Algorytmy i Struktury Danych - ćwiczenia

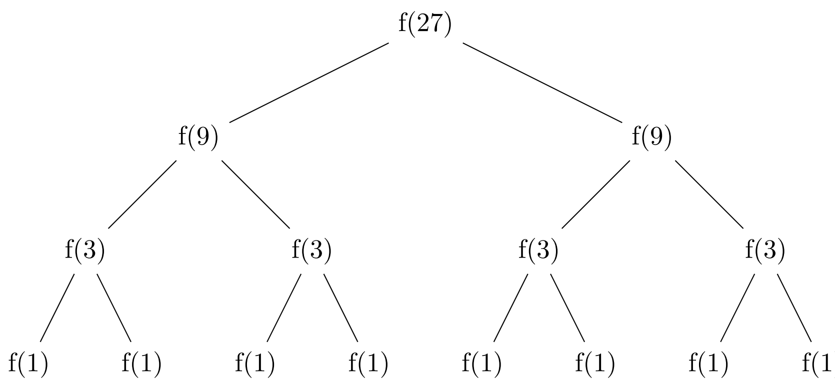
Wojciech Typer

zadanie 1/ lista1
Zadanie sprowadza się do znalezenia najmniejszego n, takiego, że:
$44n^2 < 2^n$
najmniejszym takim n jest $n = 13$
indukcyjnie można pokazać, że dla każdych następnych n
nierówność dalej będzie zachowana:
zał: $44n^2 < 2^n$
krok indukcyjny:
$44(k+1)^2 < 2^{k+1}$
$44(k^2 + 2k + 1) < 2^k * 2$
$44k^2 + 88k + 44 < 2^k * 2$
z założenia mamy, że: $44k^2 < 2^k$
więc musimy pokazać, że: $88k + 44 < 2^k (k \geq 13)$
Ten fragment jest już bardzo łatwo udowodnić indukcyjnie.

zadanie 2/ lista1
znając $f(n) = t$, musimy znaleźć n
przeliczmy jednostki czasu na mikrosekundy:
$1s = 10^6 \mu s$, $30min = 1.8 * 10^9 \mu s$ i $1wiek = 3.1 * 10^{15} \mu s$
zatem:
$log_{10}(n) = 10^6 \rightarrow n = 10^{60}$,
$log_{10}(n) = 1.8 * 10^9 \rightarrow n = 10^1.8 * 10^9$,
$log_{10}(n) = 3.1 * 10^{15} \rightarrow n = 10^3.1 * 10^{15}$
$\sqrt{n} = 10^6 \rightarrow n = 10^{12}$, $\sqrt{n} = 1.8 * 10^9 \rightarrow n = 3.24 * 10^{18}$,
$\sqrt{n} = 3.1 * 10^{15} \rightarrow n = 9.61 * 10^{30}$
$2^n = 10^6 \rightarrow n = 19, 2^n = 1.8 * 10^9 \rightarrow n = 30.7, 2^n = 3.1 * 10^{15} \rightarrow n = 51$
$n! = 10^6 \rightarrow n = 9, n! = 1.8 * 10^9 \rightarrow n = 13, n! = 3.1 * 10^{15} \rightarrow n = 18$

zadanie 3/ lista1
1. $e^\pi \rightarrow O(1)$
2. $7(log_{10}(n))^7 \rightarrow O((log(n))^7)$
3. $\sqrt{2\pi n} \rightarrow O\sqrt{n}$
4. $13n + 13 \rightarrow O(n)$
5. $44n^2 * log(n) \rightarrow O(n^2 * log(n))$
6. $10^n \rightarrow O(10^n)$
7. $33^n \rightarrow O(33^n)$

zadanie 1/ lista2



Funkcja f(n) dwukrotnie wywołuje samą siebie dla n/3. Drzewo rekurencji dla $n = 3^3$ zostało przedstawione powyżej.
Funkcja dzieli n przez 3 w każdym kroku, aż do osiągnięcia n = 1.
Głębokość drzewa rekurencji wynosi zatem: $log_3(n)$
Na każdym poziomie drzewa liczba wywołań funkcji się podwaja,
i idąc od góry jest to: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{log_3(n)}$
co daje: $2^{log_3(n)+1} - 1$
zatem złożoność obliczeniowa wynosi: $O(2^{log_3(n)})$

zadanie 2/ lista2
$h(n) = \Theta(p(n))$, jeśli istnieją takie stałe c_1, c_2, n_0, że:
dla każdego n zachodzi:
$c_1 p(n) \leq h(n) \leq c_2 p(n)$
i $\exists n_0$ takie, że $f(n_0)$ i $g(n_0)$ są dodatnie.
Zauważmy przy tym, że funkcje f i g są niemalejące oraz asymptotycznie nieujemne, tzn. istnieje n_0, takie że dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi
$f(n) \geq 0$ oraz $g(n) \geq 0$.

Wtedy:
$\forall n \geq n_0$ zachodzi: $f(n) \geq f(n_0)$ i $g(n) \geq g(n_0)$.
Musimy pokazać, że: $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

Ograniczenie z góry:
$max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$.
Największa z dwóch liczb $f(n)$ i $g(n)$ nigdy nie przekroczy ich sumy,
czyli mamy ograniczenie górne: $max(f(n), g(n)) = 1 \cdot (f(n) + g(n))$,
czyli możemy przyjąć $c_2 = 1$.

Ograniczenie z dołu:
$max(f(n), g(n)) \geq \frac{1}{2} \cdot (f(n) + g(n))$.
Ponieważ jeśli $f(n) \geq g(n)$ to $f(n) \geq \frac{1}{2}(f(n) + g(n))$,
więc możemy przyjąć $c_1 = \frac{1}{2}$.

Zatem istnieją stałe c_1, $c_2 \geq 0$, spełniające definicję Θ,
więc $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.
c.n.w

zadanie 3/ lista2
1. $P(i, j) = O(1)$
Złożoność pętli wewnętrzenj while: $O(n-1)$
Złożoność pętli zewnętrznej for to: $\sum_{i=1}^{n} O(n-1)$
Jest to suma ciągu arytmetycznego $\frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$
Zatem złożoność algorytmu to: $O(n^2)$

2. $R(i, j) = O(j)$
$R(i, j) = \Theta(j)$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\log_2 \frac{n}{i}} \Theta(2^k \cdot i) = \sum_{i=1} n \cdot \Theta(i) \cdot \sum_{k=1}^{\log_2 \frac{n}{i}} \cdot 2^k$
$= \sum_{i=1}^{n} \Theta((\frac{1-2^{log_2 \frac{n}{i}} \cdot 2}{-1} - 1)i)$
$= \sum_{i=1}^{n} \Theta((-(1 - \frac{n}{i}) - 1)i)$
$= \sum_{i=1}^{n} \Theta(\frac{n}{2} - 2i)$
$= \Theta(\sum_{i=1}^{n}(\frac{n}{2} - 2i))$
$= \Theta(\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{n} 2i)$
$= \Theta(\frac{n^2}{2} - 2 \cdot \frac{i(n+1)}{2})$
$= \Theta(\frac{n^2}{2} - \frac{2n^2+2n}{2})$
$= \Theta(-\frac{n^2}{2} - n)$

Przypomnienie Master Theorem:

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + \Theta(n^d)$
gdzie:

- a $\rightarrow$ liczba podproblemów w rekursji
- b $\rightarrow$ współczynnik zmniejszenia rozmiaru problemu
- d $\rightarrow$ wykładnik w potędze n kosztu pracy poza rekurencją

Wówczas:

- $\Theta(n^d)$, jeśli $d > log_b(a)$
- $\Theta(n^d \cdot log(n))$, jeśli $d = log_b(a)$
- $\Theta(n^{log_b(a)})$, jeśli $d < log_b(a)$

zadanie 4/ lista2

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$

  a = 2, b = 2, d = 0

  $log_2(2) = 1$

  $d < log_b(a)$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)}) = \Theta(n)$

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

  a = 2, b = 2, d = 1

  $log_b(a) = log_2(2) = 1$

  $log_b(a) = d$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n \cdot log(n))$

- $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n \cdot log(n)$

  a = 3, b = 2, f(n) = n $\cdot log(n)$

  $log_2(3) \approx 1.58$

  Teraz porównajmy tempo wzrostu licząc granicę: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{log_2(3)}}{n \cdot log(n)}$

  $lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.58}}{log(n)}$

  Z zasady de l'Hospitala:

  $lim_{n\to\infty} \frac{0.58n^{-0.42}}{\frac{1}{n}}$

  $lim_{n\to\infty} 0.58n^{0.58} = \infty$

  Zatem widzimy, że $n^{log_b(a)}$ rośnie szybciej niż $f(n)$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n^{log_2(3)}) = \Theta(n^{1.58})$

Zadanie 5

W tablicy B przechowujemy sumę elementów z tablicy A do indeksu i;

Załóżmy, że A = [5, 6, 7, 8, 9, 1]

Wówczas B = [5, 11, 18, 26, 35, 36]

Tablicę B możemy stworzyć jako:

for i = 2..n

B[i] = B[i - 1] + A[i]

Anser(a, b)

return B[b] - B[a - 1]

Czas wykonania algorytmu jest stały; O(1)

zadanie 6

Korzystamy z takiego algorytmu, którego złożoność obliczeniowa to : $O(3^{log_2(n)})$

zadanie 5 / lista 3

- $T(n) = 5T(\frac{n}{2}) + \Theta(n \cdot logn)$
  $T'(n) = 5T'(\frac{n}{2}) + n^{\log_2 5}$
  z MT: $n \cdot logn = O(n^{log_2 5})$
  Zatem: $T(n) = O(T'(n))$
  $T''(n) = 5T''(\frac{n}{2}) + n$
  $log_2 5 > 1 \rightarrow T''(n) = \Theta(n^{log_2 5})$
  $T(n) = \Omega(T''(n))$
- $T(n) = 2T(n-1) + \Theta(1)$
  $T(n) = \sum_{i=1}^{n} 2^i = \Theta(2^n)$
- $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + \Theta(n^2)$ Z MT: $\Theta(n^2 \cdot logn)$

Widzimy, że najlepszą opcją bedzie wybór algorytmu nr 1

zadanie 3 / lista 4
Na początku stwórzmy funkcję pomocniczą, wyznaczającą medianę
jednej if n mod 2 == 0 return 0.5 $\cdot$ (C[n/2] + C[n/2 + 1])
else return C[$\lceil n/2 \rceil$]

Teraz zapiszmy funkcję spełniającą wymogi zadania:
SortedArraysMedian(A[1..n], B[1..n], n)
if n == 1 return 0.5 $\cdot$ (A[1] + B[1])
if n == 2 return 0.5 $\cdot$ (max(A[1], B[1]) + min(A[2], B[2]))
medianA = Median(A[1..n], n)
medianB = Median(B[1..n], n)
if medianA == medianB return medianA
else if medianA < medianB return SortedArraysMedian($A[\lfloor n/2 \rfloor$ + 1..n] ,
B[1..$n - \lfloor n/2 \rfloor$], n - $\lfloor n/2 \rfloor$)
else return SortedArraysMedian($A[1..n - \lfloor n/2 \rfloor]$, B[$\lfloor n/2 \rfloor$ + 1..n], n - $\lfloor n/2 \rfloor$)