Wojciech Typer
279730

Kody źródłowe zostały napisane w języku Rust. Wykresy zostały wygenerowane w Pythonie poprzez bibliotekę Matplotlib. Użyto generatora liczb pseudolosowych Mersenne Twister. Każdy kod źródłowy generuje dane liczbowe, a następnie zapisuje je do pliku tekstowego, z którego następnie generowany jest wykres.

Wszystkie dane zostały uzyskane poprzez generowania d(n) i ”pobierania” pozostałych potrzebnych danych podczas tego procesu.

Interpretacja wykresów:
1) b(n) - z wykresu możemy odczytać, że wraz ze wzrostem ilości unr - n, liczba losowań do uzyskania pierwszej kolizji jest większa i rośnie w tempie $\sqrt{n}$ (co można odczytać z wykresu $b(n) / \sqrt{n}$ - wartości średnie na tym wykresie można aproksymować do stałej różnej od zera) . Wraz ze wzrostem ilości urn, wyniki bardziej się rozpraszają, a ich fluktuacja jest większa. Dla mniejszych ilości urn wyniki są bardziej skupione wokół średniej.

2) u(n) - z wykresu możemy odczytać, że średnia liczba pustych urn po wrzuceniu określonej ilości kul rośnie liniowo wraz ze wzrostem n (co możemy odczytać z wykresu $u(n) / n$ - wartości średnie na tym wykresie można aproksymować do stałej różnej od zera). Jest to zgodne z intuicją - zwiększenie ilości urn i brak zwiększenia ilości kul zwiększa ilość pustych urn po wykonaniu eksperymentu. Wszystkie wartości są mocno skupione wokół wartości średnich.

3) c(n) i d(n) - z wykresów możemy odczytać, że wraz ze wzrostem liczby n (urn) liczba potrzebnych rzutów, aby osiągnąć określone warunki, rośnie w tempie $n \ln n$. Dla c(n) (liczba rzutów potrzebnych, aby w każdej urnie była co najmniej jedna kulka) obserwujemy, że aproksymując wykres $c(n)/(n \ln n)$, wartość pozostaje stała i różna od zera. Podobną zależność widzimy dla d(n) (liczba rzutów potrzebnych, aby w każdej urnie były co najmniej dwie kule), gdzie aproksymacja $d(n)/(n \ln n)$ również pokazuje stałą wartość różną od zera.

Dodatkowo, dla większych wartości n, wyniki zarówno c(n), jak i d(n) są bardziej rozproszone wokół średniej, a fluktuacje wyników są większe. Natomiast dla mniejszych wartości n, wyniki są bardziej skupione wokół średniej, co wskazuje na mniejszą zmienność w mniejszych próbach.

4) d(n) - c(n) - z wykresu możemy odczytać, że wraz ze wzrostem liczby n (urn) różnica d(n) i c(n) rośnie w tempie $n \ln n$ (możemy do odczytać z wykresu $(c(n) - d(n)) / (n \ln n)$ - wykres ten możemy aproksymować do wartości stałej różnej od zera). Dla mniejszych wartości n, wyniki są bardziej skupione wokół średniej, natomiast dla większych wartości wyniki są bardziej rozproszone wokół średniej.

Birthday paradox - paradoks związany z rachunkiem prawdopodobieństwa. Odpowiada na pytanie, ile potrzeba zgromadzić osób, aby prawdopodobieństwo znalezienia dwóch z taką samą datą urodzin (dzień i miesiąc) wynosiła ½? Większość osób na to pytanie odpowiada, że ilość osób powinna wynosić 366 / 2 = 183. Poprawną odpowiedzią na to pytanie jest 23 - zaskakująco mało liczba, stąd paradoks w nazwie. W naszym zadaniu wyznaczenie b(n) jest równoważne birthday paradox, na wykresie przedstawiającym tą funkcję możemy zauważyć, że moment pierwszej kolizji następował -zazwyczaj- znacznie szybciej niż wynosi połowa n.

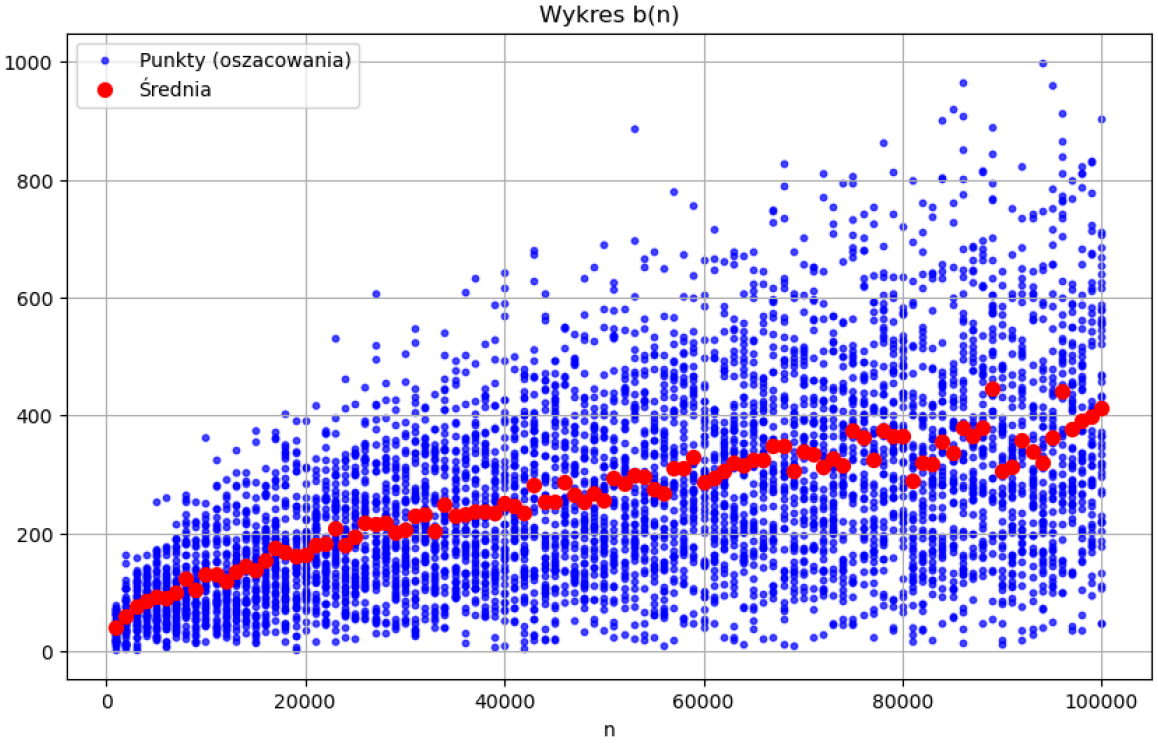
Cupon collector's problem - problem probabilistyczny polegający na przewidzeniu jak długo należy zbierać kupony, aby zebrać je wszystkie. Zebranie jednego kuponu polega na wylosowaniu go. W naszym zadaniu wyznaczenie c(n) jest równoważne problemowi kolekcjonera kuponów - zliczamy po ilu rzutach w każdej urnie będzie znajdować się co najmniej jedna kulka.

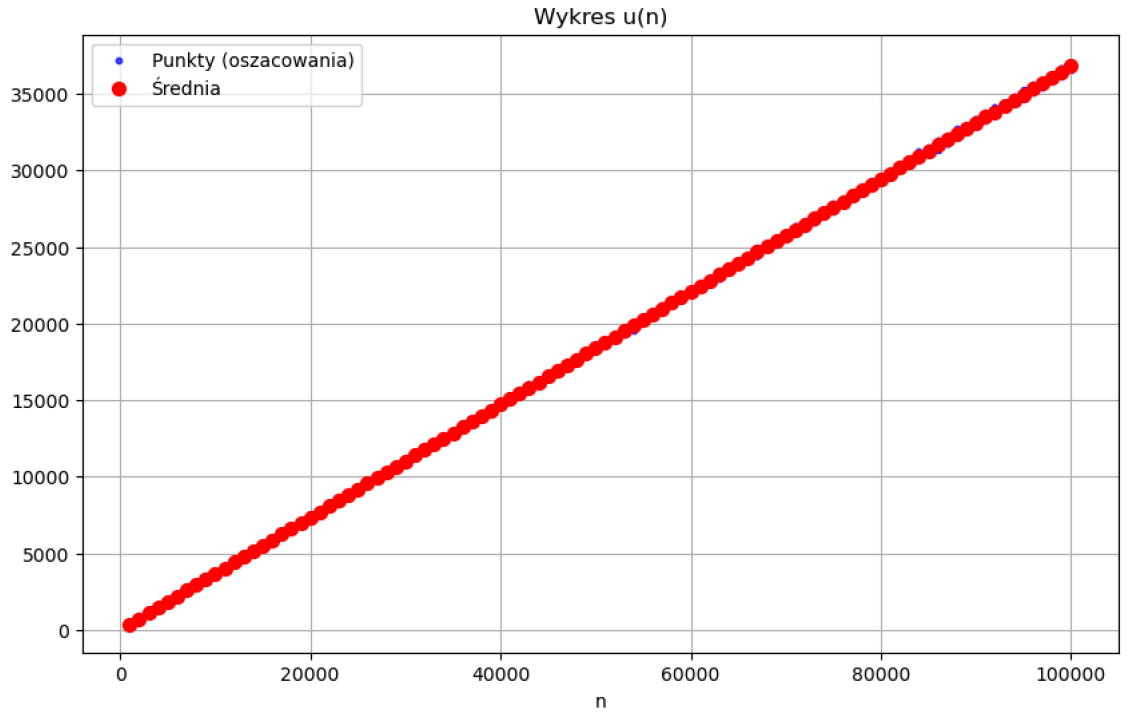
Jakie znaczenie ma birthday paradox w kontekście funkcji hashujących i kryptograficznych funkcji hashujących?
Funkcje hashujące mapują dużą ilość danych wejściowych do skończonego zakresu wartości. Ze względu na ograniczony zakres możliwych hash, zgodnie z zasadą szufladkową Dirichleta, kolizje są nieuniknione. Birthday paradox pozwala oszacować po jakim czasie dojdzie do pierwszych kolizji przy losowych próbach.

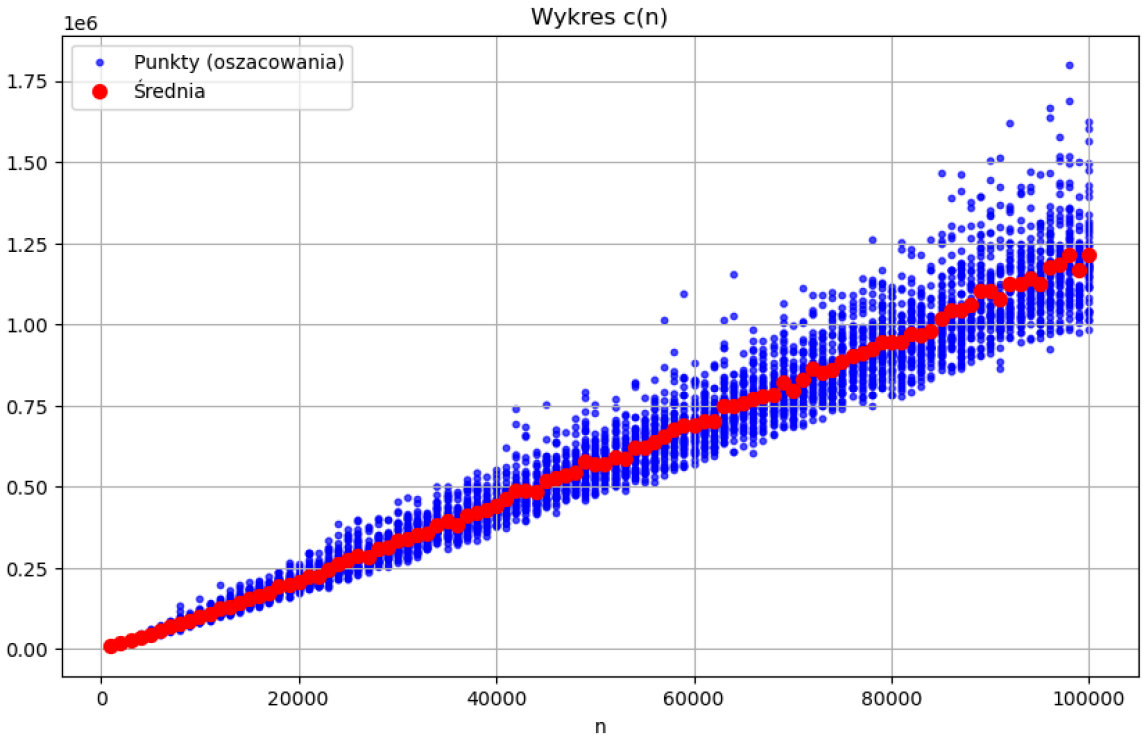
Kryptograficzne funkcję hashujące mają kluczowe znaczenie w kontekście bezpieczeństwa systemów informatycznych. Paradoks urodzinowy wpływa na:

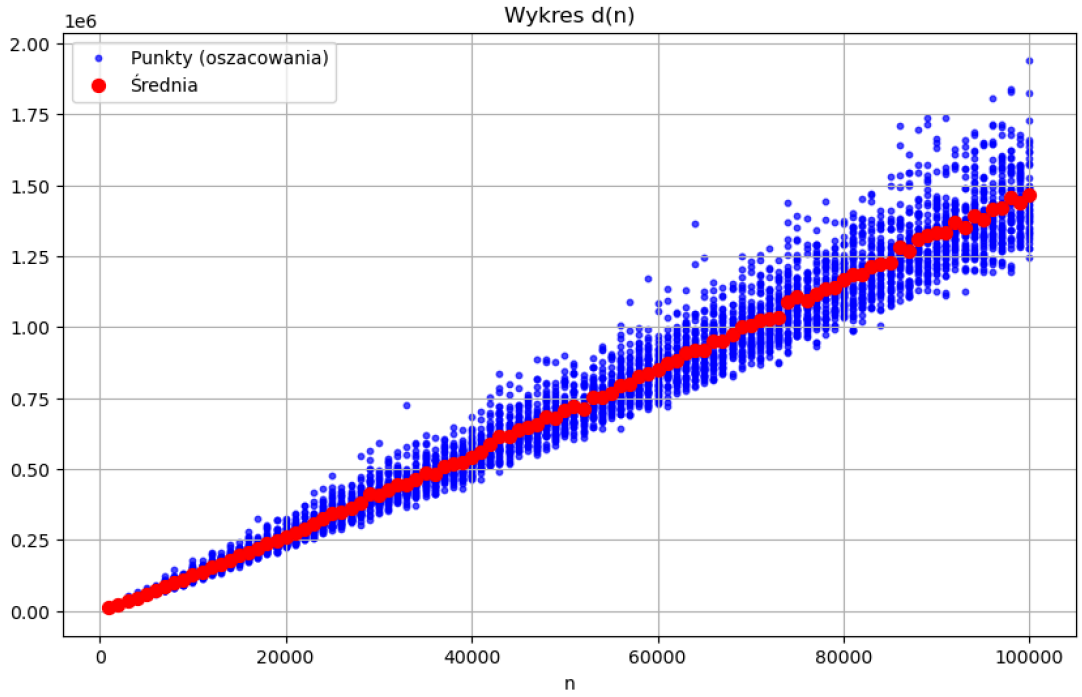
Atak urodzinowy: jego celem jest znalezienie kolizji funkcji hashujących. U jego podstaw leży birthday paradox, dzięki któremu można oczekiwać, że kolizja zostanie znaleziona znacznie szybciej niż sugerowałby to rozmiar przeciwdziedziny funkcji hashującej.

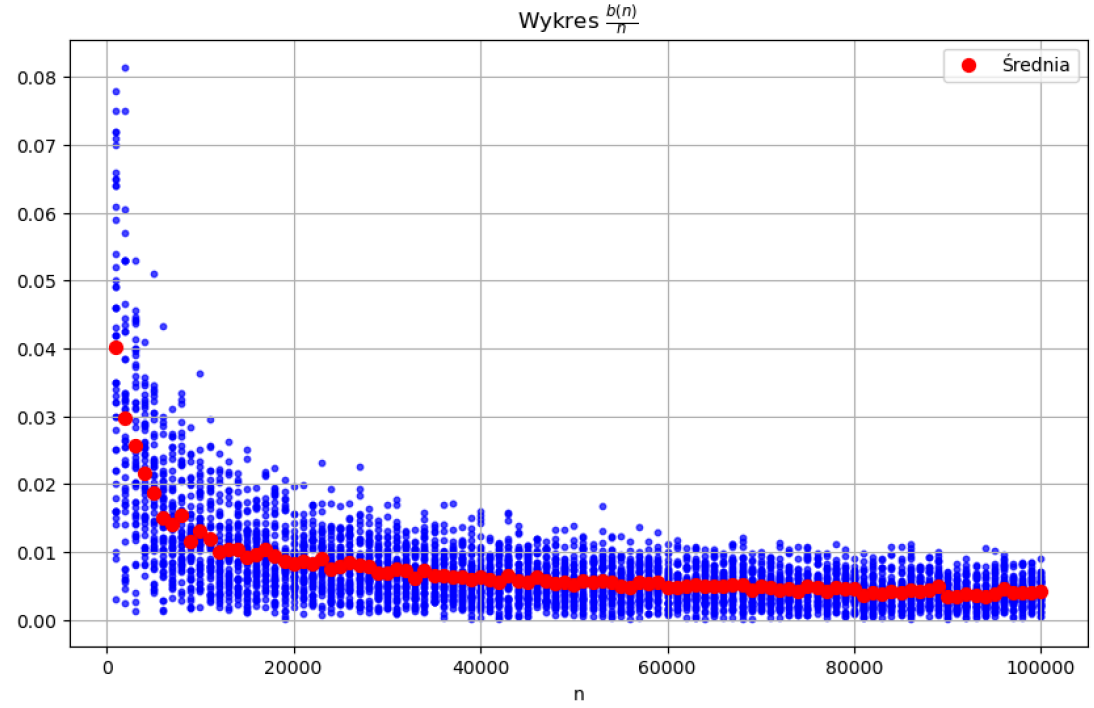
Projektowanie funkcji hashującej: funkcja hashująca powinna być (w miarę możliwości) odporna na atak urodzinowy. Algorytm powinien być zaprojektoany w taki sposób, aby skutecznie generować losowy rozkład wyników hash, minimalizując ryzyko kolizji.

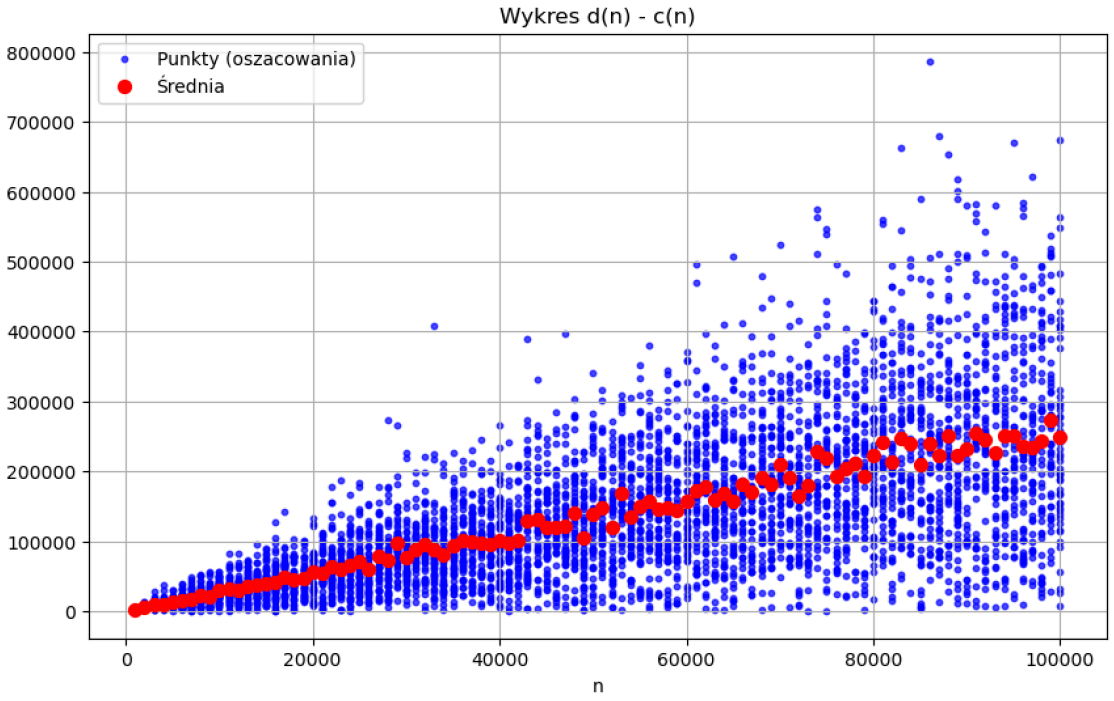

Wykres b(n)
Punkty (oszacowania)
Średnia
1000
800
600
400
200
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

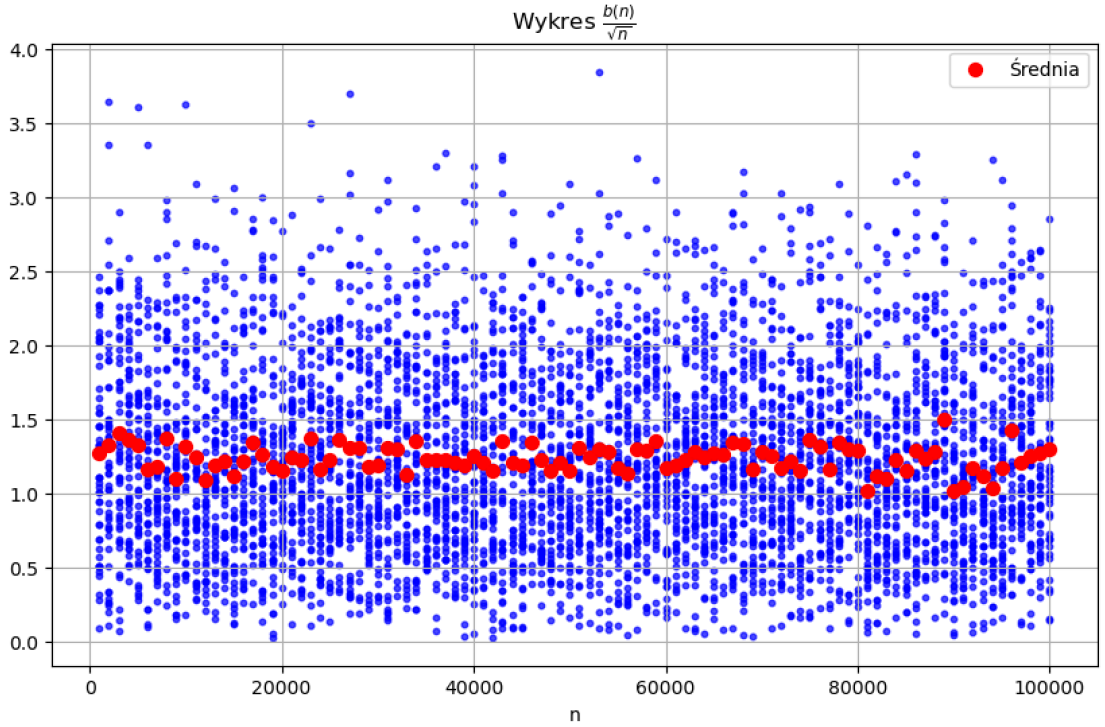

Wykres u(n)
Punkty (oszacowania)
Średnia
35000
30000
25000
20000
15000
10000
5000
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

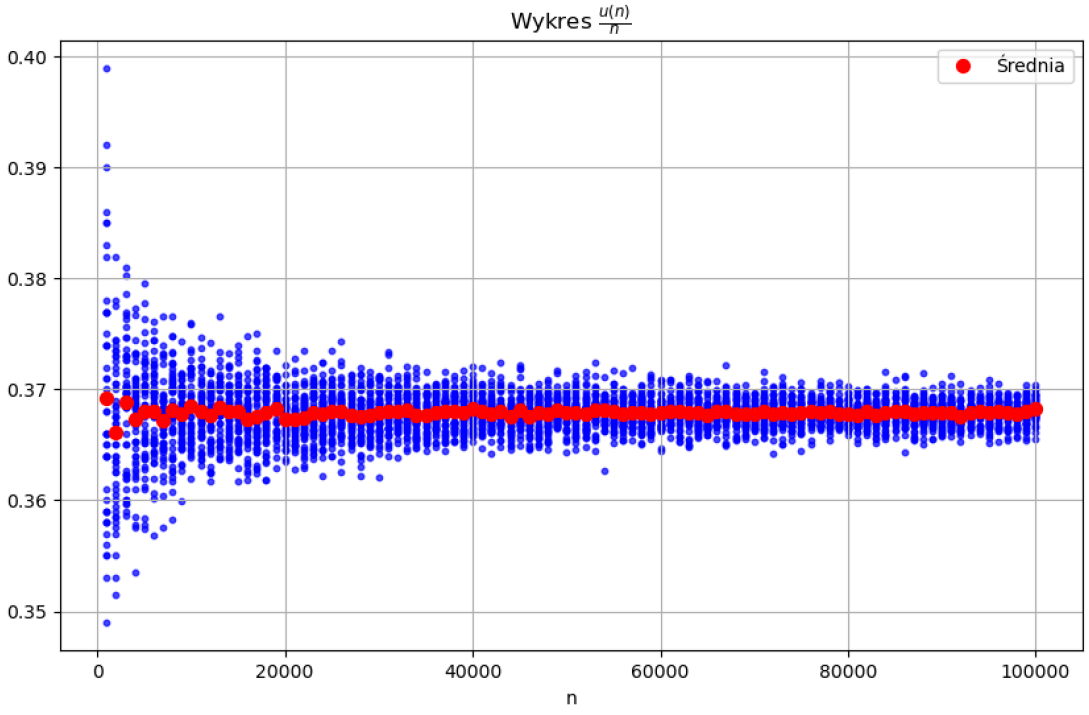

Wykres c(n)
1e6
Punkty (oszacowania)
Średnia
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

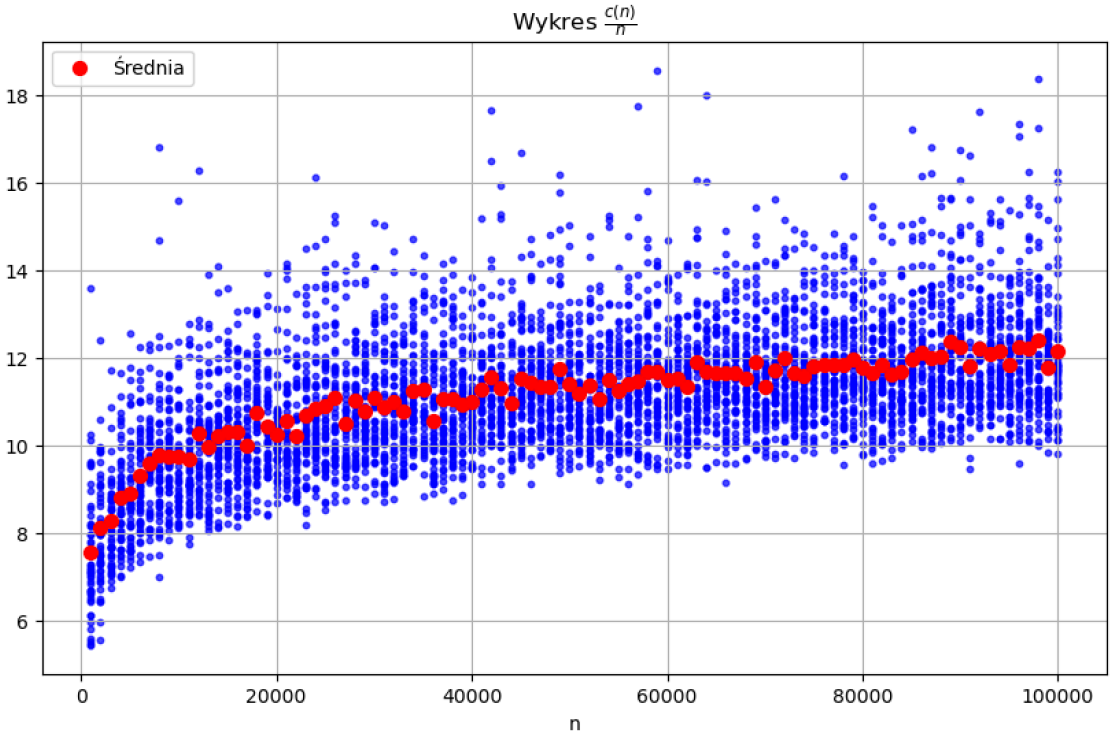

Wykres d(n)
1e6
Punkty (oszacowania)
Średnia
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

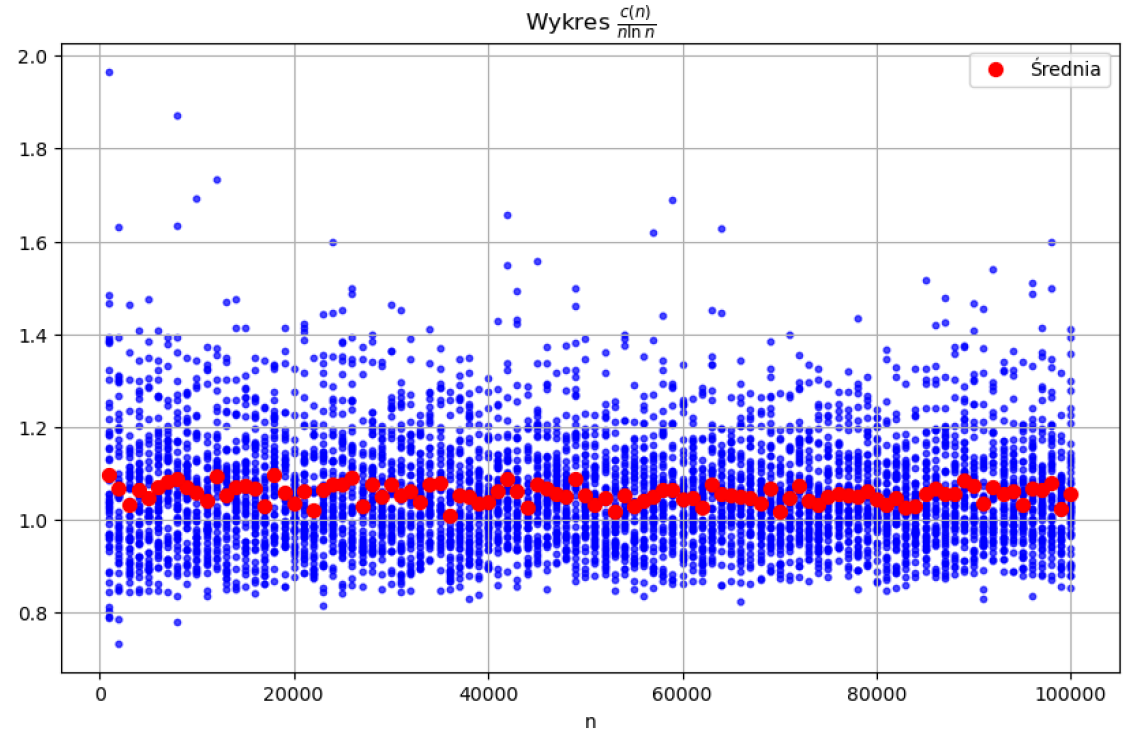

Wykres $\frac{b(n)}{n}$
Średnia
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0.00
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

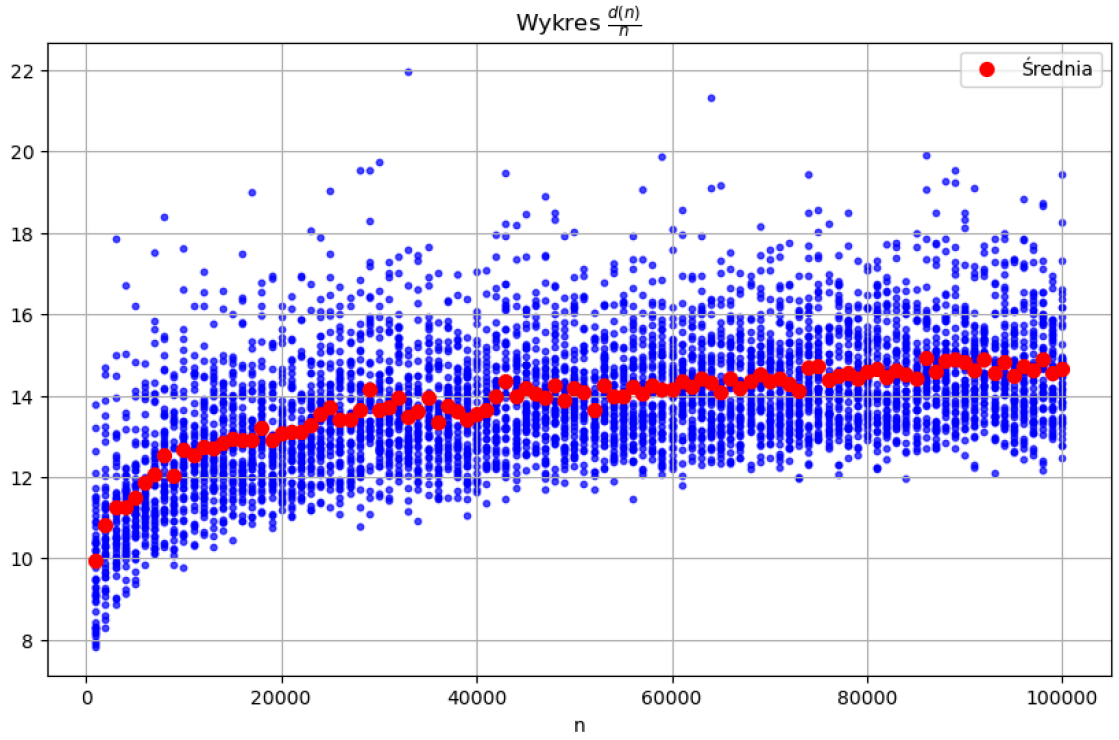

Wykres d(n) - c(n)
Punkty (oszacowania)
Średnia
800000
700000
600000
500000
400000
300000
200000
100000
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

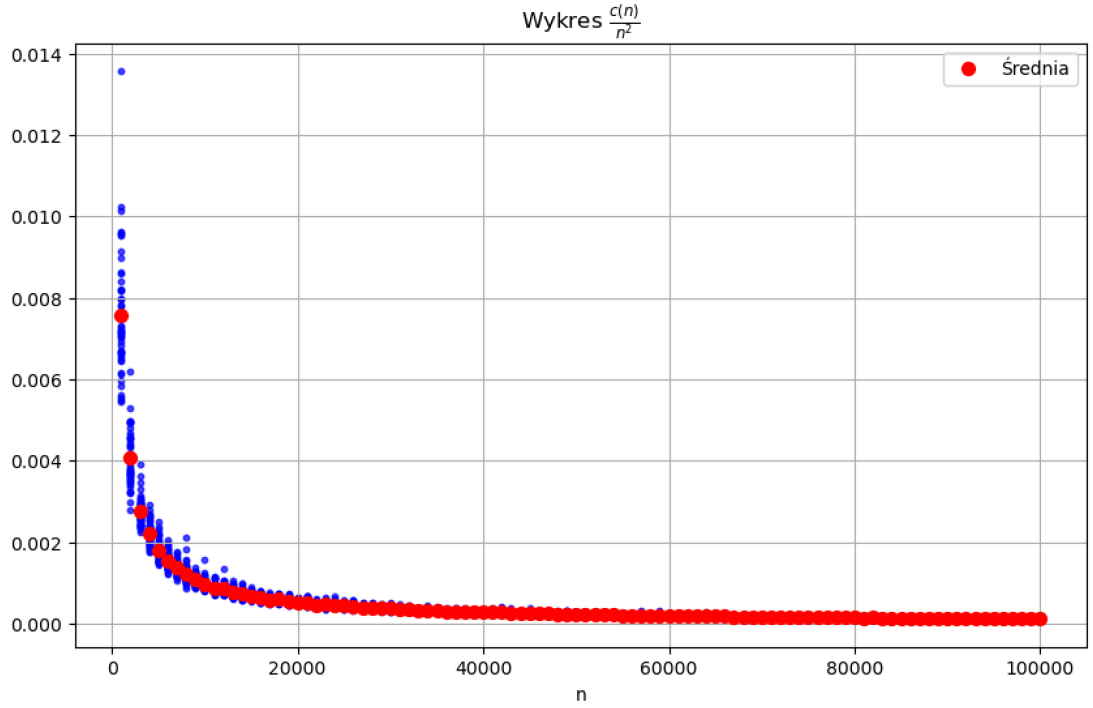

Wykres $\frac{b(n)}{\sqrt{n}}$
Średnia
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

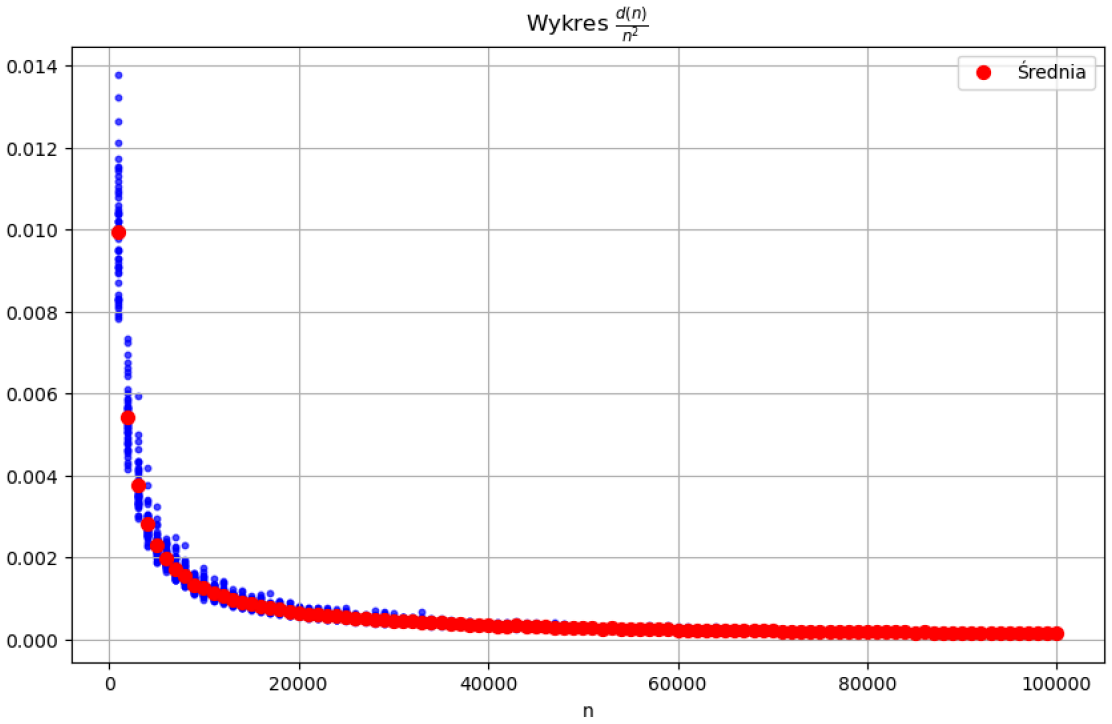

Wykres $\frac{u(n)}{n}$
Średnia
0.40
0.39
0.38
0.37
0.36
0.35
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

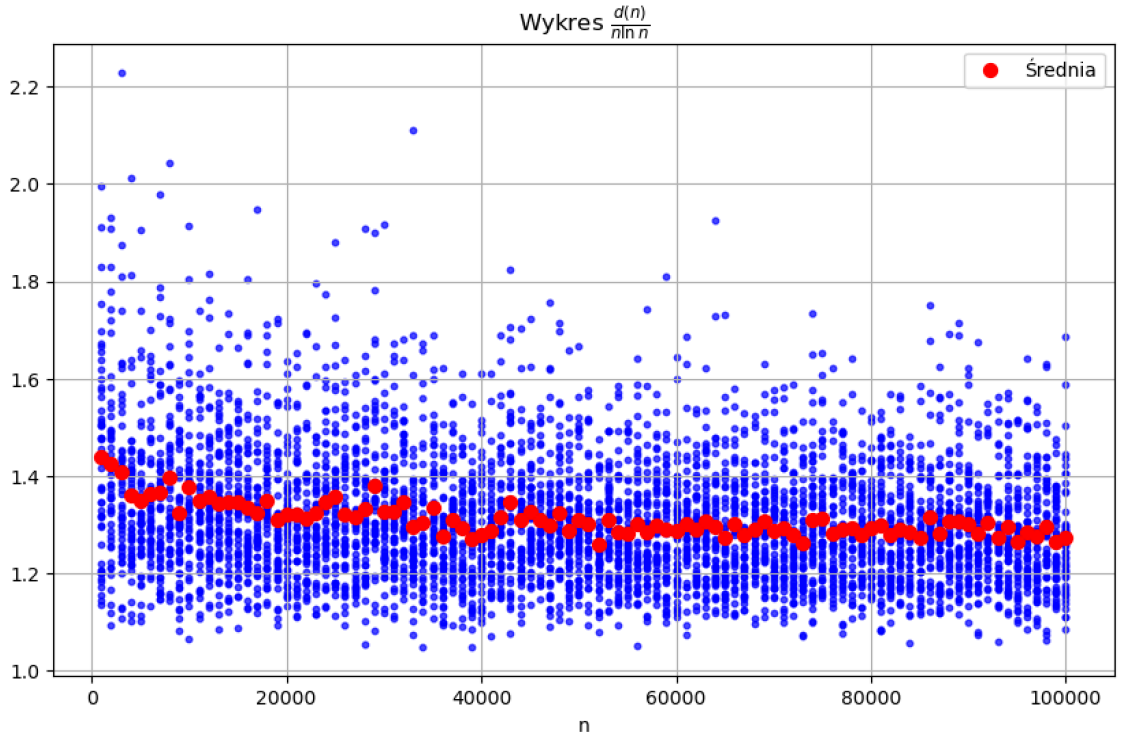

Wykres $\frac{c(n)}{n}$
Średnia
18
16
14
12
10
8
6
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

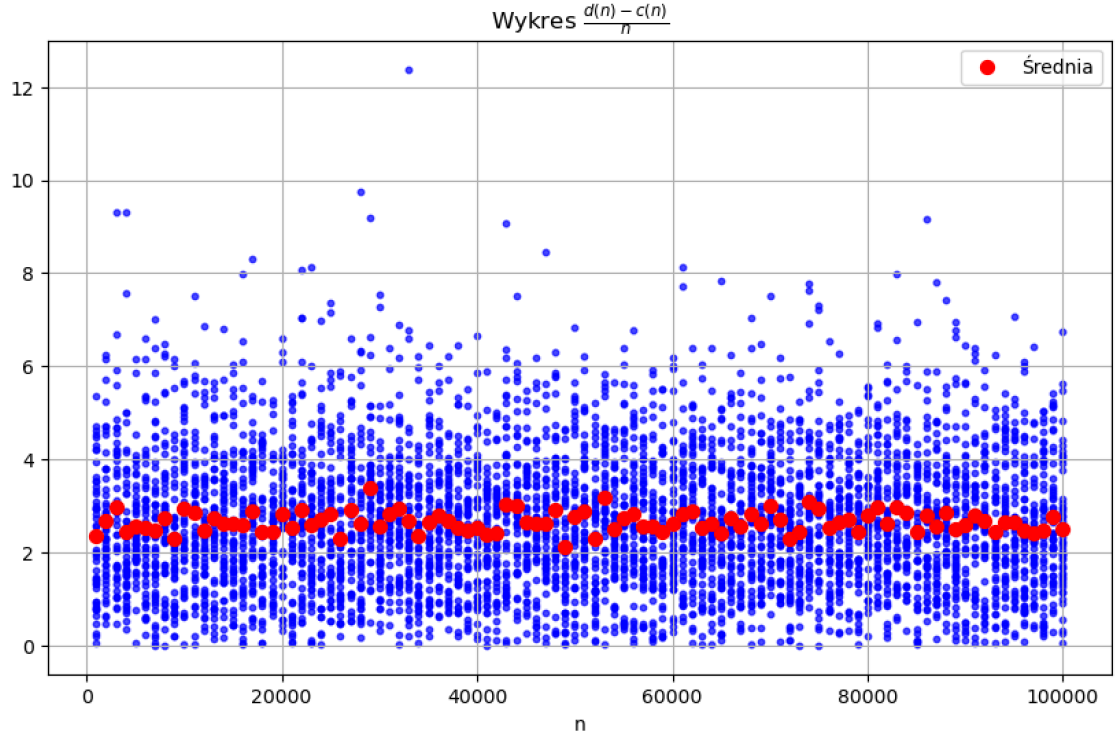

Wykres $\frac{c(n)}{n \ln n}$
Średnia
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0.8
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

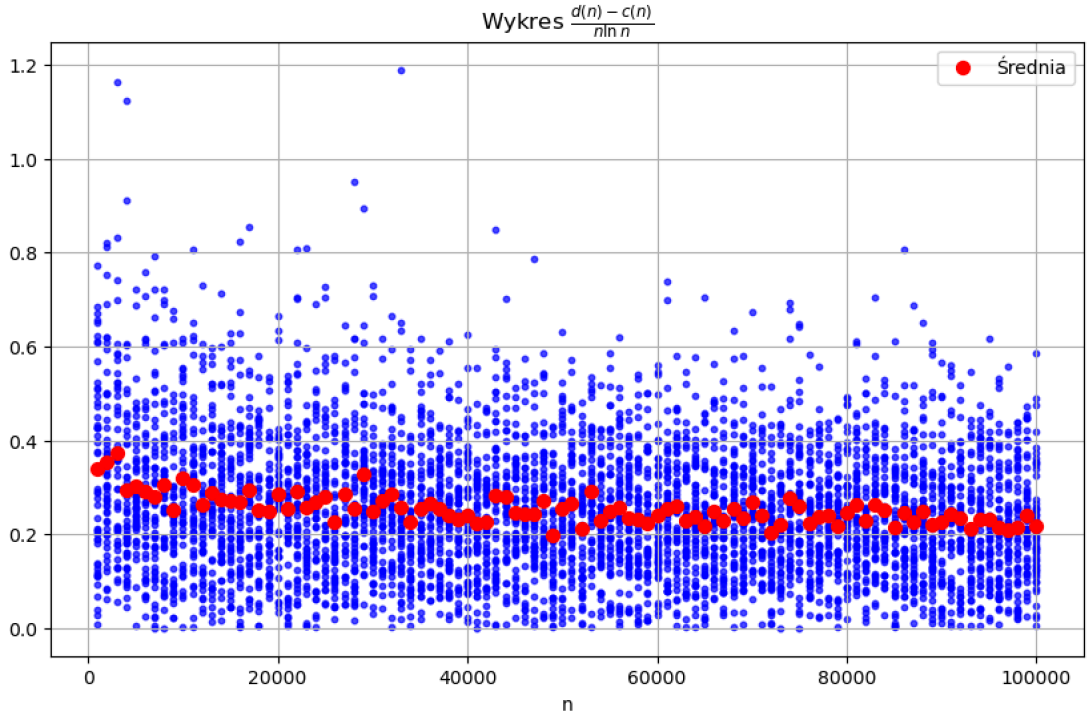

Wykres $\frac{d(n)}{n}$
Średnia
22
20
18
16
14
12
10
8
0
20000
40000
60000
80000
100000
n

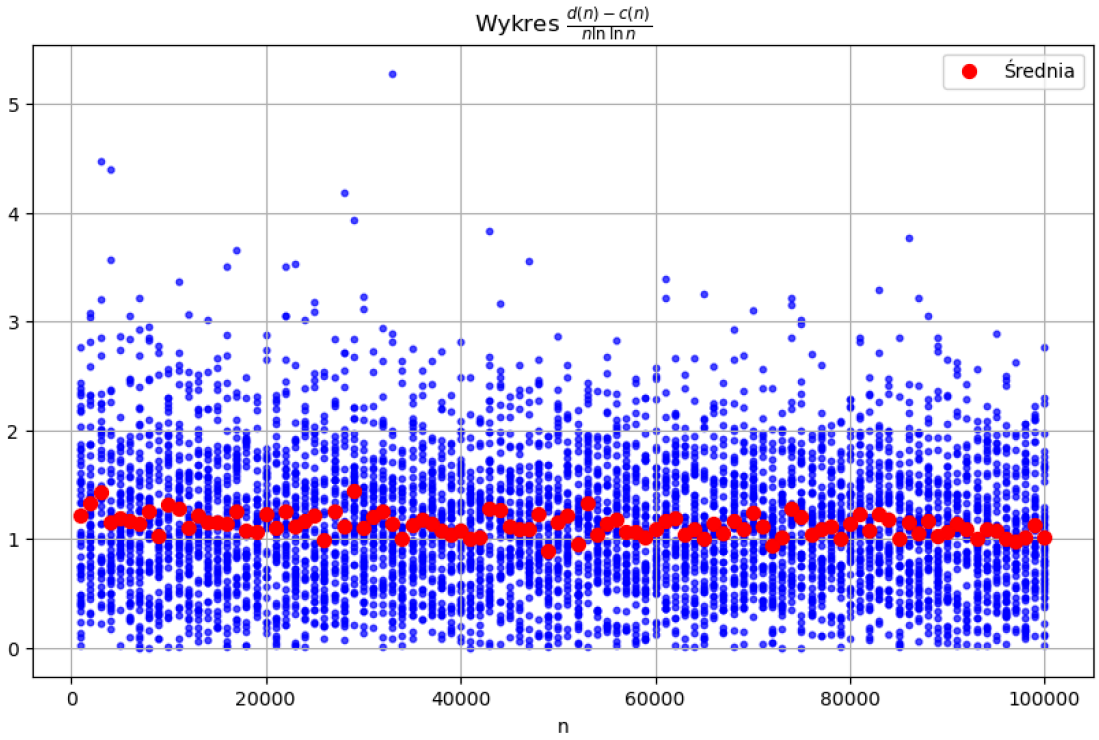

Wykres $\frac{c(n)}{n^2}$
Średnia
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0
20000
40000
60000
80000
100000
n


Wykres $\frac{d(n)}{n^2}$
Średnia
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
0.000
0
20000
40000
60000
80000
100000
n


Wykres $\frac{d(n)}{n \ln n}$
Średnia
2.2
2.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n


Wykres $\frac{d(n)-c(n)}{n}$
Średnia
12
10
8
6
4
2
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n


Wykres $\frac{d(n)-c(n)}{n\ln n}$
Średnia
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n


Wykres $\frac{d(n)-c(n)}{n \ln \ln n}$
Średnia
5
4
3
2
1
0
0
20000
40000
60000
80000
100000
n