Na początek, żeby pokazać, że umiemy korzystać z funkcji tworzących, czy też ukryć, że nie umiemy użyć wzoru na szereg geometryczny obliczymy formę zwartą wzoru na a_n.

$$c = 10^k$$

$$a_n = ca_{n-1} + 1$$

Przesumowujemy wszystko wymnażając razy x^n. a_0 się zgadza, więc nie poprawiamy Iversonem.

$$a_n x^n = cxa_{n-1}x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$F(x) = cxF(x) + \frac{1}{1-x}$$

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)(1-cx)}$$

Szybko rachujemy rozbicie na ułamki proste, tak że wychodzi nam:

$$F(x) = \frac{1}{c-1} \cdot \frac{-1}{1-x} + \frac{c}{c-1} \cdot \frac{1}{1-cx}$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{-1}{c-1} + \frac{c}{c-1}c^k)x^k$$

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} (\frac{c^{k+1}-1}{c-1})x^k$$

Zatem ostatecznie!

$$a_n = \frac{10^{k(n+1)} - 1}{10^k - 1}$$

Teraz przejdźmy wreszcie do rzeczy...

Weźmy sobie funkcję $G_c(l)$ określoną tak, że zwraca liczbę długości l złożoną z samych cyfr c. Krótki rzut oka i możemy napisać:

$$a_n = \frac{G_9(k(n+1))}{G_9(k)}$$

wyciągnijmy z licznika $G_9(n+1)$

$$a_n = \frac{G_9(n+1)(\sum_{i=0}^{n} 10^{ki})}{G_9(k)}$$

I teraz chwila na zastanowienie. Gdy mamy liczby $a, b, c \in \mathbb{Z}$ takie, że $c|ab$ oraz $a, b > c$, to $\frac{ab}{c}$ jest liczbą złożoną. Dlaczego? ab zawiera w sobie c. Ale i a i b są od c ostro większe, więc niezależnie od tego jak rozłożone są po nich czynniki z rozkładu c na pierwsze, w obu zostanie jakiś czynnik nieskrócony, nazwijmy je α_a, α_b. Zatem $\frac{ab}{c} = \alpha_a\alpha_b$ i jest to liczba złożona.

Teraz wróćmy do naszego ciągu. Jak łatwo zauważyć, dla $n > k$ oba czynniki w liczniku ($G_9(n+1)$ oraz wielomian) mają w zapisie więcej niż k cyfr. Co za tym idzie są większe od $G_9(k)$, które siedzi w mianowniku. Wiemy, że wynikiem tego dzielenia jest liczba całkowita. No to to jest właśnie ten moment, w którym korzystamy z przemyśleń sprzed chwili. Wniosek jest taki, że dla $n > k$ a_n jest złożone, co oznacza, że zawiera w sobie najwyżej k wyrazów pierwszych i to w pierwszych k wyrazach. Jest to niewątpliwie skończona liczba, czyli udowodniliśmy co chcieliśmy.