leqslant m \leqslant y\Big).$$

Dowód.

Wystarczy wziąć $m := [y]$. Mamy wtedy $m \in \mathbb{Z}$ i $m \leqslant y$ z definicji części całkowitej. Przypuśćmy, że $m < x$. Wówczas $m + 1 < x + 1 \leqslant y$ oraz $m + 1 \in \mathbb{Z}$ (dlaczego? — uzasadnienie pozostawiam Państwu). Ale $m + 1 > m$, a zatem $m \neq [y]$ — sprzeczność, więc $m \geqslant x$. □

Można wykazać, że zbiór $\mathbb{Z}$ zamknięty jest względem dodawania, odejmowania i mnożenia.

Przyjmijmy jeszcze następujace wygodne oznaczenia zbiorów „podobnych ” do $\mathbb{N}$:
$\mathbb{N}_k := \{m \in \mathbb{Z} : m \geqslant k\}$ dla $k \in \mathbb{Z}$ (np. $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$).

Liczby wymierne

Zbiór liczb *wymiernych* oznaczamy symbolem $\mathbb{Q}$ i definiujemy następująco

$$\mathbb{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Zbiór ten zamknięty jest względem wszystkich czterech działań (dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia). Natomiast traktowany jako podzbiór zbioru liczb rzeczywistych ma on jeszcze inną bardzo ważną własność.

Twierdzenie I.8 (o gęstości $\mathbb{Q}$).

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}} \ \Big(y > x \Rightarrow \exists_{q\in\mathbb{Q}} \ x \leqslant q \leqslant y\Big).$$

Dowód.

Korzystając z zasady Archimedesa wybierzmy $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n > \frac{1}{y-x}$. Niech $x' := n \cdot x$, $y' := n \cdot y$. Mamy $y' - x' > 1$, zatem z lematu wykazanego powyżej istnieje $m \in \mathbb{Z}$ takie, że $x' \leqslant m \leqslant y'$, skąd $x \leqslant \frac{m}{n} \leqslant y$. □

4. Potęga rzeczywista

W tej ostatniej części rozdziału I naszkicujemy definicję potęgi x^y dla dowolnych $x > 0$ i $y \in \mathbb{R}$. Definicja ta jest dość złożona, a na jej wszystkie szczegóły trzeba by poświęcić bardzo wiele czasu. Przedstawimy tu więc konstrukcję potegi w kilku etapach, znów z pominięciem wielu dowodów.

[14)] Bywają też w użyciu inne oznaczenia, ponadto niestety „[ ]” używamy też czasem jako nawiasu... — liczę na Państwa domyślność...

Etap 1: x^n dla $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$

Definiujemy rekurencyjnie: $x^1 := x$, $x^{n+1} := x \cdot x^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Dla tak zdefiniowanej potęgi ma miejsce ważna nierówność.

Fakt (nierówność Bernoulli'ego). *Jeżeli $a \geqslant -1$, $n \in \mathbb{N}$, to*

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na. \tag{I.1}$$

Dowód.
Przeprowadzimy tu dowód przez indukcję. W tym celu ustalmy najpierw dowolnie $a \geqslant -1$. Zauważmy, że (I.1) zachodzi przy $n = 1$ (jest nawet równość). Teraz załóżmy, że (I.1) zachodzi dla pewnego n. Mnożąc obie strony nierówności przez $(1 + a)$ (a ściślej — korzystając z aksjomatu (MP.)) otrzymujemy

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + na + a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a.$$

W efekcie uzyskujemy więc odpowiednik nierówności (I.1) dla $n+1$ zamiast dla n (oczywiście powyżej użyliśmy w rzeczywistości także wielu innych aksjomatów, nie jedynie (MP.) — jakich?). W takim momencie na ogół zwyczajowo kończy się dowód indukcyjny. Jednak pytanie: gdzie tu ZIZ?? Aby więc było całkiem ściśle, tym razem dokładnie to wyjaśnimy. Mianowicie niech $A := \{n \in \mathbb{N} : \text{ zachodzi (I.1)}\}$. To co dotychczas wykazaliśmy oznacza „w języku zbioru A", że $1 \in A$ oraz, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ jeśli $n \in A$, to $n + 1 \in A$. A zatem na mocy ZIZ otrzymujemy $A = \mathbb{N}$, a to oznacza właśnie, że (I.1) zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. □

Etap 2: x^n dla $n \in \mathbb{Z}$, $x \neq 0$

Dla $n \in \mathbb{N}$ definicja była już w poprzednim etapie. Pozostają przypadki z $n \leqslant 0$. Definiujemy więc $x^0 := 1$ oraz gdy $n = -m$ i $m \in \mathbb{N}$, to $x^n := \frac{1}{x^m}$.

Uwaga. Nie zdefiniowaliśmy 0^n dla $n \leqslant 0$. Dla $n < 0$ nie zrobimy tego, jednak **niekiedy**, dla wygody przyjmuje się, że $0^0 = 1$. Np. przyjmuje się tak we wzorze Newtona sformułowanym niżej. Ogólnie należy jednak z tą umową uważać (o istotnych tego powodach przekonacie się Państwo w przyszłości).

Fakt 1. *Dla dowolnych $x, y \neq 0$ oraz $m, n \in \mathbb{Z}$ zachodzi:*

1. $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$,
2. $x^{m \cdot n} = (x^m)^n$,
3. $(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$.

B.D.

Fakt 2 (wzór Newtona). *Dla $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{(n-k)}.$$ [15]

B.D.

[15] Zakładam, że symbol Newtona $\binom{n}{k}$ jest znany ze szkoły. Symbol „skróconego sumowania" $\sum_{k=m}^{n} a_k$ „definiuje" się nieformalnie jako $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$, a ścisłą, rekurencyjną definicję pozostawiam do wymyślenia Państwu.

Etap 3: Definicja $\sqrt[n]{a}$ dla $a \geqslant 0, n \in \mathbb{N}$

Chcielibyśmy zdefiniować $\sqrt[n]{a}$ (tj. pierwiastek n–tego stopnia z a) jako liczbę nieujemną, która daje a po podniesieniu do potęgi n-tej. Ale tu pojawia się problem — skąd bowiem gwarancja, że taka liczba w ogóle istnieje? Aby się o tym przekonać, postąpimy nieco ostrożniej — i tu znów przyda się aksjomat zupełności.

Definicja. $\sqrt[n]{a} := \sup A$, *gdzie* $A = \{x \geqslant 0 : x^n \leqslant a\}$.

Zauważmy, że to poprawna definicja — ten kres istnieje, bo powyższy zbiór A jest niepusty (0 do niego należy) oraz ograniczony z góry — gdy $a \leqslant 1$, to np. przez 1, a gdy $a > 1$, to np. przez a. Zgodnie z naszą intencją zachodzi:

Twierdzenie I.9. $\forall_{a \geqslant 0,\, n \in \mathbb{N}}\ (\sqrt[n]{a})^n = a$. *Ponadto* $\sqrt[n]{a}$ *dla* $a \geqslant 0$ *jest* ***jedyną*** *taką liczbą nieujemną, której* n*-ta potęga to* a.

B.D.

Uwaga. Dodatkowo przyjmujemy, że jeśli $n \in \mathbb{N}$ oraz n jest nieparzyste i $c < 0$, to $\sqrt[n]{c} := -\sqrt[n]{-c}$. Oczywiście wówczas także $(\sqrt[n]{c})^n = c$.

Zgodnie ze znanym zwyczajem często piszemy $\sqrt{a}$ zamiast $\sqrt[2]{a}$.

A oto ważny wynik dotyczący niewymierności pierwiastków.

Twierdzenie I.10. *Niech* $m, n \in \mathbb{N}$. *Jeżeli* $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{N}$, *to* $\sqrt[n]{m} \notin \mathbb{Q}$. **B.D.**

Wniosek. $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$, *bo* $\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$ *na mocy twierdzenia I.10.*

Wspomnijmy jeszcze, że pominięty przez nas dowód tw. I.9 nie jest bardzo trudny, ale wymaga więcej czasu. Zachęcam do samodzielnego udowodnienia. Przyda się m. in. wykazana już nierówność Bernoulli'ego. Twierdzenie I.10 można z kolei wykazać w oparciu o teorię podzielności, na którą jednak niestety czasu nam brak.

Etap 4: x^q dla $x > 0$, $q \in \mathbb{Q}$

Potrzebny nam będzie

Lemat. *Jeżeli* $x > 0$ *oraz* $n, n' \in \mathbb{N}, m, m' \in \mathbb{Z}$ *spełniają* $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$, *to* $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$.

Dowód.

W tym dowodzie przyda się

Lemacik. *Jeżeli* $a, b > 0$ *oraz* $N \in \mathbb{N}$, *to* $a^N = b^N \Leftrightarrow a = b$.

Prosty dowód lemaciku zostawiam Państwu. By zaś wykazać tezę lematu, wystarczy sprawdzić „równość po podniesieniu do potęgi $N = n \cdot n'$", która na mocy twierdzenia I.9 i faktu 1 pkt. 2. równoważna jest $x^{m \cdot n'} = x^{m' \cdot n}$ — co zachodzi z założenia. □

Przyjmujemy następującą definicję:

Definicja. *Dla* $x > 0$ *oraz* $q \in \mathbb{Q}$

$$x^q := \sqrt[n]{x^m},$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ *są takie, że* $q = \frac{m}{n}$.

Ta definicja jest poprawna dzięki powyższemu lematowi, gdyż gwarantuje on, że wartość $\sqrt[n]{x^m}$ nie zależy od wyboru n i m spełniających $\frac{m}{n} = q$. Zauważmy też, że dla $q \in \mathbb{Z}$ ta definicja pokrywa się z def. z etapu 2.

Etap 5: x^y dla $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

Definicja.

1. *Dla* $x \geqslant 1$, $y \in \mathbb{R}$ $\quad x^y := \sup\{x^q : q \in \mathbb{Q}, q \leqslant y\}$;

2. dla $0 < x < 1$ *i* $y \in \mathbb{R}$*, korzystając z 1. mamy zdefiniowane* $(\frac{1}{x})^y$ *i definiujemy* $x^y := \frac{1}{(\frac{1}{x})^y}$.

Nietrudno wykazać, że powyższa definicja jest poprawna, tj. że zbiór, którego kres pojawia się w 1. jest ograniczony z góry. Łatwo też wykazać, że dla $y \in \mathbb{Q}$ tak zdefiniowana potęga pokrywa się z tą z poprzedniego etapu. Jednak tak naprawdę żmudna i nietrywialna praca, to wykazanie, że tak zdefiniowana potęga rzeczywista posiada wszelkie „potrzebne" własności. Z braku czasu poniższy fakt podajemy znów bez dowodu.

Fakt („algebraiczne" własności potęgowania). *Dla* $a, b > 0$ *oraz* $x, y \in \mathbb{R}$ *zachodzi:*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$,
2. $a^{x \cdot y} = (a^x)^y$,
3. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

Funkcja wykładnicza i potęgowa

Przyjmujemy następującą terminologię dotyczącą funkcji określonych na podzbiorach $\mathbb{R}$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Niech $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}$.

Definicja. *Funkcja* f *jest*

- ***dodatnia*** *wtw* $\forall_{x \in X}\ f(x) > 0$;
- ***nieujemna*** *wtw* $\forall_{x \in X}\ f(x) \geqslant 0$;
- ***rosnąca*** *wtw* $\forall_{x,y \in X}\ (x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y))$;
- ***ściśle rosnąca*** *wtw* $\forall_{x,y \in X}\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$

W analogiczny sposób (proszę samodzielnie wypisać...) określa się, że f *jest* ***ujemna***, ***niedodatnia***, ***malejąca***, ***ściśle malejąca*** [16] *. Ponadto* f *jest*

- ***monotoniczna*** *wtw* f *jest rosnąca lub malejąca;*
- ***ściśle monotoniczna*** *wtw* f *jest ściśle rosnąca lub ściśle malejąca.*

Wnioski.

(i) (o funkcji wykładniczej) *Niech* $a > 0$*. Funkcja wykładnicza o podstawie* a*, tj. funkcja* $W_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadana dla* $x \in \mathbb{R}$ *wzorem* $W_a(x) = a^x$ *jest dodatnia. Dla* $a > 1$ W_a *jest ściśle rosnąca, a dla* $a < 1$ *ściśle malejąca.*

(ii) (o funkcji potęgowej) *Niech* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Funkcja potęgowa o wykładniku* α*, tj. funkcja* $P_\alpha : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ *zadana wzorem* $P_\alpha(x) = x^\alpha$ *dla* $x > 0$ *jest dodatnia. Dla* $\alpha > 0$ *funkcja* P_α *jest ściśle rosnąca, a dla* $\alpha < 0$ *ściśle malejąca.*

Dowód.
Dla $x \geqslant 1$, $q \in \mathbb{Q}$ zachodzi $x^q > 0$ (patrz etapy 1 — 4), stąd kres górny z punktu 1. definicji w etapie 5 jest dodatni, czyli $x^y > 0$. Zatem dla $x \in (0; 1)$ także $x^y > 0$ na mocy 2. definicji. Stąd dodatniość obu funkcji W_a i P_α.

[16] Ale proszę o ostrozność! Niektórzy stosują inną terminologię, w której „nasza" rosnąca nazywa się *niemalejąca*, a „nasza" ściśle rosnąca nazywa się rosnąca (i analogicznie dla malejącej i ściśle malejącej)... Proszę jednak trzymać się terminologii tu przyjętej.

Teraz zajmiemy się ścisłą monotonicznością dla W_a. Niech $a > 1$ oraz $x < y$. Na mocy dodatniości oraz powyższego faktu (pkt. 1.) zachodzi

$$\frac{a^y}{a^x} = a^{y-x} = \sup A,$$

gdzie $A = \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q \leqslant y - x\}$. Ponieważ $y - x > 0$, więc korzystając z tw. I.8 (o gęstości $\mathbb{Q}$) wybierzemy $q_0 \in \mathbb{Q}$ takie, że $\frac{y-x}{2} \leqslant q_0 \leqslant y - x$. A zatem $q_0 > 0$ oraz $a^{q_0} \in A$, więc $\sup A \geqslant a^{q_0}$. Jednak z definicji potęgi dla wykładników wymiernych (etapy 1 — 4) z faktu, że $q_0 > 0$ i $a > 1$ dostajemy łatwo[17], że $a^{q_0} > 1$, czyli w efekcie $\sup A > 1$, skąd $a^y > a^x$. Dla $a < 1$ — dowód łatwy z punktu 2. definicji i z powyższego już wykazanego. Dowód ścisłej monotoniczności dla P_α — analogiczny, ale zamiast punktu 1. pow. faktu należy użyć punkt 3. □

[17] Zachęcam do ścisłego wykazania tego przy użyciu podanych definicji.

Zadania do Rozdziału I

1. Wykaż następujące tożsamości i nierówności:

   $\forall$ (a) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $q \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$;

   (b) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ dla $n \in \mathbb{N}_0$ oraz $a, b \in \mathbb{R}$ (wzór Newtona, fakt str. 12);

   $\forall$ (c) $|a| + |b| \geqslant |a-b| \geqslant ||a| - |b||$ dla $a, b \in \mathbb{R}$;

   $\forall$ (d) $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ dla $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$;

   (e) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$ dla $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$;

   $\forall$ (f) $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$;

   Uwaga: w a), b) przyjmujemy $0^0 = 1$.

2. Wykaż, że

   (a) $\forall_{q>1}\ \forall_{k\in\mathbb{N}}\ \exists_{c>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ q^n \geqslant cn^k$;

   (b) $\forall_{q>1}\ \forall_{\alpha>0}\ \exists_{c>0}\ \forall_{x\geqslant 1}\ q^x \geqslant cx^\alpha$.

3. Niech p_n oznacza n-tą z kolei liczbę pierwszą. Wykaż, że $\forall_{n\in\mathbb{N},\ n\geqslant 12}\ p_n \geqslant 3n$.

   Uwaga: tu można użyć wiedzy „szkolnej”, a nie tylko tej z wykładu. Np. zakładam, że każdy student orientuje się co to jest liczba pierwsza (a zatem $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ itd).

$\forall$ 4. Wykaż w sposób całkowicie ścisły (wskazując na każdym kroku rozumowania z jakiego aksjomatu lub uprzednio wykazanego twierdzenia należy skorzystać) **kilka** elementarnych własności liczb rzeczywistych — **np.**: te poniższe:

   (a) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a \cdot 0 = 0$;

   (b) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ (-1)\cdot a = -a$;

   (c) $\forall_{a,b\in\mathbb{R}}\ -(a+b) = -a-b$;

   (d) $\forall_{a\in\mathbb{R}}\ a^2 \geqslant 0$;

5. Niech $A, B \subset \mathbb{R}$ będą niepuste i ograniczone. Czy istnieje wzór wyrażający:

   (a) $\sup(A\cup B)$,

   (b) $\inf(A\cup B)$,

   (c) $\sup(A\cap B)$,

   (d) $\inf(A\cap B)$

   przy pomocy kresów zbiorów A i B? Jeśli tak, to znajdź taki wzór (i udowodnij), a jeśli nie, to wykaż, że nie istnieje.

$\forall$ [18] 6. Niech I będzie pewnym niepustym zbiorem („indeksów”) oraz dla każdego $i \in I$ niech $A_i \subset \mathbb{R}$ będzie niepusty i ograniczony z góry. Udowodnij, że $\sup(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sup\{\sup A_i : i \in I\}$.

[18] proszę to zrobić przynajmniej przy dodatkowym założeniu, że zbiór z prawej strony jest ograniczony z góry; bez tego założenia istotna staje się umowa o „$+\infty$” z wykładu.

Dla $A, B \subset \mathbb{R}$ określamy działania algebraiczne (na zbiorach) $+$ i $\cdot$ następująco:
$A + B := \{a + b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B := \{a \cdot b \in \mathbb{R} : a \in A, b \in B\}$.
Oznaczmy też:

- $-A := \{-1\} \cdot A$,
- $A \leqslant B$ wtw $\forall_{a \in A,\, b \in B}\ a \leqslant b$

i gdy $c \in \mathbb{R}$

- $c \leqslant A$ wtw $\forall_{a \in A}\ c \leqslant a$ i analogicznie $c < A$, $c > A$, $c \geqslant A$,
- $c + A := \{c\} + A$.

7. Wykaż, że jeśli $A, B \subset \mathbb{R}$ są niepuste i ograniczone z góry, to:
   (a) $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$;
   (b) $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup(B)$ przy dodatkowym założeniu, że $A, B > 0$;
   (c) $\inf(-A) = -\sup(A)$.

   Uwaga: w dowodzie pkt. a) można np. wykorzystać wynik z zadania I.6 oraz szczególną wersję pkt. a) dla $A = \{a\}$. Dla b) — analogicznie.
8. Wykaż, że jeśli $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ oraz $\inf A = \sup A$, to A jest zbiorem jednoelementowym.

$\forall$ 9. Wykaż, że jeśli A, B są niepustymi podzbiorami $\mathbb{R}$, to $A \leqslant B \Rightarrow \sup A \leqslant \inf B$.

10. Znajdź oba kresy zbiorów:
    (a) $\{a^2 - ab : a, b \in (0; 1)\}$;
    (b) $\{|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| : n, m \in \mathbb{N}, n \neq m\}$;
    $\forall$ (c) $\{\frac{n-k}{n+k} : n, k \in \mathbb{N}\}$.
11. Znajdź dowód (pominięty na wykładzie) dla szczególnego przypadku $n = 2$ w twierdzeniu I.9., tj. wykaż, że $(\sqrt[2]{a})^2 = a$ dla $a \geqslant 0$.

II Ciągi liczbowe, granica

[około 3 wykłady]

1. Podstawowe pojęcia i oznaczenia

Ciąg

Niech $n_0 \in \mathbb{Z}$. *Ciągiem (indeksowanym od n_0)* nazywamy funkcję określoną na $\mathbb{N}_{n_0}$. Jej wartości nazywamy *wyrazami ciągu*. Gdy wyrazy są liczbami rzeczywistymi, mówimy o *ciągu liczbowym* (ew. *rzeczywistym*)[19] .

Najczęściej będziemy mieli do czynienia z sytuacją, gdy *indeks początkowy* n_0 równy jest 0 lub 1. Ciąg będziemy oznaczali jedną literą, np. a lub tak: $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ — ta druga możliwość pozwala na wyraźne zaznaczenie początkowego indeksu. Choć czasem (np. przy większym pośpiechu...) może skrócimy to nieco do $\{a_n\}$. Aby jednak nie przypominać przy każdej okazji jaki jest indeks początkowy rozważanych ciągów przyjmijmy, że na ogół będzie to właśnie n_0 (przynajmniej w tym rozdziale, choć nie tylko). Indeks „ogólny" dla ciągu będziemy najczęściej oznaczali przez n, ale nie zawsze — oczywiście zamiast $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ możemy równie dobrze pisać np. $\{a_k\}_{k\geqslant n_0}$. Niektórzy zamiast „$\{a_n\}$" używają „(a_n)".

Aby wyraźnie podkreślić zasadniczą różnicę pomiędzy n-tym wyrazem a_n ciągu $a = \{a_k\}_{k\geqslant n_0}$ a „całym" ciągiem a, będziemy na wykładzie unikali często stosowanego żargonowego sformułowania „ciąg a_n", pisząc zamiast tego „ciąg $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$" lub „ciąg a".

Reasumując, ciąg liczbowy a to funkcja $a\colon \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}$ (dla pewnego $n_0 \in \mathbb{Z}$). Inaczej tylko niż przy typowym zapisie dla funkcji oznaczamy wartość tej funkcji w punkcie $n \in \mathbb{N}_{n_0}$, czyli n-ty wyraz ciągu a. Piszemy bowiem a_n zamiast $a(n)$, choć ten drugi zapis też jest czasem stosowany.

Działania, nierówności, monotoniczność

Dla ciągów, podobnie jak ogólnie dla funkcji, określa się działania dodawania, mnożenia, odejmowania i dzielenia przez liczbę. Oznacza się je tymi samymi symbolami, co odpowiednie działania dla liczb, choć formalnie są to oczywiście zupełnie inne działania. Np. gdy $r \in \mathbb{R}$ oraz a, b są ciągami liczbowymi o tym samym indeksie początkowym n_0, to $(r \cdot a)_n := r \cdot a_n$, $(a + b)_n := a_n + b_n$ dla $n \geqslant n_0$. Analogicznie („punktowo") określamy pozostałe działania, przy czym dzielić „wolno" oczywiście tylko przez ciąg o wszystkich wyrazach $\neq 0$.

Będziemy też używali symboli nierówności $\leqslant, \geqslant, <, >$ dla ciągów (znów, to małe nadużycie...) np. $a \leqslant b$ wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n \leqslant b_n$ [20] oraz $r \leqslant a$ wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ r \leqslant a_n$ i analogicznie przy pozostałych typach nierówności.

Ciąg a jest *ograniczony z góry (z dołu)* wtw $a \leqslant r$ ($r \leqslant a$) dla pewnego $r \in \mathbb{R}$; a jest *ograniczony* tzn., że jest ograniczony z góry i z dołu.

Ważna klasa ciągów to *ciągi monotoniczne*, tj. *rosnące* i *malejące* (nie jednocześnie...). Obowiązuje tu terminologia wprowadzona już w rozdziale I ogólnie dla wszystkich funkcji. Dla takich szczególnych funkcji, jakimi są ciągi, warunki z odpowiednich definicji można zapisać prościej. A więc np. $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest rosnący wtw $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_{n+1} \geqslant a_n$. Przypominam, że u nas nierówność jest „$\geqslant$", nie „$>$", a ta ostra pojawia się w definicji ciągu ściśle rosnącego.

---

[19] Na tym wykładzie liczby są w zasadzie tylko rzeczywiste, ale ogólniej ciągi liczbowe mogą mieć wyrazy będące dowolnymi liczbami zespolonymi.

[20] Formalnie powinniśmy napisać tu „$\forall_{n\in\mathbb{N}_{n_0}}$" lub „$\forall_{n\in\mathbb{Z}, n\geqslant n_0}$", ale taki skrótowy zapis „$\forall_{n\geqslant n_0}$" z domyślnym wyborem $n \in \mathbb{Z}$, a nie wszystkich $n \in \mathbb{R}$, stosować będziemy często.

„Dostatecznie duże” i „od pewnego miejsca”

Przy okazji teorii zbieżności ciągów przydatna bywa poniższa terminologia:

- gdy φ jest pewną formułą zdaniową ze zmienną ze zbioru $\mathbb{Z}$ lub z pewnego $\mathbb{N}_k$, to zdanie: $\varphi(n)$ *dla dostatecznie dużych* n oznacza to samo co

$$\exists_{N\in\mathbb{Z}} \forall_{n\geqslant N} \ \varphi(n).$$

  Dla skrócenia będziemy pisać: d.d.d. zamiast „dla dostatecznie dużych”. Np. zamiast $\exists_{N\in\mathbb{N}} \forall_{n\geqslant N} \ n^2-7\geqslant n$ możemy napisać: $n^2-7\geqslant n$ d.d.d. n.

- gdy W jest pewną własnością ciągu lub ciągów, to mówimy, że W zachodzi *od pewnego miejsca*, gdy istnieje $N\in\mathbb{Z}$ takie, że W zachodzi dla tych ciągów „obciętych” do $\mathbb{N}_N$ (tzn. w miejsce ciągu $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ bierzemy $\{a_n\}_{n\geqslant N}$).

Np. Ciąg a jest rosnący od pewnego miejsca wtw $\exists_{N\in\mathbb{Z}} \ \{a_n\}_{n\geqslant N}$ jest rosnący wtw

$$\exists_{N\in\mathbb{Z}} \forall_{n\geqslant N} \ a_{n+1}\geqslant a_n$$

wtw $a_{n+1}\geqslant a_n$ d.d.d. n. Jednak **nie** powinniśmy używać sformułowań „a jest rosnący d.d.d. n” **ani** „a_n jest rosnący d.d.d. n” (dlaczego?).

Granica

Zajmijmy się wreszcie najważniejszym tu dla nas pojęciem granicy ciągu liczbowego $a=\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$.

Definicja.

- *Niech $g\in\mathbb{R}$. Ciąg a jest* ***zbieżny do*** *g wtw*

$$\forall_{\epsilon>0} \exists_{N\geqslant n_0} \forall_{n\geqslant N} \ |a_n-g|<\epsilon$$

  (tj. $\forall_{\epsilon>0} \ (|a_n-g|<\epsilon$ d.d.d. n)).

- *Ciąg a jest* ***zbieżny*** *wtw a jest zbieżny do g dla pewnego $g\in\mathbb{R}$.*

- *Ciąg a jest* ***rozbieżny*** *wtw a nie jest zbieżny.*

- *Ciąg a jest* ***rozbieżny do*** $+\infty$ ***($-\infty$)*** *wtw $\forall_{C\in\mathbb{R}} \exists_{N\geqslant n_0} \forall_{n\geqslant N} \ a_n>C \ (a_n<C)$.*

- *Niech $g\in\mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}=:\overline{\mathbb{R}}$. Ciąg a* ***ma granicę*** *g lub inaczej: g* ***jest granicą*** *a wtw [$g\in\mathbb{R}$ i a jest zbieżny do g] lub [$g=\pm\infty$ i a jest rozbieżny do g]. Zapisujemy to symbolem $a_n\to g$, ewentualnie $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} g$, a samą granicę ciągu a oznaczamy $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.*

Uwaga 1. Nie możemy więc powiedzieć: „a jest zbieżny do $+\infty$”, ale możemy: „a ma granicę $+\infty$”, co znaczy tyle co „a jest rozbieżny do $+\infty$”.

Uwaga 2. Wbrew tej tradycyjnej notacji, jak widać z definicji, granica i zbieżność są związane z „całym” ciągiem, a nie z „jakimś jego n-tym wyrazem”. Może lepsza byłaby więc notacja „$\lim a$”, „$a\to g$”, ale to wbrew tradycji...

Fakt 1. *Jeśli a posiada granicę, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.* **B.D.**

Zachęcam do samodzielnego dowodu „nie wprost” (tj. przez dojście do sprzeczności, przy założeniu, że teza jest fałszywa).

A zatem symbol $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ jest poprawnie określony w przypadku ciągu posiadającego granicę.

Fakt 2 (dość oczywisty). *Jeżeli* $a_n = b_n$ *d.d.d.* n*, to* $a_n \to g \Leftrightarrow b_n \to g$. **B.D.**

Przykłady (najbardziej elementarne).

1. Ciąg stały. Niech $r \in \mathbb{R}$. Oznaczmy: $a \equiv r$ wtw $\forall_{n \geqslant n_0}\ a_n = r$. Oczywiście gdy $a \equiv r$, to $a_n \to r$.
2. $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ — to natychmiastowy wniosek z zasady Archimedesa (tw. I.5).
3. $\frac{1}{n} \to 0$ — to dowodzimy jak wyżej (to klasyczny przykład „szkolny” — przynajmniej do niedawna. . .).
4. $(-1)^n$ — ciąg o wyrazach zadanych takim wzorem jest rozbieżny i (co gorsza...) w ogóle nie ma żadnej granicy.

Dalsze „elementarne” przykłady wygodniej będzie badać po rozwinięciu choć trochę teorii zbieżności.

2. Własności arytmetyczne granicy

Omawianie najważniejszych twierdzeń teorii zbieżności zaczniemy od twierdzenia o zachowaniu się granicy przy dokonywaniu podstawowych operacji algebraicznych na ciągach.

Działania z udziałem $\pm\infty$

Najpierw jednak częściowo[21] rozszerzymy działania określone w $\mathbb{R}$ na tzw. *rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych* $\overline{\mathbb{R}}$, który zdefiniowaliśmy niedawno jako $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Rozszerzenia te zdefiniowane są w następujących tabelach (argument z wiersza odpowiada lewemu argumentowi działania, a z kolumny — prawemu). Znak „$\times$” oznacza, że dane działanie nie jest *określone*. O a i b zakładamy, że należą do $\mathbb{R}$.

$+$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$
$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$-\infty$

$-$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a-b$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$

$\cdot$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a \cdot b$	$+\infty \quad a > 0$ $\times \quad a = 0$ $-\infty \quad a < 0$	$-\infty \quad a > 0$ $\times \quad a = 0$ $+\infty \quad a < 0$
$+\infty$	$+\infty \quad b > 0$ $\times \quad b = 0$ $-\infty \quad b < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty \quad b > 0$ $\times \quad b = 0$ $+\infty \quad b < 0$	$-\infty$	$+\infty$

$:$	b	$+\infty$	$-\infty$
a	$a : b \quad b \neq 0$ $\times \quad b = 0$	0	0
$+\infty$	$+\infty \quad b > 0$ $\times \quad b = 0$ $-\infty \quad b < 0$	$\times$	$\times$
$-\infty$	$-\infty \quad b > 0$ $\times \quad b = 0$ $+\infty \quad b < 0$	$\times$	$\times$

[21] Tylko częściowo, bo można wykazać, że całkiem się nie da, jeśli chcielibyśmy przy tym rozszerzeniu zachować np. aksjomaty ciała.

Możemy też rozszerzyć działania jednoargumentowe (elementy przeciwny i odwrotny):

z	$-z$
a	$-a$
$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$

z	z^{-1}
a	a^{-1} $a \neq 0$ $\times$ $a = 0$
$+\infty$	0
$-\infty$	0

choć w poniższym twierdzeniu nie będzie nam to potrzebne.

Rachunkowe własności granicy

Twierdzenie II.1 (o rachunkowych własnościach granicy). *Niech $\circledast$ oznacza jedno z działań $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Załóżmy, że $a_n \to g$, $b_n \to h$, gdzie $g, h \in \overline{\mathbb{R}}$ są takie, że działanie $g \circledast h$ jest określone*[22] *oraz, w przypadku gdy $\circledast$ jest dzieleniem, że wszystkie wyrazy ciągu $\{b_n\}$ są różne od 0. Wówczas $(a \circledast b)_n \to g \circledast h$.*

Ponadto, jeśli $\{a_n\} > 0$ oraz $a_n \to 0$, to $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

W dowodzie przydatny będzie poniższy rezultat.

Lemat. *Ciąg zbieżny jest ograniczony.*

Dowód.
Niech $a_n \to g \in \mathbb{R}$. Z warunku z definicji „dla $\epsilon = 1$" dostajemy: istnieje $N \geqslant n_0$ takie, że $\forall_{n \geqslant N}\ |a_n - g| < 1$ czyli $\forall_{n \geqslant N}\ g - 1 < a_n < g + 1$. Stąd, jeśli oznaczymy $A := \{a_k \colon k \in \mathbb{Z}, n_0 \leqslant k \leqslant N\}$, to

$$\forall_{n \geqslant n_0}\ \min(\{g-1\} \cup A) \leqslant a_n \leqslant \max(\{g+1\} \cup A).$$

□

Dowód (części twierdzenia II.1).
Udowodnimy tylko jeden z przypadków: gdy $\circledast$ jest mnożeniem oraz $g, h \in \mathbb{R}$. Niech $g, h \in \mathbb{R}$. Na mocy lematu ciąg a jest ograniczony, czyli[23] dla pewnego $C > 0$ zachodzi $\forall_{n \geqslant n_0}\ |a_n| \leqslant C$. A zatem na mocy własności modułu (w tym nierówności trójkąta, ale jakich jeszcze?) mamy dla $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - gh| &= |a_n b_n - a_n h + a_n h - gh| \leqslant |a_n| \cdot |b_n - h| + |a_n - g| \cdot |h| \leqslant \\ &\leqslant C \cdot |b_n - h| + |a_n - g| \cdot |h|. \end{aligned} \tag{II.1}$$

Teraz, aby posługując się definicją wykazać, że $a_n b_n \to gh$, rozważmy dowolne $\epsilon > 0$. Na mocy definicji istnieją takie $N_a, N_b \in \mathbb{Z}$, że

$$|a_n - g| < \frac{\epsilon}{C + |h|} \text{ dla } n \geqslant N_a,$$

$$|b_n - h| < \frac{\epsilon}{C + |h|} \text{ dla } n \geqslant N_b.$$

Biorąc więc $N := \max\{N_a, N_b\}$ mamy

$$\forall_{n \geqslant N}\ |a_n b_n - gh| < (C + |h|)\frac{\epsilon}{C + |h|} = \epsilon.$$

□

[22] Tzn. w tabeli dla działania $\circledast$ dla pary (g, h) **nie** występuje „$\times$".

[23] Zachęcam do samodzielnego wykazania, że „ograniczoność to to samo, co ograniczoność modułu z góry".

Warto zwrócić baczną uwagę na powyższy dowód. Zawiera on dwa elementy dość typowe dla wielu dowodów. Pierwszy to chwyt użyty w formule (II.1) polegający na odjęciu i dodaniu tej samej liczby (tu $a_n h$) przed użyciem nierówności trójkąta. Drugi to dobór N jako większego spośród N_a i N_b.

Użyteczność twierdzenia II.1 dla znajdowania granic rozmaitych ciągów zadanych zawiłymi wzorami wydaje się oczywista. Czasem jest ono nawet skuteczniejsze niż mogłoby się to wydawać na pierwszy rzut oka.

Przykład (szkolny).

$$a_n = \frac{n^2 - 7n + 3}{2n^2 + 3n + 1}.$$

Z twierdzenia II.1 widać, że „mianownik" ma granicę $+\infty$, ale nie daje ono nic dla licznika... („$+\infty - (+\infty)$", choć użyte mniej bezpośrednio coś jednak daje... co?). Nie możemy też więc użyć bezpośrednio tw. II.1 dla ilorazu... Stosując jednak standardowy chwyt z dzieleniem licznika i mianownika przez n^2 przekształcamy a_n do postaci:

$$a_n = \frac{1 - \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}},$$

skąd już $a_n \to \frac{1}{2}$ na mocy tw. II.1.

Granice jeszcze kilku elementarnych ciągów

Jednak aby naprawdę móc skutecznie wykorzystać tw. II.1 potrzeba nam więcej zbadanych granic dla elementarnych przykładów ciągów — te kilka z przykładu ze str. 20 to z pewnością zbyt mało. Poniżej podamy więcej przykładów. Część z nich zostanie zbadana wkrótce na wykładzie, część na ćwiczeniach, a część zostanie bez dowodu (do ewentualnego samodzielnego sprawdzenia).

Przykłady (też elementarne).

a. $n^\alpha \to +\infty$ dla $\alpha > 0$;

b. $a^n \to \begin{cases} 0 & \text{dla } |a| < 1 \\ 1 & \text{dla } a = 1 \\ +\infty & \text{dla } a > 1, \end{cases}$ ponadto $\{a^n\}$ nie posiada granicy gdy $a \leqslant -1$;

c. $\frac{n^\alpha}{C^n} \to 0$ przy dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $C > 1$;

d. $\frac{a^n}{n!} \to 0$ przy dowolnym $a \in \mathbb{R}$;

e. $\sqrt[n]{a} \to 1$ dla $a > 0$;

f. $\sqrt[n]{n} \to 1$;

g. $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$ dla pewnego $e \in (2; 3]$. Uwaga: tak właśnie definiujemy liczbę e (tj. „**Definicja:** e — to granica ciągu...").

Wykazanie, że zachodzą zbieżności/rozbieżności z powyższego przykładu przy użyciu samej tylko definicji granicy byłoby zadaniem dość trudnym. Nieco prościej można sobie z nimi poradzić przy użyciu kilku użytecznych twierdzeń, które wkrótce Państwo poznacie. Wcześniej jednak ostrzeżenie związane z ostatnim przykładem. Poniższe „rozumowanie" „oparte" na twierdzeniu II.1 jest dość częste i typowe dla wielu **nieostrożnych** studentów:

$$„\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ razy}} \to \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n \text{ razy}} = 1."$$

Jednak $1 \neq e$ ... — gdzie tkwi błąd?

3. Granica a nierówności

Poznamy tu kilka twierdzeń dotyczących konsekwencji pewnych nierówności, dotyczących wyrazów ciągów, dla ich granic.

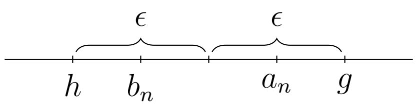
Zachowanie nierówności przy przejściu granicznym

Zacznijmy od następującego ważnego, choć prostego twierdzenia:

Twierdzenie II.2 (o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym). *Jeżeli* $a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n*, oraz* $a_n \to g$, $b_n \to h$*, to* $g \leqslant h$.

Oczywiście przyjmujemy umowę, że $s \leqslant +\infty$ oraz $-\infty \leqslant s$ dla dowolnego $s \in \overline{\mathbb{R}}$. Przyjmujemy także: $-\infty < +\infty$ oraz $-\infty < s < +\infty$ dla dowolnego $s \in \mathbb{R}$.

Dowód (twierdzenia II.2).
Twierdzenie wykażemy tylko dla przypadku $g, h \in \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że $h < g$ i niech $\epsilon := \frac{g-h}{2}$.



Rysunek 2. Tak np. mogłoby być, gdyby $h < g$

Wówczas, ponieważ $\epsilon > 0$, zatem d.d.d. n zachodzi (odpowiednie „N" dobieramy najpierw dla ciągu a, potem dla b, a następnie bierzemy większe z nich — jak w dowodzie tw. II.1):

$$b_n < g - \epsilon = h + \epsilon < a_n,$$

co jest z kolei sprzeczne z założeniem, że $a_n \leqslant b_n$ d.d.d. n. (patrz rys. 2) □

Zauważmy, że nie można w powyższym twierdzeniu zmienić w obu miejscach „$\leqslant$" na „$<$". Wystarczy rozważyć przykład: $a_n = 1$ oraz $b_n = 1 + \frac{1}{n}$.

Twierdzenie o trzech ciągach

Kolejne twierdzenie bywa bardzo użyteczne przy badaniu granic wielu ciągów, dla których użycie twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy wydaje się niemożliwe.

Twierdzenie II.3 (o trzech ciągach). *Jeżeli*

$$a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$$

d.d.d. n*, oraz* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = g$*, to* $\lim_{n\to+\infty} b_n = g$.

Zanim przystąpimy do dowodu zauważmy, że gdybyśmy już wiedzieli, że ciąg środkowy $\{b_n\}$ posiada granicę, to dowód mielibyśmy natychmiast dzięki tw. II.2. Jednak tego nie wiemy...

Dowód.
Znów rozważamy tu tylko przypadek $g \in \mathbb{R}$. Biorąc $\epsilon > 0$, z definicji zbieżności oraz z nierówności z założenia twierdzenia d.d.d. n mamy:

$$g - \epsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < g + \epsilon,$$

a zatem w szczególności $|b_n - g| < \epsilon$. □

Uwaga. W przypadku, gdy $g = +\infty$ lub $-\infty$ założenia można osłabić — wystarczy jedna nierówność d.d.d. n. Lewa dla $+\infty$, a prawa dla $-\infty$. Tak uproszczone twierdzenie nazywane bywa „twierdzeniem o dwóch ciągach".

Wniosek. *Jeżeli ciąg c jest ograniczony oraz ciąg a zbieżny do 0, to ich iloczyn $c \cdot a$ jest zbieżny do 0.*

Dowód.
Z ograniczoności c mamy dla pewnego $M \in \mathbb{R}$

$$\forall_{n \geqslant n_0} \ |c_n| \leqslant M,$$

skąd

$$\forall_{n \geqslant n_0} \ 0 \leqslant |c_n a_n| \leqslant M \cdot |a_n|.$$

Jednak skoro $a_n \to 0$, zatem $|a_n| \to 0$, więc (z tw. II.1 dla ciągu stałego i $\{|a_n|\}$) $M \cdot |a_n| \to M \cdot 0 = 0$. To pozwala użyć tw. II.3 z „lewym" ciągiem stale równym 0. Tak więc $|c_n a_n| \to 0$, a stąd także $c_n a_n \to 0$. $\square$

W powyższym dowodzie został użyty (dwukrotnie) następujący oczywisty i użyteczny

Fakcik. $a_n \to 0$ *wtw* $|a_n| \to 0$.

Dowód.
Patrz definicja zbieżności... $\square$

Granica ciągu monotonicznego

Kolejne twierdzenie także związane z nierównością, ale już w całkiem inny sposób, to twierdzenie dotyczące ciągów monotonicznych.

Twierdzenie II.4 (o granicy ciągu monotonicznego). *Jeżeli ciąg $a = \{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ jest monotoniczny, to posiada granicę. Jest ona równa* $\sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$ *gdy a jest rosnący, natomiast gdy a jest malejący, to równa jest* $\inf\{a_n : n \geqslant n_0\}$ [24]. *W szczególności ciąg rosnący ograniczony z góry, a także ciąg malejący ograniczony z dołu jest zbieżny.*

Dowód.
Zajmiemy się tu tylko przypadkiem ciągu rosnącego ograniczonego z góry. Dowód dla pozostałych przypadków jest podobny. Niech $g := \sup\{a_n : n \geqslant n_0\}$. Wykażemy, że $a_n \to g$. Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ a jest ograniczony z góry, zatem $g \in \mathbb{R}$ (aksjomat ciągłości!), a stąd $g - \epsilon < g$. Z definicji sup liczba $g - \epsilon$ nie jest zatem ograniczeniem górnym zbioru $\{a_n : n \geqslant n_0\}$, czyli istnieje $N \geqslant n_0$ takie, że $a_N > g - \epsilon$. Jednak ponieważ a jest rosnący, zatem dla dowolnego $n \geqslant N$ mamy

$$a_n \geqslant a_N > g - \epsilon,$$

a jednocześnie $g + \epsilon > g \geqslant a_n$, skąd $|a_n - g| < \epsilon$. $\square$

Użycie twierdzeń do elementarnych przykładów

Poznanych w tym podrozdziale twierdzeń użyjemy teraz do zbadania paru spośród przykładów a) — g) ze strony 22.

a) $n^\alpha \to +\infty$ dla $\alpha > 0$. Z zasady Archimedesa znajdziemy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k \geqslant \frac{1}{\alpha}$. Stąd $\frac{1}{k} \leqslant \alpha$ i z własności potęgi $\forall_{n \in \mathbb{N}} \ b_n := \sqrt[k]{n} = n^{\frac{1}{k}} \leqslant n^\alpha$. Na mocy twierdzenia o 2 ciągach wystarczy wykazać, że $b_n \to +\infty$. Ale znów z własności potęgi $\{b_n\}$ jest ciągiem rosnącym, zatem ma pewną granicę g i na dodatek, z tw. II.2, $g \geqslant 0$. Ponadto, z tw. II.1 dla mnożenia (plus indukcja „po k") mamy $b_n^k \to g^k$, ale $b_n^k = n \to +\infty$, stąd $g^k = +\infty$. Więc skoro $g \geqslant 0$, to $g = +\infty$.

[24] Przypominam o umowie z podrozdziału 2., dotyczącej kresów zbiorów nieograniczonych.

c) $\frac{n^\alpha}{c^n} \to 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$. Wybierzmy jakieś $k \in \mathbb{N}$ takie, że $k > \alpha + 1$. Zauważmy, że $\sqrt[k]{c} > 1$ zatem $r := \sqrt[k]{c} - 1 > 0$. Wyraz ogólny naszego ciągu zapiszemy w następujący sposób:

$$a_n = \frac{n^\alpha}{c^n} = \frac{n^\alpha}{((\sqrt[k]{c})^n)^k} = \frac{n^\alpha}{((1+r)^n)^k}.$$

Teraz z nierówności Bernoulli'ego mamy

$$0 \leqslant a_n \leqslant \frac{n^\alpha}{(1+nr)^k} \leqslant \frac{n^{k-1}}{(nr)^k} = \frac{r^{-k}}{n},$$

skąd $a_n \to 0$ z tw. o trzech ciągach.

f) $\sqrt[n]{n} \to 1$. Wykażemy najpierw, że $c_n := \sqrt[n]{\sqrt[2]{n}} \to 1$. Z nierówności Bernoulli'ego otrzymujemy łatwo, że $\sqrt[n]{1+a} \leqslant 1 + \frac{a}{n}$ dla $a > -1$. Stąd mamy

$$1 \leqslant \sqrt[n]{\sqrt[2]{n}} = \sqrt[n]{1 + (\sqrt[2]{n} - 1)} \leqslant 1 + \frac{\sqrt[2]{n} - 1}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt[2]{n}} - \frac{1}{n},$$

więc $c_n \to 1$ na mocy tw. o 3 ciągach. Ale $\sqrt[n]{n} = c_n \cdot c_n \to 1 \cdot 1 = 1$.

e) $\sqrt[n]{a} \to 1$ dla $a > 0$. Gdy $a \geqslant 1$, to d.d.d. n mamy $1 \leqslant \sqrt[n]{a} \leqslant \sqrt[n]{n}$, więc wystarczy użyć f) i tw. o 3 ciągach. Teraz dla $0 < a < 1$ mamy $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$, więc wystarczy skorzystać z poprzedniego przypadku i z tw. II.1.

g) Wykażemy najpierw, że $a = \{a_n\}_{n \geqslant 1}$ o wyrazach zadanych wzorem $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący (a nawet ściśle rosnący). Nierówność $a_{n+1} > a_n$ równoważna jest nierówności

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} < \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n,$$

czyli $1 - \frac{1}{n+2} < (1 - \frac{1}{n^2+2n+1})^n$, a tę ostatnią nierówność łatwo dowieść z nierówności Bernoulli'ego. Następnie dowodzimy, że $\{a_n\}$ jest ograniczony z góry przez 3, zapisując a_n przy użyciu wzoru Newtona:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant 1 + 2,$$

przy czym wyjaśnienie powyzszych dwóch nierówności pozostawiam Państwu. Zbieżność $\{a_n\}$ wynika zatem z tw. II.4, a z tw. II.2 mamy $e \leqslant 3$. Także z tw. II.2, z tego, że $a_2 > 2$ i że a jest rosnący, dostajemy $e > 2$.

4. Podciągi

Podciąg i podciąg uogólniony

Definicja. $\{a'_n\}_{n \geqslant n_0}$ ***jest podciągiem*** *ciągu* $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ *wtw istnieje ściśle rosnący ciąg* $\{k_n\}_{n \geqslant n_0}$ *o wyrazach ze zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *taki, że* $\forall_{n \geqslant n_0}\ a'_n = a_{k_n}$.

Przykład. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}_{n \geqslant 1}$ jest podciągiem ciągu $a = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n \geqslant 1}$ (wystarczy wziąć $k_n := n^2$) ale $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}_{n \geqslant 1}$ nie jest podciągiem ciągu a. Także ciąg $b = \left\{\frac{1}{[\sqrt{n}]}\right\}_{n \geqslant 1}$ nie jest podciągiem ciągu a, choć każdy jego wyraz jest pewnym wyrazem ciągu a.

Trochę w związku z ostatnim przykładem, a trochę z powodów, które wyjaśnią się za moment, przyjmiemy jeszcze drugą definicję.

Definicja. $\{a'_n\}_{n \geqslant n'_0}$ ***jest uogólnionym podciągiem*** *ciągu* $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ *wtw istnieje ciąg* $\{k_n\}_{n \geqslant n'_0}$ *o wyrazach ze zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *taki, że* $k_n \to +\infty$ *oraz* $\forall_{n \geqslant n'_0}\ a'_n = a_{k_n}$.

Uwaga. Podciąg jest uogólnionym podciągiem, bo skoro $\{k_n\}$ jest ściśle rosnący i $\forall_{n \in \mathbb{N}_{n_0}}\ k_n \in \mathbb{N}_{n_0}$, to $k_n \to +\infty$ (dlaczego?). Przykład powyższy z ciągiem b pokazuje, że uogólniony podciąg nie musi być podciągiem.

Granica podciągu

Okazuje się, że jeśli ciąg ma granicę, to tę samą granicę ma każdy jego podciąg. Prawdziwy jest nawet rezultat mocniejszy.

Twierdzenie II.5 (o granicy uogólnionego podciągu). *Jeżeli a' jest uogólnionym podciągiem ciągu a oraz $a_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$, to $a'_n \to g$.*

Dowód.
Rozważymy tylko przypadek gdy $g \in \mathbb{R}$ (dowody w pozostałych przypadkach są analogiczne). Niech $a'_n = a_{k_n}$, $k_n \to +\infty$. Niech $\epsilon > 0$ i niech M takie, że $|a_n - g| < \epsilon$ dla $n \geqslant M$. Ponieważ $k_n \to +\infty$ zatem dobierzemy N takie, że $k_n \geqslant M$ dla $n \geqslant N$. A zatem $|a_{k_n} - g| < \epsilon$ dla $n \geqslant N$. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ dobraliśmy N takie jakie było wymagane definicją i stąd $a'_n = a_{k_n} \to g$. □

Przykład. Rozważmy jeden z przypadków przykładu b) ze strony 22, mianowicie ciąg geometryczny $\{q^n\}_{n \geqslant 1}$ dla $1 > q \geqslant 0$. Oczywiście jest on malejący i ograniczony z dołu przez 0, zatem zbieżny na mocy twierdzenia II.4 do pewnego $g \in \mathbb{R}$. Pytanie tylko czym jest to g? Rozważmy ciąg $\left\{q^{(n+1)}\right\}_{n \geqslant 1}$ — oczywiście to podciąg pierwszego ciągu, zatem z tw. II.5 (i uwagi) mamy $q^{(n+1)} \to g$. Z drugiej strony, z tw. II.1,

$$q^{(n+1)} = q \cdot q^n \to q \cdot g,$$

zatem szukana granica g spełnia równanie

$$g = q \cdot g.$$

Łatwo je rozwiązać: ponieważ $q \neq 1$, zachodzi $g = 0$. W efekcie $q^n \to 0$.

Granica górna i dolna

Twierdzenia II.5 nie daje się oczywiście odwrócić. Przykładem jest tu np. ciąg o wyrazach $(-1)^n$, który ma podciąg zbieżny do 1, ale sam nie jest zbieżny do 1 (w ogóle nie ma granicy). Inaczej mówiąc jeden ciąg a może mieć wiele rozmaitych granic swoich podciągów.

Niech
$$GP(a) = \left\{g \in \overline{\mathbb{R}} : \text{istnieje podciąg } a' \text{ ciągu } a \text{ taki, że } a'_n \to g\right\}.$$

Już wkrótce wykażemy, że zawsze $GP(a)$ jest niepusty. Gdy $a_n \to g$, to $GP(a)$ jest oczywiście (na mocy tw. II.5) zbiorem jednopunktowym — równym $\{g\}$. Można też dowieść, że $GP(a)$ posiada element największy i najmniejszy[25)] .

Warto wiedzieć o istnieniu następujących dwóch uogólnień na **wszystkie** ciągi pojęcia granicy ciągu („zwykła" granica **nie dla każdego** ciągu istnieje). Mianowicie określamy *granicę górną*:

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \max GP(a)$$

[25)] Uwaga: ale w nieco szerszym rozumieniu — przez rozszerzenie (w oczywisty sposób) pojęcia max i min na podzbiory zbioru $\overline{\mathbb{R}}$, gdyż $GP(a)$ może nie być już bowiem podzbiorem $\mathbb{R}$. Np. jeżeli $+\infty \in GP(a)$, to przyjmujemy zatem $+\infty = \max GP(a)$, a gdy $GP(a) = \{-\infty\}$ to $\max GP(a) = -\infty$. I analogicznie z min.

i analogicznie *granicę dolną*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \min GP(a).$$

Można wykazać, że zachodzi

Fakt. $\liminf_{n\to+\infty} a_n = \limsup_{n\to+\infty} a_n = g$ *wtw* $\lim_{n\to+\infty} a_n = g.$ **B.D.**

Lemat o podciągu monotonicznym

Zajmiemy się teraz ważnymi rezultatami dotyczącymi istnienia dla danego ciągu pewnych jego szczególnych podciągów. Zacznijmy od monotoniczności.

Lemat. *Każdy ciąg rzeczywisty posiada podciąg monotoniczny.*

Dowód.
Dla „ustalenia uwagi" przyjmujemy, że $n_0 = 1$. Dla ciągu a określamy

$$A := \left\{k \in \mathbb{N} : \forall_{l>k}\ a_l \geqslant a_k\right\}.$$

Zachodzi jeden z dwóch poniższych przypadków. Dla obu zdefiniujemy rekurencyjnie taki ciąg indeksów $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$ (ściśle rosnący), że $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest monotoniczny.

$1°$**.** A **jest nieograniczony z góry.** Wówczas niech $k_1 := \min A$, $k_{n+1} := \min\{k \in A : k > k_n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (inaczej mówiąc, k_n to „n-ty z kolei (co do wielkości) element A") — to poprawna definicja, bo zbiór powyższy jest niepusty skoro A — nieograniczony z góry i dzięki zasadzie minimum to min istnieje. Jednocześnie z definicji mamy $k_{n+1} > k_n$, $k_n \in A \subset \mathbb{N}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, a ponadto z definicji A

$$\forall_{l>k_n}\ a_l \geqslant a_{k_n},$$

w szczególności zatem $a_{k_{n+1}} \geqslant a_{k_n}$. Czyli $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest podciągiem ciągu a i to podciągiem rosnącym.

$2°$**.** A **jest ograniczony z góry.** Wybierzmy zatem $M \in \mathbb{N}$ (przy okazji stosujemy tu zasadę Archimedesa) takie, że $\forall_{k\in A}\ k < M$. Dla $l \in \mathbb{N}_M$ oznaczmy

$$B(l) := \{k \in \mathbb{N} : k > l, a_k < a_l\}.$$

Zauważmy, że $B(l) \neq \emptyset$. Gdyby bowiem $B(l) = \emptyset$, to $\forall_{k>l}\ a_k \geqslant a_l$, czyli $l \in A$, co jest niemożliwe, bo $l \geqslant M$. Znów więc dzięki zasadzie minimum $B(l)$ posiada min i co więcej zachodzi $\min B(l) > l \geqslant M$. Zatem możemy określić $f : \mathbb{N}_M \to \mathbb{N}_M$ wzorem

$$f(l) = \min B(l)$$

i mamy z definicji $f(l) \in B(l)$, skąd dla $l \in \mathbb{N}_M$ zachodzi

a) $f(l) > l$,

b) $a_{f(l)} < a_l$.

Teraz definiując $k_1 := M$, $k_{n+1} := f(k_n)$ dla $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy z a) $k_{n+1} > k_n$. W szczególności więc dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ $k_n \in \mathbb{N}_M$ oraz z b) $a_{k_{n+1}} = a_{f(k_n)} < a_{k_n}$. Czyli $\{a_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ jest podciągiem malejącym ciągu a (i to nawet ściśle).

□

Podciągi zbieżne — twierdzenie Bolzano - Weierstrassa

Powyższy lemat i twierdzenie II.4 dają natychmiast

Wniosek. *Każdy ciąg posiada podciąg, który ma granicę w* $\overline{\mathbb{R}}$.

A przy mocniejszych założeniach otrzymujemy znane i bardzo ważne

Twierdzenie II.6 (Bolzano - Weierstrassa). *Każdy ciąg ograniczony posiada podciąg zbieżny.*

Dowód.
Na mocy lematu ograniczony ciąg a posiada podciąg monotoniczny a' — ale ten podciąg jest ciągiem ograniczonym, skoro a jest ograniczony. Zatem z tw. II.4 ciąg a' — zbieżny. □

Jak widać, przy naszym podejściu cały ciężar dowodu spadł na dowód lematu.

5. Zupełność (trochę inna)

O zupełności była już mowa przy okazji aksjomatu zupełności. Teraz ta nazwa pojawi się w kontekście ciągów w innym znaczeniu, choć powiązanym ściśle z tym poprzednim.

Definicja. *Ciąg a jest **ciągiem Cauchy'ego** wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m,n\geqslant N}\ |a_m - a_n| < \epsilon \tag{II.2}$$

Jak widać, nieco to przypomina definicję granicy ciągu, ale w ogóle w tej definicji granica się nie pojawia. Mowa jest jedynie o tym, że „dla dużych indeksów wyrazy są sobie bliskie". Jednak to pierwsze podobieństwo okazuje się nie być przypadkowe! Zachodzi bowiem:

Twierdzenie II.7 (o zupełności $\mathbb{R}$). *Ciąg liczbowy jest ciągiem Cauchy'ego wtw jest ciągiem zbieżnym.*

Dowód.
„$\Leftarrow$"
Niech $a_n \to g \in \mathbb{R}$ i niech $\epsilon > 0$. Z definicji zbieżności dobierzmy N takie, że $|a_n - g| < \frac{\epsilon}{2}$ dla każdego $n \geqslant N$. W szczególności zatem, gdy $m, n \geqslant N$, to $|a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon$, skąd z nierówności trójkąta

$$|a_n - a_m| = |a_n - g + g - a_m| \leqslant |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon.$$

„$\Rightarrow$"
Teraz załóżmy, że a jest ciągiem Cauchy'ego.

Wykażemy najpierw, że a jest ograniczony. Korzystając z (II.2) („z $\epsilon = 1$") wybierzmy $N' \geqslant n_0$ takie, że

$$\forall_{m,n\geqslant N'}\ |a_m - a_n| < 1.$$

A zatem jeżeli $n \geqslant N'$, to („bierzemy $m = N'$") $|a_{N'} - a_n| < 1$ skąd $|a_n| \leqslant |a_{N'}| + 1$. A jeżeli $n \leqslant N'$, to $|a_n| \leqslant \max\{|a_k| : n_0 \leqslant k \leqslant N',\ k \in \mathbb{Z}\}$. Stąd a — ciąg ograniczony.

Na mocy twierdzenia Bolzano - Weierstrassa istnieje podciąg uogólniony a' ciągu a, który jest zbieżny. Niech więc $a'_n = a_{k_n} \to g \in \mathbb{R}$, gdzie $k_n \to +\infty$.

Wykażemy, że również $a_n \to g$. Niech $\epsilon > 0$. Korzystając znów z (II.2) wybierzmy $N \geqslant n_0$ takie, że $\forall_{m,n\geqslant N}\ |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2}$. Ponieważ $k_n \to +\infty$ oraz $a_{k_n} \to g$, zatem możemy wybrać takie s, że $|a_{k_s} - g| < \frac{\epsilon}{2}$ i jednocześnie $k_s \geqslant N$. W szczególności („bierzemy $m = k_s$")

$$\forall_{n\geqslant N}\ |a_{k_s} - a_n| < \frac{\epsilon}{2},$$

skąd dla dowolnego $n \geqslant N$

$$|a_n - g| = |a_n - a_{k_s} + a_{k_s} - g| \leqslant |a_n - a_{k_s}| + |a_{k_s} - g| < \epsilon.$$

To dowodzi, że $a_n \to g$. □

Warto wspomnieć, że powyższe twierdzenie, podobnie jak twierdzenie II.4 (o granicy ciągu monotonicznego) może służyć do dowodu istnienia granicy ciągu w takich sytuacjach, gdy nawet nie mamy pomysłu jaka ta granica mogłaby ewentualnie być.

6. Informacja o dalszych twierdzeniach dotyczących granicy ciągu

Na koniec tego rozdziału podaję bez dowodu kilka dalszych twierdzeń, niekiedy użytecznych w praktycznych zadaniach dotyczących granicy.

Twierdzenie II.8 (o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej). *Niech* $n_0 = 1$. *Jeżeli* $a_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$, *to*

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to g.$$

Jeżeli ponadto $\forall_{n \geqslant 1}\ a_n > 0$, *to*

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \to g.$$

Twierdzenie II.9 (Stolza). *Niech* $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ *i* $\{b_n\}_{n \geqslant n_0}$ *będą takie, że*

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} \to g \in \overline{\mathbb{R}},$$

przy czym $\{b_n\}_{n \geqslant n_0}$ *jest ciągiem ściśle monotonicznym o wyrazach niezerowych oraz zachodzi jeden z warunków:*

- $a_n \to 0,\ b_n \to 0$
- $b_n \to +\infty$
- $b_n \to -\infty$

Wówczas $\dfrac{a_n}{b_n} \to g.$

Zadania do Rozdziału II

$\forall$ [26)] 1. Znajdź granicę lub wykaż jej brak dla ciągów o wyrazach zadanych wzorami podanymi niżej (o ile „się da” — **bez** użycia twierdzenia o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej i twierdzenia Stolza).

(a) $\frac{n^{\left(9^{(9^9)}\right)}}{1,0000001^n}$

(b) $\frac{(n-7)^{100}}{(n+7)^{101}}$

(c) $\frac{7^n+6^n-n^{1000}}{(7,1)^n-7^n+n^{1001}}$

(d) $\frac{100^n+n!-\sqrt{n!}}{n!-200^n}$

(e) $(1,00001-\frac{1}{n})^n$

(f) $(1+\frac{1}{n^2})^n$

(g) $(0,9999+\frac{1}{n})^n$

(h) $(1+\frac{1}{n})^{n^2}$

(i) $\sqrt[n]{n^{100}}$

(j) $\sqrt[n]{7^n+3^n}$

(k) $\sqrt[n]{7^n-3^n}$

(l) $\sqrt[n]{n!}$

(m) $\sqrt[n]{n!-100^n}$

(n) $\sqrt{n^2+n}-n$

(o) $\frac{n^n}{n!}$

(p) $\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+9}{2n-1}$ $(=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+9}{2k-1})$

(q) $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$.

$\forall$ [27)] 2. Znajdź granicę lub wykaż jej brak dla następujących ciągów zadanych rekurencyjnie wzorami

(a) $a_1=\alpha,\ \ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{5}{a_n})$ dla $n\geqslant 1$, dla $\alpha=2$ oraz dla $\alpha=3$;

(b) $a_1=x,\ \ \ a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\cdot(2-a_n)$ dla $n\geqslant 1$, w zależności od $x\in[0;2]$.

3. Zbadaj, czy ciągi zadane wzorami poniżej są zbieżne

(a) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$ $(=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+k})$;

(b) $\sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{10^k}$, gdzie $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ jest pewnym ciągiem cyfr.

4. Wykaż, że jeśli $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n>0$ oraz $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to g$, to $\sqrt[n]{a_n}\to g$.

5. Wykaż, że dla dowolnego $p\in\mathbb{N}_0$ zachodzi

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}\to\frac{1}{p+1}.$$

6. Przeprowadź samodzielnie pominięty na wykładzie dowód twierdzenia II.1 (o rachunkowych własnościach granicy) dla przypadku ilorazu.

7. Wykaż, że jeżeli $k\in\mathbb{N}$ oraz $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n\geqslant 0$, to $a_n\to g\Rightarrow\sqrt[k]{a_n}\to\sqrt[k]{g}$ (rozważ kolejno przypadki: $g=1$, $g>0$, $g=0$)

$\forall$ 8. Znajdź przykłady do kilku „nieoznaczoności”, tj. sytuacji gdy operacja nie jest określona w rozumieniu ze strony 20, wykazując, że nie dałoby się danej operacji dla tej sytuacji określić w żaden sposób z zachowaniem tezy twierdzenia II.1 (np. dla „$+\infty-(+\infty)$”, „$0\cdot(+\infty)$”, ...)

[26)] Do zrobienia w każdej grupie przynajmniej: 2 przykłady spośród (a) - (d), 3 przykłady spośród (e) - (h) oraz przykład (k) lub (m).

[27)] Należy rozwiązać co najmniej jeden z podpunktów.

9. Wykaż, że $a_n \to 0$ wtw $|a_n| \to 0$ oraz, że niezależnie od wartości g, $a_n \to g \Rightarrow |a_n| \to |g|$ (z umową, że $|\pm\infty| = +\infty$).

$\forall$ 10. Niech $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ i niech c będzie ograniczeniem górnym A. Wykaż, że $c = \sup A$ wtw istnieje ciąg $\{a_n\}$ złożony z elementów zbioru A taki, że $a_n \to c$.

11. Znajdź $\sup A$ oraz $\inf A$ dla $A =$

    (a) $\{\frac{n}{m} + \frac{m}{n} : n, m \in \mathbb{N}\}$;

    (b) $\{\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} : a, b, c > 0\}$.

12. Wykaż, że jeśli $a_{2n} \to g$ oraz $a_{2n+1} \to g$, to $a_n \to g$

13. Podaj ogólniejsze niż powyżej (jak najogólniejsze ...) warunki na ciągi indeksów $\{k_n\}$, $\{l_n\}$ gwarantujące, że jeśli $a_{k_n} \to g$ i $a_{l_n} \to g$, to zachodzi $a_n \to g$ (oczywiście także wykaż tak utworzone twierdzenie).

14. Wykaż, że jeżeli $a_{2n} \to g$, $a_{2n+1} \to h$, $a_{3n} \to f$ dla pewnych $f, g, h \in \overline{\mathbb{R}}$, to $\{a_n\}$ ma granicę ($= f = g = h$).

15. Wykaż **Twierdzenie**: *Jeżeli ciąg liczbowy nie posiada granicy, to istnieją dwa jego podciągi posiadające różne granice.*

$\forall$ 16. Wykorzystując twierdzenie o 3 ciągach (twierdzenie II.3) oraz twierdzenie o granicy uogólnionego podciągu (twierdzenie II.5) wykaż, że

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e$$

jeżeli $x_n \to +\infty$

17. Korzystając z zadań II.16 i II.7 wykaż, że jeżeli $a \in \mathbb{Q}$ oraz $x_n \to +\infty$, to $(1+\frac{a}{x_n})^{x_n} \to e^a$.

18. Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\frac{[nx]}{n} \to x$. Mamy w ten sposób przykład „jednolicie zadanego" ciągu liczb wymiernych zbieżnego do dowolnego $x \in \mathbb{R}$. Posługując się powyższym ciągiem znajdź analogiczny ciąg złożony z liczb niewymiernych.

19. Udowodnij twierdzenie Stolza (tw. II.9).

20. Udowodnij wybraną część twierdzenia o granicy średniej arytmetycznej i geometrycznej (tw. II.8).

21. Wykaż, że jeśli $(a_{n+1} - a_n) \to g$, to $\frac{a_n}{n} \to g$

22. Wykaż, że jeśli $(a_{n+1} + a_n) \to 0$, to $\frac{a_n}{n} \to 0$. Czy można tu 0 zastąpić przez dowolne g?

III Szeregi liczbowe

[około 2 wykładów]

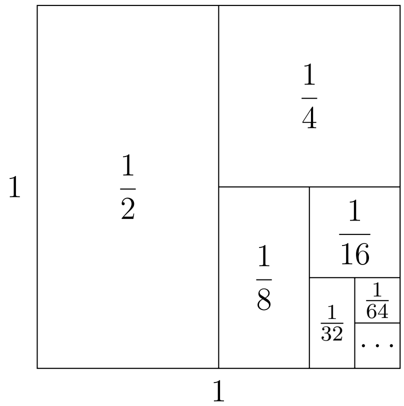
1. Definicja „sumy nieskończonej”

Intuicje

Zapewne wielu spośród Państwa posługiwało się nieskończonym sumowaniem jeszcze na długo przed poznaniem pojęcia sumy szeregu — czyli matematycznego uściślenia pojęcia takiej właśnie „nieskończonej sumy”. Typowy przykład to równość

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 1,$$

którą można „udowadniać” na wiele sposobów — „algebraicznie” i „geometrycznie” (np. „krojenie” kwadratu 1×1 — patrz rys. 3).



Rysunek 3. Takimi prostokątami „wypełniamy” cały kwadrat o boku 1.

Uściślenie

Pojęcie ciągu i jego granicy (z poprzedniego rozdziału) pozwala zrealizować następujący pomysł prowadzący do wspomnianego uściślenia:

> *Zamiast mówić o dodawaniu nieskończenie wielu składników, mówimy o ciągu złożonym z „coraz dłuższych” zwykłych skończonych sum.*

Stąd poniższa definicja. Niech $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ — ciąg liczbowy.

Definicja. ***Szeregiem*** *o wyrazach a_n dla $n \geqslant n_0$ nazywamy ciąg $\{S_n\}_{n \geqslant n_0}$ zadany wzorem*

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k, \quad n \geqslant n_0.$$

Oznaczamy go symbolem

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n.$$

Ciąg $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ *nazywamy także* ***ciągiem sum częściowych*** *szeregu* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ [28]*. Tym samym symbolem*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$$

oznaczamy również granicę ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$*, o ile granica ta istnieje — nazywamy ją wówczas* ***sumą szeregu***

Podwójny sens „$\sum_{n=n_0}^{+\infty}$" i terminologia „szeregowa"

W związku z tym symbol $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ przestaje niestety mieć swój jednoznaczny sens — oprócz znaczenia szeregu (czyli pewnego ciągu) symbol ten może też oznaczać jego granicę, tj. sumę (czyli pewien element $\overline{\mathbb{R}}$), o ile ta istnieje. A zatem np. „napis" $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ to ciąg o kolejnych wyrazach $S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ... lub granica tego ciągu — wybór znaczenia zależy od kontekstu.

W związku z powyższą definicją, dla szeregów obowiązuje wprowadzona w rozdziale II cała terminologia związana z granicą ciągu. Mówimy więc np., że szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ ma granicę $g \in \overline{\mathbb{R}}$ wtw $S_n \to g$. Są jednak pewne (uświęcone tradycją) wyjątki: nie używa się symbolu „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \to g$" — zamiast tego pisze się

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = g.$$

Ponadto, dla szeregów, częściej zamiast „granica" mówimy „suma". Jednak cały czas, tak jak było ogólnie dla wszystkich ciągów, *szereg jest zbieżny* wtw ma **skończoną** granicę (sumę) (tzn. istnieje granica g ciągu sum częściowych i $g \in \mathbb{R}$).

Ciąg a szereg

Podsumujmy zatem: owa nieściśle określona dotąd „suma nieskończona" to zwyczajnie granica (o ile istnieje) ciągu sum częściowych, czyli suma szeregu. Natomiast sam szereg (tj. ciąg sum częściowych), to po prostu szczególny rodzaj ciągu. A właściwie może lepiej byłoby powiedzieć: ciąg utworzony w pewien szczególny sposób z ciągu swoich wyrazów $\{a_n\}$. To wcześniejsze stwierdzenie było nienajlepsze, gdyż ma miejsce następujący fakt:

Fakt. *Każdy ciąg jest szeregiem.*

Dowód pozostawiam Państwu (jest nietrudny ...).

2. Ogólne twierdzenia i podstawowe przykłady

Główne twierdzenia, które będą nas interesowały w omawianej tu teorii szeregów to tzw. „kryteria zbieżności", czyli twierdzenia gwarantujące, że przy pewnych założeniach o ciągu wyrazów $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny (na ogół nie będziemy wnikali w to, jaka jest suma szeregu). Wcześniej jednak sformułujemy kilka twierdzeń o bardziej ogólnym charakterze. Warto zwrócić uwagę na to, że większość z nich to proste konsekwencje, czy wręcz przeformułowania twierdzeń uzyskanych uprzednio w rozdziale dotyczącym ciągów.

[28] Prowadzi to do dość dziwnej sytuacji, że $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ (czyli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$) jest sam swoim ciągiem sum częściowych — ale cóż — taka jest tradycja ...

Warunek Cauchy'ego dla szeregów

Twierdzenie III.1 (o warunku Cauchy'ego dla szeregów). $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ |\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon. \tag{III.1}$$

Dowód.
Jeżeli $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} a_k$, to $\sum_{k=n}^{m} a_k = S_m - S_{n-1}$ zatem (III.1) można zapisać

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ |S_m - S_{n-1}| < \epsilon,$$

co nie tylko wygląda „podobnie" do warunku Cauchy'ego dla ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$, ale, jak bardzo łatwo się przekonać, [29] jest mu równoważne. Teza wynika zatem z twierdzenia o zupełności $\mathbb{R}$ (tw. II.7). □

Podstawowy warunek konieczny zbieżności

Twierdzenie III.2 (o warunku koniecznym zbieżności szeregu). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— zbieżny, to* $a_n \to 0$.

Dowód.
Można np. użyć twierdzenia III.1, ale można inaczej. Załóżmy, że $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = g \in \mathbb{R}$. Dla $n \geqslant n_0 + 1$ zachodzi $a_n = S_n - S_{n-1} \to g - g = 0$ (korzystamy z twierdzeń o granicy podciągu uogólnionego oraz o granicy różnicy). □

Istnienie sumy dla wyrazów nieujemnych

Twierdzenie III.3. *Szereg o wyrazach nieujemnych posiada sumę rzeczywistą lub równą* $+\infty$. *Jest on zbieżny wtw jego ciąg sum częściowych jest ograniczony z góry.*

Dowód.
To jasne, bo $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest rosnący, zatem wystarczy użyć twierdzenia II.4. □

Uwaga dotycząca oznaczeń. Dla szeregów o wyrazach nieujemnych (i tylko dla takich raczej) piszemy często „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < +\infty$" zamiast „$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny".

Dodawanie szeregów i mnożenie przez liczbę

Ostatnie z twierdzeń „ogólnych" to prosty wniosek z twierdzenia o własnościach rachunkowych granicy ciągu.

Twierdzenie III.4. *Załóżmy, że* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n = B$, *gdzie* $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ *oraz że* $r \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*

- *jeżeli* $A \pm B$ *jest określone, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
- *jeżeli* $r \cdot A$ *jest określone, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} r \cdot a_n = r \cdot A$

Dowód.
To oczywiste z tw. II.1. □

[29] Choć rzeczywiście łatwo, zachęcam by oba warunki wypisać i by szczegółowo samodzielnie prześledzić dlaczego zachodzą implikacje w obydwie strony.

Szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n+b_n)$ to suma szeregów $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ [30]. Z tw. III.4 wynika więc w szczególności, że suma szeregów zbieżnych jest szeregiem zbieżnym i analogicznie dla różnicy, czy mnożenia szeregu przez liczbę.

Uwaga. $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n \cdot b_n)$ **nie** jest (na ogół ...) iloczynem szeregów $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ (rozumianych wciąż jako odpowiednie ciągi sum częściowych) — dlaczego?

Szereg geometryczny

Na ogół szeregi zbieżne o nawet dość „prosto wyglądających" wyrazach mają granice nie będące żadnymi „znanymi" liczbami (w tym — wymiernymi). Jednak dla *szeregu geometrycznego* $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ sprawa jest prosta:

- dla $q \in (-1;1)$ ma sumę $\frac{1}{1-q}$;
- dla $q \geqslant 1$ ma sumę $+\infty$;
- dla $q \leqslant -1$ nie posiada granicy (suma nie istnieje).

Wynika to natychmiast ze znanego (indukcja ...) wzoru na S_n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \text{ dla } q \neq 1.$$

Zagęszczanie

Aby powiększyć nieco nasz zasób (dotąd bardzo ubogi...) przykładów szeregów zbieżnych i rozbieżnych sformułujemy jeszcze następujący fakt.

Lemat (o zagęszczaniu). *Jeżeli* $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ *jest malejący i nieujemny, to*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \quad \textit{wtw} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} < +\infty.$$

Dowód pozostawiamy jako zadanie.

Przykład. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1.$$

Mamy bowiem $2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \frac{1}{2^{n\cdot(\alpha-1)}} = q^n$, dla $q = \frac{1}{2^{(\alpha-1)}}$. Ponieważ $q \in (-1;1)$ wtw $\alpha > 1$, zatem wystarczy użyć lematu o zagęszczaniu oraz przykładu z szeregiem geometrycznym. „Zagęszczanie" dokonało tu „cudownej" przemiany badanego szeregu na prosty już dla nas szereg geometryczny.

Warto zapamiętać, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (tzw. szereg *harmoniczny*) jest „jeszcze" rozbieżny. Tu $\alpha = 1$, czyli to przypadek „graniczny" pomiędzy zbieżnością (dla $\alpha > 1$) i rozbieżnością (dla $\alpha \leqslant 1$).

---

[30] Tzn. ciąg sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(a_n + b_n)$ jest sumą ciągów sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Bezwzględna zbieżność

Przed kolejnym twierdzeniem wprowadźmy następującą definicję.

Definicja. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ ***jest bezwzględnie zbieżny*** *wtw* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

Twierdzenie III.5 (o zbieżności bezwzględnej). *Szereg bezwzględnie zbieżny jest zbieżny.*

Dowód.
Skoro $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$ jest zbieżny zatem na mocy tw. III.1 zachodzi

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{m\geqslant n\geqslant N}\ \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \epsilon.$$

Ponieważ jednak (nierówność trójkąta uogólniona na $(m-n+1)$ składników)

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m} |a_k|,$$

zatem w efekcie otrzymujemy warunek Cauchy'ego także dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, więc z tw. III.1 wynika jego zbieżność. □

Jak się już wkrótce przekonamy, twierdzenie odwrotne do twierdzenia III.5 nie zachodzi. Może się więc zdarzyć szereg zbieżny, który nie jest bezwzględnie zbieżny. O takim szeregu mówimy, że jest *zbieżny warunkowo.*

3. Kryteria zbieżności bezwzględnej

Kryterium porównawcze

Zaczniemy od bardzo prostego, ale w pewnym sensie także najważniejszego (i w praktyce bardzo użytecznego) twierdzenia pomagającego badać zbieżność konkretnych szeregów o wyrazach nieujemnych.

Kryterium III.1 (porównawcze). *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— zbieżny.* [31)]

Dowód poprzedzimy następującym oczywistym faktem (którego dowód zostawiam Państwu).

Lemacik. *Dla dowolnego* $n_0' \geqslant n_0$ $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny wtw* $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

Dowód (kryterium III.1).
Załóżmy, że $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ dla $n \geqslant n_0'$. Na mocy lemaciku oraz tw. III.3 wystarczy wykazać, że ciąg sum częściowych szeregu $\sum_{n=n_0'}^{+\infty} a_n$ jest ograniczony z góry. Ale z założenia oraz z tw. III.3 istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\sum_{k=n_0'}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=n_0'}^{n} b_k \leqslant M$$

dla dowolnego $n \geqslant n_0'$. □

Wnioski.

1) *Jeżeli* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *d.d.d.* n *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *— rozbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *— rozbieżny.*
A zatem mamy też proste w użyciu kryterium rozbieżności.

[31)] Na ogół bez przypominania przyjmujemy, że n_0 jest początkowym indeksem dla rozważanych ciągów i szeregów.

2) *Jeżeli $|a_n| \leqslant b_n$ d.d.d. n oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ — zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ — zbieżny bezwzględnie, a stąd również — zbieżny.*

Kryterium porównawcze można więc de facto traktować jako kryterium dotyczące zbieżności bezwzględnej szeregów.

Kryterium asymptotyczne

Przed sformułowaniem kolejnego kryterium przyjmijmy następującą definicję i oznaczenie.

Definicja. *Załóżmy, że $a_n, b_n \neq 0$ d.d.d. n. Ciągi a i b są* ***asymptotycznie podobne*** *wtw $\frac{a_n}{b_n} \to g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Oznaczmy to w skrócie $a \sim b$ bądź $a_n \sim b_n$* [32] .

Kryterium III.2 (asymptotyczne). *Jeżeli $a_n \sim b_n$ oraz $\{b_n\}_{n \geqslant n_0}$ ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny wtw $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny.*

Dowód.

Zauważmy najpierw, że gdy $a_n \sim b_n$ oraz $\{b_n\}_{n \geqslant n}$ ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca, to także $\{a_n\}_{n \geqslant n}$ ma wyrazy stałego znaku od pewnego miejsca (patrz np. rozumowanie poniżej). Ponadto $a_n \sim b_n$ wtw $b_n \sim a_n$. A zatem z tej „symetrii" wynika, że wystarczy wykazać implikację w jedną stronę. Ponieważ przemnożenie szeregów przez (-1) nie wpływa na ich zbieżność, możemy założyć, że $b_n > 0$ d.d.d. n oraz że $g = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} > 0$. Z definicji granicy („$\epsilon = \frac{g}{2}$") mamy $\frac{a_n}{b_n} > g - \frac{g}{2} = \frac{g}{2}$ d.d.d. n, więc $\frac{2}{g} \cdot a_n > b_n > 0$ d.d.d. n (w szczególności $\{a_n\}_{n \geqslant n_0}$ ma stały znak od pewnego miejsca). Zatem jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{2}{g} a_n$ też (tw. III.4), więc z kryterium porównawczego uzyskujemy zbieżność $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$. □

Uwaga. Zbieżność szeregów z kryterium III.2 jest oczywiście równoważna (przy założeniach tego kryterium) ich bezwzględnej zbieżności. Zatem nie warto „próbować" tego kryterium, gdy spodziewamy się zbieżności warunkowej.

Jak widać z dowodu, kryterium asymptotyczne jest formalnie słabsze od kryterium porównawczego, które stanowiło istotę jego dowodu. Jednak w praktyce, kryterium asymptotyczne bywa często dużo wygodniejsze w użyciu. Idea jego użycia jest taka: jeżeli wyraz szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zadany dość skomplikowanym wzorem, to znajdujemy „prostszy" ciąg $\{b_n\}$ o stałym znaku i asymptotycznie podobny do $\{a_n\}$ (a jak taki znaleźć? — często wystarczy w formule na a_n zostawić tylko „to co najistotniejsze"). Tym sposobem problem badania zbieżności sprowadza nam się do badania tylko „prostszego" szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Przykład. Niech

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{70}{n^3}}{\frac{1}{n} + \frac{17}{n^2}}.$$

Czy $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny? Łatwo odgadnąć „wygodny" $\{b_n\}$. Niech mianowicie

$$b_n := \frac{\frac{1}{n^2} + 0}{\frac{1}{n} + 0} = \frac{1}{n} > 0.$$

Bez trudu sprawdzamy, że $a_n \sim b_n$ (a nawet $\frac{a_n}{b_n} \to 1$) i z kryterium asymptotycznego $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ — rozbieżny, bo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ — rozbieżny. Oczywiście dało się też bezpośrednio szacować a_n z dołu (jak?) tak by użyć „zwykłego" kryterium porównawczego, ale użyte kryterium III.2 wydaje się tu szybsze i bardziej „automatyczne".

[32] Ta druga wersja oznaczenia (choć wygodna) jest nieco nieformalna (podobnie jak np. oznaczenie $a_n \to g$), bo chodzi tu przecież o własność **ciągów**, a nie ich n-tego wyrazu ... Ponadto — uwaga: ani nazwa „asymptotycznie podobne", ani symbol „$\sim$" nie są zbyt powszechnie używane.

Kryteria d'Alemberta i Cauchy'ego

Czasami (choć zazwyczaj nie aż tak często, jak chcieliby tego studenci...) przydają się następujące dwa kryteria, także będące konsekwencjami kryterium porównawczego.

Kryterium III.3 (d'Alemberta) oraz III.4 (Cauchy'ego). *Niech*

$$c_n := \begin{cases} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| & \textit{dla d'Alemberta}^{33)} \\ \sqrt[n]{|a_n|} & \textit{dla Cauchy'ego} \end{cases}$$

i załóżmy, że $c_n \to g \in \overline{\mathbb{R}}$. *Jeżeli* $g < 1$, *to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny bezwzględnie, a jeżeli* $g > 1$, *to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Dowód (dla d'Alemberta). (dla C. — jeszcze łatwiej...) Jeżeli $0 \leqslant g < 1$, to $g = 1 - 2\epsilon$ dla pewnego $\epsilon > 0$, zatem z definicji granicy dla ciągu $\{c_n\}$ istnieje N takie, że $c_n \leqslant g + \epsilon = 1 - \epsilon$ o ile $n \geqslant N$. Zatem dla $n \geqslant N + 1$

$$(1-\epsilon)^{(n-N)} \geqslant \prod_{k=N}^{n-1} c_k = \left|\frac{a_n \cdot \ldots \cdot a_{N+1}}{a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_N}\right| = \frac{|a_n|}{|a_N|},$$

czyli $|a_n| \leqslant \frac{|a_N|}{(1-\epsilon)^N} \cdot (1-\epsilon)^n$ d.d.d. n.

Ponieważ szereg, którego n-ty wyraz jest po prawej stronie pow. nierówności to zbieżny szereg geometryczny pomnożony przez stałą, zatem $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny bezwzględnie na mocy wniosku 2 z kryterium porównawczego.

Jeżeli $g > 1$ to zapisując $g = 1+2\epsilon$ z $\epsilon > 0$ i biorąc N takie, że $c_n \geqslant g - \epsilon = 1+\epsilon$ dostajemy analogicznie $|a_n| \geqslant \frac{|a_N|}{(1+\epsilon)^N}(1+\epsilon)^n$ d.d.d. n. Zatem z twierdzenia „o dwóch ciągach" $|a_n| \to +\infty$, czyli $a_n \not\to 0$. Stąd $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ — rozbieżny na mocy tw. III.2 (o warunku koniecznym). □

Przykłady.

1. Dla $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ te kryteria nie działają dla żadnego $\alpha \in \mathbb{R}$, bo dostajemy $g = 1$ (choć nawet nie dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$ jest to przy naszej obecnej wiedzy takie jasne; patrz np. zadanie II.7)

2. Dla $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ dostajemy przy użyciu kryterium d'Alemberta $c_n = \frac{1}{n+1} \to 0$, zatem szereg ten jest zbieżny. Co więcej można wykazać (i nie jest to bardzo trudne, choć na nasze wykłady — zbyt czasochłonne, ale zachęcam do samodzielnych prób[34)]) następujący fakt.

Fakt. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Uwaga. Z twierdzenia o granicy średniej geometrycznej (tw. II.8) nietrudno dowieść, że ciąg spełniający założenia kryterium d'Alemberta musi także spełniać założenia kryterium Cauchy'ego. A zatem z formalnego punktu widzenia kryterium Cauchy'ego jest „mocniejsze" (tzn. działa dla niemniejszej klasy przypadków niż kryt. d'Alemberta). Mimo to czasem wygodniej jest użyć kryt. d'Alemberta niż Cauchy'ego ze względów czysto rachunkowych.

4. Kryteria zbieżności „niekoniecznie bezwzględnej"

Kryteria z poprzedniego podrozdziału nie nadawały się do bezpośredniego dowodzenia zbieżności takiego szeregu, który nie byłby zbieżny bezwzględnie. Wszystkie one opierały się bowiem na kryterium porównawczym.

33) A zatem w kryt. III.3 zakładamy, że $a_n \neq 0$ d.d.d. n.

34) Patrz zadanie III.18.

Kryterium Dirichleta i przekształcenie Abela

Do badania zbieżności szeregów, które nie muszą być jednak bezwzględnie zbieżne przydaje się dość często następujące kryterium.

Kryterium III.5 (Dirichleta). *Jeżeli* $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ *jest monotoniczny od pewnego miejsca i* $a_n \to 0$ *oraz* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ *ma ograniczony ciąg sum częściowych, to*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \cdot b_n$$

jest zbieżny.

W dowodzie wykorzystamy następującą formułę.

Lemat (przekształcenie Abela). *Dla dowolnych liczb* $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ *zachodzi*

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\sum_{l=1}^{k} u_l) \cdot (v_k - v_{k+1}) + (\sum_{l=1}^{n} u_l) \cdot v_n.$$ [35)]

Dowód.
Prosta indukcja. □

Dowód (kryterium Dirichleta).
Możemy założyć, że $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest monotoniczny (patrz lemacik ze str. 36), a co więcej, że jest malejący (gdyby był rosnący, to zamiast wyrazów a_n, b_n można rozważyć $-a_n$, $-b_n$ i skorzystać z wersji „malejącej”).

Wykażemy, że szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n b_n$ spełnia war. Cauchy'ego dla szeregów, co dzięki tw. III.1 da nam jego zbieżność. Niech $T_n := \sum_{k=n_0}^{n} b_k$ dla $n \geqslant n_0$. Niech $M > 0$ będzie takie, że $\forall_{n\geqslant n_0} |T_n| \leqslant M$. To, że $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ — malejący i zbieżny do 0 daje nam, że $\forall_{n\geqslant n_0}\, a_n \geqslant 0$. Zatem dla $\epsilon > 0$ można dobrać $N > n_0$ takie, że

$$\forall_{n\geqslant N}\; 0 \leqslant a_n < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Korzystając teraz kolejno z lematu (o przekształceniu Abela), z nierówności trójkąta, z „malenia” $\{a_n\}$ dostajemy dla dowolnych $m \geqslant n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} |\sum_{k=n}^{m} b_k a_k| \leqslant \sum_{k=n}^{m-1} |\sum_{l=n}^{k} b_l| \cdot (a_k - a_{k+1}) + |\sum_{l=n}^{m} b_l| \cdot a_m &= \sum_{k=n}^{m-1} |T_k - T_{n-1}| \cdot (a_k - a_{k+1}) + \\ +|T_m - T_{n-1}| \cdot a_m \leqslant 2M \sum_{k=n}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) + 2M a_m &= 2M(a_n - a_m + a_m) = 2M a_n < \epsilon \end{aligned}$$

□

Kryterium Leibniza i przykłady szeregów zbieżnych warunkowo

W udowodnionym właśnie nowym kryterium nieco „dziwaczne” może się wydawać założenie dotyczące ograniczoności ciągu sum częściowych dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$. Jednak ciągów b_n spełniających ten warunek jest bardzo wiele. Wybór każdego konkretnego takiego ciągu daje nam automatycznie jakieś kryterium, będące pewnym szczególnym przypadkiem kryt. Dirichleta. Np., gdy $b_n := (-1)^n$ to odpowiedni ciąg sum częściowych jest ograniczony, gdyż przyjmuje tylko dwie możliwe wartości: 0 oraz 1 względnie -1 (w zależności od parzystości n_0). Zatem uzyskujemy

[35)] Gdy $n = 1$, to z prawej strony wzoru pojawia się „$\sum_{k=1}^{0}$ ...” Stosujemy umowę, że zawsze gdy $q < p$, to $\sum_{k=p}^{q} \ldots = 0$.

Wniosek (kryterium Leibniza). *Jeżeli* $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ *jest monotoniczny od pewnego miejsca i* $a_n \to 0$, *to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ *jest zbieżny.*

To kryterium pozwala nam podać zapowiadany wcześniej przykład.

Przykład. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ jest warunkowo zbieżny. Ogólniej: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ dla $\alpha \in (0;1]$ jest warunkowo zbieżny.

5. Zmiana kolejności sumowania

Problem przemienności sumowania nieskończonego

Można zadać sobie ogólne pytanie:

> *Jakie własności zwykłego („skończonego") sumowania przenoszą się na „sumowanie nieskończone"?*

Dość chyba naturalne oczekiwanie, że przenoszą się „wszystkie" własności okazuje się jednak być złudne. Należy zachować daleko posuniętą ostrożność przy próbach przenoszenia własności sum skończonych na przypadek nieskończony. Dość często okazuje się, że w miarę „bezboleśnie" takiego przeniesienia można dokonać przy dodatkowym założeniu o bezwzględnej zbieżności szeregu. Zilustrujemy to na przykładzie problemu przemienności dodawania. Aby to uściślić przypomnijmy najpierw, że $p : \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{N}_{n_0}$ jest *permutacją* $\mathbb{N}_{n_0}$ wtw p jest „na" i „1-1"[36)].

Problem. *Jaki jest związek* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *z* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)}$ *(istnienia sum, ich wartości)?*

Przemienność dla zbieżności bezwzględnej

Zacznijmy od twierdzenia „pozytywnego".

Twierdzenie III.6 (o przemienności szeregów bezwzględnie zbieżnych). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest bezwzględnie zbieżny, to przy dowolnej permutacji* p *zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$ *dla sum szeregów zachodzi*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)}.$$

B.D.

Okazuje się, że założenie o bezwzględnej zbieżności jest tu bardzo istotne — wręcz niezbędne, o ile obracamy się w kręgu szeregów zbieżnych.

Zbieżność warunkowa, a brak przemienności

Prawdziwy jest poniższy, dość zaskakujący na pierwszy rzut oka wynik.

Twierdzenie III.7 (Riemanna). *Załóżmy, że* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny warunkowo. Wówczas dla dowolnego* $G \in \overline{\mathbb{R}}$ *istnieje taka permutacja* p *zbioru* $\mathbb{N}_{n_0}$, *że*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)} = G.$$

Istnieje także taka permutacja, że $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)}$ *nie posiada sumy.* **B.D.**

Podobne „kłopoty" mogą pojawiać się także dla własności innych niż przemienność. Np. dla grupowania wyrazów poprzez „dopisywanie nawiasów", co wiąże się z własnością łączności dodawania (patrz — zadania do tego rozdziału).

[36)] Podobnie definiuje się permutację w przypadku zbiorów skończonych zamiast $\mathbb{N}_{n_0}$. Oczywiście napis „1-1" nie oznacza tu liczby 0 lecz **różnowartościowość** funkcji p (patrz np. rozdział IV).

6. Mnożenie szeregów

Iloczyn Cauchy'ego

Jak mnożyć szeregi? Właściwie — wiadomo: skoro szereg to po prostu ciąg sum częściowych, to można zwyczajnie brać iloczyn ciągów sum częściowych. Jednak tak określone działanie w zbiorze szeregów nie jest zbyt interesujące i nie ma zbyt istotnych zastosowań. Zamiast powyższego „zwykłego" iloczynu szeregów zdefiniujemy inne — dość popularne działanie zwane *iloczynem Cauchy'ego*. Zrobimy to tylko dla szeregów o indeksie początkowym $n_0 = 0$. Iloczyn Cauchy'ego będziemy tu oznaczać symbolem $\odot$ (raczej niespotykanym gdzie indziej...).

Definicja. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \odot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n := \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, *gdzie*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$$

dla $n \in \mathbb{N}_0$.

Łatwo sprawdzić, że $\odot$ posiada sporo właściwości analogicznych do własności zwykłego iloczynu dla liczb rzeczywistych, takich jak np. łączność, czy przemienność.

Wyniki o zbieżności iloczynu Cauchy'ego

Nas przede wszystkim interesować będzie związek pomiędzy mnożeniem szeregów a ich sumami.

Sformułujemy bez dowodu następujące twierdzenie dotyczące tej kwestii.

Twierdzenie III.8 (tw. Mertensa + tw. Cesaro[37]). *Rozważmy dwa zbieżne szeregi takie, że* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = B$ *i niech* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \odot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. *Wówczas, jeżeli zachodzi* ***któryś*** *z poniższych warunków:*

1. *(Mertens) przynajmniej jeden z szeregów* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ *jest bezwzględnie zbieżny,*
2. *(Cesaro)* $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ *posiada granicę,*

to

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = A \cdot B.$$

Funkcje exp, sin, cos

Określimy funkcję $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Nietrudno zauważyć, że powyższy szereg jest bezwzględnie zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Ponadto można też wykazać (polecam jako zadanie „rachunkowe"), że

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \odot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}\ ^{38)}\ .$$

W takim razie, dzięki twierdzeniu Mertensa prawdziwy jest

[37] ściślej — to tylko wniosek z tw. Cesaro zwany też twierdzeniem Abela.

[38] Uwaga: tu każdy z trzech symboli „$\sum$ ..." ma oznaczać szereg, w odróżnieniu od „$\sum$ ..." w definicji exp, gdzie oznacza on sumę odpowiedniego szeregu.

Fakt 1. $\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ \exp(x+y)=\exp(x)\cdot\exp(y)$.

W przyszłości okaże się, że $\exp(x)$ to to samo co e^x, jednak na razie brak nam jeszcze narzędzi, by to wykazać.

Teraz kolej na *funkcje trygonometryczne:* sin i cos. Definiujemy je tak:

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \cos(x) := \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\quad \text{dla } x\in\mathbb{R}.$$

I znów dzięki twierdzeniu Mertensa, rozumując jak wyżej, można wykazać

Fakt 2. *Dla dowolnych $x,y\in\mathbb{R}$ zachodzi:*

1. $\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)$*;*

2. $\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$*;*

3. $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1$.

B.D.

Zadania do Rozdziału III

1. Wykaż, że każdy ciąg liczbowy jest szeregiem (fakt ze str. 33).

2. Znajdź sumy poniższych szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

   (b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$

   $\forall$ (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n+(-1)^n)^2}{11^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{17^n}$ (najpierw wyprowadź wzór na wyraz S_n ciągu sum częściowych szeregu $\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n$ dla $q \neq 1$, zapisując S_{n+1} przy pomocy S_n na dwa istotnie różne sposoby).

$\forall$ [39] 3. Zbadaj zbieżność i bezwzględną zbieżność poniższych szeregów:

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-3}{n^4+3n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2-3}{n^3+3n}$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n+3^n}{3^n-2^n}$

   (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-n^2+3n+1}{\sqrt{n^7-1}}$

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{10000}}{(1,000001)^n}$

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{5}-1)$

   (g) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{2}-1)$

   (h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)\cdot(-1)^n$

   (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{3}-1)^\alpha$ w zależności od $\alpha \in \mathbb{R}$

   (j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

   (k) $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2}}{n+3}$

   (l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$.

4. Korzystając z wiedzy z GAL-u: postaci trygonometrycznej liczby zespolonej i jej n-tej potęgi (wzór de Moivre'a) oraz ze wzoru na $\sum_{k=0}^{n} z^k$ [40], wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ jest zbieżny przy dowolnym $x \in \mathbb{R}$.

5. Wykaż, że jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ściśle malejący i $a_n \to 0$, to $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n > 0$.

6. Wykaż, że $\cos(2) < 0$.

7. Wykaż, że jeżeli zachodzi któryś z warunków:

   (a) $\{na_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony

   (b) $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n \geqslant 0$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny,

   to $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ jest zbieżny. Czy założenie o nieujemności w b) jest istotne?

---

[39] Przynajmniej 3 szt. spośród a)–e) i 3 szt. spośród pozostałych.
[40] Patrz zadanie I.1.

8. Czy suma szeregów rozbieżnych jest zawsze szeregiem rozbieżnym?

9. Wykaż, że jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ jest malejący oraz $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $na_n \to 0$. Czy założenie, że ciąg jest malejący jest istotne?

10. Czy prawdziwe jest następujące „twierdzenie o trzech szeregach”: *Jeżeli $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ dla $n \geqslant n_0$ oraz szeregi $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ są zbieżne, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny?*

11. Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to $|\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$.

12. Wykaż „twierdzenie o reszcie szeregu zbieżnego”: *Jeżeli $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest zbieżny, to $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ |\sum_{n=N}^{+\infty} a_n| < \epsilon$.*

13. Wykaż „lemat o zagęszczaniu” (patrz str. 35).

14. Udowodnij następujące „drugie kryterium porównawcze”: *Jeżeli ciągi a, b o wyrazach dodatnich spełniają $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{b_{n+1}}{b_n}$ d.d.d. n oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ jest też zbieżny.*

15. Wykaż, że w kryterium „asymptotycznym” (kryterium III.2) nie można zrezygnować z założenia o stałym znaku (od pewnego miejsca).

16. Znajdź przykład takiego $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ i $g \in \mathbb{R}$, że $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ a_n > 0$, $\sqrt[n]{n} \to g$, ale $\frac{a_{n+1}}{a_n} \not\to g$.

17. Wykaż, że jeżeli $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k$ jest bezwzględnie zbieżny, $\sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k = g$ oraz liczby $c_{k,n}$ określone dla dowolnych $k \geqslant k_0$, $n \geqslant n_0$ spełniają:

    (a) $\exists_{M>0}\ \forall_{k\geqslant k_0, n\geqslant n_0}\ |c_{k,n}| \leqslant M$,

    (b) $\forall_{k\geqslant k_0}\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_{k,n} = 1$,

    to ciąg określony wzorem $L_n := \sum_{k=k_0}^{+\infty} a_k c_{k,n}$ $(n \geqslant n_0)$ jest zbieżny do g („dyskretna” wersja tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowalnej).

18. Korzystając z zadania III.17 wykaż, że $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$ (gdzie e to zdefiniowana w rozdziale II liczba równa $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n$).

19. Przy użyciu kryterium Dirichleta (kryterium III.5) udowodnij poniższe kryterium Abela: *Jeżeli $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest monotoniczny od pewnego miejsca i jest ograniczony oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.*

Poniższe dwa zadania dotyczą dwóch sposobów grupowania wyrazów szeregu.

20. (a) Wykaż, że jeżeli $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}$ są zbieżne, to zbieżny jest także $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

    (b) Czy zachodzi odwrotna implikacja?

    (c) Sformułuj i wykaż uogólnienie twierdzenia z punktu a) takie, by obejmowało ono możliwie ogólne rozkłady zbioru indeksów na dwa podzbiory.

$\forall$ [41]21. Niech $\{a_n\}_{n\geqslant n_0}$ będzie ciągiem liczbowym, $\{p_n\}_{n\geqslant 1}$ niech będzie ściśle rosnącym ciągiem indeksów z $\mathbb{N}_{n_0}$ takim, że $p_1 = n_0$ (p_n będziemy interpretować jako „początek n-tej grupy" przy grupowaniu[42] wyrazów szeregu $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$). Niech

$$A_n := \sum_{k=p_n}^{p_{n+1}-1} a_k$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz niech $G \in \overline{\mathbb{R}}$. Wykaż, że

(a) $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = G \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n = G$,

(b) może nie zachodzić „$\Leftarrow$" powyżej,

(c) „$\Leftarrow$" powyżej zachodzi, o ile zachodzi **któreś** z poniższych założeń:

i. $\forall_{n\in\mathbb{N}}\ p_{n+1} - p_n = 2$ oraz $a_n \to 0$,

ii. $\{p_{n+1} - p_n\}_{n\geqslant 1}$ jest stały oraz $a_n \to 0$,

iii. $\{p_{n+1} - p_n\}_{n\geqslant 1}$ jest ograniczony oraz $a_n \to 0$,

iv. dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie liczby w zbiorze $\{a_k\colon p_n \leqslant k \leqslant p_{n+1}-1\}$ mają ten sam znak (tj. wszystkie są $\geqslant 0$ lub wszystkie są $\leqslant 0$; ale ten znak może zależeć od n),

v. szereg $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ posiada granicę.

$\forall$ 22. Zbadaj zbieżność szeregów

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n + (-1)^{n+1}}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^{n+1}}$.

23. Udowodnij twierdzenie o przemienności szeregu bezwzględnie zbieżnego (tw. III.6, dowód pominięty na wykładzie).

24. Wykaż, że jeśli $\forall_{n\geqslant n_0}\ a_n \geqslant 0$ oraz p jest permutacją $\mathbb{N}_{n_0}$, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{p(n)}$ (niezależnie od tego, czy zachodzi zbieżność, czy nie).

25. Zbadaj, czy iloczyn Cauchy'ego $\odot$ jest operacją: przemienną, łączną. Jakie są szeregi neutralne dla $\odot$? Jakie szeregi posiadają elementy odwrotne względem $\odot$?

26. Znajdź wzór opisujący zwykły iloczyn $\cdot$ szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ (tzn. działanie „$\cdot$" jest takie, że $(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{+\infty} b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n$, gdzie $\sum_{k=0}^{n} d_n = (\sum_{k=0}^{n} a_n)(\sum_{k=0}^{n} b_n)$ przy dowolnym $n \in \mathbb{N}_0$).

27. Wykaż, że iloczyn Cauchy'ego szeregów bezwzględnie zbieżnych jest szeregiem bezwzględnie zbieżnym.

$\forall$ 28. Wypisz szczegółowe dowody (pominięte na wykładzie) dla formuł „algebraicznych" dotyczących iloczynów Cauchy'ego odpowiednich szeregów potrzebnych przy dowodach **przynajmniej jednej** spośród poniższych formuł (patrz fakty 1 i 2 ze str. 42):

(a) $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$,

[41] Przynajmniej z punktem c) w wersji (i).

[42] Opisywany tu rodzaj grupowania nazywany bywa *rozstawianiem* (albo *dopisywaniem*) *nawiasów*.

(b) $\sin(x + y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + \cos(x) \cdot \sin(y)$,

(c) $\cos(x + y) = \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y)$,

(d) $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$.

29. Wykaż, że $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \exp(x) > 0$. (Wskazówka: użyj wzoru z zad. III.28 (a).)

IV Granica i ciągłość funkcji

[około 3 wykładów]

1. Granica funkcji

Punkty skupienia

Pojęcie granicy ciągu wprowadzone w rozdziale II rozszerzymy na znacznie ogólniejsze sytuacje. To uogólnienie pójdzie w dwóch kierunkach. Po pierwsze, będziemy rozważać szerszą klasę funkcji niż tylko ciągi. Po drugie, granica będzie mogła być rozważana nie tylko „w $+\infty$", ale także „w innych punktach". Dla funkcji $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie dziedzina D funkcji f jest podzbiorem $\mathbb{R}$, granicę będziemy mogli rozważać jedynie w takich punktach z $\overline{\mathbb{R}}$, które są tzw. *punktami skupienia* D.

Definicja. *Niech $a \in \overline{\mathbb{R}}, D \subset \mathbb{R}$. Wówczas a jest* ***punktem skupienia*** *D (będziemy to skracać: p.s.) wtw istnieje ciąg $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ w. $D \setminus \{a\}$* [43] *taki, że $x_n \to a$.*

Rozważane przez nas funkcje będą określone najczęściej na dziedzinach będących pewnymi przedziałami[44]. Wtedy oczywiście sprawa jest prosta: a jest punktem skupienia przedziału niezerowej długości wtw a należy do tego przedziału, bądź jest jego prawym lub lewym końcem (niezależnie od tego, czy te końce do przedziału należą, czy nie). Ale np. zbiór skończony nie ma punktów skupienia, $\mathbb{N}_{n_0}$ ma tylko $+\infty$, dla $\{0\} \cup [1; 2)$ zbiorem punktów skupienia jest $[1; 2]$, a dla $\mathbb{R}$ zbiorem tym jest $\overline{\mathbb{R}}$.

Definicja Heinego granicy

Przejdźmy zatem do samej definicji granicy funkcji.

Definicja (Heinego). *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D oraz niech $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Wówczas g jest* ***granicą*** *f* ***w punkcie*** *a wtw dla dowolnego $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ w. $D \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \to a$ zachodzi*

$$f(x_n) \to g.$$

Granicę tę oznaczamy przez

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

ponadto fakt, że g jest granicą f w punkcje a oznaczamy także przez

$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \textit{lub} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} g$$

(ewentualnie $f(x) \to g$, gdy a jest jedynym p.s. D).

Oczywiście (jak wynika z faktu 1 ze str. 19), jeśli istnieje granica f w punkcie a, to jest ona wyznaczona jednoznacznie.

Przykłady (bardzo proste). Niech $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą zadane dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ wzorami

$$f(x) = c, \quad g(x) = \begin{cases} c & \text{dla } x \neq 0 \\ d & \text{dla } x = 0 \end{cases}, \quad h(x) = x,$$

gdzie c, d — ustalone liczby. Wówczas dla dowolnego $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mamy oczywiście

$$\lim_{x \to a} f(x) = c = \lim_{x \to a} g(x), \quad \lim_{x \to a} h(x) = a.$$

---

[43] Będziemy używać skrótu: $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ w. X, który oznacza, że $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ jest ciągiem o **w**yrazach w zbiorze X (tzn. funkcją z $\mathbb{N}_{n_0}$ w X). Inaczej: w. = „o wyrazach w".

[44] Patrz str. 55.

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wybór liczby d nie miał w powyższym przykładzie **żadnego** wpływu na wartość $\lim_{x\to a} g(x)$ nawet wtedy, gdy $a = 0$. Ogólnie bowiem, jak widać natychmiast z definicji granicy, wybór wartości $f(a)$ (gdy $a \in D$, co ogólnie nie musi wcale zachodzić) nie wpływa ani na fakt istnienia granicy f w punkcie, ani na jej wartość.

Poniższa uwaga wyjaśnia sprawę ewentualnej niejednoznaczności pojęcia granicy w przypadku ciągu, który przecież także jest funkcją...

Uwaga. Jeżeli $f : \mathbb{N}_{n_0} \to \mathbb{R}$, to pojęcie granicy funkcji f w $+\infty$ pokrywa się z pojęciem granicy ciągu $f = \{f(n)\}_{n\geqslant n_0}$ z rozdziału II (zatem nie ma też kolizji oznaczeń „lim" i „$\to$").

By tę uwagę wykazać wystarczy skorzystać z twierdzenia o granicy uogólnionego podciągu (twierdzenie II.5).

Kłopoty z notacją

Notacja związana z pojęciem granicy funkcji może jednak sprawiać pewne kłopoty. Związane jest to z faktem, że granica, o ile istnieje, jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję oraz punkt „w którym granica jest rozważana". Zatem optymalnym oznaczeniem byłoby np. „$\lim_a f$" w miejsce tradycyjnego „$\lim_{x\to a} f(x)$". A tradycyjny zapis, przez to, że pojawia się tam nie samo f, ale „jakieś $f(x)$", w naturalny sposób zachęca do zastępowania owego „$f(x)$" konkretnym wzorem, którym funkcja może być zadana. Ale co oznacza np. napis:

$$\lim_{m\to+\infty}(m - [m])\,?$$

Czy chodzi tu o granicę ciągu? Wtedy jest to ciąg zerowy i granica równa 0. Ale może chodzi o granicę funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(m) = m - [m]$ da dowolnego $m \in \mathbb{R}$? A ta „niestety" nie istnieje! (dlaczego?). Problem polega więc na tym, że podany jest wzór, zamiast funkcji. Wiemy więc tylko, jakim wzorem funkcja ta jest zadana, ale nie wiemy na jakiej dziedzinie. Aby zbytnio nie odchodzić od tradycyjnej notacji, możemy w takich wieloznacznych sytuacjach pisać:

$$\lim_{x\to a,\, x\in D} \textit{wzór}(x).$$

Jednak tak będziemy postępować tylko sporadycznie. Raczej będziemy liczyli na to, że znaczenie tego typu symbolu będzie jasne z kontekstu jego użycia. Jednocześnie będziemy się starali sprawę wyboru pomiędzy ciągiem a „nieciągiem" rozstrzygnąć poprzez użycie odpowiedniej zmiennej: dla ciągu będziemy raczej rezerwować litery: n, m, k, a dla innych funkcji: x, y, z. Choć dla „nieciągu" wybór dziedziny pozostaje nieraz wystarczająco duży by niejednoznaczność nadal miała miejsce. Np. w powyższym przykładzie zupełnie co innego uzyskujemy dla dwóch różnych dziedzin $D_2 := \{\frac{1}{2} + n : n \in \mathbb{N}\}$, $D_3 := \{\frac{1}{3} + n : n \in \mathbb{N}\}$.

O definicji Cauchy'ego granicy

Przyjęta przez nas definicja granicy funkcji odwołuje się do zdefiniowanej już wcześniej granicy ciągu. Jednak nie było to konieczne, można było użyć tzw. definicji Cauchy'ego — pewnego warunku nie odwołującego się wcale do ciągów, równoważnego warunkowi z definicji Heinego.

Twierdzenie IV.1. *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D, $g \in \overline{\mathbb{R}}$. Następujące trzy warunki są równoważne:*

(i) $\lim_{x\to a} f(x) = g$

(ii) *dla dowolnego ściśle monotonicznego $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ w $D \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \to a$ zachodzi $f(x_n) \to g$.*

(iii) *(„definicja" Cauchy'ego)*
przypadek 1. — dla $a, g \in \mathbb{R}$:

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D\setminus\{a\}}\ (|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

przypadek 2. — dla $a \in \mathbb{R}, g = +\infty$:

$$\forall_{M\in\mathbb{R}}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D\setminus\{a\}}\ (|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M)$$

przypadek 3. — dla $a = -\infty, g \in \mathbb{R}$:

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in D}\ (x<M \Rightarrow |f(x)-g|<\epsilon)$$

... itd. — w sumie należałoby wypisać 9 przypadków obejmujących wszystkie możliwości dla par a, g będących (niezależnie) w $\mathbb{R}$ lub $+\infty$ lub $-\infty$. Liczę, że na podstawie tych trzech przypadków, każdy z Czytelników będzie w stanie wypisać dowolny z pominiętych.

Dowód tego twierdzenia najłatwiej przeprowadzić dowodząc implikacji $(ii) \Rightarrow (iii)$ oraz $(iii) \Rightarrow (i)$, co dzięki oczywistości $(i) \Rightarrow (ii)$ da potrzebne równoważności. Szczegóły dowodu pomijam i zostawiam jako zadanie.

Rachunkowe własności granicy funkcji

Odpowiednikiem twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy ciągu (tw. II.1) jest twierdzenie poniższe:

Twierdzenie IV.2 (o rachunkowych własnościach granicy funkcji). *Niech $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, a — p.s. D oraz niech $\circledast$ oznacza jedno z działań $+, -, \cdot, :$. Załóżmy, że $\lim_{x\to a} f_j(x) = g_j$ dla $j = 1, 2$, gdzie $g_1, g_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ i że działanie $g_1 \circledast g_2$ jest określone oraz, w przypadku gdy $\circledast$ jest dzieleniem, że $\forall_{x\in D}\ f_2(x) \neq 0$. Wówczas $\lim_{x\to a}(f_1 \circledast f_2)(x) = g_1 \circledast g_2$.*

Dla porzadku należy jeszcze wyjaśnić, że działanie $\circledast$ „na funkcjach" określone jest naturalnym wzorem $(f_1 \circledast f_2)(x) := f_1(x) \circledast f_2(x)$ dla $x \in D$.

Dowód.
Wystarczy użyć definicji Heinego granicy i twierdzenia II.1. □

W powyższym twierdzeniu nie wspomnieliśmy o jeszcze jednej ważnej operacji dla funkcji, a mianowicie o *złożeniu funkcji* oznaczanym przy pomocy symbolu $\circ$. Przypominamy, że jeżeli $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$, to $g \circ f : X \to Z$ zadana jest wzorem

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

dla dowolnego $x \in X$. Odpowiednie twierdzenie „o granicy złożenia" (zwane też twierdzeniem „o podstawianiu") ma treść nietrudną do odgadnięcia, choć (uwaga!) pojawia się tam pewien „haczyk". Sprawy związane z tym twierdzeniem można odnaleźć w zadaniach do rozdziału IV. Warto tu wspomnieć, że samo twierdzenie można traktować jako uogólnienie twierdzenia II.5 (o granicy uogólnionego podciągu).

Obcinanie i scalanie

Operacją nieco przypominającą branie podciągu danego ciągu jest w ogólnym przypadku funkcji operacja *obcięcia* [45] Przypomnijmy, że *obcięcie funkcji* $f : X \to Y$ *do zbioru* $X' \subset X$ oznaczamy symbolem $f\,|_{X'}$ oraz że $f\,|_{X'} \colon X' \to Y$, przy czym dla $x \in X'$ po prostu

$$(f\,|_{X'})(x) := f(x).$$

Za analog (choć nie uogólnienie) twierdzenia „o granicy podciągu" można by więc uznać fakt następujący, całkiem oczywisty z definicji granicy.

Fakt. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D' \subset D$ *oraz* a *— p.s.* D'*. Jeżeli* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$*, to* $\lim\limits_{x\to a}(f\,|_{D'})(x) = g$*.* [46]

Znacznie jednak ważniejsze jest następujące wzmocnienie powyższego faktu.

Twierdzenie IV.3 (o „scalaniu" [47]). *Jeżeli* $f : D \to \mathbb{R}$*,* $D_1, D_2 \subset D$*,* a *— p.s.* D_1 *i* D_2 *oraz* $D \setminus \{a\} = (D_1 \cup D_2) \setminus \{a\}$*, to* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ *wtw dla* $j = 1$ *i dla* $j = 2$ *zachodzi* $\lim\limits_{x\to a}(f\,|_{D_j})(x) = g$*.*

Dowód.
Oczywisty, jeśli użyć definicji Cauchy'ego (tzn. tw. IV.1)... □

Granice jednostronne

Oprócz zdefiniowanego już pojęcia granicy funkcji rozważa się także tzw. *granice jednostronne funkcji*. Można je zdefiniować powtarzając z odpowiednimi modyfikacjami definicję dla „zwykłej" granicy, albo któryś z warunków jej równoważnych z twierdzenia IV.1. My jednak postąpimy inaczej. Dla $D \subset \mathbb{R}$ oraz $a \in \overline{\mathbb{R}}$ oznaczmy

$$D^a_{+(-)} := \{x \in D : x > (<) a\}$$

(dla $a = 0$ upraszczamy to do D_+, D_-). Inaczej mówiąc, D^a_+ to część zbioru D położona na prawo od punktu a, a D^a_- — na lewo od a. W szczególności $D^{+\infty}_+ = D^{-\infty}_- = \emptyset$, $D^{+\infty}_- = D^{-\infty}_+ = D$ oraz $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$, $\mathbb{R}_- = (-\infty; 0)$.

Definicja. *Niech* $f : D \to \mathbb{R}$*, oraz* a *— p.s.* $D^a_{+(-)}$*. Jeżeli istnieje* $\lim\limits_{x\to a}(f\,|_{D^a_{+(-)}})(x)$*, to nazywamy ją* ***granicą prawostronną (lewostronną)*** f *w punkcie* a *i oznaczamy*

$$\lim_{x\to a+(-)} f(x).$$

Obie nazywamy ***granicami jednostronnymi*** f *w punkcie* a*.*

A zatem granice jednostronne to szczególne przypadki zdefiniowanej na początku rozdziału granicy funkcji, tyle, że rozważanej na ewentualnie zmniejszonej dziedzinie. Nie ma zatem potrzeby dowodzenia osobnych analogów „jednostronnych" wszystkich formułowanych wcześniej lub dopiero w przyszłości twierdzeń dot. „zwykłych" granic. Po prostu należy te „zwykłe" twierdzenia zastosować do funkcji obciętych do odpowiednich zbiorów D^a_+ lub D^a_-. Szczególnym przypadkiem twierdzenia o „scalaniu" jest

Wniosek. *Jeżeli* $f : D \to \mathbb{R}$ *oraz* a *— p.s.* D^a_+ *i* D^a_-*, to* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = g$ *wtw* $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = g = \lim\limits_{a\to a-} f(x)$*.*

---

[45] Nie ma tu pełnej analogii — np. przy braniu podciągu dziedzina nie zmienia się, przy obcinaniu — owszem.

[46] Zgodnie z wcześniejszym ustaleniem moglibyśmy pisać $\lim\limits_{x\to a,\, x\in D'} f(x)$ zamiast $\lim\limits_{x\to a}(f\,|_{D'})(x)$.

[47] Nazwę tę zapożyczyłem od pana Michała Krycha (patrz też zadanie II.13).

„Dostatecznie bliskie"

W przypadku, gdy posługiwaliśmy się „zmienną całkowitą n" często używaliśmy skrótu d.d.d. n. Jak to przenieść na przypadek ogólniejszy "zmiennej x ze zbioru D" i punktu skupienia a zbioru D? Zrobimy to następująco. Termin: *dla $x \in D$ dostatecznie bliskich a* (w skrócie zapiszemy: d. $x \in D$ d.b. a) będzie odtąd tym samym co:

- $\exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D,\,0<|x-a|<\delta}$, gdy $a \in \mathbb{R}$,
- $\exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x\in D,\,x>(<)M}$, gdy $a = +\infty\ (-\infty)$.

Dopuszczamy tu jednak dowolność szyku zdania, podczas gdy w wersji z kwantyfikatorami, kwantyfikatory muszą być zawsze na początku zdania.

Inne ważne analogie z teorią ciągów

Jak widzieliśmy np. w przypadku twierdzenia IV.2 (o rachunkowych własnościach granicy funkcji), twierdzenia dotyczące granic ciągów miewają nierzadko swe naturalne uogólnienia obowiązujące dla granic funkcji. Tak jest również w przypadku kilku innych twierdzeń z rozdziału II.

Na użytek poniższych twierdzeń przyjmujemy, że $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, a — p.s. D, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ oraz $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$.

Twierdzenie IV.4 (o trzech (ew. dwóch) funkcjach). *Jeżeli*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

d. $x \in D$ d.b. a oraz

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = c,$$

to $\lim_{x\to a} g(x) = c$. Gdy $c = +\infty\ (-\infty)$, to założenia dotyczące funkcji h (funkcji f) można pominąć.

Twierdzenie IV.5 (o zachowaniu nierówności przy przejściu granicznym). *Jeśli $f(x) \leqslant g(x)$ d. $x \in D$ d.b. a oraz $\lim_{x\to a} f(x) = c$ i $\lim_{x\to a} g(x) = d$, to $c \leqslant d$.*

Twierdzenie IV.6 (o warunku Cauchy'ego dla funkcji). *Funkcja f posiada skończoną[48)] granicę w a wtw*

- $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in D\setminus\{a\}}\ (|x-a|, |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$, *gdy $a \in \mathbb{R}$;*
- $\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{M\in\mathbb{R}}\ \forall_{x,y\in D\setminus\{a\}}\ (x, y > (<)M \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \epsilon)$, *gdy $a = +\infty\ (-\infty)$.*

Uwaga! Proszę nie mylić warunku Cauchy'ego dla funkcji z „definicją" Cauchy'ego granicy funkcji z twierdzenia IV.1.

Fakcik. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ *wtw* $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

Twierdzenie IV.7 (o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej). *Jeżeli f jest monotoniczna oraz a — p.s. D^a_+ (D^a_-), to istnieje prawostronna (lewostronna) granica f w punkcie a.*

Dowody.
Powyższe twierdzenia sprowadzają się do odpowiednich twierdzeń z rozdziału II. Dla twierdzeń IV.4, IV.5 i fakciku jest to całkiem proste. W przypadku twierdzenia IV.6 do implikacji „$\Rightarrow$" łatwo użyć po prostu twierdzenia IV.1 (definicji Cauchy'ego). Natomiast przy dowodzie „$\Leftarrow$",

48) Tzn. rzeczywistą (należącą do $\mathbb{R}$).

używając twierdzenia II.7 (o zupełności $\mathbb{R}$) łatwo możemy wykazać, że dla dowolnego $\{x_n\}$ w. $D \setminus \{a\}$ takiego, że $x_n \to a$, ciąg $\{f(x_n)\}$ jest zbieżny. Pozostaje wykazać, że granica $\{f(x_n)\}$ jest taka sama dla wszystkich rozważanych $\{x_n\}$. Jak to wykazać? — pozostawiam to Państwu … (nietrudne!). Dla dowodu twierdzenia IV.7 można najpierw skorzystać z warunku „równoważnego" (ii) z twierdzenia IV.1, dzięki czemu będziemy mieli do czynienia jedynie z ciągami $\{f(x_n)\}$, które sa monotoniczne (dlaczego?). Gdy zatem skorzystamy z twierdzenia II.4 (o granicy ciągu monotonicznego), do zakończenia dowodu pozostanie rozwiązanie podobnego, choć już trochę trudniejszego problemu, co przy dowodzie twierdzenia IV.6. $\square$

Kilka ważnych granic

Na zakończenie podrozdziału dotyczącego granicy funkcji podamy przykłady kilku ważnych granic funkcji. Wykazanie części z podanych tu równości będzie zadaniem dla Państwa (m. in. na ćwiczenia).

Przykłady.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$. Nie chodzi tu oczywiście o granicę ciągu o wyrazach $(1+\frac{1}{n})^n$ znanego Państwu z rozdziału II, ale o granicę funkcji określonej np. na $\mathbb{R}_+$. Jednak dość łatwo wykazać powyższą równość, korzystając właśnie z tego, że e jest granicą powyższego ciągu.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{c^x} = 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$. Tu, podobnie jak w poprzednim przykładzie, można wykorzystać zbieżność odpowiedniego ciągu. Oczywiście chodzi tu o $\frac{n^\alpha}{c^n} \to 0$ (str. 22). Pomocne będą też informacje o monotoniczności funkcji wykładniczej i potęgowej (patrz wniosek str. 14).

3. $\lim\limits_{x\to0} a^x = 1$ dla $a > 0$. To oczywiście uogólnienie znanego nam faktu: $\sqrt[n]{a} \to 1$ (patrz przykład e) strona 22). Dzięki twierdzeniu IV.7 wiemy, że istnieją granice jednostronne w punkcie 0 — oznaczmy je odpowiednio: g_-, g_+. Zatem z definicji granicy funkcji mamy $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to g_+$, skąd $g_+ = 1$ oraz $\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = a^{-\frac{1}{n}} \to g_-$, czyli $g_+ = g_- = 1$. Zatem z wniosku ze strony 50 uzyskujemy potrzebną równość.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

7. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^\alpha-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$. Ten ostatni przykład można uzyskać z przykładu 4. — a jak? To zostawiam Państwu jako ćwiczenie do zrobienia już po przejściu przez definicję logarytmu (patrz też zadanie IV.3).

Równości z przykładów 4, 5 i 6 zostaną wkrótce wyjaśnione w oparciu o tzw. *szeregi potęgowe*.

2. Ciągłość funkcji w punkcie

Definicje Heinego i Cauchy'ego

Niech $f : D \to \mathbb{R}$ i niech $a \in D \subset \mathbb{R}$.

Definicja (Heinego). *Funkcja f* ***jest ciągła w (punkcie)*** *a wtw dla dowolnego $\{x_n\}$ w. D takiego, że $x_n \to a$ zachodzi $f(x_n) \to f(a)$.*

Zauważmy, że ta definicja bardzo przypomina definicję (Heinego) granicy. Ale istotne różnice są takie: tu zamiast granicy g jest $f(a)$ oraz tu $a \in D$, ale za to a nie musi koniecznie być punktem skupienia D. Ponadto może tu zachodzić $x_n = a$ dla pewnych n.

Czasami używa się alternatywnej definicji — tzw. definicji Cauchy'ego, która z kolei przypomina „definicję" Cauchy'ego granicy funkcji (patrz tw. IV.1 war. (iii)). Skoro jednak my zdecydowaliśmy się na definicję ciągłości w wersji Heinego, ta alternatywna definicja będzie dla nas już twierdzeniem.

Twierdzenie IV.8. *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *f jest ciągła w a,*

(ii) *jeżeli a — p.s. D, to $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$,*

(iii) *(„definicja" Cauchy'ego)*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in D}\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon).$$

Dowód.
$(i) \Rightarrow (ii)$ wynika natychmiast z obu definicji (Heinego) dla ciągłości i dla granicy. $(iii) \Rightarrow (i)$ — to z kolei bardzo łatwo wykazać z definicji granicy ciągu (proszę to zrobić samodzielnie...). Wystarczy więc wykazać, że $(ii) \Rightarrow (iii)$. Załóżmy więc (ii). Jeżeli a — p.s. D, to (iii) wynika bezpośrednio z twierdzenia IV.1 (patrz przypadek 1 w (iii)). Jeżeli a — nie jest p.s. D, to istnieje takie $\delta > 0$, że w przedziale $(a-\delta; a+\delta)$ nie ma żadnego elementu zbioru D poza a. Stąd by wykazać (iii) wystarczy dobrać tę właśnie liczbę δ dla każdego $\epsilon > 0$. $\square$

Wniosek. *Jeżeli $a \in D$, ale a nie jest p.s. D, to f jest ciągła w a.*

W szczególności np. dowolny ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest funkcją ciągłą w każdym z punktów $n \in \mathbb{N}_{n_0}$. Oczywiście jednak, tak naprawdę, ciągłość w punkcie jest interesująca wyłącznie dla tych punktów $a \in D$, które są p.s. dziedziny funkcji.

Ciągłość w punkcie i granice „nowych" ciągów

Informacja o tym, że jakaś funkcja f jest ciągła w punkcie a bywa bardzo wygodna. Każdy taki przypadek ciągłości pozwala nam bowiem sformułować następujący „fakcik", będący po prostu przeformułowaniem definicji ciągłości w punkcie:

$$(x_n \in D \textit{ d.d.d. } n \textit{ oraz } x_n \to a) \implies f(x_n) \to f(a).$$

A więc, inaczej mówiąc, w takiej sytuacji możemy „mechanicznie" obie strony symbolu $x_n \to a$ „obłożyć" funkcją f. To pozwala nam na poważne rozszerzenie zasobu ciągów, dla których będziemy w stanie znaleźć granicę. Jednak pod jednym warunkiem — musimy znać jakieś funkcje ciągłe w pewnych punktach. I to możliwie dużo ... Tą ważną sprawą zajmiemy się w następnych podrozdziałach.

Funkcja „wszędzie nieciągła"

Teraz natomiast przykład całkiem negatywny ...

Przykład (funkcja Dirichleta). Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana będzie wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Łatwo dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ skonstruować dwa ciągi: $\{x_n\}$ — o wyrazach wymiernych i $\{x'_n\}$ — o wyrazach niewymiernych takie, że $x_n, x'_n \to a$ (patrz zadanie II.18). Ponieważ

$$1 \equiv f(x_n) \to 1 \neq 0 \leftarrow f(x'_n) \equiv 0$$

zatem w każdym punkcie $a \in \mathbb{R}$ funkcja f jest nieciągła (tj. nie jest ciągła w a). Co więcej, dla każdego punktu a funkcja Dirichleta nie posiada w ogóle granicy w tym punkcie.

3. Funkcje ciągłe

Intuicje geometryczne i definicja

Zdefiniowaliśmy już ciągłość w punkcie. Teraz zajmiemy się ciągłością funkcji „w ogóle". Dość często, gdy mowa o funkcjach ciągłych, można usłyszeć następującą „intuicyjno-geometryczną definicję":

> *Funkcja ciągła to taka funkcja, której wykres można narysować bez odrywania ołówka.*

Jeśli chodzi o intuicję związaną z ciągłością, to powyższe stwierdzenie bywa czasem użyteczne, choć nawet pomijając kwestię ścisłości, trudno uznać je za stwierdzenie prawdziwe. Istnieją bowiem tak dziwne funkcje ciągłe, których wykresu z pewnością nie dałoby się naszkicować nawet z grubsza... Tymczasem ścisła definicja jest taka:

Definicja. *Funkcja jest ciągła wtw jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny.*

Operacje na funkcjach ciągłych

Natychmiastowym wnioskiem z twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy funkcji (tw. IV.2) oraz z tw. IV.8 jest następujący wynik.

Fakt 1. *Suma, iloczyn, różnica i iloraz funkcji ciągłych (w przypadku ilorazu zakładamy, że funkcja przez którą dzielimy ma wszystkie wartości różne od* 0*) jest ciągła.*

Bezpośrednio z definicji ciągłości wynika natomiast „zamkniętość" klasy funkcji ciągłych na jeszcze jedną operację.

Fakt 2. *Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.*

Inną operacją na funkcjach „nie psującą" ciągłości jest np. obcinanie funkcji do mniejszej dziedziny.

Uwaga. Analogiczne fakty dotyczące ciągłości w ustalonym punkcie są oczywiście także prawdziwe (proszę sformułować samodzielnie, ze szczegółami, odpowiedni fakt dotyczący składania funkcji).

Najprostsze funkcje ciągłe

Przykłady.

1. Wielomian to dowolna funkcja zadana wzorem
$$w(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
dla $x \in D \subset \mathbb{R}$. ($a_0, \ldots, a_n$ — ustalone liczby). Gdy $a_n \neq 0$ to n nazywa się *stopniem wielomianu* w. Ponieważ z definicji funkcja *identycznościowa* $\mathbb{x} : D \to \mathbb{R}$ (tzn., $\mathbb{x}(x) = x$ dla $x \in D$) jest oczywiście ciągła i podobnie funkcja stała, zatem z faktu 1 wynika ciągłość dowolnego wielomianu.

2. Funkcja wymierna to dowolny iloraz dwóch wielomianów zadanych na wspólnej dziedzinie D, na której wielomian z mianownika nie osiąga wartości 0. Z faktu 1 taka funkcja też jest ciągła.

3. Moduł: $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tzn. f taka, że $f(x) = |x|$ też jest funkcją ciągłą na mocy tw. IV.8 i nierówności
$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|,$$
wynikającej łatwo z nierówności trójkąta.

Inne przykłady funkcji ciągłych podamy już wkrótce.

Trzy ważne własności funkcji ciągłych na $[a; b]$

Sformułujemy teraz kilka istotnych ogólnych twierdzeń opisujących własności funkcji ciągłych. Jednak najpierw wprowadźmy oznaczenie przedziałów o końcach a, b wygodne w sytuacji, gdy nie wiemy który z nich jest początkiem, a który końcem przedziału: dla $a, b \in \mathbb{R}$
$$(a?b) := \begin{cases} (a; b) \text{ gdy } a \leqslant b \\ (b; a) \text{ gdy } b < a \end{cases}$$
i analogicznie dla innego typu przedziałów: $[a?b)$, $[a?b]$ i $(a?b]$, np. $[1?0) = [0; 1)$.

Dowodami poniższych trzech twierdzeń zajmiemy się po sformułowaniu ostatniego z nich. We wszystkich zakładamy, że $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$.

Twierdzenie IV.9 (Bolzano o własności Darboux; o osiąganiu wartości pośrednich). *Jeżeli $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $y \in (f(a)?f(b))$, to istnieje $x \in (a; b)$ takie, że $f(x) = y$.*

Twierdzenie IV.10 (Weierstrassa; o osiąganiu kresów). *Jeżeli $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła to istnieją $m; M \in [a; b]$ takie, że $f(m) = \inf f([a; b])$ oraz $f(M) = \sup f([a; b])$.*[49] *W szczególności f jest ograniczona.*

Z tw. IV.9 i IV.10 uzyskujemy natychmiast wniosek dotyczący „obrazu ciągłego" dowolnego przedziału. Sprecyzujmy tu, że $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy *przedziałem* wtw
$$\forall_{a,b \in I}\ [a?b] \subset I.$$
Przedziałami są zatem np.: $\emptyset$, $\{7\}$, $\mathbb{R}$, $(143; +\infty)$. *Przedziałem domkniętym* nazywamy zbiór postaci $[a; b]$ gdzie $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, a *przedziałem niezdegenerowanym* każdy przedział różny od $\emptyset$ i od przedziału jednopunktowego (postaci $\{x\}$). Proszę samodzielnie wykazać, że przedział niezdegenerowany musi być jednym ze znanych nam już wcześniej typów przedziałów (skończonych lub nie): otwartych, domkniętych, otwarto–domkniętych bądź domknięto–otwartych.

[49] Gdy $f : D \to X$ oraz $A \subset D$, to mimo iż A nie jest elementem D, tylko jego podzbiorem, oznaczamy $f(A) := \{f(a) \in X : a \in A\}$. Jest to powszechnie przyjęte nadużycie (albo tylko rozszerzenie...) notacji „$f(x)$". Zbiór $f(A)$ nazywamy *obrazem* A (*przy pomocy*, ew. *względem* f).

Wniosek. *Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to $f(I)$ — przedział. Jeśli ponadto I — przedział domknięty, to $f(I)$ — także przedział domknięty.*

Dla celów kolejnego twierdzenia przyjmujemy następującą definicję.

Definicja. *Funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest* ***jednostajnie ciągła*** *wtw*

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{x,y\in D}\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon).$$

Powyższą definicję warto porównać ze zwykłym warunkiem ciągłości (czyli ciągłości w każdym punkcie $x \in D$), który na mocy „definicji" Cauchy'ego można zapisać równoważnie tak:

$$\forall_{x\in D}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ \forall_{y\in D}\ (|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\epsilon).$$

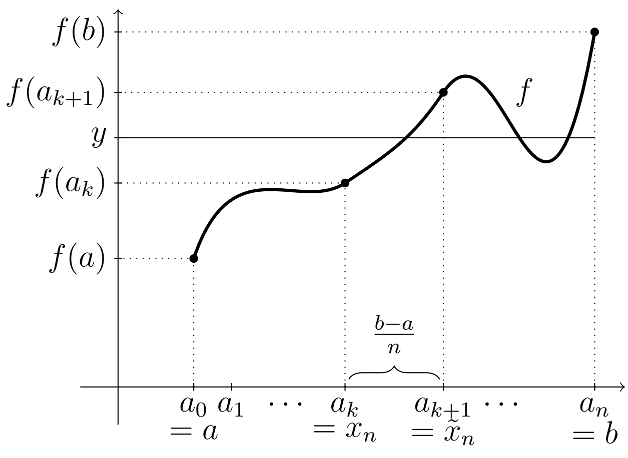
Różnica jest zrozumiała: w warunku na jednostajną ciągłość δ dobrać trzeba uniwersalnie dla wszystkich $x \in D$, w sposób zależny jedynie od ϵ, a w warunku ciągłości δ mogła być dobierana w sposób zależny i od ϵ i od x. Stąd „jednostajność" w nazwie („**jedno** wspólne δ dla wszystkich x"). W szczególności funkcja jednostajnie ciągła oczywiście jest też ciągła. Przykłady funkcji jednostajnie ciągłych to funkcja $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, funkcja identycznościowa $\mathbb{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a także $f : [0;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Natomiast $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, choć jest ciągła, ale jednostajnie ciągła nie jest (sprawdzenie tych własności f i g to zadania dla Państwa).

Wobec wcześniejszego wywodu „o wyższości ciągłości jednostajnej nad «zwykłą» ciągłością", następne twierdzenie może być pewnym zaskoczeniem...

Twierdzenie IV.11 (o jednostajnej ciągłości). *Jeżeli $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to f jest jednostajnie ciągła.*

Warto jednak zwrócić uwagę na to, że ten „zaskakujący" wynik dotyczy tylko funkcji określonych na przedziałach domkniętych — zdefiniowane przed chwilą nowe pojęcie nie jest więc zapewne całkiem niepotrzebne...

Dowody (tw. IV.9, IV.10, IV.11).
Głównym „chwytem" użytym w dowodzie każdego z tych trzech twierdzeń będzie twierdzenie Bolzano - Weierstrassa (tw. II.6). Zacznijmy od dowodu tw. IV.9. Przypuśćmy, że f nie osiąga wartości y. Weźmy dowolne $n \in \mathbb{N}$ i „podzielmy" przedział $[a;b]$ na n-części o równych długościach $d_n := \frac{b-a}{n}$ punktami $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$, tzn. $a_k := a + kd_n$ dla $k \in \{0,\ldots,n\}$. Wśród dwóch liczb $f(a_0)$, $f(a_n)$ jedna jest większa od y, a druga mniejsza od y — w takiej sytuacji mówimy, że liczby te są *po przeciwnych stronach y*. Zatem musi istnieć takie $k \leqslant n-1$, że liczby $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ są po przeciwnych stronach y (patrz rys. 4).



Rysunek 4. Liczby $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ są po przeciwnych stronach y.

Oznaczmy przez x_n tę spośród liczb a_k, a_{k+1} dla której wartość f jest mniejsza niż y, a przez $\tilde{x}_n$ tę, dla której dla której wartość f jest większa od y. Tym sposobem określiliśmy dwa ciągi $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ i $\{\tilde{x}_n\}_{n\geqslant 1}$ o wyrazach w $[a;b]$ (więc ograniczone), które spełniają

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ f(x_n) < y < f(\tilde{x}_n), \tag{IV.1}$$

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\ |x_n - \tilde{x}_n| = d_n. \tag{IV.2}$$

Korzystamy teraz z tw. Bolzano - Weierstrassa i wybieramy podciąg zbieżny $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$. Mamy zatem $x_{k_n} \to g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$. Ponadto $g \in [a;b]$ na mocy tw. II.2. Ponieważ na mocy (IV.2) $x_n - \tilde{x}_n \to 0$, zatem mamy także $\tilde{x}_{k_n} \to g$. Dzięki ciągłości f mamy zatem

$$f(x_{k_n}) \to f(g), \qquad f(\tilde{x}_{k_n}) \to f(g),$$

skąd na mocy (IV.1), stosując ponownie tw. II.2, dostajemy $f(g) \leqslant y \leqslant f(g)$, czyli $y = f(g)$, co jest sprzeczne z naszym założeniem.

Aby wykazać tw. IV.10 wystarczy dowód części dotyczącej „sup" (część dot. „inf" uzyskamy wtedy stosując część dot. „sup" do funkcji $-f$). Niech $c \in \overline{\mathbb{R}}$ będzie równe $\sup f([a;b])$. Istnieje zatem ciąg $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ w. $[a;b]$ taki, że $f(x_n) \to c$ (patrz np. zadanie II.10). Wybierzmy podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ zbieżny, tzn. $x_{k_n} \to M$ dla pewnego $M \in [a;b]$. Stąd $f(x_{k_n}) \to f(M)$ i jednocześnie $f(x_{k_n}) \to c$ czyli $c = f(M)$.

Aby wykazać tw. IV.11 przypuśćmy, że jego teza jest fałszywa. A zatem niech $\epsilon > 0$ będzie takie, że dla dowolnego $\delta > 0$ istnieją $x, y \in [a;b]$ dla których zachodzi

$$|x - y| < \delta \text{ oraz } |f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon.$$

W szczególności dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ możemy wybrać x_n, $y_n \in [a;b]$ takie, że (w powyższym bierzemy „$\delta = \frac{1}{n}$")

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \quad \text{oraz} \quad |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \epsilon. \tag{IV.3}$$

Znów wybieramy zbieżny podciąg $\{x_{k_n}\}_{n\geqslant 1}$ ciągu $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, tzn. $x_{k_n} \to g \in [a;b]$ i wówczas (analogicznie jak w dowodzie tw. IV.9) mamy też $y_{k_n} \to g$, a stąd $f(x_{k_n}) \to f(g) \leftarrow f(y_{k_n})$, czyli $|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \to 0$ — sprzeczność z (IV.3). □

Odwracanie funkcji ciągłych

Jedną z ważnych operacji na funkcjach, o której jeszcze dotąd nie wspominaliśmy jest odwracanie funkcji. Zacznijmy od przypomnienia, że $f : X \to Y$ jest *odwracalna* wtw jest „na" (tzn. $\forall_{y\in Y}\ \exists_{x\in X}\ f(x) = y$) oraz „1–1", tj. *różnowartościowa* (tzn. $\forall_{x_1,x_2\in X}\ (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$). Dla odwracalnej funkcji $f : X \to Y$ określamy *funkcję odwrotną* $f^{-1} : Y \to X$ warunkiem

$$\forall_{x\in X, y\in Y}\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Okazuje się, że pod pewnymi warunkami ciągłość zachowuje się także przy operacji odwracania funkcji.

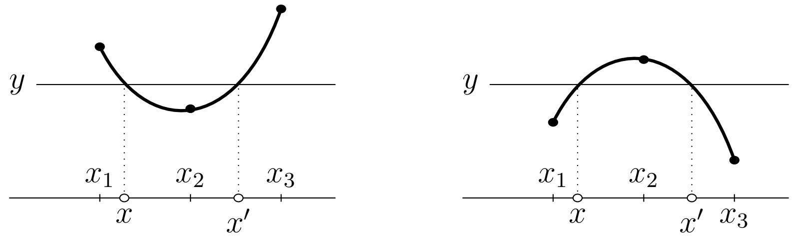
Twierdzenie IV.12 (o ciągłości funkcji odwrotnej). *Jeżeli $I, Y \subset \mathbb{R}$, I — przedział oraz $f : I \to Y$ jest ciągła i odwracalna, to f^{-1} też jest ciągła.*

A zatem owym dodatkowym warunkiem jest w założeniach powyższego twierdzenia to, że dziedzina f jest przedziałem.

W dowodzie tw. IV.12 wykorzystamy dwa lematy, które są także interesujące same w sobie. W obu załóżmy, że I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$.

Lemat 1. *Jeżeli f jest ciągła, to f jest „1–1” wtw f jest ściśle monotoniczna.*[50)]

Dowód.
Trzeba dowieść tylko „$\Longrightarrow$”. Przypuśćmy, że f nie jest ściśle monotoniczna. Nietrudno wówczas wykazać (nie potrzeba tu korzystać jeszcze z ciągłości f, zostawiam ten krok Państwu), że istnieją takie $x_1 < x_2 < x_3$ w I, że zachodzi $f(x_1) > f(x_2) < f(x_3)$ lub $f(x_1) < f(x_2) > f(x_3)$ (rys. 5).



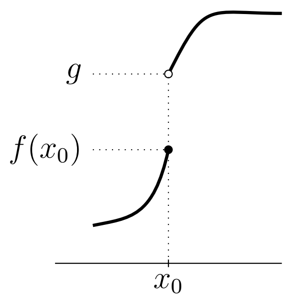
Rysunek 5. To typowe możliwości, gdy brak monotoniczności...

„Dla ustalenia uwagi” załóżmy, że zachodzi pierwszy z tych przypadków oraz że $f(x_1) < f(x_3)$. Wówczas niech $y \in (f(x_2); f(x_1)) \subset (f(x_2); f(x_3))$. Na mocy tw. IV.9 (własność Darboux) istnieją $x \in (x_1; x_2), x' \in (x_2; x_3)$ takie, że $f(x) = y = f(x')$, co przeczy różnowartościowości f. □

Każdy z Państwa bez trudu wskaże przykład pokazujący istotność założenia, że powyżej dziedzina f jest przedziałem. Podobna sytuacja jest też poniżej.

Lemat 2. *Jeżeli f jest monotoniczna, to f jest ciągła wtw $f(I)$ jest przedziałem.*

Dowód.
Implikacja „$\Longrightarrow$” wynika z wniosku po tw. IV.9 i IV.10. Załóżmy więc, że $f(I)$ — przedział. Wykażemy, że dla dowolnego $x_0 \in I$ takiego, że x_0 nie jest prawym końcem I, dla $g := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ (zauważmy, że ta granica istnieje na mocy tw. IV.7) zachodzi $g = f(x_0)$. Możemy założyć, że f jest rosnąca (gdy jest malejąca, rozumowanie „przejdzie” dla $-f$...).



Rysunek 6. Jeśli $f(x_0) \neq g$, to y nie będzie należało do $f(I)$.

Niech więc $x' > x_0$, $x' \in I$. Dla dowolnego x takiego, że $x_0 < x < x'$ zachodzi $f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant f(x')$, zatem na mocy twierdzenia IV.5 mamy $f(x_0) \leqslant g \leqslant f(x')$. Gdyby zachodziło $f(x_0) \neq g$, to mielibyśmy $f(x_0) < g \leqslant f(x')$ dla wszystkich $x' \in I$ t. że $x' > x_0$ (a takie istnieją dzięki założeniu o x_0). Rozważmy wówczas jakikolwiek $y \in (f(x_0); g)$ (patrz rys. 6). Należy on do $f(I)$ (bo $f(I)$ — przedział). Z drugiej strony, skoro f rosnąca, to dla $x \in I$ takich, że $x \leqslant x_0$ mamy $f(x) \leqslant f(x_0) < y$, a z kolei dla $x' \in I$ takich, że $x' > x_0$ mamy $f(x') \geqslant g > y$. Zatem y nie może być równe $f(x)$ dla żadnego $x \in I$, tzn. $y \notin f(I)$ — sprzeczność!

Analogicznie uzyskujemy odpowiednią równość dotyczącą granicy lewostronnej, skąd łącznie uzyskamy ciągłość f. □

Dowód (twierdzenia IV.12).
Z lematu 1 f jest ściśle monotoniczna zatem $g := f^{-1}$ też (dlaczego? ...). Ponadto $J := f(I)$ — przedział (wniosek z tw. IV.9 i IV.10). Zatem $g : J \to I$ oraz $g(J) = I$ — przedział. Stąd $g = f^{-1}$ jest ciągła na mocy lematu 2. □

Założenia, że dziedziną f jest przedział nie można z twierdzenia usunąć. Zachęcam do znalezienia odpowiedniego przykładu (patrz zadanie IV.19).

[50)] Ogólnie dla funkcji stosujemy terminologię zwiazania z monotonicznością analogiczną do tej dla ciągów. Tzn. — przypomnijmy z rozdziału I — funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ jest *ściśle rosnąca* (*malejąca*) wtw $\forall_{x,y\in D}$ $(x < y \Longrightarrow f(x) < (>) f(y))$, a po prostu *rosnąca* (*malejąca*) gdy ostrą nierówność z prawej strony „$\Longrightarrow$” zastąpimy odpowiednią nieostrą. Łącznie na funkcje rosnące i malejące mówimy, że są *monotoniczne*. Analogicznie funkcje ściśle rosnące i ściśle malejące nazywamy *ściśle monotonicznymi*.

4. Szeregi potęgowe

Uogólnienie pojęcia wielomianu

Poznaliśmy już sporo twierdzeń opisujących własności funkcji ciągłych, ale wciąż mamy niewiele przykładów takich funkcji. Nie wiemy np. nic o ciągłości takich elementarnych funkcji jak funkcje trygonometryczne, wykładnicze, czy potęgowe. Wciąż główny nasz „pozytywny” przykład to wielomian. W tym podrozdziale, w pewnym sensie, uogólnimy pojęcie wielomianu. Mianowicie zamiast mówić o funkcji będącej „skończoną” sumą jednomianów „$a_k x^k$” (— taka właśnie była definicja wielomianu) zajmiemy się szerszą klasą funkcji zadanych „nieskończonymi” sumami jednomianów.

Definicja. ***Szeregiem potęgowym*** *nazywamy rodzinę (tzn. zbiór) wszystkich szeregów liczbowych danych wzorem*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ [51]}$$

dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ jest ustalonym (tj. niezależnym od x) ciągiem liczb zwanych ***współczynnikami szeregu potęgowego*** *oraz x_0 jest ustaloną liczbą zwaną* ***środkiem szeregu potęgowego****. Zbiór Z złożony z tych $x \in \mathbb{R}$ dla których szereg powyższy jest zbieżny to* ***zbiór zbieżności****, a funkcja $S : Z \to \mathbb{R}$ zadana dla $x \in Z$ wzorem $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ to* ***suma*** *tego szeregu potęgowego.*

Przykłady. Oczywiście każdy wielomian określony na $\mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego (można wziąć $x_0 = 0$ i współczynniki $a_n = 0$ d.d.d. n). Funkcje exp, sin, cos zdefiniowane pod koniec rozdziału III są również sumami szeregów potęgowych o środku 0 i zbiorze zbieżności $\mathbb{R}$. Dla exp — to jasne z definicji. Dla sin i cos sprawa jest trochę delikatniejsza, bo np. szereg $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ **nie jest** szeregiem potęgowym w rozumieniu powyższej definicji. Dlaczego więc mimo to twierdzimy, że cos jest sumą szeregu potęgowego? Odpowiedź jest prosta: można z łatwością wykazać, że zachodzi

$$\forall_{x\in\mathbb{R}} \ \cos x \text{ [52]} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m,$$

gdzie

$$a_m := \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ — nieparzystych} \\ \frac{(-1)^n}{(2n)!} & \text{dla } m = 2n \end{cases}$$

Analogicznie można postąpić dla funkcji sin.

A zatem wspomniane wcześniej uogólnienie klasy wszystkich wielomianów, to klasa wszystkich sum szeregów potęgowych.

Dodajmy jeszcze, że zapis f w postaci sumy szeregu potęgowego nazywany jest ogólnie *rozwinięciem f w szereg potęgowy.* Do tej sprawy będziemy jeszcze powracać w dalszych rozdziałach.

Postać zbioru zbieżności

Na ogół zbiór zbieżności Z nie jest całym $\mathbb{R}$, ale zawsze $\{x_0\} \subset Z$ — choć czasem Z to „tylko” $\{x_0\}$, jak np. dla szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} n!x^n$. Pytanie zatem — na ile „dziwny” może być zbiór Z? Okazuje się, że nie może być dziwny wcale!

[51] Tu umowa, że $0^0 = 1$. Dla uproszczenia zapisu, gdy mowa o szeregu potęgowym $\{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n : x \in \mathbb{R}\}$, to najczęściej piszemy po prostu $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$.

[52] W przypadku niektórych funkcji elementarnych np. sin, cos, tg, ctg (a także $\log_a$, ln, które pojawią się już wkrótce) zwyczajowo można pomijać nawias przy pisaniu argumentu. Zatem np. $\sin x = \sin(x)$.

Twierdzenie IV.13. *Zbiór zbieżności szeregu potęgowego o środku w x_0 jest przedziałem*[53] *postaci $Z = Z_0 \cup Z_b$, gdzie $Z_0 = (x_0 - R; x_0 + R)$ dla pewnego $R \in [0; +\infty] := [0; +\infty) \cup \{+\infty\}$ oraz $Z_b \subset \{x_0 - R, x_0 + R\} \cap \mathbb{R}$. Dla $x \in Z_0$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

A zatem Z to przedział, który — jeśli pominąć jego końce — jest symetryczny względem x_0. Powyższe $R \in [0; +\infty]$, będące połową długości tego przedziału, nazywane jest *promieniem zbieżności*. Gdy rozważamy szeregi potęgowe, dla których $0 < R < +\infty$, to może się zdarzyć każda z „wersji końców" przedziału zbieżności: brak końców, tylko lewy, tylko prawy, oba (zachęcam do samodzielnych poszukiwań odpowiednich przykładów). Zbiór Z_0 z powyższego twierdzenia będziemy nazywali *otwartym przedziałem zbieżności.*

Dowód (twierdzenia IV.13).
Dzięki „podstawieniu $y = x - x_0$" możemy ograniczyć się do przypadku, gdy $x_0 = 0$. Zauważmy, że teza będzie wykazana, o ile wykażemy następujący lemat.

Lemat. *Jeżeli szereg liczbowy $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ jest zbieżny dla pewnego $x \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $x' \in \mathbb{R}$ takiego, że $|x'| < |x|$ szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x')^n$ jest bezwzględnie zbieżny.*

Dowód.
Niech $|x'| < |x|$. Ze zbieżności $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ mamy $a_n x^n \to 0$, więc w szczególności dla pewnego $M \in \mathbb{R}_+$ dla dowolnego $n \geqslant 0$ zachodzi

$$|a_n x^n| \leqslant M$$

skąd $0 \leqslant |a_n (x')^n| = |a_n x^n| \cdot |\frac{x'}{x}|^n \leqslant M q^n$ dla $q := |\frac{x'}{x}| < 1$. A zatem teza lematu wynika z kryterium porównawczego (kryt. III.1). □

□

Ciągłość sumy szeregu potęgowego

Okazuje się, że rozszerzając w taki właśnie sposób pojęcie wielomianu, jak uczyniliśmy to tutaj, nie wyszliśmy na szczęście poza klasę funkcji ciągłych.

Twierdzenie IV.14 (o ciągłości sumy szeregu potęgowego). *Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągłą.*

Udowodnimy tylko część powyższego twierdzenia — pominiemy trudniejszą sprawę — ciągłości w ewentualnych końcach przedziału zbieżności.

Dowód (ciągłości w punktach z Z_0).
Znów możemy założyć, że $x_0 = 0$ (dla innych x_0 trzeba złożyć sumę szeregu pot. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ z ciągłą funkcją „$x \longmapsto x - x_0$"). Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ oraz dla $x \in (-R; R)$ niech $S(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Niech $t_0 \in (-R; R)$ (zatem $R > 0$). Wykażemy, że S jest ciągła w punkcie t_0. Możemy wybrać R' takie, że $|t_0| < R' < R$. Na mocy twierdzenia IV.13 szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (R')^n$ jest zbieżny bezwzględnie, tj.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| (R')^n < +\infty. \tag{IV.4}$$

Niech $\epsilon > 0$. Dowód będzie zakończony (na mocy tw. IV.8 — „def. Cauchy'ego") jeżeli znajdziemy $\delta > 0$ taką, że gdy $|t - t_0| < \delta$, to $|S(t) - S(t_0)| < \epsilon$. Wskażemy takie δ, które będzie dodatkowo spełniać warunek:

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subset (-R', R'). \tag{IV.5}$$

[53] W analizie matematycznej ważną rolę odgrywają ogólniejsze szeregi potęgowe, w których zarówno x, x_0 jak i a_n mogą być liczbami zespolonymi. Wówczas Z to pewien podzbiór $\mathbb{C}$ złożony z koła otwartego $\{z \in \mathbb{C} : |z - x_0| < R\}$ i pewnego podzbioru okręgu tego koła.

Najpierw korzystając z (IV.4) dobierzemy $N \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|(R')^n < \frac{\epsilon}{3}. \tag{IV.6}$$

Jeśli δ spełnia (IV.5) oraz $|t - t_0| < \delta$, to $t_0, t \in (-R'; R')$ i na mocy (IV.6) mamy (zachęcam do samodzielnego **szczegółowego** uzasadnienia poniższych nierówności)

$$\begin{aligned} |S(t) - S(t_0)| &\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n - \sum_{n=0}^{N} a_n t_0^n\right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t|^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n||t_0|^n \\ &< \left|\sum_{n=0}^{N} a_n t^n - \sum_{n=0}^{N} a_n t_0^n\right| + \frac{2}{3} \cdot \epsilon. \end{aligned} \tag{IV.7}$$

Ponieważ $S_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $S_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$ jest wielomianem, a zatem funkcją ciągłą, zatem w szczególności możemy dobrać $\delta > 0$ tak, że (IV.5) zachodzi, oraz że jeżeli $|t - t_0| < \delta$, to $|S_N(t) - S_N(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$. A zatem na mocy (IV.7) tak dobrane δ spełnia nasze warunki. □

Z powyższego twierdzenia uzyskujemy w szczególności ciągłość funkcji sin, cos, exp.

Przykład. Pokażemy jak można użyć twierdzenia IV.14 do obliczenia granic z przykładów 4, 5 i 6 ze strony 52. Zrobimy to na przykładzie $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x}$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \neq 0$ zachodzi

$$\frac{\exp(x) - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ ma zatem zbiór zbieżności równy $\mathbb{R}$, w szczególności jego suma S jest funkcją ciągłą w 0, tzn. $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = \frac{0^0}{1!} = 1$.

5. O kilku funkcjach elementarnych

Zajmiemy się tu kilkoma często używanymi funkcjami (niektórymi tzw. *funkcjami elementarnymi* — ten termin na ogół nie jest definiowany w jakiś jednoznaczny sposób...). Podamy niektóre ich ważne własności (część z nich bez dowodu), z których będziemy korzystali w dalszych częściach wykładu.

Funkcja wykładnicza i logarytm

Niech $a > 0$. Funkcja wykładnicza (o podstawie a) zadana wzorem $W_a(x) := a^x$ dla $x \in \mathbb{R}$ zdefiniowana została już w rozdziale I.

Fakt. *W_a jest ciągła; gdy $a > 1$ jej granica w $+\infty$ równa jest $+\infty$, a granica w $-\infty$ równa jest 0 i odwrotnie, gdy $a < 1$. W obu przypadkach $W_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$ i $W_a : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ jest odwracalna.*

Dowód.
Ciągłość wynika łatwo z przykładu 3 str. 52, bowiem $\lim_{x\to x_0} W_a(x) = \lim_{h\to 0} W_a(x_0+h) = \lim_{h\to 0} a^{x_0+h} = a^{x_0} \lim_{h\to 0} a^h = a^{x_0} = W_a(x_0)$. Granice w $\pm\infty$: istnienie wynika z twierdzenia IV.7, a konkretną ich wartość uzyskamy z faktu, że $a^n \to 0$ dla $0 < a < 1$. Ponieważ obraz W_a musi być przedziałem, zatem ścisła monotoniczność (patrz wniosek ze strony 14) i wyliczone granice w $\pm\infty$ dają nam $W_a(\mathbb{R}) = (0; +\infty)$ i odwracalność. □

Definicja. *Niech $a > 0$, $a \neq 1$. **Logarytmem o podstawie** a nazywamy funkcję odwrotną do funkcji wykładniczej $W_a \colon \mathbb{R} \to (0; +\infty)$. Oznaczamy ją symbolem $\log_a$ (gdy $a = e$, to $\log_a$ nazywamy też **logarytmem naturalnym** i oznaczamy przez $\ln$).*

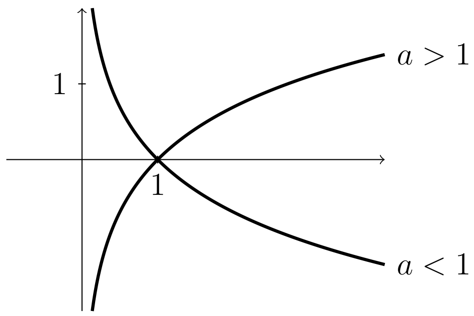
Z twierdzenia o ciągłości funkcji odwrotnej (tw. IV.12), z definicji f^{-1} i z odpowiednich własności potęgi rzeczywistej łatwo uzyskujemy następujący wynik.

Fakt. *Dla $a > 0$, $a \neq 1$ funkcja $\log_a \colon (0; +\infty) \to \mathbb{R}$ jest ściśle monotoniczna i ciągła. Gdy $a > 1$ jej granica w $+\infty$ równa jest $+\infty$, a w 0 równa jest $-\infty$ i odwrotnie gdy $a < 1$. Ponadto dla $a, b \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$, $x, y > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ zachodzi:*

(i) $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;

(ii) $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a x$;

(iii) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.



Rysunek 7. Dwa warianty wykresu funkcji logarytmicznej.

Ostatni ze wzorów (tzw. *wzór na zamianę podstaw logarytmów*) pokazuje, że zamiast logarytmów o różnych podstawach, można śmiało używać jednej tylko funkcji logarytmicznej — np. ln.

Na koniec tego podrozdziału zajmiemy się zdefiniowaną w rozdziale III i rozważaną też w tym rozdziale funkcją exp. Okazuje się, że ona również jest funkcją wykładniczą.

Fakt. $\forall_{x \in \mathbb{R}}\ \exp(x) = e^x$ *(tzn.* $\exp = W_e$*).*

Dowód.
Wykazaliśmy, że zarówno funkcja exp jak i W_e są ciągłe. Ponadto obie spełniają tożsamość

$$\forall_{x,y \in \mathbb{R}}\ f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \tag{IV.8}$$

i mają dodatnie wartości (dla exp — patrz zadanie III.29). Można też wykazać, że mają tę samą wartość w punkcie 1, tzn. że $\exp(1) = e$ — patrz. np. zadania III.17 i III.18. Reszta dowodu wynika z następującego lematu.

Lemat. *Dla każdego $c > 0$ istnieje dokładnie jedna funkcja ciągła $f \colon \mathbb{R} \to (0; +\infty)$ spełniająca* (IV.8) *oraz warunek $f(1) = c$ (mianowicie W_c).*

Dowód.
Istnienie jest jasne, bo $f = W_c$ spełnia te warunki. Wykażemy jednoznaczność. Przez indukcję „po n" łatwo dowodzimy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$ zachodzi

$$f(nx) = (f(x))^n.$$

Biorąc $\frac{x}{n}$ zamiast x w ostatniej formule, dla $n \geqslant 1$ dostajemy

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = (f(x))^{\frac{1}{n}}.$$

Mamy też $f(-x) = (f(x))^{-1}$ (dlaczego?...). Stąd

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(1)^{\frac{m}{n}} = c^{\frac{m}{n}} = W_c(\frac{m}{n})$$

dla dowolnego $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Oznacza to, że $f(q) = W_c(q)$ dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}$. Dla $x \in \mathbb{R}$ weźmy ciąg $\{q_n\}$ w. $\mathbb{Q}$ taki, że $q_n \to x$ (patrz np. zadanie II.18). Wówczas dzięki ciągłości funkcji f i W_c otrzymujemy $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(q_n) = \lim_{n\to+\infty} W_c(q_n) = W_c(x)$. □

□

Funkcja potęgowa

Rozważamy funkcję potęgową P_α z potęgą $\alpha > 0$, $\quad P_\alpha\colon [0;+\infty)$ [54] $\to [0;+\infty)$, $P_\alpha(x) := x^\alpha$ dla $x \geqslant 0$.

Fakt. *Dla $\alpha > 0$ funkcja P_α jest ciągła i ściśle rosnąca, $\lim_{x\to+\infty} P_\alpha(x) = +\infty$, $P_\alpha([0;+\infty)) = [0;+\infty)$.*

Dowód.
Ścisły „wzrost” dla P_α był wykazany w rozdziale I. Ciągłość w punktach $x_0 > 0$ wynika z twierdzenia o ciągłości złożenia funkcji ciągłych (fakt 2 ze strony 54) i wzoru $x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \ln x}$ dla $x > 0$ (używamy wykazanej już ciągłości funkcji wykładniczej i logarytmicznej). Ciągłość w 0 wynika z faktów dotyczących granicy ln w 0 oraz granicy W_e w $-\infty$, a granicę w $+\infty$ wyliczamy wykorzystując granice obu powyższych funkcji w $+\infty$. Z własności Darboux dostajemy zatem $f([0;+\infty)) = [0;+\infty)$. □

Funkcje trygonometryczne sin, cos, tg, ctg

Tu podamy tylko kilka informacji o funkcjach trygonometrycznych związanych z niezdefiniowaną dotąd przez nas liczbą π. Poniższy fakt podamy bez dowodu.

Fakt. *Istnieje liczba $\pi > 0$ taka, że $\sin(\pi) = 0$ oraz $\sin x > 0$ dla $x \in (0;\pi)$.*

Uwaga. Powyższe warunki wyznaczają liczbę π jednoznacznie. Można więc uznać je za definicję liczby π. Dowód faktu nie jest trudny (patrz zadanie IV.23). Nieco trudniej jest wskazać jakieś dość precyzyjne oszacowanie liczby π przy użyciu konkretnych liczb wymiernych. Chwilowo bez dowodu przyjmiemy, że

$$3 < \pi < 4.$$

W oparciu o powyższy fakt oraz o wzory na sin i cos sumy i „jedynkę” trygonometryczną (patrz fakt ze strony 42) można wykazać praktycznie wszystkie znane wzory trygonometryczne (w tym tzw. wzory „redukcyjne”) dotyczące funkcji sin i cos.

W szczególności nietrudno wykazać, że $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\cos\pi = -1$, a także, że sin i cos są funkcjami okresowymi[55] o okresie 2π.

Funkcje tg („tangens”) i ctg („kotangens”) określa się następująco:
$\mathrm{tg}\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x};$$

$\mathrm{ctg}\colon \mathbb{R} \setminus \{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

---

[54] W rozdziale I dziedziną P_α było zawsze $(0;+\infty)$. Tu, dla $\alpha > 0$, dziedzinę tę troszkę powiększamy. Formalnie jest to więc już inna funkcja, choć używamy tego samego oznaczenia P_α.

[55] Przypomnijmy, że $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *okresowa* wtw istnieje $T \neq 0$ takie, że $f(x+T) = f(x)$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ oraz że każda liczba $T \neq 0$ o powyższej własności nazywa się *okresem* funkcji f.

Definicje te są poprawne, można bowiem łatwo sprawdzić, że zbiór zer[56] sinusa, to zbiór $\{k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\}$, a cosinusa $\{k\pi + \frac{\pi}{2}\colon k \in \mathbb{Z}\}$. Co więcej tg i ctg są ciągłe, jako ilorazy funkcji ciągłych. Są okresowe o okresie (nawet) π (uwaga — tu dziedzina nie jest $\mathbb{R}$, więc owa okresowość jest w nieco innym znaczeniu, niż to z definicji okresowości z niedawnego przypisu — w jakim?) oraz $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}\pm} \operatorname{tg} x = \mp\infty = \lim_{x \to 0\mp} \operatorname{ctg} x$.

[56] *Zero funkcji* f to każdy taki x z dziedziny f, że $f(x) = 0$.

Zadania do Rozdziału IV

1. Sformułuj pominięte na wykładzie przypadki „definicji” Cauchy'ego granicy (tw. IV.1). Dla jednego wybranego (spośród dziewięciu) przypadku udowodnij twierdzenie IV.1.

$\forall$ 2.

   (a) Wykaż, że poniższe „twierdzenie” jest **fałszywe**:

   Załóżmy, że $A, B \subset \mathbb{R}$, $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ i a — p.s. A, b — p.s. B oraz, że $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to \mathbb{R}$. Wówczas, jeżeli

   (i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$,

   (ii) $\lim_{y\to b} g(y) = c$,

   to $\lim_{x\to a}(g\circ f)(x) = c$.

   (b) Wykaż twierdzenie „o granicy złożenia” (inaczej „o podstawianiu”) powstałe przez dołożenie powyżej jeszcze jednego założenia:

   (iii) zachodzi przynajmniej jeden z warunków:
   - $b \in B$ i g jest ciągła w punkcie b;
   - $f(x) \neq b$ d. $x \in A$ d.b. a (np. gdy $b = \pm\infty$...).

3. Wykorzystując twierdzenie z zadania IV.2 (b), policzoną na wykładzie (przykład 4 ze str. 52) granicę $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x}$ oraz wiedzę z podrozdz. 5.1 wykaż, że $\lim_{x\to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (przykład 7 ze str. 52).

4. Wykaż (ze szczegółami), że $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ (przykład 1 ze str. 52) oraz $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{c^x} = 0$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $c > 1$ (przykład 2 ze str. 52).

$\forall$ [57] 5. Znajdź poniższe granice, lub wykaż, że nie istnieją:

   (a) $\lim_{x\to a} \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ dla $a = \pm\infty; \pm 2; \pm 1; 0$;

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(13x)}$;

   (c) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}$;

   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{x^e-1}{1-x^\pi}$;

   (e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[2007]{1+x}-1}{2x+x^2}$;

   (f) $\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{1+x} - \sin\sqrt{x})$;

   (g) $\lim_{x\to+\infty}(\sin(1+x) - \sin x)$;

   (h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ dla $\alpha > 0$;

   (i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^{2007}+x^{2009})}{\sqrt[9999]{x}}$;

   (j) $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$;

   (k) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$;

   (l) $\lim_{x\to 0+} x^x$;

   (m) $\lim_{x\to 0} \frac{(\cos x)^{\sqrt{2}}-1}{x^2}$;

   (n) $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x}-1}{x}$;

   (o) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$ dla $a > 0$.

6. Dla jakich parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ jest ciągła funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, zadana wzorem

[57] Obowiązkowo przynajmniej 9 szt. spośród (a)–(e), (h)–(o).

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leqslant 1 \\ x^2 + ax + b & \text{dla } |x| > 1, \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} a & \text{dla } x = 0 \\ \sin \frac{b}{|x|} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$

7. Znajdź przykład funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która jest ciągła w
   (a) dokładnie jednym punkcie;
   (b) dokładnie dwóch punktach;
   (c) dokładnie n punktach ($n \in \mathbb{N}$, ustalone);
   (d) każdym punkcie zbioru $\mathbb{Z}$, a w pozostałych punktach jest nieciągła.

8. Uzupełnij szczegóły dowodu twierdzenia „o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej" (tw. IV.7).

9. Rozważamy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{\mathrm{mian}(x)} & \text{dla } x \in \mathbb{Q}, \end{cases}$ gdzie $\mathrm{mian}(x) := \min\{n \in \mathbb{N}\colon \exists_{m \in \mathbb{Z}}\ x = \frac{m}{n}\}$ dla $x \in \mathbb{Q}$. Wykaż, że f jest ciągła w punkcie x wtw $x \notin \mathbb{Q}$.

10. Wykaż, że każde z poniższych równań ma co najmniej dwa pierwiastki (tzn. rozwiązania) w $\mathbb{R}$:
    (a) $e^x = 1 + 2x$;
    (b) $2^x = 4x$;
    (c) $e^{-(x^2 + \sin x)} = \frac{1}{2}$.

$\forall$ 11. Znajdź pewną liczbę wymierną będącą przybliżeniem jakiegoś pierwiastka poniższego równania z podaną dokładnością d (tzn. takie $y \in \mathbb{Q}$, że istnieje pierwiastek p równania taki, że $|y - p| \leqslant d$):
    (a) $x^3 - 3x = -1,\ \ d = \frac{1}{10}$;
    (b) $x^3 + x^2 + 2x + 1 = 0,\ \ d = \frac{1}{8}$.

12. Wykaż, że wielomian stopnia nieparzystego posiada pierwiastek rzeczywisty.

13. Twierdzenie o punkcie stałym, to każde twierdzenie postaci:

    Jeżeli $f\colon X \to X$ oraz zachodzi Z, to istnieje $x \in X$ takie, że $f(x) = x$,

    gdzie Z to pewne założenie dotyczące funkcji f i zbioru X. Wykaż twierdzenie o punkcie stałym dla każdego z poniższych założeń Z:
    $\forall$ (a) f jest ciągła, X — przedział domknięty;
    (b) f jest ciągła i malejąca, $X = \mathbb{R}$;
    (c) f jest zwężająca, tzn. $\exists_{c<1} \forall_{x,y \in X}\ |f(x) - f(y)| \leqslant c|x - y|$, $X = \mathbb{R}$.

14. Wykaż, że funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(x) = \frac{1000x^{14} - 7x^{11} + 12x + 7}{(x^7 - 1)^2 + 1}$$

jest ograniczona.

$\forall$ 15. Wykaż następujące twierdzenie „o osiąganiu jednego kresu”:

> *Jeżeli I to niepusty przedział, $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz istnieje $x_0 \in I$ taki, że dla dowolnego a będącego końcem przedziału I nienależącym do I zachodzi $\lim_{x\to a} f(x) > f(x_0)$ $(< f(x_0))$, to f osiąga swój kres dolny (górny).*[58]

16. Wykaż, że funkcja f z zadania IV.14 osiąga obydwa swe kresy.

17. Funkcja $f\colon D \to \mathbb{R}$ jest *lipschitzowska* wtw $\exists_{c\in\mathbb{R}} \forall_{x,y\in D}\ |f(x)-f(y)| \leqslant c|x-y|$. Znajdź **wszystkie** te implikacje, które zachodzą pomiędzy parami zdań utworzonymi spośród: „f jest lipschitzowska”, „f jest ciągła”, „f jest jednostajnie ciągła”, niezależnie od wyboru funkcji f.

18. Zbadaj jednostajną ciągłość i lipschitzowskość funkcji zadanych poniższymi wzorami:

    (a) $\sqrt{x}$ dla $x \geqslant 0$;

    (b) x^2 dla $x \in \mathbb{R}$;

    (c) $|x|$ dla $x \in \mathbb{R}$;

    $\forall$ (d) $\ln x$ dla $x > 0$;

    $\forall$ (d') $\ln x$ dla $x \geqslant a$, gdzie $a > 0$ jest ustalone.

19. Znajdź przykład funkcji $f\colon A \to B$, gdzie $A, B \subset \mathbb{R}$, która jest ciągła i odwracalna, ale $f^{-1}\colon B \to A$ nie jest ciągła. (Wskazówka: weź B — przedział, ale A — nie).

$\forall$ [59] 20. Znajdź zbiór zbieżności i promień zbieżności następujących szeregów potęgowych:

    (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$;

    (b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}(x+1)^n$;

    (c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$;

    (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} (2+(-1)^n)^n x^n$;

    (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{1000}}{\sqrt{n!}} x^n$;

    (f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{1000}} x^n$;

    (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2+n)} x^n$.

21. Wykaż, że jeśli dwa szeregi potęgowe o środku w 0 i o dodatnich promieniach zbieżności mają równe sumy w pewnym przedziale $(-r; r)$, $r > 0$, to szeregi te są identyczne (tzn. mają te same ciągi współczynników). Powyższy fakt, to tzw. twierdzenie o jednoznaczności rozwinięcia w szereg potęgowy i jest ono uogólnieniem znanego faktu dotyczącego jednoznaczności współczynników wielomianu. Wskazówka: użyj sprytnie twierdzenia o ciągłości sumy szeregu potęgowego (tw. IV.14).

22. Wykaż, że każda funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągła i *addytywna*, tj. spełniająca warunek

$$\forall_{x,y\in\mathbb{R}}\ f(x+y) = f(x) + f(y),$$

jest funkcją liniową, tzn. zadaną wzorem $f(x) = ax$ dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$, przy pewnym (ustalonym) $a \in \mathbb{R}$.

---

[58] Przez dolny lub górny kres funkcji rozumiemy oczywiście odpowiedni kres jej zbioru wartości, tzn. tu inf lub sup $f(I)$.

[59] Obowiązkowo przynajmniej 4 przykłady.

23. Wykaż fakt o istnieniu liczby π (ze strony 63). Wskazówka: wykorzystaj zadanie III.5.

24. W oparciu o wiedzę z wykładu (tzn. definicję sin i cos, wzory z rozdziału III (fakt 2 ze str. 42) oraz fakt z zadania IV.23) wykaż następujące własności sin i cos:

    (a) $\cos\pi = -1$;

    (b) $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$;

    (c) sin i cos są okresowe o okresie 2π;

    (d) $\sin x = 0$ wtw $x \in \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$.

25. Wykaż, że funkcja Dirichleta (przykład ze strony 54) jest okresowa. Znajdź zbiór wszystkich jej okresów.

26. Wykaż, że jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i okresowa o okresie $T_n \neq 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, przy czym $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = 0$, to f jest stała. Czy ciągłość jest tu istotnym założeniem?

27. Wykaż, że istnieje $M \in \mathbb{R}$ takie, że dla $x \geqslant M$ zachodzi

    (a) $x^{10000} < \frac{1}{10000!}x^{10001} - 10000!\sqrt{x}x^{10000}$;

    (b) $1000!\ln x < x^{\frac{1}{1000!}}$.

28. Wykaż, że $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x = e^y$ dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$ (uwaga: użyj tu **świadomie** ciągłości odpowiedniej funkcji w odpowiednim punkcie...).

29. Wykorzystując fakt, że $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ (przykład 7 ze str. 52) udowodnij następujące kryterium zbieżności szeregów (Raabego): *Jeżeli* $a_n > 0$ *dla* $n \geqslant n_0$ *oraz* $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1-\dfrac{a_{n+1}}{a_n}) = \alpha$, [60] *to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ *jest zbieżny, gdy* $\alpha > 1$ *oraz jest rozbieżny, gdy* $\alpha < 1$. Wskazówka: użyj również „drugiego kryterium porównawczego” z zadania III.14.

30. Wykorzystując informacje o granicach odpowiednio dobranych funkcji (w odpowiednich punktach) zbadaj zbieżność szeregów

    (a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{3}-1)^\alpha$

    (b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^\alpha$

    $\forall$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{n})^\alpha$

    w zależności od wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$. Wskazówka: użyj kryterium asymptotycznego (kryterium III.2).

[60] Można zamiast tej granicy wziąć także $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1)$.

V Rachunek różniczkowy

[około $3\frac{1}{2}$ wykładu]

W rozdziale IV rozważaliśmy funkcje ciągłe, czyli takie, o których można powiedzieć, że „lokalnie zachowują się w sposób dosyć regularny”. Obecnie zajmiemy się funkcjami „jeszcze bardziej regularnymi”, a mianowicie *różniczkowalnymi*. Popularna geometryczna „definicja” (podobnie jak w przypadku ciągłości, mocno nieścisła, ale sugestywna...) jest następująca:

Funkcja jest różniczkowalna, gdy jej wykres nie posiada „kantów”.

A zatem chodzi o klasę tych funkcji, z którymi w praktyce mamy do czynienia najczęściej. Rzeczywiście — ogromna większość funkcji pojawiających się przy próbach matematycznego opisu zjawisk z otaczającego nas świata — to funkcje różniczkowalne. Również samo pojęcie *pochodnej*, bezpośrednio związane z różniczkowalnością, bardzo często pojawia się przy takich opisach — np. dla wyrażenia szybkości zmian pewnych wielkości w czasie.

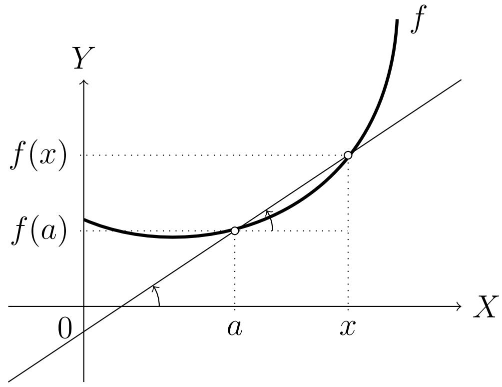
1. Pochodna funkcji

Iloraz różnicowy

Rozważmy funkcję $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}$ oraz niech $a \in D$ i a — p.s. D. *Ilorazem różnicowym* dla funkcji f i punktu a nazywamy funkcję określoną na $D \setminus \{a\}$, zadaną dla $x \neq a$ wzorem

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Geometryczny sens powyższej wielkości jest taki: to tangens kąta utworzonego przez oś OX oraz przez prostą wyznaczoną punktami wykresu f dla argumentów a i x (patrz rys. 8). Powyższą prostą nazywa się często *sieczną* do wykresu funkcji f.



Rysunek 8. Wartość ilorazu różnicowego dla f i a w punkcie x to po prostu tangens zaznaczonego tu kąta.

Pochodna i różniczkowalność

Definicja.

- *Jeżeli istnieje granica w punkcie a ilorazu różnicowego dla f i a, tzn.*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

*to nazywamy ją **pochodną** f **w (punkcie)** a i oznaczamy $f'(a)$.*

- ***Pochodna lewostronna (prawostronna)*** *f w punkcie a to*

$$\lim_{x\to a-(+)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.\ ^{61)}$$

Oznaczamy ją $f'_-(a)$ ($f'_+(a)$).

- *Funkcja f jest* ***różniczkowalna w (punkcie)*** *a wtw $f'(a)$ istnieje i jest skończona (tj. $f'(a) \in \mathbb{R}$).*

- *Funkcja f jest* ***różniczkowalna*** *wtw $\forall_{a\in D}$ f jest różniczkowalna w punkcie a. W tej sytuacji funkcję $D \ni x \rightsquigarrow f'(x)$ [62] nazywamy* ***pochodną*** *f i oznaczamy symbolem f'.*

Wspomniany we wstępnie do niniejszego rozdziału brak „kantów" w wykresie funkcji różniczkowalnej najlepiej chyba uściślić jako istnienie *prostej stycznej* do wykresu f, rozumianej jako prosta „graniczna" prostych siecznych do wykresu „przy $x \to a$".

Definicja. *Załóżmy, że f posiada pochodną w a.* ***Prosta styczna do wykresu*** *f dla a (lub w punkcie $(a, f(a))$) to*

- *w przypadku, gdy $f'(a) \in \mathbb{R}$ zbiór*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = f'(a)(x-a) + f(a)\},$$

- *gdy $f'(a) = \pm\infty$ zbiór*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x = a\}.$$

A zatem powinniśmy jeszcze trochę poprawić „definicję" geometryczną różniczkowalności wykluczając w niej nie tylko „kanty", ale także pionowe styczne ...

Uwagi.

1. Zamiast granicy $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ w definicji pochodnej możemy równoważnie rozważać granicę $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2. Zamiast oznaczenia f' na pochodną, często używane jest tradycyjne oznaczenie

$$\frac{df}{dx}$$

   może dość niewygodne jako symbol funkcji, ale za to odzwierciedlające z grubsza sens pojęcia pochodnej (d oznacza tu "przyrost").

3. Często przy definicji pochodnej robione jest nieco silniejsze założenie dotyczące dziedziny D i punktu $a \in D$. Zakłada się mianowicie, że dla pewnego $\delta > 0$ zbiór

$$D_{a,\delta} := \{x \in D : |x-a| < \delta\} \tag{V.1}$$

   jest jednym z przedziałów $(a-\delta; a+\delta)$, $[a; a+\delta)$ lub $(a-\delta; a]$. Mówimy wówczas, że a *ma w D otoczenie będące przedziałem*. Założenie to jest oczywiście spełnione, jeżeli np. D jest dowolnym niezdegenerowanym przedziałem, ewentualnie skończoną sumą takich przedziałów, oraz $a \in D$. A zatem spełnione jest w przypadkach najczęściej tu przez nas rozważanych (zachęcam jednak do podania jakiegoś przykładu „negatywnego", tj. dziedziny D oraz $a \in D$, będącego p.s. D, niespełniających tego warunku).

---

[61] Oczywiście, by w ogóle mówić o tych *jednostronnych* pochodnych, a musi być p.s. D^a_- lub, odpowiednio, D^a_+.

[62] Symbol: $D \ni x \rightsquigarrow$ wzór(x) oznacza funkcję g określoną na D zadaną dla wszystkich $x \in D$ jako $g(x) =$ wzór(x).

4. Gdy a jest *obustronnym* punktem skupienia D, tzn. a — p.s. D^a_+ oraz D^a_-, to $f'(a)$ istnieje wtw istnieją $f'_+(a)$ i $f'_-(a)$ i są sobie równe.

5. Podobnie jak granica funkcji w punkcie, tak i pochodna funkcji w punkcie to pojęcia *lokalne*, tzn. dla dowolnego $\delta > 0$ istnienie i wartość $f'(a)$ jest tym samym co istnienie i wartość $f'_\delta(a)$, gdzie $f_\delta := f|_{D_{a,\delta}}$ (patrz oznaczenie $D_{a,\delta}$ z powyższego punktu 3). Mówiąc bardziej obrazowo (ale zupełnie nie ściśle ...) punkty „dalekie od a" nie mają wpływu na $f'(a)$. [63)]

Nieco przykładów oraz związki z ciągłością

Po tych dosyć abstrakcyjnych rozważaniach czas już na konkretne przykłady. Zwróćmy w nich uwagę nie tylko na różniczkowalność i pochodną, ale także na kwestię ciągłości.

Przykłady (najprostsze).

1. Funkcja stała ma w każdym punkcie skupienia swej dziedziny pochodną równą 0, bo iloraz różnicowy jest stale równy 0.

2. Jeżeli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją *afiniczną* (zwaną czasem *liniową*, choć to trochę mylące) tzn. zadaną dla $x \in \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = ax+b$ (a, b — ustalone liczby), to iloraz różnicowy dla f i dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ jest funkcją stale równą a, zatem też f' jest funkcją stale równą a, co więcej wykres f jest jednocześnie prostą styczną do „siebie samego" dla x_0, niezależnie od wyboru x_0.

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Wówczas $f'(x) = 1$ dla $x > 0$, $f'(x) = -1$ dla $x < 0$, a $f'(0)$ nie istnieje, ponieważ $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$. Zatem to przykład funkcji ciągłej, która nie w każdym punkcie posiada pochodną.

4. Rozważmy funkcję signum $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem [64)]

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

   Zachodzi: $f'(x) = 0$, dla $x \neq 0$, $f'(0) = +\infty$. Jest to więc przykład funkcji nieciągłej, która w każdym punkcie posiada pochodną.

5. Niech $f : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Wówczas po standardowych przekształceniach wzoru na iloraz różnicowy tej funkcji uzyskujemy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dla $x > 0$ oraz $f'(0) = +\infty$. Jest to więc przykład funkcji ciągłej, która nie jest różniczkowalna, ale w każdym punkcie posiada pochodną.

Uzupełnieniem powyższych przykładów 3, 4 i 5 może być następujący ważny rezultat dotyczący związków pochodnej z ciągłością.

Fakt. *Jeżeli f jest różniczkowalna w punkcie x_0, to jest też w tym punkcie ciągła.*

[63)] Mogą się zatem narodzić wątpliwości: a zatem, czy w ogóle jakiś punkt dziedziny poza samym a ma wpływ na $f'(a)$? Może wystarczy znać tylko a i $f(a)$? ... Ostrzegam, że są to jednak wątpliwości dotyczące bardziej mankamentów logicznych naszego potocznego języka, niż matematyki...

[64)] Funkcja oznaczana tym symbolem nie zawsze jest tą tu właśnie zdefiniowaną funkcją. Rozmaicie bywa wybierana wartość sgn dla argumentu 0.

Dowód.
Gdy $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, to

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + f(x_0) \right) = f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0).$$

□

2. Różniczkowanie funkcji elementarnych

Zajmiemy się tu wzorami umożliwiającymi obliczanie pochodnych funkcji elementarnych. Dokładniej — zajmiemy się tymi funkcjami, które można uzyskać, wychodząc od znanych nam kilku ich podstawowych typów, przy pomocy znanych nam operacji na funkcjach.

Pochodne kilku ważnych funkcji

Zaczniemy od poniższych czterech wzorów na pochodne już wcześniej przez nas badanych funkcji.

Fakt.

1. *Jeśli $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $f : D \to \mathbb{R}$ jest zadana wzorem $f(x) = x^\alpha$ przy czym a) $\alpha \in \mathbb{N}$ i $D = \mathbb{R}$ lub b) $\alpha \in \mathbb{Z}$ i $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lub c) $D = \mathbb{R}_+$, to $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ (tu ewentualne „0^0", mogące się pojawić w a) dla $\alpha = 1$ i $x = 0$, uznajemy za równe 1).*

2. *Jeżeli $a > 0$ oraz $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $f(x) = a^x$, to $f'(x) = a^x \ln a$. W szczególności* $\exp' = \exp$.

3. $\sin' = \cos$.

4. $\cos' = -\sin$.

Dowód.
Sprawdzimy wszystkie wzory na pochodne w punkcie x_0. Dla pierwszego wzoru można skorzystać z tego, że $\lim_{x \to 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha$ (patrz przykład IV.7 strona 52) oraz zapisać dla $x_0 \neq 0$ i $\frac{x}{x_0} > 0$

$$\frac{x^\alpha - x_0^\alpha}{x - x_0} = x_0^{\alpha-1} \frac{(\frac{x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{x}{x_0} - 1},$$

co daje natychmiast potrzebny wynik, o ile $x_0 \neq 0$ (przypadek $x_0 = 0$, możliwy tylko dla a), jest oczywisty). Dla dowodu punktu 2 zauważmy, że dla $a \neq 1$ i $x \neq x_0$

$$\frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = a^{x_0} \frac{e^{(x-x_0)\ln a} - 1}{(x - x_0)\ln a} \ln a \xrightarrow[x \to x_0]{} a^{x_0} \ln a$$

ponieważ

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

(patrz przykład IV.4 strona 52). Dla $a = 1$ ten wzór na pochodną jest oczywisty. Wreszcie wzory 3 i 4 to prosta konsekwencja wzorów na sin i cos od sumy argumentów (patrz fakt 2 ze str. 42) oraz przykładów 5 i 6 ze strony 52. Np.

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x_0 + h) - \cos x_0}{h} &= \cos x_0 \frac{(\cos h - 1)}{h^2} h - \sin x_0 \frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \cos x_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 - \sin x_0 \cdot 1 \\ &= -\sin x_0. \end{aligned}$$

□

Wzory rachunkowe dla pochodnej

Poniższy rezultat pozwoli nam badać funkcje zadane bardziej skomplikowanymi wzorami.

Twierdzenie V.1 (o własnościach rachunkowych pochodnej).

a. Jeżeli $f, g : D \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne w punkcie $a \in D$, to $f \pm g$ i $f \cdot g$ także są różniczkowalne w a oraz

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a),$$

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a) \qquad \textit{(wzór Leibniza).}$$

Jeżeli ponadto $\forall_{x\in D}\ g(x) \neq 0$, to $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalna w a oraz

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}. \tag{V.2}$$

b. Jeżeli $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ oraz f jest różniczkowalna w $a \in A$ i g jest różniczkowalna w $f(a)$, to $g \circ f$ jest różniczkowalna w a oraz

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

c. Jeżeli $I, Y \subset \mathbb{R}$, I — przedział oraz $f : I \to Y$ jest odwracalna i różniczkowalna, przy czym $\forall_{x\in I}\ f'(x) \neq 0$, to f^{-1} też jest różniczkowalna, oraz dla dowolnego $y \in Y$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Dowód.

Dla $f + g$ teza wynika natychmiast z faktu, że iloraz różnicowy dla $f + g$ i a to odpowiednia suma ilorazów różnicowych. Z kolei wzór Leibniza uzyskamy stosując standardowy „chwyt" podobny do tego, który został użyty w dowodzie twierdzenia o granicy iloczynu ciągów (patrz twierdzenie II.1): dla $x \in D \setminus \{a\}$

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(a) + f(x)g(a) - f(a)g(a)}{x-a} \\ &= f(x)\frac{g(x)-g(a)}{x-a} + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(a)\end{aligned}$$

(trzeba tu też skorzystać z tego, że f jest ciągła w a — patrz fakt ze strony 71).

Przed dowodem części dotyczącej ilorazu, wykażemy punkt b). W tym celu oznaczmy $D_1 := \{x \in A : f(x) \neq f(a)\}$, $D_2 = A \setminus D_1$. Niech $x \in A \setminus \{a\}$ oraz rozważmy iloraz różnicowy dla złożenia

$$i(x) := \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x-a}.$$

Jeżeli $x \in D_2$, to mamy oczywiście $f(x) = f(a)$, skąd $i(x) = 0$. Jeżeli natomiast $x \in D_1$, to

$$i(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x-a}.$$

Załóżmy, że a jest p.s. obydwu zbiorów D_1 i D_2. Ponieważ f jest różniczkowalna w a, zatem jest ciągła w a, więc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. A zatem mamy

$$\lim_{x\to a}(i|_{D_1})(x) = g'(f(a))f'(a) \tag{V.3}$$

oraz

$$\lim_{x\to a}(i|_{D_2})(x) = 0 \tag{V.4}$$

Jednocześnie, skoro a jest p.s. D_2, to

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in D_2}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0.$$

Stąd na mocy twierdzenia o scalaniu (tw. IV.3), z (V.3) i z (V.4) wynika, że $\lim\limits_{x\to a} i(x) = g'(f(a))f'(a)$, co kończy dowód punktu b) w tym przypadku. Jeżeli a jest p.s. tylko jednego spośród zbiorów D_1, D_2, to dowód jest prosty i de facto zawarty w powyższych rozważaniach.

Powróćmy do ilorazu. Zauważmy, że iloraz mozna zapisać przy pomocy mnożenia i składania:

$$\left(\frac{f}{g}\right) = f \cdot (h \circ g),$$

gdzie $h : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $h(x) = \frac{1}{x}$. A zatem w tym przypadku teza wynika natychmiast z udowodnionych już części twierdzenia dotyczących iloczynu i złożenia oraz faktu ze strony 72 pkt. 1 dla $\alpha = -1$.

Udowodnimy c). Możemy założyć, że przedział I jest niezdegenerowany. Ponieważ f jest w szczególności ciągła, zatem Y jest przedziałem (i to niezdegenerowanym — dlaczego?) i f^{-1} też jest ciągła (patrz tw. IV.12). Zatem gdy $y_0 \in Y$, to y_0 — p.s. Y oraz dla $y \in Y\setminus\{y_0\}$, dzięki odwracalności, mamy $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$, skąd

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}} \xrightarrow[y\to y_0]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))},$$

przy czym powyższa zbieżność jest konsekwencją ciągłości f^{-1} w y_0 oraz różniczkowalności f w $f^{-1}(y_0)$. □

Oczywistą konsekwencją twierdzenia V.1 jest następujący wniosek, dotyczący zachowania różniczkowalności przy podstawowych operacjach na funkcjach.

Wniosek. *Suma, iloczyn, iloraz i złożenie (o ile mają sens) funkcji różniczkowalnych jest funkcją różniczkowalną. Funkcja odwrotna do funkcji różniczkowalnej z niezerującą się pochodną, określonej na przedziale jest funkcją różniczkowalną.*

Pochodne dalszych ważnych funkcji

Twierdzenie V.1 wraz z udowodnionym wcześniej faktem pozwala wyliczyć pochodne kolejnych funkcji elementarnych.

Przykład.

1. Niech $1 \neq a > 0$. Na mocy pkt. c) twierdzenia mamy dla $x > 0$

$$(\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln a \cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

w szczególności $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2. Dla x należącego do dziedziny tangensa, na mocy (V.2), mamy

$$(\mathrm{tg})'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}\ ^{65)}\ .$$

65) Stosujemy tu popularną (choć niestety czasem mylącą) konwencję pisania $f^2(x)$ zamiast $(f(x))^2$ dla pewnych funkcji f — szczególnie trygonometrycznych.

3. Podobnie dla x z dziedziny kotangensa

$$(\mathrm{ctg})'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -1 - \mathrm{ctg}^2\, x = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Na zakończenie tego podrozdziału warto podkreślić, że w efekcie udało nam się osiągnąć zapowiadany cel związany z praktyczną „wyliczalnością” wzorów na pochodne wszystkich funkcji elementarnych. Jest to bardzo komfortowa sytuacja — jak przekonamy się w rozdziale VII — całkiem odmienna od tej, jaką będziemy mieli przy *całkowaniu*, czyli operacji odwrotnej (w nieco nieścisłym sensie) do różniczkowania.

3. Pochodna i ekstrema lokalne

Jak wskazywałaby na to geometryczna interpretacja pochodnej związana ze styczną do wykresu, powinny istnieć łatwe do opisania relacje pomiędzy rozmaitymi własnościami funkcji a własnościami jej pochodnej. W następnym podrozdziale przekonamy się, że tak jest np. z monotonicznością funkcji. Tu natomiast przyjrzyjmy się tego typu związkom, które mają miejsce dla innej własności: posiadania przez funkcję *ekstremum lokalnego*.

Maksima i minima lokalne

Definicja. *Niech $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in D$. Funkcja f posiada* ***maksimum (minimum) lokalne*** *w x_0 wtw dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi*

$$f(x_0) = \max(\min)\{f(x) : x \in D, |x - x_0| < \delta\}.$$

Funkcja f posiada ***ekstremum lokalne*** *w x_0 wtw f posiada maksimum lub minimum lokalne w x_0.*

Inaczej mówiąc, funkcja osiąga w x_0 maksimum (minimum) lokalne w sytuacji, gdy dla pewnego $\delta > 0$ jej wartość w x_0 jest wartością największą (najmniejszą) spośród wartości osiąganych w $D_{x_0,\delta}$. Ekstremum lokalne posiada zatem np. funkcja cos w 0, funkcja stała — w każdym punkcie, funkcja $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ zadana wzorem $f(x) = x$ — w punkcie 0 i 1.

Pochodna dla ekstremów wewnątrz dziedziny

Z powyższych przykładów nie widać jednak by fakt posiadania ekstremum lokalnego wpływał w jakiś jednolity sposób na własności pochodnej. Dlatego ograniczymy się do rozważania tylko niektórych punktów dziedziny funkcji. Mówimy mianowicie, że x_0 jest *punktem wewnętrznym* zbioru D wtw $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$ dla pewnego $\delta > 0$.

Twierdzenie V.2 (o ekstremach lokalnych). *Jeżeli f posiada ekstremum lokalne w punkcie wewnętrznym x_0 swojej dziedziny oraz f jest różniczkowalna w x_0* [66]*, to $f'(x_0) = 0$.*

Dowód.
Niech D — dziedzina f i niech $\delta > 0$ będzie takie, że $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset D$ oraz równocześnie $\forall_{x\in(x_0-\delta;x_0+\delta)}\ f(x) \leqslant f(x_0)$ (a zatem zakładamy, że w x_0 jest maksimum lokalne, gdyby było to jednak minimum lokalne, wystarczy rozważać $-f$ zamiast f). W efekcie dla $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ mamy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$, a dla $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ mamy $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Stąd $f'_-(x_0) \geqslant 0$ oraz $f'_+(x_0) \leqslant 0$. Ponieważ jednak $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, zatem $f'(x_0) = 0$. □

[66] Wystarczy zakładać, że f posiada pochodną w x_0.

Klasyczny przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem $f(x) = x^3$, która choć ma w zerze pochodną równą 0, jednak nie posiada w tym punkcje ekstremum, pokazuje, że nie zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia V.2. A zatem twierdzenie to daje tylko pewien warunek konieczny na „posiadanie ekstremum lokalnego w x_0”. Niemniej w wielu zadaniach bywa to bardzo przydatne.

Znajdowanie kresów funkcji — sposób I

Przykład. Znajdziemy kres górny i dolny zbioru wartości funkcji $f : [0; 3] \to \mathbb{R}$ zadanej wzorem

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x.$$

Po pierwsze zauważmy, że f jest ciągła, a zatem osiąga w pewnych punktach z $[0; 3]$ swój kres[67] górny i dolny. W każdym z tych punktów f posiada zatem ekstremum lokalne. Jeśli taki punkt x jest punktem wewnętrznym przedziału, to $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2) = 6(x - 1)(x - 2) = 0$, czyli x to 1 lub 2. W efekcie wiemy, że kresy osiągane są w jednym z punktów 0, 1, 2, 3 (na początku wiedzieliśmy tylko, że są osiągane gdzieś w $[0; 3]$ — zatem zbiór „punktów podejrzanych” udało nam się solidnie zmniejszyć ...). Mamy $f(0) = 0$, $f(1) = 5$, $f(2) = 4$, $f(3) = 9$, a zatem kres górny f to 9, a dolny to 0.

4. Twierdzenia o wartości średniej dla pochodnej

Trzy twierdzenia o wartości średniej

Zapowiadane tu trzy twierdzenia to rezultaty fundamentalne dla rachunku różniczkowego funkcji jednej zmiennej — pozwolą nam one naprawdę skutecznie badać funkcje za pomocą ich pochodnych. Niech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Dwa pierwsze twierdzenia dotyczą jednej funkcji $f : [a; b] \to \mathbb{R}$.

Twierdzenie V.3 (Rolle'a). *Jeżeli f jest ciągła w a i w b, różniczkowalna w każdym punkcie przedziału $(a; b)$* [68] *oraz $f(b) = f(a)$, to*

$$\exists_{c \in (a;b)}\ f'(c) = 0.$$

Teza twierdzenia Rolle'a ma prostą interpretację geometryczną: w pewnym punkcie wewnątrz przedziału styczna do wykresu jest pozioma, co dzięki naszym intuicjom związanym z różniczkowalnością funkcji wydaje się całkiem naturalne przy przyjętym założeniu, że wartości funkcji są równe na końcach. Następne twierdzenie jest uogólnieniem poprzedniego — rezygnujemy w nim z założenia $f(b) = f(a)$.

Twierdzenie V.4 (Lagrange'a). *Jeżeli f jest ciągła w a i w b oraz jest różniczkowalna w $(a; b)$, to*

$$\exists_{c \in (a;b)}\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

To twierdzenie także wydaje się być zgodne z naszą intuicją — styczna do wykresu ma być równoległa do prostej siecznej odpowiadającej argumentom a i b (patrz rys. 9).

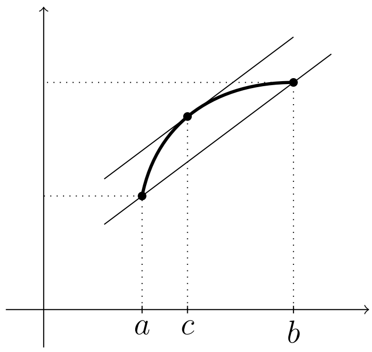
Trzecie twierdzenie dotyczy już dwóch funkcji $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ i jest uogólnieniem obu poprzednich twierdzeń [69] .

---

[67] Kresem górnym (dolnym) funkcji nazywamy odpowiedni kres jej zbioru wartości.

[68] Zamiast „różniczkowalna w każdym punkcie zbioru X” będziemy też mówić *różniczkowalna w X*.

[69] Dlaczego?



Rysunek 9. Styczna dla punktu c jest równoległa do siecznej dla a i b.

Twierdzenie V.5 (Cauchy'ego). *Jeżeli f i g są ciągłe w a i w b oraz różniczkowalne w $(a;b)$, to*

$$\exists_{c\in(a;b)}\ (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

Dowody.
Zacznijmy od twierdzenia Rolle'a. Zauważmy najpierw, że f — ciągła, zatem z twierdzenia Weierstrassa (tw. IV.10) istnieją $m, M \in [a;b]$ takie, że $\forall_{x\in[a;b]}\ f(m) \leqslant f(x) \leqslant f(M)$. Jeżeli $f(m) = f(M)$, to f jest stała, więc $f'(c) = 0$ dla **każdego** $c \in (a;b)$. Jeśli natomiast $f(m) \neq f(M)$, to jedna z liczb m, M musi byś różna od a i od b, gdyż $f(a) = f(b)$. Biorąc tę właśnie liczbę jako c, z twierdzenia V.2 uzyskujemy tezę, gdyż f posiada w szczególności ekstremum lokalne w c i c jest punktem wewnętrznym $[a;b]$.

Teraz pozostałe twierdzenia uzyskamy natychmiast, stosując twierdzenie Rolle'a do odpowiednio dobranych funkcji „pomocniczych" $\tilde{f} : [a;b] \to \mathbb{R}$. Dla twierdzenia Lagrange'a $\tilde{f}$ definiujemy wzorem

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right]$$

Dla twierdzenia Cauchy'ego bierzemy natomiast

$$\tilde{f}(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)),$$

o ile $g(b) \neq g(a)$, a gdy $g(b) = g(a)$ teza wynika natychmiast z twierdzenia Rolle'a

Najprostsze równanie różniczkowe

Przykładem bardzo ważnej konsekwencji twierdzenia Lagrange'a jest następujący wynik dotyczący najprostszego *równania różniczkowego*: $f'(x) = 0$.

Wniosek. *Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$ spełnia $f'(x) = 0$ dla dowolnego $x \in I$, to f jest funkcją stałą.*

Dowód.
Dla dowolnych $x, y \in I$, $x < y$ istnieje $c \in (x;y)$ takie, że $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = 0$, skąd $f(x) = f(y)$. $\square$

Należy jednak **koniecznie** pamiętać, że powyższy wniosek dotyczy wyłącznie funkcji określonych na przedziale.

Monotoniczność a pochodna

Kolejnym ważnym wnioskiem jest kryterium monotoniczności funkcji. Podobnie jak przed chwilą, istotne jest tu, że dziedzina funkcji to przedział.

Twierdzenie V.6 (o monotoniczności). *Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to*

1. *f jest rosnąca (malejąca) wtw $\forall_{x\in I}\ f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$);*
2. *Jeżeli $\forall_{x\in I}\ f'(x) > 0$ (< 0), to f jest ściśle rosnąca (ściśle malejąca).*

Dowód.
Implikacja „$\Rightarrow$" w pkt. 1. to natychmiastowy wniosek z definicji pochodnej, a pozostała część tezy twierdzenia wynika (też natychmiastowo) z tw. Lagrange'a. □

Wspomniany niedawno przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ pokazuje, że w pkt. 2. powyżej implikacja „$\Leftarrow$" **nie zachodzi**, bowiem $f'(0) = 0$.

Kilka nowych funkcji elementarnych —funkcje „arkus..."

Twierdzenie o monotoniczności wykorzystamy teraz do badania monotoniczności funkcji trygonometrycznych (na pewnych przedziałach). Pozwoli nam to zdefiniować kolejne funkcje „elementarne": arcsin, arccos, arctg i arcctg. Rozważmy następujące cztery funkcje, będące obcięciami znanych nam funkcji trygonometrycznych do pewnych podzbiorów ich dziedzin.

$s : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \to [-1; 1]$, $s(x) = \sin x$;

$c : [0; \pi] \to [-1; 1]$, $c(x) = \cos x$;

$t : \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $t(x) = \operatorname{tg} x$;

$ct : (0; \pi) \to \mathbb{R}$, $ct(x) = \operatorname{ctg} x$.

Na mocy twierdzenia V.6 pkt.2 oraz na mocy wzorów z podrozdziału V.2 wszystkie te funkcje są różnowartościowe [70] (s i t są ściśle rosnące, c i ct — ściśle malejące). Korzystając z twierdzenia o własności Darboux (tw. IV.9) oraz badając granice, względnie wartości powyższych funkcji w końcach ich dziedzin uzyskujemy też, że funkcje te są „na". Funkcje arcsin, arccos, arctg i arcctg to funkcje odwrotne do s, c, t i ct. Ich wykresy są zatem symetryczne odpowiednio do wykresów funkcji s, c, t, ct względem prostej o równaniu $y = x$ (patrz rys. 10).

Z twierdzenia V.1 uzyskujemy też różniczkowalność arctg i arcctg oraz różniczkowalność w $(-1; 1)$ arcsin i arccos oraz wzory:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{dla} \quad x \in (-1; 1);$$

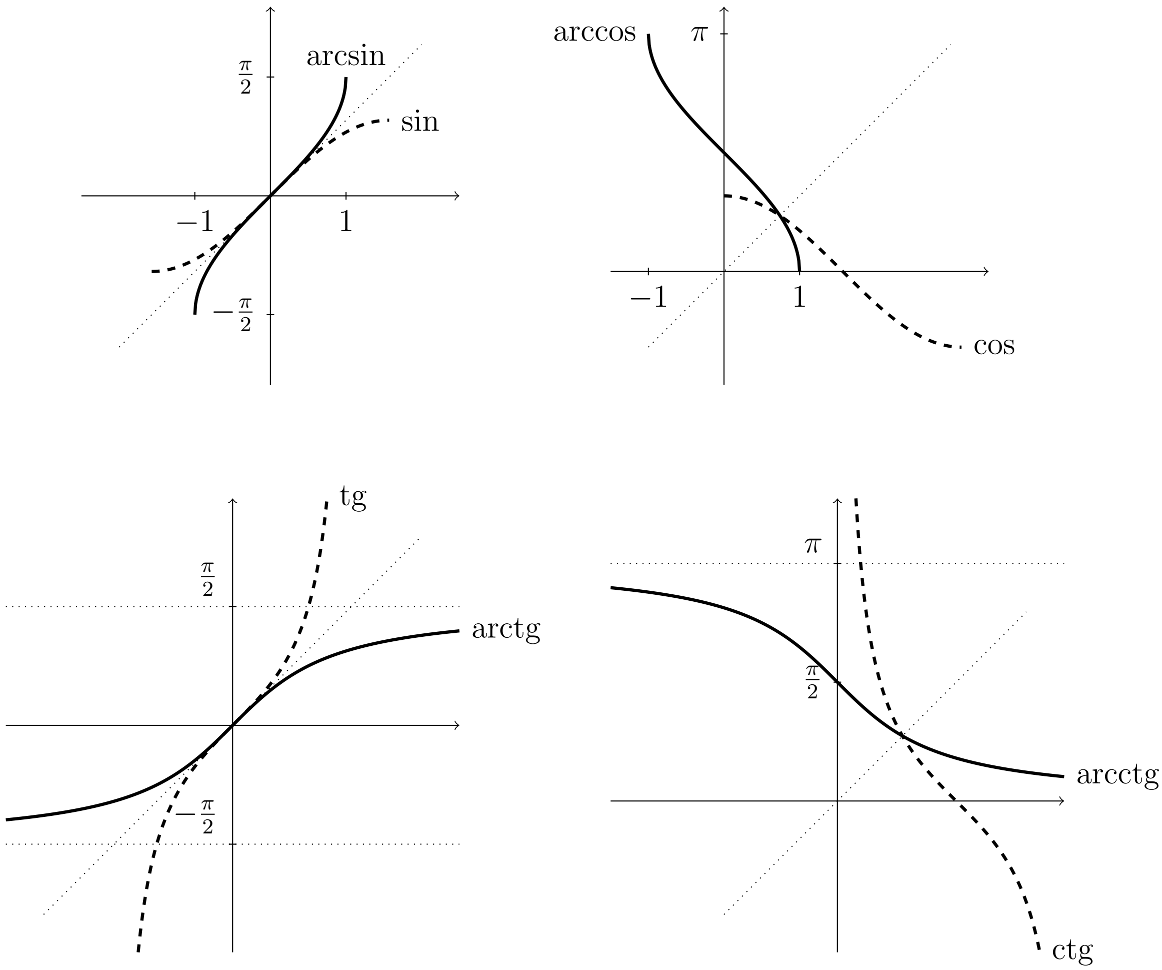
$$\operatorname{arctg}'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \operatorname{arcctg}'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Znajdowanie kresów funkcji — sposób II

Twierdzenie o monotoniczności pozwala też rozwiązywać zadania na znajdowanie kresów funkcji przy użyciu metody alternatywnej do tej użytej w przykładzie ze str. 76 (wykorzystującej twierdzenie o ekstremach lokalnych).

Przykład 2. Rozważmy tę samą funkcję co we wspomnianym wyżej przykładzie. Najpierw znajdziemy możliwie duże przedziały zawarte w dziedzinie f, po obcięciu do których f jest monotoniczna (tzw. *maksymalne przedziały monotoniczności*). Dzięki tw. V.6 sprowadza się to do rozwiązania nierówności $f'(x) \leqslant 0$ lub $f'(x) \geqslant 0$. Ponieważ $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$ zatem

[70] Należy tu czasem użyć też faktu, że pochodna funkcji stałej na pewnym przedziale ma w **całym** tym przedziale pochodną równą 0.



Rysunek 10. Wykresy „fragmentów” funkcji trygonometrycznych i odpowiadających im „arkusów”.

bez trudu uzyskujemy, że na $[1;2]$ f jest malejąca, a na $[0;1]$ i na $[2;3]$ jest rosnąca (choć na sumie: $[0;1] \cup [2;3]$ już **nie** — dlaczego?). Oczywiście kres górny f może być osiągany jedynie w prawym końcu któregoś przedziału, gdzie f rośnie lub lewym takiego, gdzie f maleje, czyli w 1 lub 3. Ponieważ $f(1) = 5 < 9 = f(3)$, więc kres górny to 9. Podobnie kres dolny może być osiągany jedynie w prawym końcu przedziału, gdzie f maleje lub lewym, gdzie rośnie, czyli w 2, 0, 3. A zatem kres dolny to $f(0) = 0$, bo $f(3) = 9 > f(2) = 4 > 0 = f(0)$.

Jak widać z czysto rachunkowego punktu widzenia, ta metoda jest bardzo podobna do metody I. Zamiast równania $f'(x) = 0$ rozwiązujemy nierówność $f'(x) \geqslant 0$ lub $\leqslant 0$, a to na ogół robi się bardzo podobnie. Główna różnica polega na sposobie argumentacji. Metoda II ma oczywiście swoje ograniczenia: cała dziedzina musi dać się rozbić na sumę przedziałów monotoniczności. Ma też jednak pewną wyższość nad metodą I — można ją bez większego trudu uogólnić na przypadek funkcji określonych na innych przedziałach niż tylko domknięte, z czym dla metody I mogą być pewne kłopoty (zachęcam do znalezienia stosownego przykładu).

Dowodzenie nierówności

A oto jeszcze jedno zastosowanie twierdzenia o monotoniczności.

Przykład 3 (dowodzenie nierówności). Wykażemy nierówność

$$\sin x \leqslant x \qquad \text{dla} \ \ x \geqslant 0.$$

Rozważmy $f : [0; +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem $f(x) = \sin x - x$. Mamy

$$f'(x) = \cos x - 1 \leqslant 0$$

dla każdego $x \geqslant 0$. Funkcja f jest więc malejąca — w szczególności $\sin x - x = f(x) \leqslant f(0) = 0$, czyli $\sin x \leqslant x$ dla dowolnego $x \geqslant 0$. A zatem, w dużym skrócie, sprowadziliśmy dowód nierówności dla funkcji do pewnej nierówności na jej pochodną. Całkiem podobnie dowodzimy nierówność

$$\ln(1 + x) \leqslant x \qquad \text{dla } \ x > -1.$$

należy tylko badać monotoniczność funkcji zadanej wzorem $\ln(1 + x) - x$ osobno na lewo i osobno na prawo od 0.

Reguła de l'Hospitala i badanie „nieoznaczoności"

Ważną konsekwencją twierdzenia Cauchy'ego (tw. V.5) jest tzw. reguła de l'Hospitala, pomocna niekiedy przy obliczaniu granic funkcji (choć niestety także często jest nieprzydatna, albo bywa używana wtedy, gdy można się łatwo obyć bez niej...).

Twierdzenie V.7 (reguła de l'Hospitala). *Niech $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$. Załóżmy, że funkcje f i g określone w $(a; b)$ są różniczkowalne oraz że $g'(x) \neq 0$ dla $x \in (a; b)$. Niech $x_0 = a$ lub b. Jeżeli istnieje granica*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{V.5}$$

oraz zachodzi któreś z założeń

wersja 1. *(„$\frac{0}{0}$"):* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

wersja 2. *(„$\frac{?}{\pm\infty}$"):* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ *lub* $-\infty$,

to

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dowód.
Przedstawimy tu tylko dowód dla szczególnego przypadku wersji 1. z dodatkowymi założeniami, że $x_0 = a \in \mathbb{R}$. Funkcje f i g „dookreślimy" w punkcie a biorąc $f(a) = g(a) = 0$ tzn., nieco ściślej, zdefiniujemy $\tilde{f}, \tilde{g} : [a; b) \to \mathbb{R}$ wzorami

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = a \\ f(x) & \text{dla } x \in (a; b), \end{cases} \qquad \tilde{g}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = a \\ g(x) & \text{dla } x \in (a; b). \end{cases}$$

Niech $x \in (a; b)$. Oczywiście $\tilde{f}$ i $\tilde{g}$ są ciągłe w a i w x oraz są różniczkowalne w przedziale $(a; x)$. W szczególności zatem, z twierdzenia Rolle'a, mamy $g(x) \neq 0$ na mocy założenia, że pochodna g' jest niezerowa. Ponadto z tw. Cauchy'ego o wartości średniej, dla pewnego $c_x \in (a; x)$ zachodzi

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{\tilde{g}(x) - \tilde{g}(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{V.6}$$

Skoro $a < c_x < x$, zatem na mocy twierdzenia o trzech funkcjach (tw. IV.4) mamy $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$ i przy tym $c_x \neq a$. Stąd, na mocy (V.6), dzięki istnieniu granicy (V.5), otrzymujemy tezę twierdzenia.[71)] $\square$

Zauważmy jeszcze, że granice pojawiające się w twierdzeniu V.7 to granice de facto jednostronne (choć nie zostały użyte symbole $\lim\limits_{x \to x_0 \pm}$, ale x_0 jest „na końcu" dziedziny). A zatem reguły de l'Hospitala można używać w sposób bezpośredni tylko do granic jednostronnych.

[71)] Patrz też ew.: twierdzenie „o granicy złożenia" z zadania IV.2 do rozdziału IV.

W przypadku granic „obustronnych” trzeba właściwie użyć jej dwukrotnie — dla „każdej ze stron” osobno, choć zazwyczaj rachunki dla obu stron są analogiczne. I jeszcze jedna sprawa. Stosując regułę de l'Hospitala **nie można** zapomnieć, że istnienie granicy (V.5) jest jednym z założeń twierdzenia!

Jak widać z samego sformułowania, reguła de l'Hospitala nadaje się bezpośrednio do badania „nieoznaczoności” typu „$\frac{0}{0}$” i „$\frac{\infty}{\infty}$”. Często jednak, po odpowiednich przekształceniach algebraicznych, do którejś z tych „nieoznaczoności” daje się sprowadzić także „nioznaczoności” inne.

Przykład („nieoznaczoność” typu „$1^{\pm\infty}$”). Znajdziemy $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$. Ponieważ granica podstawy, tj. cos równa jest 1, a granica wykładnika co prawda nie istnieje, ale istnieją granice jednostronne równe odpowiednio $\pm\infty$. Te dwie sytuacje określamy mianem *nieoznaczoności*[72] *typu* „$1^{+\infty}$” lub odpowiednio „$1^{-\infty}$”. Dla $0 \neq x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ mamy:

$$(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^{\ln((\cos x)^{\frac{1}{x}})} = e^{\frac{1}{x}\ln\cos x}. \tag{V.7}$$

Policzmy więc najpierw $\lim_{x\to 0\pm} \dfrac{\ln\cos x}{x}$ — użyjemy regułę de l'Hospitala (wersję 1) mamy bowiem $\lim_{x\to 0\pm} x = \lim_{x\to 0\pm} \ln\cos x = \ln 1 = 0$. Ponieważ iloraz pochodnych to

$$\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1} = -\operatorname{tg} x$$

i posiada on (obustronną) granicę w 0 równą 0, zatem także $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{x} = 0$, stąd, dzięki ciągłości funkcji wykładniczej, na mocy (V.7), mamy

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

5. Wyższe pochodne

Rekurencyjna definicja n-tej pochodnej

Będziemy tu mówili o pochodnych n-tego rzędu (inaczej: n-tych pochodnych), gdzie $n \in \mathbb{N}_0$. Dla $n = 0$ n-ta pochodna funkcji f to po prostu sama funkcja f — określona jest więc ona w każdym punkcie dziedziny. Z kolei dla $n = 1$ *pierwsza pochodna* f w punkcie x to po prostu pochodna, czyli $f'(x)$, o ile istnieje. Oznaczmy więc $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$. Ogólnie, n-tą pochodną funkcji f w punkcie x_0 będziemy oznaczać przez $f^{(n)}(x_0)$. Zdefiniujemy ją przy użyciu rekursji „po n”, startując np. od przyjętej już definicji dla $n = 0$. Mówiąc niezbyt dokładnie, $(n+1)$-sza pochodna będzie po prostu pochodną n-tej pochodnej, musimy to jednak doprecyzować. Dla zbioru $D \subset \mathbb{R}$, punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz $\delta > 0$ przyjmijmy (a właściwie przypomnijmy — patrz str. 70) oznaczenie

$$D_{x_0,\delta} := D \cap (x_0 - \delta; x_0 + \delta),$$

które przyda nam się poniżej.

Definicja (przejście od n do $n+1$ w definicji n-tej pochodnej). *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$. Jeżeli $n \in \mathbb{N}_0$, to $f^{(n+1)}(x_0)$* ***istnieje*** *wtw dla pewnego $\delta > 0$ dla dowolnego $x \in D_{x_0,\delta}$ $f^{(n)}(x)$ istnieje i jest skończona oraz funkcja $D_{x_0,\delta} \ni x \rightsquigarrow f^{(n)}(x)$ posiada pochodną w x_0* [73]*. W takiej sytuacji tę pochodną w x_0 oznaczamy $f^{(n+1)}(x_0)$ i nazywamy $n+1$–**szą pochodną** f **w** x_0 (ew. pochodną $n+1$-szego rzędu w x_0).*

---

[72] Ściślej, słowo „nieoznaczoność” wyraża niemożność sensownego zdefiniowania odpowiedniego działania — w tym wypadku potęgowania „$1^{+\infty}$” ani „$1^{-\infty}$”.

[73] W szczególności zatem x_0 musi być punktem skupienia i elementem D.

Będziemy także mówić, że f jest *n–krotnie różniczkowalna w (punkcie) x_0* wtw $f^{(n)}(x_0)$ istnieje i jest **skończona** oraz, że f jest *n–krotnie różniczkowalna* wtw f jest n–krotnie różniczkowalna w x dla dowolnego x z dziedziny funkcji f. W tej ostatniej sytuacji funkcję $D \ni x \rightsquigarrow f^{(n)}(x)$ nazywamy *n-tą pochodną* f i (oczywiście) oznaczamy przez $f^{(n)}$. Czasami na $f^{(n)}$ używa się też tradycyjnego oznaczenia $\frac{d^n f}{dx^n}$.

Zwróćmy uwagę na pewną subtelność związaną z definicją wyższych pochodnych. W przypadku 1–szej pochodnej, aby mogła być ona określona w punkcie x_0, z punktu widzenia własności samej dziedziny wystarczało w zasadzie by x_0 był jej elementem oraz punktem skupienia. Mógł więc to być np. punkt $x_0 = 0$ dziedziny $D = \{-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup [0; 1]$. Jednak już dla $n = 2$ podobna sytuacja nie jest możliwa, bowiem w żadnym z punktów postaci $-\frac{1}{n}$ pierwsza pochodna funkcji określonej na D nie istnieje (bo punkty te nie są punktami skupienia D). Zatem zgodnie z definicją, $f^{(2)}(0)$ nie istnieje, niezależnie od tego jak „regularną” funkcję f rozważamy na tej dziedzinie.

Wzory rachunkowe dla wyższych pochodnych i wielokrotne różniczkowanie funkcji elementarnych

Dzięki znalezionym już przez nas wzorom na pierwsze pochodne możemy teraz bez trudu (np. indukcyjnie) dowieść, że wiele spośród funkcji elementarnych to funkcje n-krotnie różniczkowalne dla **dowolnego** n. Tak jest np. z funkcjami: wykładniczymi, potęgowymi (określonymi na $\mathbb{R}_+$), wielomianami (określonymi na $\mathbb{R}$), logarytmami, sin oraz cos. Co więcej, katalog takich funkcji można bardzo rozszerzyć dzięki poniższemu rezultatowi będącemu wnioskiem (choć może nie we wszystkich punktach trywialnym[74]) z twierdzenia o własnościach rachunkowych pochodnej (tw. V.1).

Twierdzenie V.8 (własności rachunkowe n-krotnego różniczkowania). *Suma, iloczyn i iloraz funkcji f i g różniczkowalnych n-krotnie w punkcie x_0 są funkcjami n-krotnie różniczkowalnymi w x_0 oraz zachodzi*

1. $(f + g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$, $(\alpha \cdot f)^{(n)}(x_0) = \alpha \cdot f^{(n)}(x_0)$, *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. *(wzór Leibniza rzędu n)* $(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0)$.

Złożenie $g \circ f$ funkcji f różniczkowalnej n-krotnie w x_0 z funkcją g różniczkowalną n-krotnie w $f(x_0)$ jest n-krotnie różniczkowalne w x_0.

Jeżeli I — przedział oraz $f : I \to f(I) \subset \mathbb{R}$ jest odwracalna i n-krotnie różniczkowalna oraz $f'(x) \neq 0$ dla dowolnego $x \in I$, to f^{-1} jest n-krotnie różniczkowalna. **B.D.**

Przy użyciu tego twierdzenia otrzymujemy m. in. n-krotną różniczkowalność dla dowolnego n funkcji: tg, ctg, arctg, arcctg, a także funkcji arcsin i arccos obciętych do przedziału $(-1; 1)$.

Dziwić może nieco brak w powyższym twierdzeniu wzorów na n-tą pochodną ilorazu oraz złożenia. Dla ilorazu wzór taki można by jeszcze ewentualnie wypisać, choć byłby on dość skomplikowany. Natomiast wzór na n-tą pochodną złożenia jest już tak makabrycznie skomplikowany, że zapisanie go w zwięzłej formie jest nie lada sztuką! Zachęcam do wypisania go tylko dla $n = 3$ (i sądzę, że to wystarczy, by powyższą opinię podzielić...).

Klasy C^n i C^∞

Na koniec tego podrozdziału — dwa często spotykane oznaczenia: klasa $C^n(D)$ to zbiór wszystkich tych funkcji określonych na D, które są n-krotnie różniczkowalne oraz ich n-ta pochodna $f^{(n)}$ jest funkcją ciągłą, a klasa $C^\infty(D)$ — tych, które są n-krotnie różniczkowalne dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Oczywiście $C^\infty(D) \subset C^n(D)$ przy dowolnym $n \in \mathbb{N}$ (dlaczego?). Używa się też sformułowania: f **jest klasy** C^n (odp. **klasy** C^∞). Zamiast C^0 piszemy na ogół C, czyli $C(D)$, to po prostu zbiór wszystkich ciągłych funkcji $f : D \to \mathbb{R}$.

---

[74] Choć osiągalnym przy tak już dalece rozwiniętej przez nas teorii — patrz — Zadania.

6. Druga pochodna i wypukłość

Spośród n-tych pochodnych dwie — mianowicie pierwsza i druga wyróżniają się ze względu na ich liczne zastosowania i czytelną interpretację geometryczną. O pierwszej już powiedzieliśmy nieco. Teraz w formie bardzo skrótowej zajmiemy się drugą pochodną. Najpopularniejsze zastosowanie ma ona chyba w fizyce — np. określa wartość przyśpieszenia (podczas gdy pierwsza — prędkości) punktu poruszającego się „jednowymiarowo", ale też każdej ze współrzędnych punktu poruszającego w wielu wymiarach (wtedy różniczkowana funkcja określa odpowiednią współrzędną położenia punktu, a zmienna to czas).

Funkcje wypukłe i wklęsłe

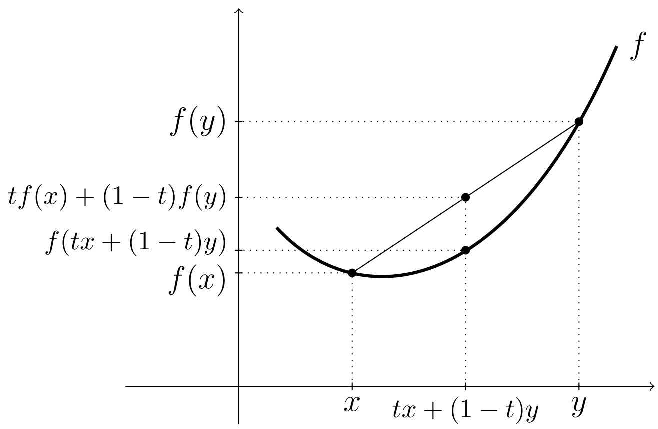
Znak pierwszej pochodnej ma ścisły związek z dość „geometryczną" własnością funkcji jaką jest monotoniczność. Tymczasem, jak zaraz zobaczymy, znak drugiej pochodnej wiąże się z inną, też bardzo geometryczną własnością — mianowicie z wypukłością. Przypomnijmy tu, że podzbiór $A \subset \mathbb{R}^k$ [75] jest *wypukły* wtw dla dowolnych $a, b \in A$ odcinek łączący a i b zawarty jest w A. Zdefiniujmy pojęcie *wypukłości funkcji* $f : I \to \mathbb{R}$ [76], gdzie I — przedział (I oznacza przedział w całym tym podrozdziale). Niech N_f oznacza zbiór punktów położonych „nieostro" **nad** wykresem f, tzn. $N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \geqslant f(x)\}$.

Definicja. *$f : I \to \mathbb{R}$ jest* ***wypukła*** *wtw N_f jest zbiorem wypukłym; f jest* ***wklęsła*** *wtw $(-f)$ jest wypukła.*

Uwaga. Oczywiście, w definicji wypukłości funkcji wystarczy zakładać, że każda *cięciwa wykresu*, tzn. odcinek łączący dwa punkty wykresu, zawiera się w N_f, a zatem zapisując ten fakt w formie analitycznej uzyskujemy, że f jest wypukła wtw

$$\forall_{x,y \in I}\ \forall_{t \in [0;1]}\ f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) \tag{V.8}$$

(patrz rys. 11).



Rysunek 11. Przy wypukłości cięciwa leży nad wykresem.

Analogiczny warunek, tyle że z nierównością w stronę przeciwną, równoważny jest wklęsłości funkcji.

[75] Tu standardowo oznaczamy przez X^k iloczyn kartezjański k-egzemplarzy zbioru X.

[76] Uwaga! Z formalnego punktu widzenia taka funkcja to to samo co jej wykres, a więc pewien podzbiór $\mathbb{R}^2$. Jednak wypukłość f jako takiego właśnie zbioru jest zupełnie **czym innym** niż wypukłość f jako funkcji, o czym przekonamy się za chwilę.

Nierówność Jensena

Warunek (V.8), wyrażający wypukłość funkcji, można łatwo uogólnić do warunku dotyczącego n punktów z odcinka I zamiast tylko dwóch punktów x i y.

Fakt (nierówność Jensena). *Niech $n \in \mathbb{N}_2$. Funkcja $f : I \to \mathbb{R}$ jest wypukła wtw*

$$\forall_{x_1,\ldots,x_n \in I} \; \forall_{\substack{t_1,\ldots,t_n \in [0;1], \\ t_1+\ldots+t_n=1}} \; f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i). \tag{V.9}$$

Dowód.
„$\Longleftarrow$" — oczywisty z uwagi powyżej (wystarczy rozważyć $t_1 = t$, $t_2 = 1 - t$, $t_3 = \ldots = t_n = 0$ oraz $x_1 = x$, $x_2 = y$, a pozostałe x_i — dowolne),
„$\Longrightarrow$" — przy założeniu wypukłości łatwo wykazać indukcyjnie, że dla każdego $n \in \mathbb{N}_2$ zachodzi (V.9). W dowodzie „kroku indukcyjnego" wygodnie jest użyć (V.8). $\square$

Jeżeli zastosować nierówność Jensena do pewnych odpowiednio dobranych funkcji f (oraz odpowiednich x_i, t_i), można uzyskać wiele ciekawych, ważnych i znanych nierówności. Nieco przykładów zostało umieszczonych w zadaniach.

Wypukłość a własności różniczkowe funkcji

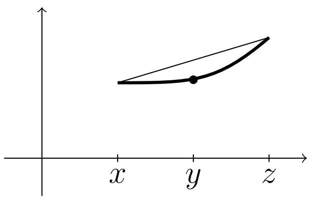
Zasadnicze pytania, na które należałoby odpowiedzieć zanim zacznie się stosować nierówność Jensena, są następujące:

> *Jak rozpoznać, czy dana funkcja jest wypukła? Czy można to zrobić prościej niż poprzez bezpośrednie sprawdzenie warunku* (V.8)*?*

Okazuje się, że w przypadku tych funkcji, dla których umiemy „wyliczyć" pochodną odpowiedź jest nietrudna.

Twierdzenie V.9. *Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to f jest wypukła (wklęsła) wtw f' jest rosnąca (malejąca).*

Dowód.
W oparciu o (V.8) nietrudno wykazać charakteryzację wypukłości w terminach „wzrostu" ilorazów różnicowych zawartą w poniższym lemacie (patrz rys. 12).



Rysunek 12. Prawa cięciwa jest bardziej (nie mniej) stroma od lewej.

Lemat. *Funkcja f jest wypukła wtw dla dowolnych x, y, $z \in I$ takich, że $x < y < z$ zachodzi*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}.$$

B.D.

Tezę twierdzenia łatwo uzyskać teraz z lematu, wykorzystując definicję pochodnej jako granicy ilorazu różnicowego oraz twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (tw. V.4). $\square$

To twierdzenie pozwala nam uzyskać wypukłość bądź wklęsłość wielu funkcji elementarnych obciętych do odpowiednich przedziałów. Np. funkcje wykładnicze są wypukłe, $\log_a$ jest wklęsły przy $a > 1$ oraz wypukły dla $0 < a < 1$, funkcja potęgowa (określona na $[0; +\infty)$) z wykładnikiem $\alpha \geqslant 1$ jest wypukła, a z wykładnikiem $\alpha \in [0; 1]$ — wklęsła[77)] , sinus obcięty do $[0; \pi]$ jest wklęsły.

Gdy funkcja jest dwukrotnie różniczkowalna, charakteryzacja wypukłości sprowadza się na mocy twierdzenia V.9 jedynie do badania znaku drugiej pochodnej. Uwaga: zamiast $f^{(2)}(x)$ używa się często oznaczenia

$$f''(x).$$

Wniosek. *Jeżeli $f : I \to \mathbb{R}$ jest dwukrotnie różniczkowalna, to f jest wypukła (wklęsła) wtw*

$$\forall_{x \in I}\ f''(x) \geqslant 0\ (\leqslant 0).$$

7. Wzór Taylora

Pierwsza pochodna i przybliżenie funkcją afiniczną

Gdy znamy wartość funkcji f w punkcie x_0 i wiemy, że f jest w tym punkcie ciągła, to możemy powiedzieć, że mamy jakąś informację o wartościach tej funkcji f w punktach „bliskich x_0" — wiemy mianowicie, że są one „bliskie $f(x_0)$". Ściślej, mamy

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x), \qquad \text{gdzie} \quad R_0(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Gdy założymy nieco więcej — różniczkowalność w x_0, to fakt, że $f'(x_0)$ jest odpowiednią granicą ilorazu różnicowego można równoważnie zapisać w taki sposób:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + R_1(x), \qquad \text{gdzie} \quad \frac{R_1(x)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Oczywiście mamy w szczególności także $R_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, ale informacja, że $\frac{R_1(x)}{x-x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ jest znacznie mocniejsza (dlaczego?). Inaczej mówiąc, wydaje się, że przybliżenie f „w pobliżu x_0" przez funkcję afiniczną zadaną wzorem

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

którą znamy, o ile tylko znamy wartości $f(x_0)$ i $f'(x_0)$, jest „lepsze" niż poprzednie przybliżenie funkcją stale równą $f(x_0)$.

Wielomian i reszta Taylora

Powstaje naturalne pytanie, czy znając $f^{(k)}(x_0)$ dla $0 \leqslant k \leqslant n$ będziemy w stanie uzyskać coraz lepsze przybliżenia, w podobnym rozumieniu. Okazuje się, że odpowiedź jest nietrudna. Funkcja przybliżająca f „w pobliżu x_0" jest tym razem pewnym wielomianem wyznaczonym przez liczby $f(x_0)$,...,$f^{(n)}(x_0)$. Nazywamy go *wielomianem Taylora*, a dokładniej, n-tym *wielomianem Taylora funkcji f w punkcie x_0* i oznaczamy przez T_{n,f,x_0}, albo krócej przez T_n, gdy f i x_0 są ustalone. Wielomian $T_n : D \to \mathbb{R}$, gdzie D — dziedzina f, zadany jest wzorem[78)] :

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{V.10}$$

[77)] Co prawda, gdy $\alpha < 1$, to brak różniczkowalności w 0, ale wtedy mamy wypukłość po obcięciu funkcji do $(0; +\infty)$, skąd na całej dziedzinie łatwo (jak?) uzyskać wypukłość dzięki ciągłości (patrz też zadanie V.42).
[78)] T_n można też traktować jako funkcję określoną np. na całym $\mathbb{R}$.

W szczególności, uprzednio wypisana przez nas funkcja przybliżająca funkcję f była w obu przypadkach $n = 0$ i $n = 1$ równa właśnie odpowiedniemu T_n. Tak jak już zapowiedzieliśmy, wielomian T_n „dość dokładnie" przybliża f „w pobliżu" x_0. I czasami właśnie taka całkiem nieścisła informacja

$$„f \approx T_n"$$

nazywana bywa *wzorem Taylora* („$\approx$" to: „równa się w przybliżeniu"). Inny zapis tego samego, to

$$f = T_n + R_n, \tag{V.11}$$

gdzie R_n — „małe w pobliżu x_0". Oczywiście sama formuła (V.11) nie jest żadnym matematycznym twierdzeniem — to nic więcej niż po prostu definicja funkcji R_n, tzn.

$$R_n := f - T_n,$$

gdzie T_n zadane jest przez (V.10) (gdy potrzeba zaznaczyć zależność od f i x_0 piszemy R_{n,f,x_0} zamiast R_n). Funkcję R_n nazywa się *n-tą resztą Taylora* (funkcji f w punkcie x_0). Istnieje wiele uściśleń w.w. wzoru Taylora, mogących w jakimś sensie wyrażać „małość" reszty Taylora. Poznamy tu dwa z nich.

Postać Peano reszty Taylora

Pierwsze z zapowiadanych twierdzeń to twierdzenie Peano, będące uogólnieniem przytoczonych na wstępie wyników dla $n = 0$ i $n = 1$.

Twierdzenie V.10 (Peano o postaci reszty Taylora). *Jeżeli f jest n-krotnie różniczkowalna w x_0 oraz x_0 ma otoczenie w dziedzinie f będące przedziałem*[79] *, to*

$$\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0.$$

Dowód.
Stosując $(n-1)$-krotnie regułę de l'Hospitala sprowadzamy badanie granicy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x - x_0)^n}$ do badania granicy $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{n!}\left[\dfrac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} - f^{(n)}(x_0)\right]$ [80] , równej 0 na mocy definicji $f^{(n)}(x_0)$. □

Tezę twierdzenia Peano wygodniej niekiedy zapisać w postaci takiej:

$$f(x) = T_n(x) + (x - x_0)^n \cdot r(x), \quad \text{gdzie } \lim_{x\to x_0} r(x) = 0.$$

Bardzo często to twierdzenie jest znacznie zgrabniejszym narzędziem do obliczania granic funkcji niż sama reguła de l'Hospitala. Pozwala ono bowiem de facto zastąpić wielomianem nawet dość skomplikowaną funkcję (zastępujemy odpowiednio dobranym wielomianem Taylora tej funkcji + „nieistotną" resztą). Problem sprowadza się więc najczęściej do trywialnego zadania polegającego na obliczeniu granicy ilorazu dwóch wielomianów. Jednocześnie stosując tę metodę, chyba lepiej „czujemy" rozwiązanie niż wtedy, gdy używamy nieco „magicznej" reguły de l'Hospitala.

Przykład. Obliczmy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2}.$$

[79] Patrz uwaga 3 str.70.
[80] Zachęcam do samodzielnego szczegółowego prześledzenia.

Weźmy $f(x) := \sqrt{1+x}$, $x > -1$. Mamy $f(0) = 1$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = -\frac{1}{4}$. Stąd dla $x_0 = 0$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

i z twierdzenia Peano $\sqrt{1+x} = T_2(x) + x^2 \cdot r(x)$, gdzie $r(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Stąd

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{-\frac{1}{8}x^2}{x^2} + r(x) \right) = -\frac{1}{8}.$$

Notacja „o-małe"

Warto jeszcze wspomnieć w kontekście tezy twierdzenia Peano o tzw. notacji *o-małe* często stosowanej dla skrócenia zapisu rozmaitych formuł, czy rachunków. Mianowicie napis „$f(x) = o(g(x))$ przy $x \to x_0$" oznacza po prostu, że $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Często, gdy wiadomo o jakie chodzi x_0, pisze się tylko „$f(x) = o(g(x))$". Co więcej, używany również bywa zapis typu „$u(x) = h(x)+o(g(x))$", oznaczający to samo, co „$u(x)-h(x) = o(g(x))$". Np. tezę twierdzenia Peano można by zapisać:

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n).$$

Taka notacja bywa wygodna, ale należy zachować ostrożność. Np. dwa „o" nie muszą być sobie równe, choć są zapisane tym samym symbolem. A zatem z tego, że $e^x - 1 - \frac{x^2}{2} = x + o(x^2)$ oraz $\sin x = x + o(x^2)$ **nie wynika**, że $\sin x = e^x - 1 - \frac{x^2}{2}$. Dlatego dla początkujących polecam jednak raczej całkiem ścisły zapis w stylu: $\sin x = x + r(x) \cdot x^2$, gdzie $r(x)$ ma granicę 0 w 0. Dla różnych funkcji, a co za tym idzie — różnych „r-ów", można wtedy, dla ich odróżnienia, zastosować numerację r_1, r_2 itd.

Postać Lagrange'a reszty Taylora

Zapowiadana, druga wersja wzoru Taylora umożliwi znacznie konkretniejsze szacowanie „błędu" (czyli reszty Taylora) pomiędzy funkcją a jej wielomianem Taylora. Takie szacowanie nie daje się uzyskać w oparciu o twierdzenie Peano, zawierające tylko informację o pewnej granicy związanej z tym błędem. Niestety jednak nie dostaniemy nic „za darmo". Będziemy musieli przyjąć mocniejsze założenia o funkcji f.

Twierdzenie V.11 (Lagrange'a o postaci reszty Taylora). *Jeżeli f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w przedziale $(x_0?x)$ oraz n-ta pochodna f jest ciągła w punktach x_0 i x, to istnieje $c \in (x_0?x)$ taki, że*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{V.12}$$

Dowód.
Rozważmy dwie pomocnicze funkcje $\varphi, \psi\colon [x_0?x] \to \mathbb{R}$ zadane wzorami (t jest zmienną):

$$\varphi(t) := f(x) - T_{n,f,t}(x), \quad \psi(t) := (x - t)^{n+1}.$$

Do tych funkcji zastosujemy twierdzenie Cauchy'ego (tw. V.5). Istnieje zatem $c \in (x_0?x)$ takie, że

$$(\varphi(x_0) - \varphi(x)) \cdot \psi'(c) = (\psi(x_0) - \psi(x)) \cdot \varphi'(c). \tag{V.13}$$

Uwzględniając teraz, że dla $t \in (x_0?x)$

$$\varphi'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n, \quad \psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$$

(rachunki prowadzące do wzoru na $\varphi'(t)$ pozostawiam Państwu...) oraz

$$\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \psi(x) = 0,$$

$$\varphi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) = R_n(x), \quad \psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1},$$

po podstawieniu do (V.13) otrzymujemy (V.12). □

Uwagi.

1. Nieco może zawiłe założenia twierdzenia można oczywiście nieco wzmocnić i zakładać po prostu, że f jest $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w $[x_0?x]$. Otrzymamy nieco słabsze twierdzenie, ale na ogół wystarczające do typowych zastosowań.

2. Gdy $n = 0$, to $T_0(x) = f(x_0)$, więc uzyskujemy dokładnie twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (tw. V.4).

3. Należy pamiętać o tym, że liczba c z tezy twierdzenia, nie jest żadną „uniwersalną" stałą, ale może zależeć dosłownie od wszystkiego, tj. od f, x_0, x oraz n.

Znajdowanie przybliżeń i szacowanie błędu

Najbardziej chyba typowy przykład zastosowania twierdzenia Lagrange'a o postaci reszty Taylora to znajdowanie przybliżeń wymiernych rozmaitych liczb z kontrolą wielkości błędu przybliżenia.

Przykład. Dotąd niezbyt wiele wiedzieliśmy na temat wartości liczby e. Właściwie jedynie, że $2 < e < 3$ (choć dzięki definicji e oszacowanie z dołu łatwo można było poprawić). Obecnie bez trudu możemy np. wykazać, że „$e = 2,7...$"[81] . Rozważmy bowiem $f = \exp$ oraz $x_0 = 0$, $x = 1$. Mamy $e = f(1) = T_n(1) + R_n(1)$, gdzie $T_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp(0)}{k!} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ oraz z twierdzenia V.11 $R_n(1) = \frac{\exp(c_n)}{(n+1)!}$ dla pewnego $c_n \in (0;1)$. W szczególności zatem $0 < R_n(1) < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$. Biorąc zatem $n = 5$ uzyskujemy przybliżenie

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = 2,71(6)$$ [82]

z błędem mniejszym niż $\frac{3}{6!} = \frac{3}{720} = \frac{1}{240}$, a zatem, zgodnie z obietnicą, „$e = 2,7...$". Przy odrobinie większej pracowitości możemy też uzyskać „$e = 2,71...$", co pozostawiam Czytelnikom.

Rozwinięcia w szeregi Taylora

Inne ważne zastosowanie twierdzenia V.11 to rozwijanie pewnych funkcji w szeregi potęgowe, o czym wspominaliśmy już nieco w podrozdziale IV.4. Niech f będzie funkcją różniczkowalną dowolną liczbę razy w punkcie x_0. Wówczas szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

ma poprawnie zdefiniowane współczynniki. Nazywamy go *szeregiem Taylora funkcji f* o środku w x_0 (a w szczególnym przypadku $x_0 = 0$ używa się też nazwy *szereg Maclaurina*). Naturalne pytanie:

---

[81] Te „..." oznaczają jakieś dalsze cyfry w *rozwinięciu dziesiętnym*, którego nie definiowaliśmy dotąd i niestety nie zdefiniujemy (z braku czasu). Zachęcam do samodzielnego zdefiniowania i wykazania istnienia dla dowolnej liczby rzeczywistej.

[82] Zapis dziesiętny „z okresem" (x) uważam (z konieczności) za znany.

czy szereg ten jest zbieżny do $f(x)$?

nie ma oczywiście jednoznacznej ogólnej odpowiedzi. W każdym razie często, **nie jest prawdą**, że

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

dla wszystkich x, mimo iż oczekiwalibyśmy być może, że taka równość zachodzi. Odpowiedź pozytywna jest na pewno dla $x = x_0$, i czasem (tj. dla pewnych f) **tylko** wtedy! Dla pewnych „dobrych" funkcji równość zachodzi dla wszystkich x z pewnego otoczenia $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ punktu x_0 ($\delta > 0$ oczywiście) — mówimy wtedy, że f jest *analityczna* w otoczeniu punktu x_0. Pytanie powyższe może być trudniejsze niż pytanie o samą zbieżność powyższego szeregu (którym zajmowaliśmy się w podrozdziale IV.4.) — tu ważna jest nie tylko zbieżność, ale również to, by suma była równa właśnie $f(x)$.

Przykładami „w pełni pozytywnymi", tj. takimi, dla których zbieżność szeregu Taylora o środku x_0 do $f(x)$ ma miejsce przy każdym $x \in \mathbb{R}$ są między innymi funkcje exp, sin, cos przy $x_0 = 0$. Dla wymienionych funkcji dowód tego faktu jest dość oczywisty, bowiem jak łatwo wyliczyć, szeregi Taylora, które otrzymamy w tych przykładach to znane nam już dobrze wcześniej (z rozdziału IV) szeregi potęgowe dające rozwinięcia funkcji exp, sin i cos. Nie jest to wcale sprawa przypadku — jest to związane z następującym ogólnym wynikiem.

Fakt. *Jeżeli f posiada rozwinięcie w szereg potęgowy o środku w x_0 zbieżne do $f(x)$ dla $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ przy pewnym $r > 0$, to tym szeregiem potęgowym jest szereg Taylora funkcji f o środku w x_0.*

Na razie pominiemy dowód — wrócimy do niego jeszcze w następnym rozdziale.

W szczególności z powyższego faktu wynika różniczkowalność w x_0 dowolną liczbę razy funkcji zadanej szeregiem potęgowym o środku w x_0. Jest to też wzmocnienie faktu dotyczącego jednoznaczności rozwijania funkcji w szereg potęgowy — patrz np. zadanie IV.21. Jeżeli więc znamy już jakieś rozwinięcie funkcji f w szereg potęgowy, to odpowiedź na zadane wcześniej pytanie o zbieżność szeregu Taylora do $f(x)$ jest pozytywna (dla odpowiednich x). Tak jest zatem np. dla funkcji $f(x) := \frac{1}{1-x}$ dla $x \in (-1;1)$ bo $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ dla takich x (szereg geometryczny).

Uogólniony wzór dwumianowy Newtona

Na zakończenie naszych rozważań dotyczących wzoru Taylora zajmijmy się jeszcze jedną z pominiętych tu dotąd funkcji — mianowicie funkcją potęgową z dowolnym wykładnikiem $\alpha \in \mathbb{R}$ (powyżej mieliśmy jedynie $\alpha = -1$), dla której nie znamy jak dotąd żadnego ogólnego rozwinięcia w szereg potęgowy. Pewne informacje o takim rozwinięciu uzyskamy właśnie z twierdzenia Lagrange'a o postaci reszty Taylora.

Przykład. Wzór

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

w którym $\alpha \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, to klasyczny wzór Newtona, a własciwie jego szczególny przypadek, z którego jednak bez trudu można wyprowadzić postać pełną (dla potęgi sumy dwóch dowolnych liczb — patrz Fakt ze strony 12). Rozważmy teraz dowolne $\alpha \in \mathbb{R}$. Niech $f\colon (-1;+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^\alpha$. Łatwo wyliczyć, że $f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))$, a zatem szereg Taylora dla f o środku w 0 ma postać

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

gdzie

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha \cdot \ldots \cdot (\alpha - (n-1))}{n!}$$

jest uogólnieniem znanego symbolu Newtona na przypadek dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ (dla $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant n$ obie definicje pokrywają się oczywiście). Nietrudno tu wykazać w oparciu o twierdzenie V.11, że gdy $0 < x < 1$, to $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (szczegóły zostawiam Czytelnikom — patrz zadanie V.29). Niestety informacje zawarte w tym twierdzeniu okazują się za słabe, by przy dowolnym α wykazać tego typu zbieżność dla $-1 < x < 0$, choć zbieżność taka także ma miejsce. Potrzebne są tu jednak inne metody, o których tu mówić nie będziemy. Na mocy definicji reszty Taylora R_n uzyskana tu (częściowo) zbieżność reszt do zera oznacza po prostu, że

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \quad \text{dla } |x| < 1.$$

Oczywiście, gdy $\alpha \in \mathbb{N}$, to powyższa suma „kończy się” de facto na $n = \alpha$, bowiem wtedy przy $n \geqslant \alpha + 1$ zachodzi $\binom{\alpha}{n} = 0$, a zatem uzyskany wzór jest więc uogólnieniem przytoczonego na początku klasycznego wzoru Newtona.

Zadania do Rozdziału V

$\forall$ [83] 1. Znajdź wzory na pochodne funkcji zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^x dla $x > 0$;

(b) $x^{(x^7)}$ dla $x > 0$;

(c) $(x^x)^7$ dla $x > 0$;

(d) $\log_{(2+x^2)}(1 + x^2)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

$\forall$ [84] 2. Rozważamy tzw. *funkcje hiperboliczne* sinh, cosh i tgh będące swego rodzaju analogami funkcji trygonometrycznych, zadane wzorami:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Wykaż wzory:

(a) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$;

(b) $\sinh' = \cosh$;

(c) $\cosh' = \sinh$;

(d) $\operatorname{tgh}'(x) = \frac{1}{(\cosh x)^2} = 1 - (\operatorname{tgh} x)^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Wykaż, że funkcje $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\cosh|_{\mathbb{R}_+})\colon \mathbb{R}_+ \to (1; +\infty)$ oraz $\operatorname{tgh}\colon \mathbb{R} \to (-1; 1)$ są odwracalne, oraz znajdź wzory na pochodne funkcji do nich odwrotnych **w oparciu o twierdzenie V.1**.

$\forall$ [85] 3. Znajdź maksymalne przedziały monotoniczności, ekstrema lokalne oraz kresy dla funkcji zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^x dla $x > 0$;

(b) $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $x^{1000} \cdot e^{-x}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\frac{x^4}{(1+x)^3}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$;

(e) $|x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2} \ln|x|$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(f) $\sin(\sin x)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$\forall$ [86] 4. Niech $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Znajdź $\sup A$ i $\inf A$, gdy $a_n =$

(a) $\sqrt[n]{n}$;

(b) $n^5 \cdot 2^{-n}$.

5. Dla poniższych $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbadaj, czy f jest różniczkowalna oraz czy f' jest ciągła (w przypadku różniczkowalności f)

[83] Przynajmniej 2 przykłady.
[84] W części dot. funkcji odwrotnej — tylko dla tgh.
[85] Przynajmniej 3 przykłady.
[86] Przynajmniej jeden z podpunktów.

(a) $f(x) = |x|^\alpha$ w zależności od parametru $\alpha > 0$;

(b) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x \leqslant 0 \\ ax+b & \text{dla } x > 0 \end{cases}$ w zależności od parametrów $a, b \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ |x|^\alpha \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$ w zależności od parametru $\alpha > 0$.

$\forall$ 6. Niech $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ oraz $x_0 \in (a;b)$. Definiujemy *pochodną symetryczną* w x_0

$$f'_{sym}(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h},$$

o ile granica ta istnieje.

(a) Wykaż, że jeśli $f'(x_0)$ istnieje, to istnieje też $f'_{sym}(x_0)$ i $f'_{sym}(x_0) = f'(x_0)$.

(b) Czy z istnienia $f'_{sym}(x_0)$ wynika istnienie $f'(x_0)$?

(c) Czy z istnienia i skończoności $f'_{sym}(x_0)$ wynika ciągłość f w x_0?

7. Dla $c \in \mathbb{R}$ definiujemy $f_c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $f_c(x) = x^2(\varphi(x) + c)$, gdzie

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0. \end{cases}$$

Wykaż, że jeżeli $c \geqslant 1$, to f_c posiada minimum lokalne w 0, ale przy dowolnym $r > 0$ funkcja $(f_c)|_{[0;r]}$ ani $(f_c)|_{[-r;0]}$ nie jest monotoniczna. Dla jakich c minimum lokalne w 0 jest ścisłe[87)] ? Czy f_c jest różniczkowalna?

$\forall$ [88)] 8. Wykaż poniższe nierówności, wykorzystując twierdzenia rachunku różniczkowego (tj. dotyczące pochodnych):

(a) $(x+y)^\alpha \leqslant (\geqslant) x^\alpha + y^\alpha$ dla $x, y \geqslant 0$ i $\alpha \leqslant (\geqslant) 1$;

(b) $xe^{-x^2} + ye^{-y^2} + ze^{-z^2} \leqslant \sqrt{\frac{9}{2e}}$ dla $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(c) $\ln(1+x) > (<) x - \frac{x^2}{2}$ dla $x > 0$ $(-1 < x < 0)$;

(d) $\sqrt[3]{1+x} > 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$ dla $x > 0$.

9. Znajdź pewne (ewentualnie wersja troszkę trudniejsza: wszystkie) takie $\alpha \in \mathbb{R}$, że dla dowolnego $x > -1$ zachodzi $\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \alpha x^3$.

$\forall$ [89)] 10. Ile pierwiastków (tzn. rozwiązań) posiada równanie (x jest "niewiadomą", $x \in \mathbb{R}$):

(a) $x^{11} - 11x + 1 = 0$;

(b) $6\ln(x^2+1) = e^x$;

(c) $a^x = x$, w zależności od parametru $a > 0$.

11. Zbadaj dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $f_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = x^5 - 10x^2 + ax$ jest

(a) różnowartościowa,

[87)] Minimum lokalne f w x_0 jest *ścisłe* (inna nazwa: *istotne*) wtw $\exists_{\delta>0} \forall_{\substack{x\in D \\ 0<|x-x_0|<\delta}} f(x) > f(x_0)$. Analogicznie dla maksimum.

[88)] Przynajmniej 2 przykłady.

[89)] Przynajmniej 1 przykład.

(b) monotoniczna,

(c) ściśle monotoniczna.

12. Zbadaj dla jakich $a \in \mathbb{R}$ funkcja $g_a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_a(x) = ax + \sin x$ jest

 (a) rosnąca;

 (b) ściśle rosnąca;

 (c) malejąca;

 (d) ściśle malejąca.

$\forall$ 13. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna. Wykaż, że $f' = f$ wtw istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że $f = c \cdot \exp$. Uwaga: to już nieco „poważniejsze" równanie różniczkowe, niż $f' = 0$...

14. Wykaż, że dla dowolnego $x > -1$ zachodzi

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Czy podobnego typu rezultat ma miejsce dla $x < -1$?

15. Rozważamy wszystkie trójkąty wpisane w okrąg o promieniu 1. Czy wśród nich istnieje taki, którego obwód jest największy? Jeżeli tak, to jaki jest jego obwód?

16. Trójkąty prostokątne o obwodzie 1 obracamy wokół przeciwprostokątnej. Czy dla jakiegoś z nich objętość otrzymanej bryły obrotowej jest największa? Jeśli tak, to znajdź tę największą objętość.

Uwaga: w zadaniach V.15 i V.16 oczywiście można stosować znane ze szkoły wzory geometryczne.

17. Niech $f\colon [a;b) \to \mathbb{R}$ będzie ciągła w a i różniczkowalna w $(a;b)$. Wykaż, że jeżeli istnieje granica $\lim\limits_{x\to a+} f'(x) =: g$, to także istnieje $f'_+(a)$ i równa jest g. Uwaga! Wynika z tego, że ewentualna nieciągłość pochodnej funkcji różniczkowalnej (na przedziale) nie może być „zbyt trywialna" — nie mogą pojawiać się zwykłe „skoki", tj. sytuacje, gdy granica istnieje, ale jest różna od wartości w punkcie granicznym.

18. Niech I będzie przedziałem oraz $f\colon I \to \mathbb{R}$ — funkcją różniczkowalną. Wykaż, że f jest lipschitzowska (patrz zadanie IV.17) wtw f' jest ograniczona.

19. Wykaż jednostajną ciągłość funkcji zadanych wzorami:

 (a) $\sqrt{x^2 + x}$ dla $x \geqslant 0$;

 (b) $\sin(\ln x)$ dla $x \geqslant 1$.

Wskazówka: wykaż najpierw, że jeśli f jest jednostajnie ciągła na dwóch przedziałach, które nie są rozłączne, to jest też jednostajnie ciągła na ich sumie.

20. Wykaż, że pochodna funkcji różniczkowalnej na przedziale posiada własność Darboux, tzn. wykaż, że jeżeli $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna oraz $c \in (f'(a)?f'(b))$, to istnieje $x \in (a;b)$ takie, że $f'(x) = c$.

$\forall$ [90] 21. Wykorzystując twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej (twierdzenie V.4) zbadaj zbieżność następujących szeregów:

[90] Przynajmniej 1 przykład.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sqrt{e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}(\operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg}(n))$.

$\forall$ [91] 22. Znajdź poniższe granice. Każdy z przykładów **spróbuj** zbadać korzystając z reguły de l'Hospitala i **odrębnie**, korzystając ze wzoru Taylora.

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$;

(b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$;

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{1-\cos x}$;

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$;

(j) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x\ln(1+x)+x^3}{\sqrt{1-e^{-x^4}}}$;

(k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x + e^x - (1+2x+\frac{x^2}{2})}{x^4}$.

$\forall$ [92] 23. Znajdź przybliżenia wymierne poniższych liczb z podaną dokładnością d:

(a) $\sqrt{e}$, $d = 0{,}001$;

(b) $\cos^2 1$, $d = 0{,}001$;

(c) $\ln(\frac{3}{2})$, $d = \frac{1}{20}$.

24. Poniższe liczby zapisz w postaci sum szeregów o wyrazach wymiernych:

(a) $\frac{\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$;

(b) $\ln(\frac{8}{3})$;

(c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

25. Udowodnij pominięte w dowodzie z wykładu przypadki w regule de l'Hospitala (twierdzenie V.7).

26. Niech $f\colon D \to \mathbb{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna w $x_0 \in D$, przy czym x_0 ma otoczenie w D będące przedziałem. Wykaż, że jeśli w jest wielomianem stopnia $\leqslant n$ takim, że $f(x) = w(x) + o((x-x_0)^n)$, przy $x \to x_0$, to $w = T_{n,f,x_0}$.

27. Wykorzystując wzór Taylora zbadaj zbieżność poniższych szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right)$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln(n+1) - \ln(n) - \frac{1}{n}\right)$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} |\operatorname{tg}(\frac{1}{\sqrt{n}}) - \frac{1}{\sqrt{n}}|^\alpha$ w zależności od $\alpha > 0$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - \frac{\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{2}\right)$ w zależności od $a, b, c > 0$.

[91] Przynajmniej 3 przykłady.
[92] Przynajmniej 1 przykład.

28. Wykaż, że jeśli $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ dla $x \in \mathbb{R}$, to dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieją $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\ f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)^n.$$

Jakim wzorem zadane są powyższe współczynniki b_k?

29. Wykaż, że $(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ dla $x \in [0; 1)$ w oparciu o twierdzenie Lagrange'a o postaci reszty Taylora (twierdzenie V.11).

30. Niech $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna w $c \in (a; b)$, $n \geqslant 2$. Wykaż następujące kryterium na ekstrema.

Jeżeli $f^{(k)}(c) = 0$ dla dowolnego $k = 1, \ldots, n - 1$ oraz $\alpha := f^{(n)}(c) \neq 0$, to

- *jeżeli n jest parzyste i $\alpha > 0 (< 0)$, to f posiada ścisłe minimum (maksimum) lokalne w c;*
- *jeżeli n jest nieparzyste, to f nie posiada ekstremum lokalnego w c.*

31. Wykaż część twierdzenia V.8 dotyczącą iloczynu oraz złożenia funkcji n-krotnie różniczkowalnych w punkcie (dowody pominięte na wykładzie).

32. Znajdź wzory na $f^{(n)}(x)$ dla

   (a) $f(x) = xe^x$, $n = 1000$;

   (b) $f(x) = x^2 \sin(5x)$, $n = 100$.

33. Znajdź $\sup\{n \in \mathbb{N}\colon f \in C^n(\mathbb{R})\}$ dla następujących $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^7 & \text{dla } x > 0 \\ x^5 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases};$

   (b) $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x \leqslant 0 \end{cases}.$

34. Wykaż, że jeżeli $f\colon (a; b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła, to f jest ciągła. Znajdź przykład pokazujący, że funkcja wypukła może nie być ciągła w końcu przedziału określoności (gdy koniec ten do przedziału należy).

35. Wykaż, że jeżeli $f\colon I \to \mathbb{R}$ jest ciągła (I jest przedziałem) oraz $\forall_{x,y\in I}\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}$, to f jest wypukła.

36. Rozstrzygnij, które spośród operacji: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, składanie, różniczkowanie (oczywiście, przy założeniu, że dana operacja jest wykonalna) zachowują wypukłość funkcji.

37. Przedstaw szczegóły dowodu faktu o nierówności Jensena (str. 84).

$\forall$ [93] 38. Wykaż następujące nierówności w oparciu o nierówność Jensena:

   (a) $\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;

   (b) $(\sum_{k=1}^n x_k)^\alpha \leqslant (\geqslant) n^{\alpha-1} \cdot \sum_{k=1}^n x_k^\alpha$ dla $x_1, \ldots, x_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha \geqslant 1$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$;

[93] Przynajmniej 1 przykład.

(c) $n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^k$ dla $n \in \mathbb{N}$.

39. Wykaż, że jeśli $f\colon (a;b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła oraz różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a;b)$, to wykres f „leży nad” styczną do wykresu f dla x_0, tzn. $\forall_{x\in(a;b)}\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

40. Znajdź wszystkie funkcje $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$, które są wypukłe i wklęsłe jednocześnie.

41. Wykaż, że jeżeli f jest wypukła i odwracalna, to f^{-1} jest wypukła lub wklęsła (wyjaśnij od od czego to zależy).

42. Wykaż, że jeżeli $f\colon [a;b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz $f|_{(a;b)}$ jest wypukła, to f też jest wypukła.

VI Zbieżność ciągów i szeregów funkcji

[około $1\frac{1}{2}$ wykładu]

1. O różnych pojęciach zbieżności ciągu funkcji

W II i III rozdziale zajmowaliśmy się zbieżnością ciągów i szeregów liczbowych. Ale czy można mówić o zbieżności w przypadku ciągów, których wyrazami są nie liczby lecz funkcje (takie ciągi nazywamy *ciągami funkcyjnymi*)? No cóż, o tym że można, świadczy choćby tytuł tego rozdziału. Co więcej, w odróżnieniu od sytuacji jaką mieliśmy dla ciągów liczbowych, poznamy nie jeden, ale dwa, a właściwie nawet trzy rodzaje zbieżności ciągów funkcyjnych.

Zbieżność punktowa

Niech $f, f_n : D \to \mathbb{R}$ [94] dla $n \geqslant n_0$. Naturalne wydaje się określenie, że ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ jest zbieżny do funkcji f wtw

$$\forall_{x\in D}\ f_n(x) \to f(x). \tag{VI.1}$$

Taki rodzaj zbieżności nazywamy *zbieżnością punktową* i oznaczamy symbolem[95]

$$f_n \to f.$$

A zatem $f_n \to f$ wtw zachodzi (VI.1). Gdy taka zbieżność zachodzi, to funkcję f nazywamy *granicą* ciągu $\{f_n\}$, mówimy o niej także *granica punktowa*. Oczywiście, jeśli granica ta istnieje, to jest ona wyznaczona jednoznacznie (bo mamy taką jednoznaczność dla ciągów liczbowych $\{f_n(x)\}$).

Przyjrzyjmy się nieco głębiej punktowej zbieżności. Gdy skorzystamy z definicji granicy ciągu liczbowego $\{f_n(x)\}_{n\geqslant n_0}$, to powyższą definicję możemy w sposób równoważny zapisać w postaci

$$\forall_{x\in D}\ \forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{VI.2}$$

W warunku (VI.2) indeks N możemy zatem dobierać w sposób zależny zarówno od ϵ jak i od $x \in D$.

Zbieżność jednostajna

Gdy przypomnimy sobie pojęcie ciągłości jednostajnej (patrz podrozdział IV.3) oraz to, co odróżnia jej definicję od definicji „zwykłej" ciągłości, naturalny wyda nam się pomysł, by zmodyfikować warunek (VI.2) i dopuścić jedynie „jednostajny po x" (tzn., taki sam dla wszystkich x, niezależny od x) dobór N do ϵ. Otrzymamy wtedy warunek następujący [96]

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \forall_{x\in D}\ |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \tag{VI.3}$$

[94] Na ogół w tym rozdziale D oznacza dziedzinę rozważanych funkcji; zazwyczaj będziemy tak przyjmować bez przypominania.

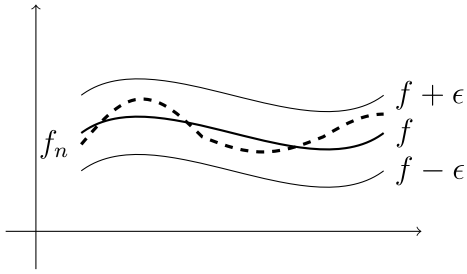
[95] Ten zapis przy pomocy „$\to$" jest nieco dwuznaczny, bo tego samego symbolu używaliśmy przy rozważaniu granicy ciągu liczbowego (choćby przed chwilą, w (VI.1)).

[96] Pamiętajmy o tym, że sąsiadujące ze sobą kwantyfikatory ogólne „$\forall$" możemy przestawiać — dotyczy to zarówno (VI.2) jak i (VI.3). Zmianą **istotną** jest dopiero przestawienie „$\forall$" i „$\exists$".

(patrz rys. 13 — wykres f_n dla wszystkich $n \geqslant N$ jest zawarty cały w „pasie" pomiędzy $f - \epsilon$ a $f + \epsilon$). I takim właśnie warunkiem definiujemy drugi rodzaj zbieżności — *zbieżność jednostajną*, którą oznaczamy symbolem

$$f_n \rightrightarrows f.$$

Tzn., $f_n \rightrightarrows f$ wtw zachodzi (VI.3). Przy tej zbieżności, o funkcji granicznej f mówimy często *granica jednostajna*.



Rysunek 13. Wykres f_n jest cały zawarty w pasie pomiędzy $f - \epsilon$ a $f + \epsilon$.

Uwagi.

1. Zbieżność jednostajna to „lepszy" rodzaj zbieżności, tzn.,

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \to f$$

(implikacji w przeciwną stronę nie ma — przykład będzie niedługo). W szczególności granica jednostajna jest więc też granicą punktową.

2. Granica jednostajna, jeśli istnieje dla danego ciągu funkcyjnego, to jest wyznaczona jednoznacznie. Wystarczy użyć uwagę 1. oraz jednoznaczność dla granicy punktowej.

Norma supremum i wygodne kryterium zbieżności jednostajnej

W warunku (VI.3), ze względu na „dowolność" $\epsilon > 0$, nierówność „$< \epsilon$" można oczywiście zastąpić przez „$\leqslant \epsilon$". Korzystając teraz z definicji kresu górnego możemy ten warunek zapisać równoważnie w postaci

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{N\geqslant n_0}\ \forall_{n\geqslant N}\ \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \epsilon,$$ [97]

co (analogicznie jak przed chwilą) równoważne jest warunkowi z „$< \epsilon$", a to z kolei oznacza dokładnie, że

$$\lim_{n\to+\infty} (\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|) = 0$$

czyli, że ciąg **liczbowy**[98] $\{\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|\}_{n\geqslant n_0}$ ma granicę 0.

Jeżeli więc dla $g : D \to \mathbb{R}$ oznaczymy

$$\|g\| := \sup_{x\in D} |g(x)|,$$

to na mocy powyższych rozwazań możemy sformułować następujące zwięzłe kryterium.

[97] Symbol $\sup_{x\in X} g(x)$ to skrót (wygodny) od $\sup\{g(x) \in \mathbb{R} : x \in X\}$.

[98] Ściślej, ciąg ten ma wyrazy w $\overline{\mathbb{R}}$ (może zdarzyć się $+\infty$), ale definicja granicy dla tego typu ciągów przenosi się w sposób oczywisty.

Fakt.

$$f_n \rightrightarrows f \quad wtw \quad \|f_n - f\| \to 0.$$

Jest to wygodna „alternatywna definicja” zbieżności jednostajnej, bowiem sprowadza ona problem do badania zbieżności pewnego ciągu liczbowego.

Symbol $\|\cdot\|$ używany jest do oznaczania *normy*, czyli wielkości wyrażającej w jakimś sensie długość wektorów — tu tymi wektorami są funkcje o wartościach w $\mathbb{R}$ [99]. Można definiować rozmaite normy — ta konkretna tu zdefiniowana bywa nazywana „normą supremum” i czasem oznacza się ją przez $\|\cdot\|_\infty$. Każda norma musi spełniać kilka warunków (o tym wspomnimy jeszcze w przyszłości...) i wybierając jakąś normę zawsze możemy w sposób taki jak wyżej zdefiniować pewien „nowy” rodzaj zbieżności. My jednak teraz zadowolimy się tą jedną[100] normą.

Obie zbieżności w prostym przykładzie

Przykład. Niech $D \subset R$ i $f_n : D \to \mathbb{R}$ niech będą zadane wzorem

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

dla $x \in D$ i $n \in \mathbb{N}$. Rozważymy parę rozmaitych dziedzin D. Jednak ponieważ $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ \frac{x}{n} \to 0$, zatem niezależnie od wyboru D mamy $f_n \to 0$, gdzie tym razem 0 nie oznacza liczby 0 lecz **funkcję** stałą równą 0 (przypominam też dwuznaczny sens „$\to$” użytej tu przed chwilą w dwóch różnych znaczeniach ...). A zatem jeżeli również $f_n \rightrightarrows f$ dla pewnej funkcji f, to na mocy uwagi 1 i 2 jedynym „kandydatem” na f jest także $f = 0$.

Niech $D = \mathbb{R}$. Mamy wtedy

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{n}| = +\infty \not\to 0,$$

zatem $f_n \not\rightrightarrows 0$, czyli $\{f_n\}$ nie jest ciągiem funkcyjnym zbieżnym jednostajnie!

Teraz rozważmy $D = [-5; 7]$. Wówczas

$$\|f_n - 0\| = \frac{1}{n} \sup_{x\in[-5;7]} |x| = \frac{7}{n} \to 0,$$

zatem $f_n \rightrightarrows 0$ w tym przypadku. Nietrudno uogólnić to na przypadek dowolnego ograniczonego zbioru D — wówczas również $f_n \rightrightarrows 0$, gdyż $M_D := \sup_{x\in D} |x| < +\infty$, skąd $\|f_n - 0\| = \frac{1}{n} M_D \to 0$. A zatem by nasz ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ był zbieżny jednostajnie zbiór D nie może być „zbyt duży”. Np. $D = \mathbb{R}$ był „za duży” na zbieżność jednostajną, ale ciąg $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ był jednostajnie zbieżny dla D będącego dowolnym przedziałem $[a; b]$.

Zbieżność niemal jednostajna

Powyższy przykład sugeruje wprowadzenie jeszcze jednego rodzaju zbieżności. Będzie on dotyczył tylko funkcji określonych na przedziałach [101]. Będzie to tzw. *zbieżność niemal jednostajna*, którą będziemy oznaczać symbolem

$$f_n \overset{\rightarrow}{\dashrightarrow} f.$$

Jeśli $f, f_n : I \to \mathbb{R}$, gdzie I — przedział, to $f_n \overset{\rightarrow}{\dashrightarrow} f$ wtw

$$\forall_{a,b\in I}\ (f_n|_{[a;b]}) \rightrightarrows (f|_{[a;b]}).$$

[99] Wektory — to po prostu elementy przestrzeni liniowej, w naszym wypadku chodzi o przestrzeń wszystkich funkcji $f : D \to \mathbb{R}$ z naturalnymi działaniami.
[100] Tak naprawdę nie jedną, bo każdy zbiór D wyznacza inną normę supremum, „mierzącą” funkcje określone na zbiorze D. W razie potrzeby odróżnienia możemy np. używać oznaczenia $\|\cdot\|_D$.
[101] Można to też uogólnić na funkcje określone na innych zbiorach, ale tu nie będziemy się tym zajmować.

Już samo oznaczenie sugeruje, że ten rodzaj zbieżności jest gdzieś „pomiędzy" zbieżnością punktową a jednostajną, tzn. że

$$f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f_n \overset{\rightarrow}{\dashrightarrow} f \Rightarrow f_n \to f$$

(np. dla dowodu drugiej implikacji wystarczy rozważać sytuację gdy $a = b$). Przykład takiej sytuacji, że $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ jest zbieżny niemal jednostajnie, ale nie jednostajnie uzyskamy biorąc $D = \mathbb{R}$ w przykładzie powyżej. Oczywiście, także przy tym rodzaju zbieżności granica jest zdefiniowana jednoznacznie i może być nią jedynie granica punktowa. Może się zdarzyć, że to nowe pojęcie zbieżności nie wnosi jednak nic naprawdę nowego. Tak będzie np. wtedy, gdy I samo jest już przedziałem domkniętym — wtedy zbieżność jednostajna i niemal jednostajna są tym samym.

Dla wprowadzonych tu różnych rodzajów zbieżności ciągów funkcyjnych można sformułować nieco twierdzeń analogicznych do odpowiednich twierdzeń dotyczących ciągów liczbowych — np. do twierdzenia o rachunkowych własnościach granicy, w przypadku zbieżności punktowej. Nie wszystko jednak przenosi się automatycznie przy innych rodzajach zbieżności. Dla zbieżności jednostajnej, jedną z takich ważnych analogii jest odpowiednik twierdzenia o zupełności II.7, w którym zamiast „zwykłego" warunku Cauchy'ego pojawia się „jednostajny" warunek Cauchy'ego. Sprawę tę jednak odkładamy do zadań (patrz — zadanie VI.5).

2. Szeregi funkcyjne

Trzy rodzaje zbieżności szeregów funkcyjnych

Niech $f_n : D \to \mathbb{R}$ dla $n \geqslant n_0$. *Szereg funkcyjny* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ określamy zupełnie analogicznie jak w przypadku szeregów liczbowych. Utożsamiamy go bowiem z *ciągiem sum częściowych* $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$, który jest w tej sytuacji ciągiem funkcyjnym, przy czym

$$S_n := \sum_{k=n_0}^{n} f_k \quad \text{dla } n \geqslant n_0.$$

Definicja każdego z trzech rodzajów zbieżności (punktowej, jednostajniej i niemal jednostajnej) w odniesieniu do szeregu funkcyjnego jest, jak łatwo się domyślić, następująca: $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest zbieżny punktowo/jednostajnie/niemal jednostajnie* wtw $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ jest zbieżny (odpowiednio) punktowo/jednostajnie/niemal jednostajnie. *Sumą szeregu funkcyjnego* nazywa się granicę **punktową** ciągu $\{S_n\}_{n\geqslant n_0}$ (o ile istnieje).

Punktowa zbieżności szeregu funkcyjnego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ to, jak natychmiast widać, po prostu zbieżność szeregu liczbowego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$ dla wszystkich x z dziedziny funkcji f_n (wspólnej dla wszystkich n). Jednak badanie zbieżności jednostajnej lub niemal jednostajnej szeregów nie jest już tak proste...

Inne spojrzenie na szeregi potęgowe

Poznane w IV rozdziale szeregi potęgowe też można utożsamiać z pewnymi szeregami funkcyjnymi. W rozdziale IV szeregiem potęgowym nazywaliśmy rodzinę szeregów liczbowych postaci $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ rozważanych dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Jednak zamiast mówić o rodzinie szeregów liczbowych, możemy wyrazy tego szeregu potraktować jako funkcje zmiennej x. Tzn. będziemy mieli tu do czynienia z szeregiem funkcyjnym $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, gdzie funkcje $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ są dla $n \geqslant 0$ zadane wzorami $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ dla $x \in \mathbb{R}$. Tak właśnie będziemy rozumieli pojęcie szeregu potęgowego w tym rozdziale. Gdy „obetniemy" szereg potęgowy do jego zbioru zbieżności, to, na mocy samej definicji tego zbioru, otrzymamy szereg funkcyjny zbieżny punktowo. Jak wkrótce zobaczymy, można jednak uzyskać znacznie więcej...

Warunek konieczny zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych

Jak wspominaliśmy, badanie zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych bywa sprawą w praktyce niełatwą. Jednak pewne warunki konieczne bywają dość łatwe do sprawdzenia. Sformułujemy najbardziej „popularny" z takich warunków.

Twierdzenie VI.1 (o warunku koniecznym zbieżności jednostajnej szeregów). *Jeżeli* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny, to* $f_n \rightrightarrows 0$.

Jak widać, jest to analog twierdzenia o warunku koniecznym zbieżności szeregu liczbowego — zresztą dowód jest także nieco podobny...

Dowód.
Niech $S_n := \sum_{k=n_0}^{n} f_k$ dla $n \geqslant n_0$. Dla pewnej funkcji F zachodzi

$$\|S_n - F\| \to 0,$$

a zatem także $\|S_{n-1} - F\| \to 0$. Stąd mamy dla $n \geqslant n_0 + 1$

$$0 \leqslant \|f_n\| = \|S_n - S_{n-1}\| = \|(S_n - F) + (F - S_{n-1})\| \leqslant \|S_n - F\| + \|F - S_{n-1}\|, \quad \text{(VI.4)}$$

przy czym ostatnia nierówność to konsekwencja następującego lematu.

Lemat (nierówność trójkąta dla $\|\cdot\|$).

$$\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

Dowód lematu.
Wystarczy użyć zwykłej nierówności trójkąta (dla modułu $|\cdot|$) oraz definicji kresu górnego. □

Teraz z (VI.4) i z twierdzenia o trzech ciągach otrzymujemy $\|f_n\| \to 0$, czyli $f_n \rightrightarrows 0$. □

Oczywiście istnieje wiele innych warunków koniecznych zbieżności jednostajnej szeregu funkcyjnego. Np. takim warunkiem koniecznym jest oczywiście jego punktowa zbieżność.

Warunek dostateczny i kryterium Weierstrassa

Kolejne twierdzenie daje pewien wygodny warunek dostateczny. Przypomina ono nieco twierdzenie o zbieżności szeregu liczbowego bezwzględnie zbieżnego.

Twierdzenie VI.2 (warunek dostateczny zbieżności jednostajnej). *Jeżeli szereg liczbowy* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\|$ *jest zbieżny, to* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ *jest jednostajnie zbieżny.*

Dowód pominiemy, ale warto wiedzieć, że nietrudno go uzyskać w oparciu o wspominany (lecz nie wypisany...) niedawno jednostajny warunek Cauchy'ego — zachęcam do samodzielnych prób dowodu.

Zauważmy, że sformułowany wcześniej warunek konieczny, tzn. $\|f_n\| \to 0$ jest też „warunkiem koniecznym dla warunku dostatecznego" tzn. dla $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$.

Uwaga. Przyjrzyjmy się trochę praktycznej skuteczności obu powyższych twierdzeń. Rozważmy więc ciąg $\{\|f_n\|\}_{n \geqslant n_0}$. Są trzy możliwości:

1. $\|f_n\| \not\to 0$ — wówczas $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ **nie** jest jednostajnie zbieżny na mocy twierdzenia VI.1.

2. $\|f_n\| \to 0$, ale $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| = +\infty$ — wówczas powyższe twierdzenia **nie dają nic**.

3. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\| < +\infty$ — wtedy $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ **jest** jednostajnie zbieżny na mocy twierdzenia VI.2.

A zatem mamy poważną lukę w praktycznej użyteczności powyższych twierdzeń, opisaną możliwością 2. Co robić gdy na taką sytuację natrafimy? Ogólnej recepty nie ma — trzeba każdy taki przypadek badać indywidualnie. Czasem jednak „ratunek" jest banalny: warto sprawdzić czy $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ jest w ogóle punktowo zbieżny — jeśli nie, to tym bardziej nie może być zbieżny jednostajnie. Przykład takiej sytuacji, to $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n}$, rozważany dla $x \in [0;1]$ (tzn. $f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n}$). Mamy wówczas $\|f_n\| = \frac{1}{n} \to 0$, ale $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Jednak tu brak zbieżności punktowej, bo szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n}$ jest zbieżny jedynie dla $x = 0$.

Sformułujemy teraz często stosowany wniosek z twierdzenia VI.2.

Wniosek (kryterium Weierstrassa). *Jeżeli istnieje ciąg liczbowy $\{c_n\}_{n \geqslant n_0}$ taki, że*

$$\forall_{n \geqslant n_0,\ x \in D}\ |f_n(x)| \leqslant c_n \tag{VI.5}$$

oraz $\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n$ jest zbieżny, to $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$ jest jednostajnie zbieżny

Dowód.
Na mocy (VI.5) i definicji normy supremum oraz definicji kresu górnego, dla dowolnego $n \geqslant n_0$ mamy

$$0 \leqslant \|f_n\| \leqslant c_n,$$

a zatem z kryterium porównawczego $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|f_n\|$ — zbieżny. Teza wynika więc z twierdzenia VI.2. □

Zbieżność niemal jednostajna szeregów potęgowych

Jednym z zastosowań powyższego kryterium jest ważny wynik dotyczący szeregów potęgowych. Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$. Poniżej funkcje będące jego wyrazami rozważamy jedynie na otwartym przedziale jego zbieżności tzn. na $Z_0 := (x_0 - R; x_0 + R)$ (czyli funkcje te obcinamy do Z_0).

Fakt. *Szereg potęgowy jest niemal jednostajnie zbieżny w swoim otwartym przedziale zbieżności*[102] *.*

Dowód.
Oczywiście możemy ograniczyć się do przypadku $x_0 = 0$. Dla dowodu niemal jednostajnej zbieżności powinniśmy dowodzić zbieżność jednostajną szeregu powstałego po obcięciu odpowiednich funkcji do dowolnego przedziału $[a;b]$ zawartego w $(-R;R)$. Wystarczy więc rozważać $a = -r$ i $b = r$, gdzie $0 \leqslant r < R$. Ale dla dowolnego $x \in [-r;r]$ i $n \geqslant 0$ mamy $|a_n x^n| \leqslant |a_n| r^n = |a_n r^n|$, a szereg $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n r^n|$ jest zbieżny, gdyż $r \in (-R, R)$ a szereg potęgowy jest bezwzględnie zbieżny w otwartym przedziale zbieżności (patrz np. lemat ze strony 60). A zatem potrzebna nam zbieżność jednostajna wynika z kryterium Weierstrassa. □

3. Własności granic ciągów i szeregów funkcyjnych

Zajmiemy się tu pytaniem:

> *Jakie własności wyrazów ciągu (ewentualnie szeregu) funkcyjnego przenoszą się na jego granicę?*

Ściślej — zajmiemy się głównie ciągłością i różniczkowalnością. Nietrudno znaleźć przykłady pokazujące, że żadna z tych własności nie zachowuje się przy zbieżności punktowej (zadanie VI.7).

---

[102] Zbieżność **niemal** jednostajna w „całym" przedziale zbieżności też zachodzi, ale dowód tego jest już subtelniejszy ...

Ciągłość granicy jednostajnej i niemal jednostajnej

Zaczniemy od problemem ciągłości.

Twierdzenie VI.3 (o ciągłości granicy). *Jeżeli funkcje f_n są ciągłe dla $n \geqslant n_0$ oraz $f_n \rightrightarrows f$, to f jest ciągła. Czyli krótko: granica jednostajna ciągu funkcji ciągłych jest ciągła.*

Dowód.
Wykażemy ciągłość f w dowolnym punkcie $x \in D$. Niech $x_n \in D$, $x_n \to x$. Musimy wykazać, że $f(x_n) \to f(x)$. Mamy

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &= |(f(x_n) - f_k(x_n)) + (f_k(x_n) - f_k(x)) + (f_k(x) - f(x))| \leqslant \\ &\leqslant |f(x_n) - f_k(x_n)| + |f_k(x_n) - f_k(x)| + |f_k(x) - f(x)| \leqslant \\ &\leqslant 2\|f - f_k\| + |f_k(x_n) - f_k(x)| \end{aligned} \tag{VI.6}$$

dla dowolnych n i k. Niech $\epsilon > 0$. Ponieważ $\|f_n - f\| \to 0$, zatem dobierzmy $k \geqslant n_0$ takie, że $\|f_k - f\| < \frac{\epsilon}{3}$. Ponieważ f_k jest ciągła w x_0, zatem dobierzmy takie N, że $|f_k(x_n) - f_k(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ dla dowolnego $n \geqslant N$. Wówczas korzystając z (VI.6) dla dowolnego $n \geqslant N$ mamy $|f(x_n) - f(x)| < \frac{2}{3}\epsilon + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$. □

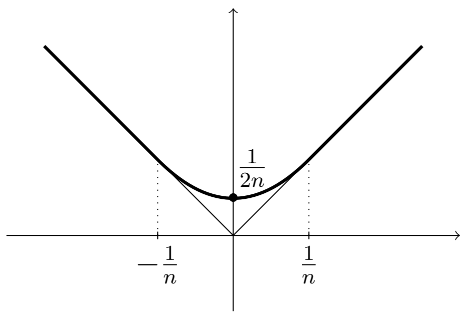
Ponieważ ciągłość jest własnością „lokalną”, zatem prostą konsekwencją powyższego twierdzenia jest podobny wynik dotyczący zbieżności niemal jednostajnej.

Wniosek. *Jeżeli funkcje f_n są ciągłe dla $n \geqslant n_0$ oraz $f_n \underset{\to}{\rightrightarrows} f$, to f jest ciągła.*

Uwaga. Wniosek ten pozwala nam m.in. przedstawić alternatywny dowód części twierdzenia o ciągłości sumy szeregu potęgowego (twierdzenie IV.14) — części dotyczącej ciągłości w otwartym przedziale zbieżności. Wystarczy bowiem skorzystać z udowodnionego niedawno faktu o niemal jednostajnej zbieżności dla takiego szeregu (strona 102).

Różniczkowalność granicy

Niestety sprawa różniczkowalności funkcji okazuje się być bardziej złożona niż sprawa ciągłości. Analog twierdzenia VI.3 dla różniczkowalności nie jest bowiem prawdziwy. Łatwo się o tym przekonać konstruując odpowiednio przybliżenia funkcji $|\cdot|$ (nieróżniczkowalnej w 0) funkcjami różniczkowalnymi — proszę samodzielnie wykonać tę konstrukcję w oparciu o rysunek 14.



Rysunek 14. Nieróżniczkowalną funkcję $|\cdot|$ można łatwo „przybliżyć” jednostajnie funkcjami różniczkowalnymi poprzez „zaokrąglanie kantu”...

Sprawa różniczkowalności granicy nie jest jednak całkiem beznadziejna, można bowiem wykazać twierdzenie następujące.

Twierdzenie VI.4 (o różniczkowalności granicy). *Jeżeli $f_n, f, g\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem oraz funkcje f_n są różniczkowalne i spełnione są warunki:*

1. $f_n \to f$,

2. $f_n' \rightrightarrows g$,

to f też jest różniczkowalna oraz $f' = g$. **B.D.**

A zatem dla różniczkowalności granicy potrzebna jest nie tyle jednostajna zbieżność samego ciągu $\{f_n\}$, co raczej ciągu pochodnych: $\{f_n'\}$.

Uwaga 1. W powyższym twierdzeniu w punkcie 2. wystarczy zakładać zbieżność niemal jednostajną. Wynika to (podobnie jak w wypadku kwestii ciągłości — patrz uwaga po twierdzeniu VI.3) z tego, że różniczkowalność jest pojęciem „lokalnym".

Uwaga 2. Zarówno twierdzenie VI.3 jak i twierdzenie VI.4 mają swoje odpowiedniki dla szeregów funkcyjnych (proszę je sformułować samodzielnie, jako proste ćwiczenie). Związane jest to z faktem, że zarówno ciągłość jak i różniczkowalność zachowują się przy dodawaniu funkcji, a zatem odpowiednie ciągi sum częściowych będą się składać z funkcji ciągłych, ewentualnie różniczkowalnych, o ile to samo założymy o wyrazach szeregu funkcyjnego. W przypadku różniczkowania takie twierdzenie dotyczące szeregów nazywane jest twierdzeniem „o różniczkowaniu szeregu wyraz po wyrazie" i jego teza zapisywana bywa w formie (nieco nieścisłej...)

$$\left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n'.$$

Różniczkowanie sumy szeregu potęgowego

Wniosek. *Szereg potęgowy można w otwartym przedziale zbieżności różniczkować „wyraz po wyrazie". Tzn., jeżeli S jest sumą szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ oraz Z_0 jest jego otwartym przedziałem zbieżności, to dla $x \in Z_0$ funkcja S jest różniczkowalna w x oraz*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n.$$

W szczególności S jest klasy C^∞ w otwartym przedziale zbieżności.

Dowód.
Na mocy uwagi 1 wystarczy tu dowieść, że szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ jest w Z_0 zbieżny niemal jednostajnie. A to z kolei wynika z faktu o niemal jednostajnej zbieżności szeregu potęgowego (ze str. 102) oraz z poniższego prostego lematu, który pozostawiam do dowodu Czytelnikom. □

Lemat. *Promienie zbieżności szeregów $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ i $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n$ są równe.*

Uwaga. W oparciu o powyższy wniosek łatwo można udowodnić fakt ze strony 89 (mówiący o tym, że rozwinięcie w szereg potęgowy jest szeregiem Taylora dla sumy tego szeregu potęgowego).

A oto jeszcze jeden przykład zastosowania różniczkowania „wyraz po wyrazie".

Przykład (funkcja ζ [103]) Riemanna). Jak wiemy, dla dowolnego $x > 1$ szereg $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ jest zbieżny. Zdefiniujemy zatem funkcję $\zeta\colon (1;+\infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Nietrudno wykazać (zadanie VI.10), że funkcja ta jest n-krotnie różniczkowalna przy dowolnych n, tzn. że $\zeta \in C^\infty((1;+\infty))$.

[103]) Czytaj „dzeta".

4. Aproksymacja[104] funkcji ciągłych

W matematyce i jej zastosowaniach często zamiast danej funkcji f wygodnie jest rozważać jakieś jej przybliżenia funkcjami należącymi do pewnej określonej klasy funkcji.

Jaki to rodzaj przybliżenia i jaka klasa funkcji aproksymujących — to zależy już od konkretnej sytuacji. Możliwość znajdowania tego typu przybliżeń gwarantują różne tzw. *twierdzenia o aproksymacji*, czyli po prostu twierdzenia, które mówią, że dla funkcji f istnieje ciąg funkcyjny $\{f_n\}$ złożony z funkcji odpowiedniej klasy zbieżny w odpowiednim sensie do f. Sformułuję tu tylko jedno takie twierdzenie — dotyczące aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami.

Twierdzenie VI.5 (Weierstrassa). *Każda funkcja ciągła na* ***przedziale domkniętym*** *jest granicą jednostajną ciągu wielomianów.* **B.D.**

Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem dużo bardziej abstrakcyjnego twierdzenia Stone'a–Weierstrassa. Twierdzeniem podobnym do VI.5 jest twierdzenie o aproksymacji funkcji ciągłych funkcjami *kawałkami liniowymi* (ściślej: afinicznymi...) — patrz zadanie VI.13. Warto też wiedzieć o tym, że jest bardzo wiele różnych twierdzeń o aproksymacji, które dotyczą rozmaitych zbieżności (niekoniecznie spośród trzech rodzajów tu poznanych) oraz rozmaitych funkcji (niekoniecznie ciągłych). Np. dla wielu zastosowań ważne są rozmaite wyniki dotyczące aproksymacji tzw. *wielomianami trygonometrycznymi*, co jest ściśle związane z nieobecną w tym wykładzie teorią *szeregów Fouriera*.

[104] Aproksymacja = przybliżanie.

Zadania do Rozdziału VI

$\forall$ [105] 1. Zbadaj zbieżność punktową, jednostajną, niemal jednostajną ciągów funkcyjnych $\{f_n\}$ zadanych poniższymi wzorami:

(a) x^n **(1.)** dla $x \in [0;1]$; **(2.)** dla $x \in [0;1)$;

(b) $x^n - x^{n+1}$ dla $x \in [0;1]$;

(c) $x^n - x^{2n}$ dla $x \in [0;1]$;

(d) $\frac{1}{n+x}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(e) $\frac{nx}{1+n+x}$ dla $x \in [0;+\infty)$;

(f) $\sin(\frac{x}{n})$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\operatorname{arctg}(nx)$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(h) $x \operatorname{arctg}(nx)$ dla $x \in \mathbb{R}$.

$\forall$ [106] 2. Zbadaj zbieżność punktową, jednostajną, niemal jednostajną szeregów funkcyjnych zadanych następującymi wzorami:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^2}{n^4+x^4}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2+x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum_{n=0}^{+\infty} x^2e^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(e) $\sum_{n=0}^{+\infty} xe^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(f) $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$ dla $x \in (0;+\infty)$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin(\frac{x}{n})$ dla $x \in [-100;100]$;

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ dla $x \in [0;+\infty)$.

3. Zbadaj, które z poniższych „twierdzeń” dotyczących zbieżności jednostajnej są rzeczywiście **twierdzeniami** (tu $f, f_n, g, g_n\colon D \to \mathbb{R}$):

(a) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $A \subset D$, to $f_n|_A \rightrightarrows f|_A$.

(b) $A \cup B = D$ oraz $f_n|_A \rightrightarrows f|_A$ i $f_n|_B \rightrightarrows f|_B$, to $f_n \rightrightarrows f$.

(c) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n + g_n) \rightrightarrows f + g$.

(d) $f_n \rightrightarrows f$ oraz $g_n \rightrightarrows g$, to $(f_n \cdot g_n) \rightrightarrows f \cdot g$.

Zbadaj analogiczne „twierdzenia” dotyczące „$\to$” oraz „$\overset{\to}{\dashrightarrow}$”.

4. Wykaż, że jeśli $f_n \rightrightarrows f$, to $\|f_n\| \to \|f\|$ (także, gdy $\|f\| = +\infty$).

5. Po uważnej lekturze odpowiednich fragmentów wykładu odgadnij, napisz i zapisz w równoważnej postaci z użyciem $\|\cdot\|$ „jednostajny warunek Cauchy'ego” dla ciągów funkcyjnych. Następnie sformułuj i udowodnij „jednostajny” odpowiednik twierdzenia II.7 (o zupełności...).

6. W oparciu o twierdzenie wykazane w zadaniu powyższym udowodnij twierdzenie o warunku dostatecznym zbieżności jednostajnej dla szeregu funkcyjnego (tw. VI.2).

[105] Przynajmniej 2 przykłady z a)–e) i jeden z f)–h).
[106] Przynajmniej 2 przykłady.

$\forall$ 7. Znajdź przykłady ciągów funkcyjnych pokazujące, że przy zbieżności punktowej ani ciągłość ani różniczkowalność nie muszą się zachowywać (przy „przejściu do granicy”).

8. Wykaż, że wypukłość funkcji zachowuje się przy zbieżności punktowej (!!).

$\forall$ [107] 9. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność funkcji f, w przypadku różniczkowalności zbadaj znak $f'(0)$.

(a) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ dla $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg}(\frac{x}{n^2})$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\cos \frac{x}{n} - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

10. Wykaż, że (patrz przykład ze strony 104):

(a) $\zeta \in C^1((1; +\infty))$;

(b) $\zeta \in C^\infty((1; +\infty))$.

$\forall$ 11. „Oblicz” sumy szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n \cdot n}$;

(c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{7^n}$.

12. Znajdź $f^{(n)}(0)$:

(a) $f(x) = \frac{1}{2+3x^2}$ dla $x \in \mathbb{R}$, $n = 1001$.

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ dla $x \in \mathbb{R}$; $n = 999, n = 1000$.

(c) $f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$ dla $x \in (-1; 1)$; $n = 100$. Wskazówka: zapisz $f(x)$ jako $\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$ dla pewnych $A, B \in \mathbb{R}$.

13. Funkcja $g\colon [a; b] \to \mathbb{R}$ jest *kawałkami liniowa* wtw istnieją liczby $a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ takie, że $a_0 = a, a_k = b$ oraz $f\,|_{[a_{j-1}; a_j]}$ jest wielomianem stopnia $\leqslant 1$ dla dowolnego $j = 1, \ldots, k$. Wykaż, że każda funkcja ciągła określona na przedziale domkniętym jest granicą jednostajną ciągu funkcji kawałkami liniowych.

[107] Przynajmniej jeden przykład.

Spis symboli i skrótów

$\forall$ dla każdego, 5

$\exists$ istnieje, 5

$\bigcap\limits_{i\in I}$ przecięcie dla indeksowanej rodziny zbiorów, 5

$\bigcup\limits_{i\in I}$ suma dla indeksowanej rodziny zbiorów, 5

$f\colon A \to B$ funkcja ze zbioru A w zbiór B, 5

$\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych, 5

$:=$, $=:$ równość definiująca nowe oznaczenie, 5

$\mathbb{R}^*$ zbiór liczb rzeczywistych bez zera, 6

$\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych, 7

wtw wtedy i tylko wtedy, gdy, 6

$\exists!$ istnieje dokładnie jeden, 7

$|\ |$ wartość bezwzględna, 8

max element największy, 9

min element najmniejszy, 9

sup kres górny, 9

inf kres dolny, 9

$(a;b)$ przedział otwarty, 9

$[a;b]$ przedział domknięty, 9

$(a;b]$ przedział otwarto-domknięty, 9

$[a;b)$ przedział domknięto-otwarty, 9

$\mathbb{N}$ zbiór liczb naturalnych, 9

$\mathbb{Z}$ zbiór liczb całkowitych, 11

$\mathbb{N}_0$ zbiór liczb naturalnych z dodanym zerem, 11

$\mathbb{N}_k$ zbiór liczb całkowitych „począwszy od k”, 11

$\mathbb{Q}$ zbiór liczb wymiernych, 11

C_{10} zbiór cyfr zapisu dziesiętnego, 10

$[\ ]$ część całkowita, 11

0^0 **czasami** to jest 1, 12

$\sum_{k=m}^{n}$ suma „indeksowana”, 12

$\binom{n}{k}$ symbol Newtona, 12

$\sqrt[n]{a}$ pierwiastek n-tego stopnia z a, 13

$\sqrt{a}$ pierwiastek kwadratowy z a, 13

x^y x do potęgi y, 13

$A+B$ suma algebraiczna zbiorów, 17

$A \cdot B$ iloczyn algebraiczny zbiorów, 17

$-A$ zbiór „przeciwny” do A, 17

$A \leqslant B$ nierówność dla zbiorów, 17

$c \leqslant A$ c jest ograniczeniem dolnym zbioru A, 17

$c < A$ c jest ściśle poniżej A, 17

$c > A$ c jest ściśle powyżej A, 17

$c \geqslant A$ c jest ograniczeniem górnym zbioru A, 17

$c + A$ przesunięcie zbioru A o c, 17

$\leqslant, \geqslant, <, >$ nierówność pomiędzy ciągami, 18

d.d.d. dla dostatecznie dużych, 19

$\overline{\mathbb{R}}$ rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych, 19

$\to$ ma granicę ... (ciąg), 19, **??**

$\xrightarrow[n\to+\infty]{}$ ma granicę ... (ciąg przy n dążącym do nieskończoności), 19

$\lim\limits_{n\to+\infty}$ granica (ciągu), 19, **??**

$\equiv$ równa się „stale”, 20

e liczba e (granica ciągu o wyrazach $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$), 22

$\limsup\limits_{n\to+\infty}$ granica górna, 26

$\liminf\limits_{n\to+\infty}$ granica dolna, 27

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ suma szeregu o wyrazach a_n lub ciąg sum częściowych tego szeregu, 33

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < +\infty$ szereg o wyrazach (nieujemnych) a_n jest zbieżny, 34

$a \sim b$ ciągi a i b są asymptotycznie podobne, 37

$a_n \sim b_n$ ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ są asymptotycznie podobne, 37

$\not\to$ (ciąg) nie ma granicy równej ..., 38

$\odot$ iloczyn Cauchy'ego, 41

exp funkcja exponencjalna, 41

sin sinus, 42

cos kosinus, 42

p.s. punkt skupienia, 47

$\lim\limits_{x\to a}$ granica funkcji w punkcie, 47, **??**

$\xrightarrow[x\to a]{}$ ma granicę ... (funkcja w punkcie a), 47

w. o wyrazach w, 47

$\lim\limits_{x\to a,\, x\in D}$ granica (funkcji) w punkcie a dla funkcji określonej na D, 48

$\circ$ złożenie funkcji, 49

$|_X$ obcięcie funkcji, 50

D_+ część zbioru D położona na prawo od 0, 50

D_- część zbioru D położona na lewo od 0, 50

D^a_+ część zbioru D położona na prawo od punktu a, 50

D^a_- część zbioru D położona na lewo od punktu a, 50

$\lim\limits_{x\to a+}$ granica prawostronna w punkcie a, 50

$\lim\limits_{x\to a-}$ granica lewostronna w punkcie a, 50

d. ... d.b. dla ... dostatecznie bliskich, 51

$\mathbb{x}$ funkcja identycznościowa, 55

$(a?b)$, $[a?b)$, $[a?b]$, $(a?b]$ przedziały „o nieznanej kolejności końców", 55

„na" funkcja „na", 57

„1–1" funkcja różnowartościowa, 57

f^{-1} funkcja odwrotna, 57

$[a;+\infty]$ przedział domknięty wraz z nieskończonością, 60

$\log_a$ logarytm o podstawie a, 62

ln logarytm naturalny, 62

π liczba π, 63

tg tangens, 63

ctg kotangens, 63

mian	najmniejszy mianownik, 66
f'	pochodna funkcji f, 69, **??**
$f'(a)$	pochodna funkcji f w punkcie, 69
$f'_-(a)$	pochodna lewostronna, 70
$f'_+(a)$	pochodna prawostronna, 70
$\frac{df}{dx}$	tradycyjne oznaczenie pochodnej, 70, **??**
$D_{a,\delta}$	δ–towe otoczenie a w D, 70, 81
sgn	funkcja signum (znak), 71
arcsin	arkus sinus, 78
arccos	arkus kosinus, 78
arctg	arkus tangens, 78
arcctg	arkus kotangens, 78
$f^{(n)}$	n–ta pochodna, 82
$\frac{d^n f}{dx^n}$	n–ta pochodna, tradycyjne oznaczenie, 82
$C^n(D)$	klasa funkcji n–krotnie różniczkowalnych na D z ciągłą n–tą pochodną, 82
$C^\infty(D)$	klasa funkcji różniczkowalnych dowolną liczbę razy na D, 82
$C(D)$	klasa funkcji ciągłych na D, 82
N_f	zbiór punktów położonych „nieostro” nad wykresem f, 83
X^k	iloczyn kartezjański k egzemplarzy zbioru X, 83
f''	druga pochodna f, 85
T_{n,f,x_0}	n–ty wielomian Taylora funkcji f w punkcie x_0, 85
T_n	n–ty wielomian Taylora, 85
R_n	n–ta reszta Taylora, 86
$f(x) = o(g(x))$	notacja „o–małe”, 87, **??**
$\binom{\alpha}{n}$	uogólniony symbol Newtona, 90
sinh	sinus hiperboliczny, 91
cosh	kosinus hiperboliczny, 91
tgh	tangens hiperboliczny, 91
f'_{sym}	pochodna symetryczna, 92
$f_n \to f$	zbieżność punktowa, 97

$f_n \rightrightarrows f$ zbieżność jednostajna, 98

$\| \cdot \|$ norma, 98

$\| \cdot \|_D$ norma supremum na zbiorze D, 99

$f_n \overset{\to}{\dashrightarrow} f$ zbieżność niemal jednostajna, 99

$\int f(x)dx$ całka nieoznaczona, **??**

$\int_a^b f(x)dx$ całka oznaczona, **??**

$[h(x)]_a^b$ $h(b) - h(a)$, **??**

$\hat{S}(f, P)$ suma górna, **??**

$\check{S}(f, P)$ suma dolna, **??**

$\hat{\int}_{[a;b]} f$ całka górna, **??**

$\check{\int}_{[a;b]} f$ całka dolna, **??**

$\Re$ klasa funkcji całkowalnych w sensie Riemanna, **??**

$\Re([a;b])$ klasa funkcji całkowalnych w sensie Riemanna na $[a;b]$, **??**

$|P|$ średnica podziału, **??**

$\int_a^b f(x)dx$ całka niewłaściwa, **??**

$\| \ \|$ norma euklidesowa, **??**

$K(a, r)$ kula otwarta, **??**

$\mathbb{x}_j$ funkcja współrzędna, **??**

f_j j–ta funkcja współrzędna funkcji f, **??**

$\dot{f}$ pochodna f, **??**

Int wnętrze, **??**

D_a^j dziedzina funkcji f_a^j, **??**

f_a^j funkcja jednej zmiennej powstała z f, gdzie jedną ze zmiennych traktujemy jako zmienną po której będziemy różniczkować, a pozostałe traktujemy jak parametry (stałe), **??**

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ pochodna cząstkowa, **??**

$\partial_{x_j} f$ pochodna cząstkowa, **??**

$\partial_j f$ pochodna cząstkowa, **??**

$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ pochodna kierunkowa, **??**

$\partial_{\vec{v}} f$ pochodna kierunkowa, **??**

$\partial_v f$ pochodna kierunkowa, **??**

Df różniczka f, ??

MJf macierz Jakobiego, ??

Jf jakobian, ??

$\operatorname{grad} f(a)$ gradient f, ??

$\nabla f(a)$ gradient f, ??

$\partial_{x_{j_n}\dots x_{j_1}} f$ pochodna cząstkowa rzędu n, ??

$\partial_{j_n,\dots,j_1} f$ pochodna cząstkowa rzędu n, ??

$\frac{\partial^n f}{\partial x_{j_n}\dots\partial x_{j_1}}$ pochodna cząstkowa rzędu n, ??

$\partial^\alpha f$ uproszczona notacja pochodnej cząstkowej, ??

$\partial_{x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}} f$ uproszczona notacja pochodnej cząstkowej, ??

$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots x_m^{\alpha_m}}$ uproszczona notacja pochodnej cząstkowej, ??

Hf macierz Hessego, ??

$\sigma(\mathcal{A})$ σ–ciało generowane przez $\mathcal{A}$, ??

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ rodzina zbiorów borelowskich, ??

δ_{x_0} delta Diraca, ??

$\#$ miara licząca, ??

λ^d d–wymiarowa miara Lebesgue'a, ??

λ 1–wymiarowa miara Lebesgue'a, ??

$\mathcal{L}\ (\mathbb{R}^d)$ zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a, ??

$\int_D f d\mu$ całka z f względem miary μ, ??

L^1 klasa funkcji całkowalnych w sensie Lebesgue'a, ??

$L^1(D,\mu)$ klasa funkcji określonych na D i całkowalnych względem mu, ??

$\int_D f(x)dx$ całka względem miary Lebesgue'a, ??

$L^1(D)$ całka względem miary Lebesgue'a, ??

$\underset{\mathbb{R}^d}{\int\int\cdots\int} f(x)dx_1dx_2\dots dx_d$ całka „pod–tna" — zapis, ??

Γ_f wykres f, ??

$\xrightarrow[\text{p.w.}]{}$ zbieżność μ–prawie wszędzie, ??

$y' = F(t,y)$ równanie różniczkowe w postaci normalnej, ??

e^z potęga o podstawie e i wykładniku zespolonym, ??

$e_{\lambda,s}$ funkcja $e_{\lambda,s}(t) = t^s e^{\lambda t}$, **??**

$\mathrm{kr}(\lambda, A)$ krotność λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego dla A, **??**

$\mathrm{Fun}_m(a; b)$ przestrzeń liniowa wszystkich funkcji określonych na $(a; b)$ o wartościach w $\mathbb{R}^m$, **??**