Algorytmy i Struktury Danych - ćwiczenia

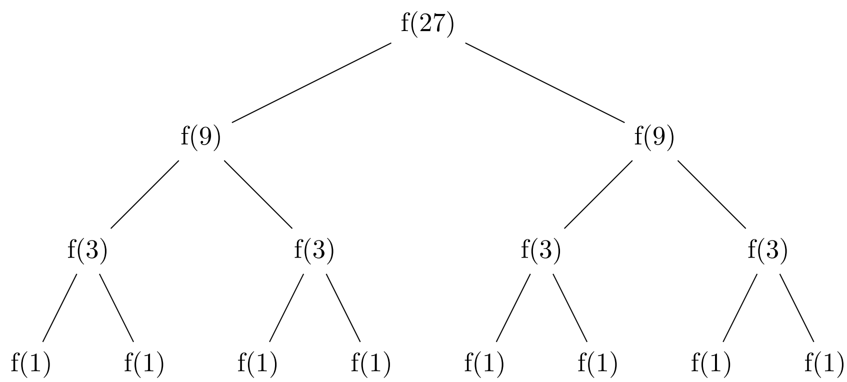
Wojciech Typer

zadanie 1/ lista1
Zadanie sprowadza się do znalezienia najmniejszego n, takiego, że:
$44n^2 < 2^n$
najmniejszym takim n jest $n = 13$
indukcyjnie można pokazać, że dla każdych następnych n
nierówność dalej będzie zachowana:
zał: $44n^2 < 2^n$
krok indukcyjny:
$44(k+1)^2 < 2^{k+1}$
$44(k^2+2k+1) < 2^k * 2$
$44k^2 + 88k + 44 < 2^k * 2$
z założenia mamy, że: $44k^2 < 2^k$
więc musimy pokazać, że: $88k + 44 < 2^k (k \geq 13)$
Ten fragment jest już bardzo łatwo udowodnić indukcyjnie.

zadanie 2/ lista1
znając $f(n) = t$, musimy znaleźć n
przeliczmy jednostki czasu na mikrosekundy:
$1s = 10^6 \mu s$, $30min = 1.8 * 10^9 \mu s$ i $1wiek = 3.1 * 10^{15} \mu s$
zatem:
$log_{10}(n) = 10^6 \to n = 10^{60}$,
$log_{10}(n) = 1.8 * 10^9 \to n = 10^1.8 * 10^9$,
$log_{10}(n) = 3.1 * 10^{15} \to n = 10^3.1 * 10^{15}$
$\sqrt{n} = 10^6 \to n = 10^{12}$, $\sqrt{n} = 1.8 * 10^9 \to n = 3.24 * 10^{18}$,
$\sqrt{n} = 3.1 * 10^{15} \to n = 9.61 * 10^{30}$
$2^n = 10^6 \to n = 19, 2^n = 1.8 * 10^9 \to n = 30.7, 2^n = 3.1 * 10^{15} \to n = 51$
$n! = 10^6 \to n = 9, n! = 1.8 * 10^9 \to n = 13, n! = 3.1 * 10^{15} \to n = 18$

zadanie 3/ lista1
1. $e^\pi \to O(1)$
2. $7(log_{10}(n))^7 \to O((log(n))^7)$
3. $\sqrt{2\pi n} \to O\sqrt{n}$
4. $13n + 13 \to O(n)$
5. $44n^2 * log(n) \to O(n^2 * log(n))$
6. $10^n \to O(10^n)$
7. $33^n \to O(33^n)$

zadanie 1/ lista2



Funkcja f(n) dwukrotnie wywołuje samą siebie dla n/3. Drzewo rekurencji dla $n = 3^3$ zostało przedstawione powyżej.
Funkcja dzieli n przez 3 w każdym kroku, aż do osiągnięcia n = 1.
Głębokość drzewa rekurencji wynosi zatem: $log_3(n)$
Na każdym poziomie drzewa liczba wywołań funkcji się podwaja,
i idąć od góry jest to: $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^{log_3(n)}$
co daje: $2^{log_3(n)+1} - 1$
zatem złożoność obliczeniowa wynosi: $O(2^{log_3(n)})$

zadanie 2/ lista2
$h(n) = \Theta(p(n))$, jeśli istnieją takie stałe c_1, c_2, n_0, że:
dla każdego n zachodzi:
$c_1 p(n) \leq h(n) \leq c_2 p(n)$
i $\exists n_0$ takie, że $f(n_0)$ i $g(n_0)$ są dodatnie.
Zauważmy przy tym, że funkcje f i g są niemalejące oraz asymptotycznie nieujemne, tzn. istnieje n_0, takie że dla każdego $n \geq n_0$ zachodzi $f(n) \geq 0$ oraz $g(n) \geq 0$.

Wtedy:
$\forall n \geq n_0$ zachodzi: $f(n) \geq f(n_0)$ i $g(n) \geq g(n_0)$.
Musimy pokazać, że: $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.

Ograniczenie z góry:
$max(f(n), g(n)) \leq f(n) + g(n)$.
Największa z dwóch liczb $f(n)$ i $g(n)$ nigdy nie przekroczy ich sumy,
czyli mamy ograniczenie górne: $max(f(n), g(n)) = 1 \cdot (f(n) + g(n))$,
czyli możemy przyjąć $c_2 = 1$.

Ograniczenie z dołu:
$max(f(n), g(n)) \geq \frac{1}{2} \cdot (f(n) + g(n))$.
Ponieważ jeśli $f(n) \geq g(n)$ to $f(n) \geq \frac{1}{2}(f(n) + g(n))$,
więc możemy przyjąć $c_1 = \frac{1}{2}$.

Zatem istnieją stałe c_1, $c_2 \geq 0$, spełniające definicję Θ,
więc $max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n))$.
c.n.w

zadanie 3/ lista2
1. $P(i, j) = O(1)$
Złożoność pętli wewnętrzenj while: $O(n - 1)$
Złożoność pętli zewnętrznej for to: $\sum_{i=1}^{n} O(n - 1)$
Jest to suma ciągu arytmetycznego $\frac{(n-1)n}{2} = O(n^2)$
Zatem złożoność algorytmu to: $O(n^2)$

2. $R(i, j) = O(j)$
Złożoność pętli wewnętrznej while:
j rośnie wykładniczo: j, 2j, 4j, 8j...
Zatem koszt każdej iteracji to O(j) + O(2j) + ... O(n)
Jest to ciąg geometryczny, którego suma jest proporcjonalna do największego wyrazu: O(n)
Złożoność pętli zewnętrznej for to: $\sum_{i=1}^{n} O(n)$
Więc tak jak w poprzednim przypadku złożoność tego algorytmu to: $O(n^2)$

Przypomnienie Master Theorem:

$T(n) = aT(\frac{n}{b}) + \Theta(n^d)$
gdzie:

- a $\rightarrow$ liczba podproblemów w rekursji
- b $\rightarrow$ współczynnik zmniejszenia rozmiaru problemu
- d $\rightarrow$ wykładnik w potędze n kosztu pracy poza rekurencją

Wówczas:

- $\Theta(n^d)$, jeśli $d > log_b(a)$
- $\Theta(n^d \cdot log(n))$, jeśli $d = log_b(a)$
- $\Theta(n^{log_b(a)})$, jeśli $d < log_b(a)$

zadanie 4/ lista2

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$

  a = 2, b = 2, d = 0

  $log_2(2) = 1$

  $d < log_b(a)$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n^{log_b(a)}) = \Theta(n)$

- $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$

  a = 2, b = 2, d = 1

  $log_b(a) = log_2(2) = 1$

  $log_b(a) = d$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n \cdot log(n))$

- $T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + n \cdot log(n)$

  a = 3, b = 2, f(n) = n $\cdot log(n)$

  $log_2(3) \approx 1.58$

  Teraz porównajmy tempo wzrostu licząc granicę: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{log_2(3)}}{n \cdot log(n)}$

  $lim_{n\to\infty} \frac{n^{0.58}}{log(n)}$

  Z zasady de l'Hospitala:

  $lim_{n\to\infty} \frac{0.58n^{-0.42}}{\frac{1}{n}}$

  $lim_{n\to\infty} 0.58n^{0.58} = \infty$

  Zatem widzimy, że $n^{log_b(a)}$ rośnie szybciej niż $f(n)$

  Zatem z zasady Master Theorem:

  $T(n) = \Theta(n^{log_2(3)}) = \Theta(n^{1.58})$