

Algorytmy i Struktury Danych

Wojciech Typer

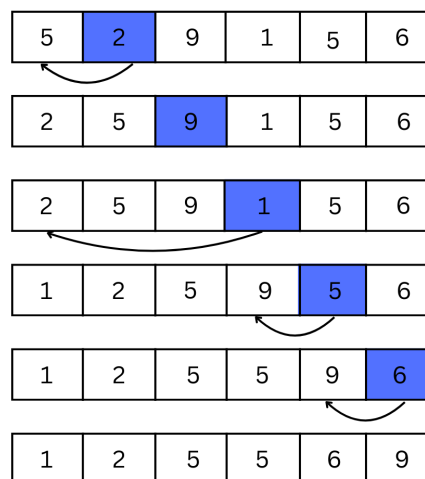
Algorithm 1 Insertion Sort

```
1: procedure INSERTIONSORT( $A, n$ )
2:   for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
3:      $key = A[i]$ 
4:      $j = i - 1$ 
5:     while  $j \geq 0$  and  $A[j] > key$  do
6:        $A[j + 1] = A[j]$ 
7:        $j = j - 1$ 
8:     end while
9:      $A[j + 1] = key$ 
10:  end for
11: end procedure
```

Złożoność czasowa: $O(n^2)$

Best case: w najlepszym przypadku złożoność czasowa będzie wynosić $O(n)$

Złożoność pamięciowa: $O(1)$



Algorithm 2 Merge Sort

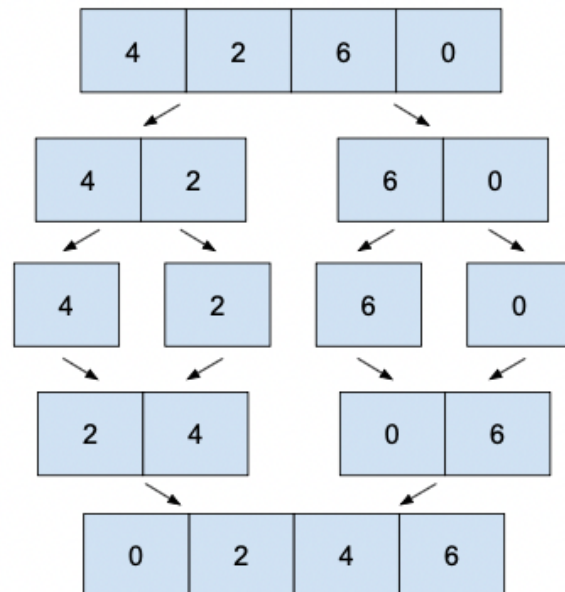
```
1: procedure MERGESORT( $A, 1, n$ )
2:   if  $|A[1..n]| == 1$  then
3:     return  $A[1..n]$ 
4:   else
5:      $B = \text{MergeSort}(A, 1, \lfloor n/2 \rfloor)$ 
6:      $C = \text{MergeSort}(A, \lfloor n/2 \rfloor, n)$ 
7:     return Merge( $B, C$ )
8:   end if
9: end procedure
```

Algorithm 3 Merge

```
1: procedure MERGE( $X[1..k], Y[1..n]$ )
2:   if  $X = \emptyset$  then
3:     return  $Y$ 
4:   else if  $Y = \emptyset$  then
5:     return  $X$ 
6:   else if  $X[1] \leq Y[1]$  then
7:     return  $[X[1]] \times \text{Merge}(X[2..k], Y[1..n])$ 
8:   else
9:     return  $[Y[1]] \times \text{Merge}(X[1..k], Y[2..n])$ 
10:  end if
11: end procedure
```

Złożoność czasowa Merge Sort: $O(n \log n)$

Złożoność pamięciowa Merge Sort: $O(n)$



Istnieje również iteracyjna wersja algorytmu Merge, sort, która została przedstawiona poniżej w postaci pseudokodu.

Algorithm 4 IterativeMergeSort

```

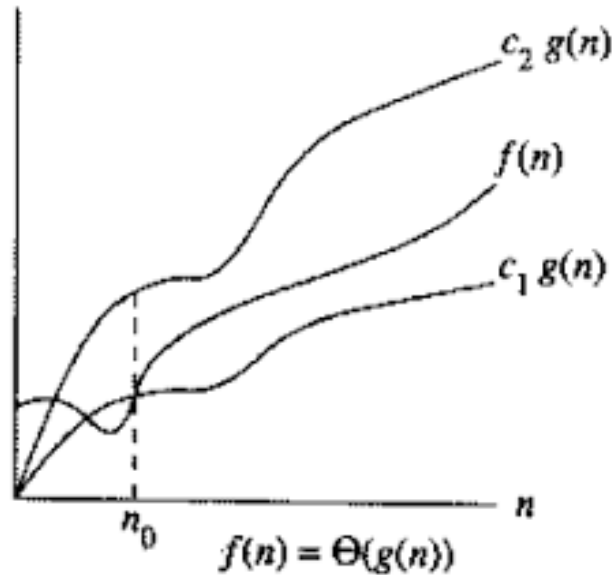
1: procedure ITERATIVEMERGESORT( $A[1..n]$ )
2:   for  $size = 1$  to  $n - 1$  by  $size \times 2$  do
3:     for  $left = 0$  to  $n - 1$  by  $2 \times size$  do
4:        $mid \leftarrow \min(left + size - 1, n - 1)$ 
5:        $right \leftarrow \min(left + 2 \times size - 1, n - 1)$ 
6:       MERGE( $A$ ,  $left$ ,  $mid$ ,  $right$ )
7:     end for
8:   end for
9: end procedure

```

Złożoność czasowa Iterative Merge Sort: $O(n \log n)$ - dzieje się tak, ponieważ $size$ jest podwajany o 2 w każdej iteracji, więc potrzebujemy około $\log_2 n$ iteracji, a w każdej z nich wykonujemy $O(n)$ operacji.

Złożoność pamięciowa Iterative Merge Sort: $O(n)$

Notacja asymptotyczna $O: f(n) = O(g(n)) \rightarrow (\exists c > 0)(\exists n_0 \in N) : \forall n \geq n_0 \rightarrow 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$



$$f(n) = O(g(n)) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} < \infty$$

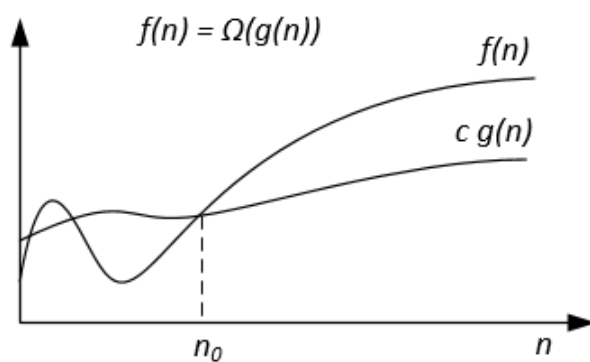
Notacja asymptotyczna - własności

a) $f(n) = n^3 + O(n^2) \rightarrow (\exists h(n) = O(n^2))(f(n) = n^3 + h(n))$

b) $n^2 + O(n) = O(n^2) \rightarrow (\forall f(n) = O(n))(\exists h(n) = O(n^2))(n^2 + f(n) - h(n))$

Notacja Ω

$$f(n) = \Omega(g(n)) \rightarrow (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c * g(n) \leq |f(n)|)$$



Notacja Ω - własności

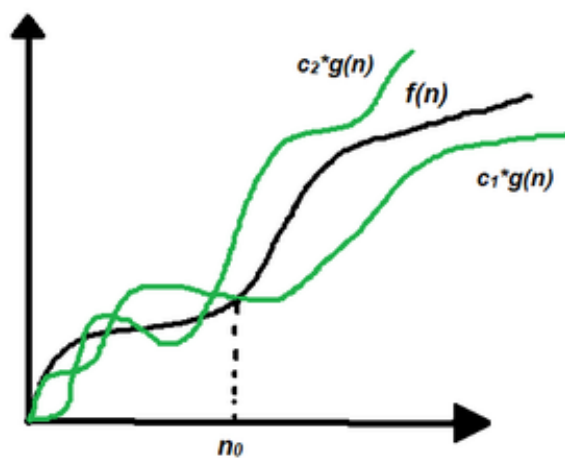
a) $n^3 = \Omega(2n^2)$

b) $n = \Omega(\log(n))$

c) $2n^2 = \Omega(n^2)$

Notacja Θ

$$f(n) = \Theta(g(n)) \rightarrow (\exists c_1, c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(c_1 g(n) \leq |f(n)| \leq c_2 g(n))$$



$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

Notacja o- małe

$$f(n) = o(g(n)) \rightarrow (\forall c > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)(|f(n)| < c * |g(n)|)$$

Notacja o- małe - przykłady

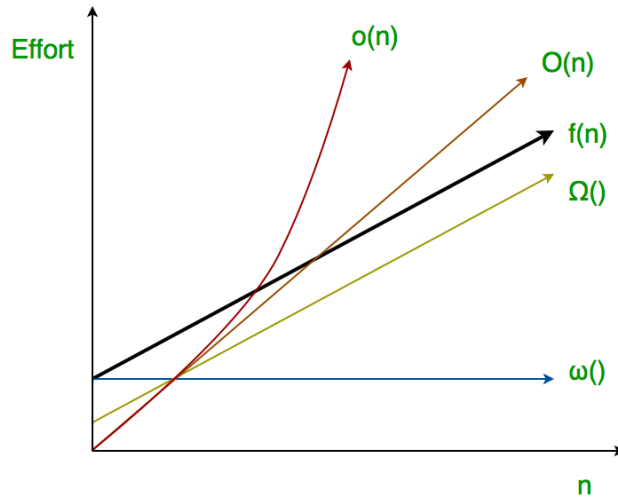
a) $117n \log(n) = o(n^2)$

b) $n^2 = o(n^3)$

Notacja ω

$$f(n) = \omega(g(n)) \rightarrow (\forall c > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n \geq n_0)(|f(n)| > c * |g(n)|)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f(n)|}{|g(n)|} = \infty$$



Rekurencje

Metoda podstawiania (metoda dowodzenia indukcyjnego)

1. Zgadnij odpowiedź (bez stałych)
2. Sprawdź przez indukcję, czy dobrze zgadliśmy
3. Znajdź stałe

Przykład 1:

$$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Pierwszy strzał: $T(n) = O(n^3)$

Cel: pokazać, że $(\exists c > 0) T(n) \leq c * n^3$

Krok początkowy: $T(1) = \Theta(1) = c * 1^3 = c$

Krok indukcyjny: zał. że, $(\forall k < n)(T(k) \leq c * k^3) =$

Dowód: $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4c * \left(\frac{n}{2}\right)^3 + n = \frac{1}{2}cn^3 + n =$
 $= cn^3 - \frac{1}{2}cn^3 + n = cn^3 - \left(\frac{1}{2}cn^3 - n\right) \leq cn^3$

Pokazaliśmy, że $T(n) = O(n^2)$

Spróbujmy wzmocnić zał. indukcyjne: $T(n) \leq c_1 n^2 - c_2 n$

$$T(n) \leq 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n \leq 4\left(c_1\left(\frac{n}{2}\right)^2 - c_2\frac{n}{2}\right) + n = \\ = c_1 n^2 - 2c_2 n + n = c_1 n^2 - (2c_2 - 1)n \leq c_1 n^2 - c_2 n$$

Musimy dobrać takie c_1, c_2 , aby $2c_1 \geq c_2$

Wówczas otrzymamy $T(1) = O(1) \leq c_1 1^2 - c_2 1$

Przykład 2:

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log(n)$$

Założmy, że n jest potęgą dwójki $n = 2^m \rightarrow m = \log(n)$

$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m$$

oznaczymy $T(2^m) = S(m)$

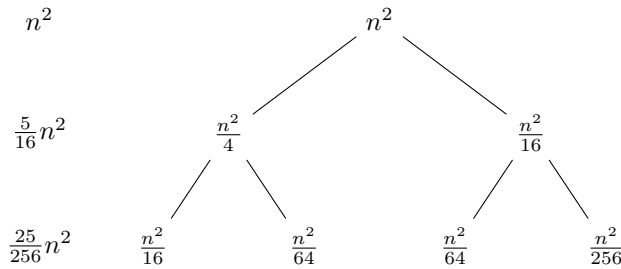
$$T(2^m) = 2T(2^{m/2}) + m \rightarrow 2S(m/2) + m$$

$$S(m) = O(m \log(m))$$

$$T(n) = O(\log(n) \log(\log(n))) \text{ (formalnie powinniśmy to udowodnić)}$$

Drzewo rekursji

$$\text{Przykład : } T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$



Trzeba pamiętać, że drzewo rekursji samo w sobie nie jest formalnym rozwiązaniem problemu. Nie można go używać do dowodzenia złożoności algorytmów. Jest to jedynie intuicyjne podejście do problemu. Formalnie $T(n)$ należałoby policzyć jako sumę wszystkich wierzchołków w drzewie rekursji:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k \cdot n^2 = n^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{5}{16}\right)^k = n^2 \frac{1}{1 - \frac{5}{16}} = n^2 \frac{16}{11} = \frac{16}{11} n^2$$

Widzimy zatem, że $T(n) = O(n^2)$

Master Theorem

Niech $a \geq 1, b > 1, f(n), d \in \mathbb{N}$ oraz $f(n)$ będzie funkcją nieujemną. Rozważmy rekurencję:

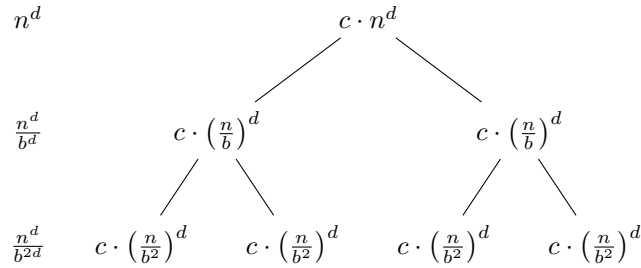
$$T(n) = aT\left(\frac{a}{b}\right) + \Theta(n^d)$$

Wówczas:

- $\Theta(n^d)$, jeśli $d > \log_b a$
- $\Theta(n^d \log(n))$, jeśli $d = \log_b a$
- $\Theta(n^{\log_b a})$, jeśli $d < \log_b a$

Do przedstawienia problemu użyjemy drzewa rekursji. Rozważmy rekurencję:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + \Theta(n^d)$$



1. suma kosztów w k -tym kroku

$$a^k c \left(\frac{n}{b^k}\right)^d = c \left(\frac{a}{b^d}\right)^k n^d$$

gdzie $c \left(\frac{n}{b^k}\right)^d$ to koszt jednego podproblemu w k -tym kroku

2. obliczenie wysokości drzewa:

$$\frac{n}{b^h} = 1 \rightarrow h = \log_b n$$

3. Obliczenie $T(n)$

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta \left(\sum_{k=0}^{\log_b n} c \frac{a^k}{b^{kd}} n^d \right) \\ &= \Theta \left(c \cdot n^d \sum_{k=0}^{\log_b n} \left(\frac{a}{b^d} \right)^k \right) \\ &= \Theta \left(c \cdot n^d \frac{1 - \left(\frac{a}{b^d} \right)^{\log_b n + 1}}{1 - \frac{a}{b^d}} \right) \\ &\Rightarrow T(n) = \Theta(n^d) \end{aligned}$$

4. rozważmy 3 przypadki:

(a) $d > \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^d)$$

(b) $d = \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^d \log n)$$

(c) $d < \log_b a$

$$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$$

Przykłady

- $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + 11n$

Wtedy korzystając z **Master Theorem** mamy:

$$a = 4, b = 2, d = 1$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_2 4 = 2 > 1 = d \implies T(n) = \Theta(n^2)$$

- $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + 3n^2$

Wtedy

$$a = 4, b = 3, d = 2$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_3 4 < 2 = d \implies T(n) = \Theta(n^2)$$

- $T(n) = 27T(\frac{n}{3}) + \frac{n^2}{3}$

Wtedy

$$a = 27, b = 3, d = 2$$

Jak i również

$$\log_b a = \log_3 27 = 3 > 2 = d \implies T(n) = \Theta(n^3 \log n)$$

Metoda dziel i zwyciężaj (D&C)

Na czym ona polega?

1. Podział problemu na mniejsze podproblemy
2. Rozwiązanie rekurencyjnie mniejsze podproblemy
3. połącz rozwiązania podproblemów w celu rozwiązania problemu wejściowego

Algorytm – Binary Search

- **Input:** posortowana tablica $A[1..n]$ oraz element x
- **Output:** indeks i taki, że $A[i] = x$ lub 0 jeśli x nie występuje w A
- przebieg algorytmu:

Algorithm 5 Binary Search

```
1: procedure BINARYSEARCH( $A, x$ )
2:    $l = 1$ 
3:    $r = |A|$ 
4:   while  $l \leq r$  do
5:      $m = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$ 
6:     if  $A[m] = x$  then
7:       return  $m$ 
8:     else if  $A[m] < x$  then
9:        $l = m + 1$ 
10:    else
11:       $r = m - 1$ 
12:    end if
13:  end while
14:  return 0
15: end procedure
```

- **Asymptotyka** Algorytm spełnia następującą rekurencję:

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(1)$$

Rozwiązując za pomocą **Master Theorem** otrzymujemy:

$$T(n) = \Theta(\log n)$$

Divide & Conquer

Problem: Obliczenie x^n .

Rozwiązanie naiwną metodą iteracyjną:

$$x^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \Rightarrow \Theta(n)$$

Rozwiązanie za pomocą Divide & Conquer:

$$x^n = \begin{cases} (x^{\frac{n}{2}}) \cdot (x^{\frac{n}{2}}), & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \\ (x^{\frac{n-1}{2}}) \cdot (x^{\frac{n-1}{2}}) \cdot x, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$$

Rekurencyjna złożoność czasowa:

$$T(n) = T(n/2) + \Theta(1) = \Theta(\log n)$$

Problem: Obliczenie n -tej liczby Fibonacciego

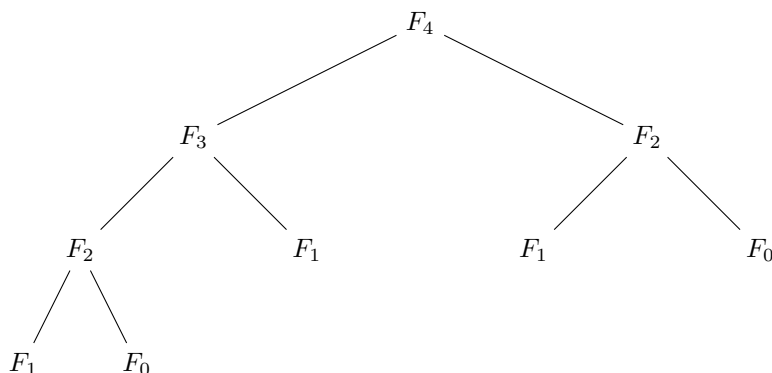
Metoda rekurencyjna:

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2)$$

Ma ona złożoność wykładniczą:

$$\Theta(\phi^n), \quad \text{gdzie } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Drzewo rekurencyjne dla F_4 :



Wzór jawny:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - (-\phi)^{-n})$$

Obliczanie F_n macierzą: Zamiast rekurencji można użyć potęgowania macierzy, co daje optymalną złożoność. Dla każdego $n \geq 0$ zachodzi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

Potęgowanie macierzy metodą szybkiego potęgowania daje czas:

$$\Theta(\log n)$$

co jest znaczną poprawą w porównaniu do wykładniczej rekurencji.

Mnożenie liczb binarnych metodą Divide & Conquer

Wejście: x, y **Wyjście:** $x \cdot y$

Każdą liczbę można rozbić na dwie połowy:

$$x = x_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R$$

$$y = y_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + y_R$$

Podstawiając do iloczynu:

$$xy = (x_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R) \cdot (y_L \cdot 2^{\frac{n}{2}} + y_R)$$

Po rozwinięciu:

$$xy = x_L y_L \cdot 2^n + (x_L y_R + x_R y_L) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R y_R$$

Rekurencyjna zależność czasowa:

$$T(n) = 4T(n/2) + \Theta(n)$$

Zastosowanie **Master Theorem** daje:

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

co pokazuje, że metoda ta nie poprawia złożoności względem standardowego mnożenia.

Optymalizacja: metoda Gaussa

Zamiast wykonywać 4 mnożenia rekursywne, można zastosować zasadę Gaussa:

$$xy = x_L y_L \cdot 2^n + ((x_L + x_R)(y_L + y_R) - x_L y_L - x_R y_R) \cdot 2^{\frac{n}{2}} + x_R y_R$$

Dzięki temu zamiast 4 mnożeń wykonujemy tylko 3:

$$T(n) = 3T(\frac{n}{2}) + \Theta(n)$$

Zastosowanie **Master Theorem** daje:

$$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$$

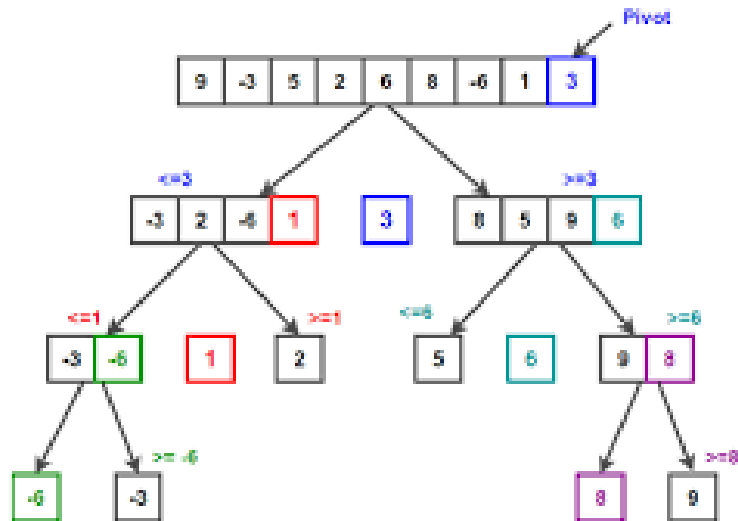
Algorithm 6 Multiply - Mnożenie dużych liczb binarnych metodą Gaussa

```
1: procedure MULTIPLY( $x, y$ )
2:    $n \leftarrow \max(|x|, |y|)$ 
3:   if  $n = 1$  then
4:     return  $x \cdot y$ 
5:   end if
6:    $m \leftarrow \lceil n/2 \rceil$ 
7:    $x_L, x_R \leftarrow$ 
8:    $y_L, y_R \leftarrow$ 
9:    $p_1 \leftarrow \text{MULTIPLY}(x_L, y_L)$ 
10:   $p_2 \leftarrow \text{MULTIPLY}(x_R, y_R)$ 
11:   $p_3 \leftarrow \text{MULTIPLY}((x_L + x_R), (y_L + y_R))$ 
12:  return  $p_1 \cdot 2^{2m} + (p_3 - p_1 - p_2) \cdot 2^m + p_2$ 
13: end procedure
```

QuickSort

Algorithm 7 QuickSort - Sortowanie szybkie

```
1: procedure QUICKSORT( $A, low, high$ )
2:   if  $low < high$  then
3:      $p \leftarrow \text{PARTITION}(A, low, high)$ 
4:     QUICKSORT( $A, low, p - 1$ )
5:     QUICKSORT( $A, p + 1, high$ )
6:   end if
7: end procedure
8:
9: procedure PARTITION( $A, low, high$ )
10:   $pivot \leftarrow A[high]$ 
11:   $i \leftarrow low - 1$ 
12:  for  $j \leftarrow low$  to  $high - 1$  do
13:    if  $A[j] \leq pivot$  then
14:       $i \leftarrow i + 1$ 
15:      SWAP( $A[i], A[j]$ )
16:    end if
17:  end for
18:  SWAP( $A[i + 1], A[high]$ )
19:  return  $i + 1$ 
20: end procedure
```



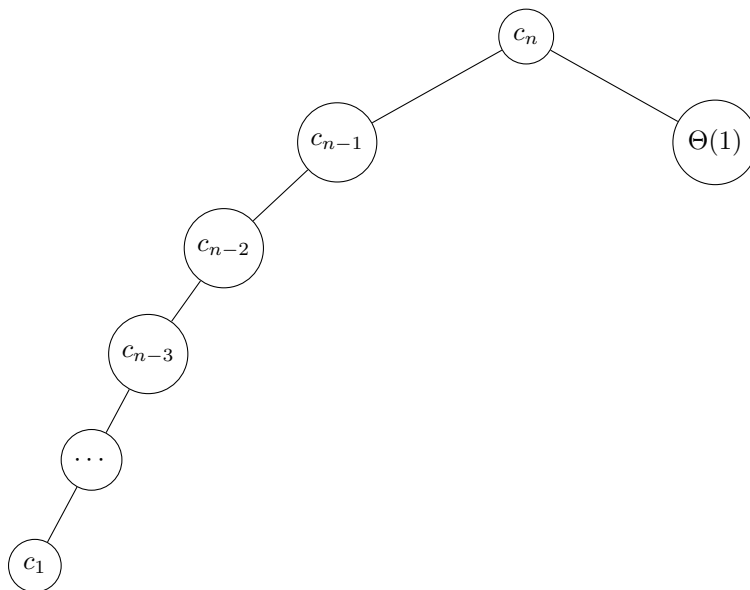
Algorithm 8 Hoare Partition

```
1: procedure HOARE_PARTITION( $A, p, q$ )
2:    $pivot \leftarrow A \left[ \left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor \right]$ 
3:    $i \leftarrow p - 1$ 
4:    $j \leftarrow q + 1$ 
5:   while true do
6:     repeat
7:        $i \leftarrow i + 1$ 
8:     until  $A[i] \geq pivot$ 
9:     repeat
10:       $j \leftarrow j - 1$ 
11:    until  $A[j] \leq pivot$ 
12:    if  $i \geq j$  then
13:      return  $j$ 
14:    end if
15:    swap( $A[i], A[j]$ )
16:  end while
17: end procedure
```

Analiza worst-case QuickSorta

$$T(n) = T(n-1) + T(0) + \Theta(n) = T(n-1) + \Theta(n)$$

Drzewo rekurencji (dla przypadku pesymistycznego, tj. jednostronny podział):



$$T(n) \leq \sum_{i=1}^n c \cdot i = c \cdot \sum_{i=1}^n i = \Theta(n^2)$$

Analiza best-case

Jeśli pivot zawsze dzieli tablicę na dwie równe części:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n) \Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

Analiza average-case

Niech T_n oznacza liczbę porównań dla tablicy długości n .

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{jeśli partition dzieli tablicę na } (k, n-k-1) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot (T_k + T_{n-k-1}) + (n-1)$$

Liczmy wartość oczekiwaną:

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}(x_k) \cdot (\mathbb{E}(T_k) + \mathbb{E}(T_{n-k-1})) + (n-1)$$

$$\mathbb{E}(x_k) = \frac{1}{n} \quad (\text{bo pivot jest losowy})$$

$$\begin{aligned} E(T_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (E(T_k) + E(T_{n-k-1})) + (n-1) \\ &= \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + (n-1) \\ &\Rightarrow E(T_n) = \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

Analiza avg Case'a $T_n \rightarrow$ Liczba porównań elementów sortowanej tablicy: $|A| = n$

$$x_k = \begin{cases} 1, & \text{jeśli partition dzieli tablicę na } (k, n-k-1) \\ 0, & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$T_n = \begin{cases} T_0 + T_{n-1} + n - 1, & \text{gdy}(0, n-1) - \text{split} \\ T_1 + T_{n-2} + n - 1, & \text{gdy}(1, n-2) - \text{split} \\ \dots \\ T_k + T_{n-1-k} + n - 1, & \text{gdy}(k, n-k-1) - \text{split} \\ \dots \\ T_{n-1} + T_0 + n - 1, & \text{gdy}(n-1, 0) - \text{split} \end{cases}$$

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k (T_k + T_{n-k-1}) + n - 1$$

liczymy wartość oczekiwaną:

$$\begin{aligned} E(T_n) &= E(\sum_{k=0}^{n-1} x_k (T_k + T_{n-k-1}) + n - 1) \\ E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} E(x_k \cdot (T_k + T_{n-k-1}) + n - 1) \\ E(T_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} E(x_k) \cdot E(T_k + T_{n-k-1} + n - 1) \\ E(T_n) &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} E(T_k) + \sum_{k=0}^{n-1} (E(T_{n-k-1}) + n - 1) \end{aligned}$$

Dual pivot quicksort

< LP	LP	LP ≤ & ≤ RP	RP	RP <
------	----	-------------	----	------

Wartość oczekiwana:

$$E(\text{liczba porównań w dual pivot partition}) \approx \frac{16}{9}n$$

$E(\text{liczba porównań w dual pivot qs sedwick}) \approx \frac{32}{15}n \log n$

Yaroslavsky dual pivot qs

$E(\text{liczba porównań w partition}) \approx \frac{19}{12}n$

$E(\text{liczba porównań w Dual Pivot qs Yaroslavsky}) \approx 1.9n \log n$

Strategia count

$E(\text{liczba porównań w Count Partition}) \approx \frac{3}{2}n$

$E(\text{liczba porównań w Dual Pivot qs z count}) \approx 1.8n \log n$

Comparsion Model

Dolne ograniczenie na liczbę porównań w problemie sortowania w Comparsion Model wynosi $\Omega(n \log n)$

D-d:

- dla dowolnego algorytmu sortującego możemy znaleźć odpowiadające mu drzewo decyzyjne
- $n!$ liści w binarnym drzewie decyzyjnym
- drzewo binarne pełne o wysokości h ma co najmniej 2^h liści
- ale liści w drzewie decyzyjnym powinno być co najmniej $n!$, zatem:

$$2^h \leq n! / \lg$$

$$h \leq \log_2 n!$$

$$\lg n! = \lg(\sqrt{s\pi n}(\frac{n}{e})^n(1 + o(1)))$$

$$\lg(\frac{n}{e})^n + \lg(\sqrt{2\pi n}(1 + o(1)))$$

$$n \log n - n \lg e + \lg(\sqrt{2\pi n}(2 + o(1))) = \Omega(n \log n)$$

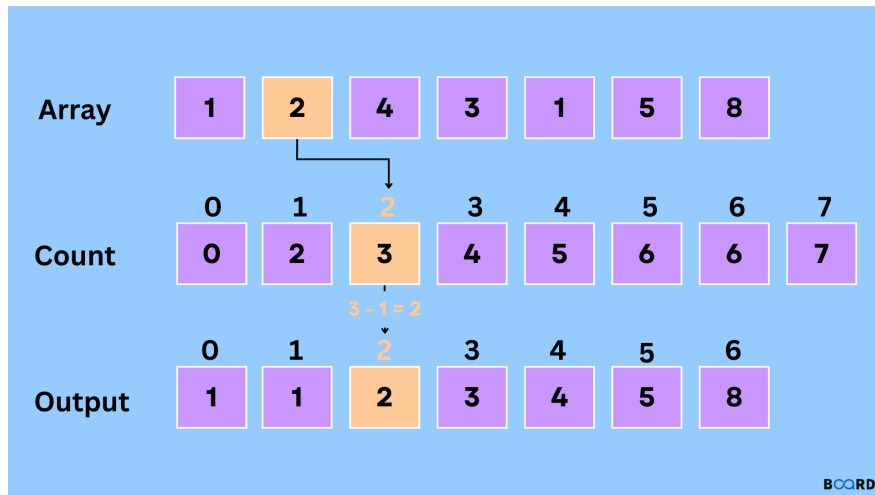
Sortowanie:

Input: $|a| = n, \forall i \in \{1, \dots, k\}$

Output: posortowana rosnąco tablica A

Algorithm 9 CountingSort

```
1: procedure COUNTING_SORT( $A, n, k$ )
2:   for  $i = 1$  to  $k$  do
3:      $C[i] \leftarrow 0$ 
4:   end for
5:   for  $i = 1$  to  $n$  do
6:      $C[A[i]] \leftarrow C[A[i]] + 1$ 
7:   end for
8:   for  $i = 2$  to  $k$  do
9:      $C[i] \leftarrow C[i] + C[i - 1]$ 
10:  end for
11:  for  $i = n$  downto  $1$  do
12:     $B[C[A[i]]] \leftarrow A[i]$ 
13:     $C[A[i]] \leftarrow C[A[i]] - 1$ 
14:  end for
15:  return  $B$ 
16: end procedure
```



Złożoność obliczeniowa Counting Sorta:
 $\Theta(n + k)$ gdzie $k = O(n)$

Stable Sorting Property

Algorytm zachowuje kolejność równych sobie elementów z tablicy wejściowej

RadixSort

Algorithm 10 RadixSort

```

1: procedure RADIX_SORT( $A, n, d$ )
2:   for  $i = 1$  to  $d$  do
3:     counting_sort( $A, n, 9$ )
4:   end for
5:   return  $A$ 
6: end procedure

```

Złożoność obliczeniowa RadixSorta

- n liczb b -bitowych
- liczb b bitowych dzielimy na r -bitowe cyfry
- cyfry są z $|0, \dots, 2^r - 1| = 2^r$
- Counting Sort sortujący n liczb względem jednej cyfry

Zatem RadixSort będzie miał złożoność obliczeniową:

$$\Theta\left(\frac{b}{r} \cdot (n + 2^r)\right)$$

Co po wykonaniu skomplikowanej analizy daje:

$$\Theta(d \cdot n)$$

Statystyki pozycyjne

Def: k -tą statystyką pozycyjną nazywam $\leftarrow k$ -tą najmniejszą wartość z zadanego zbioru

przykład:

- $k = 1 \rightarrow O(n)$
- $k = n \rightarrow O(n)$
- $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rightarrow$ sortowanie $O(n \log n)$

Algorithm 11 RandomSelect

```

1: procedure RANDOM_SELECT( $A, p, q, i$ )
2:   if  $p = q$  then
3:     return  $A[p]$ 
4:   end if
5:    $r \leftarrow \text{RandPartition}(A, p, q)$ 
6:    $k \leftarrow r - p + 1$ 
7:   if  $i = k$  then
8:     return  $A[r]$ 
9:   else if  $i < k$  then
10:    return RANDOM_SELECT( $A, p, r - 1, i$ )
11:  else
12:    return RANDOM_SELECT( $A, r + 1, q, i - k$ )
13:  end if
14: end procedure

```

Select algorithm

- dzielimy $A[p..q]$ na $\lceil \frac{n}{5} \rceil$ pięcioelementowych części oraz ostatnią część na ≤ 5 elementów
- Sortujemy te grupy i wybieramy z każdej z nich medianę
- Znajdujemy medianę M . Select($M, 1, \frac{n}{5}, \frac{n}{10}$)
- Ustalamy X jako pivot; Partition(A, p, q) i tak samo jak w RandomSelect

Select

Select(A, K) $\rightarrow T(n)$

- Dziel na 5 elementowe tablice i znajdź ich medianę $\rightarrow \Theta(n)$
- Select (...) \rightarrow znajdź medianę median $\rightarrow T(\lceil \frac{n}{5} \rceil)$
- Użyj mediany median jako pivot w Partition $\rightarrow \Theta(n)$
- Idź do lewej albo prawej podtablicy w zależności od indeksu pivota i szukaj statystyki pozycyjnej

Otrzymujemy: $t(n) = T(\lceil \frac{n}{5} \rceil) + \Theta(n)$

Struktury danych

Set interface:

- `build (A)` - buduje set z danych zawartych w A
- `length` - zwraca moc zbioru
- `find (k)` - zwraca element zbioru o kluczu równym k
- `insert (k)` - dodaje element o kluczu k do zbioru
- `delete (k)` - usuwa element o kluczu k ze zbioru
- `find_max` - zwróć element o największym kluczu
- `find_min` - zwróć element o najmniejszym kluczu
- `find_prev` - zwraca element poprzedni od klucza

Struct	build	find	insert / delete	find min / find max	find_prev	sort
unsorted array	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
sorted array	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(n)$
pointers list	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(1) / \Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
DAA	$\Theta(n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
BST	$\Theta(n)$					

Binary Search Tree

BST property :

- $x \in T$ - x jest węzłem drzewa T
- Wówczas każdy y *in* x .left ma $y.key < x.key$
- key y *in* x .right ma $y.key > x.key$

Inorder Tree Walk

Algorithm 12 Inorder Tree Walk

```
1: procedure INORDERTREEWALK( $x \in T$ )
2:   if  $x \neq \text{null}$  then
3:     INORDERTREEWALK( $x$ .left)
4:     print( $x$ )
5:     INORDERTREEWALK( $x$ .right)
6:   end if
7: end procedure
```

Tree Search

Algorithm 13 TreeSearch

```
1: procedure TREESEARCH( $x \in T, k$ )
2:   if  $x = \text{null} \vee k = x.\text{key}$  then
3:     return  $x$ 
4:   else if  $k < x.\text{key}$  then
5:     return TREESEARCH( $x.\text{left}, k$ )
6:   else
7:     return TREESEARCH( $x.\text{right}, k$ )
8:   end if
9: end procedure
```

BST - Delete

- x jest liściem - zwolnij pamięć zajmowaną przez x , wstaw wskaźnik na jego ojca (na niego / na null'a)
- x ma jedno poddrzewo - x ma syna v to:
 - zwalniamy pamięć x
 - ojciec x wskazuje na v
 - $v.p$ wskazuje na $x.p$
- x ma dwa poddrzewa:
 - znajdź następnika $x \rightarrow y$
 - zastąp dane x danymi z y
 - skasuj y

Twierdzenie: Niech T będzie losowym drzewem BST o n -węzłach. wtedy:

$$E(h(t)) \leq 3\log_2 n = o(\log n)$$

D-d:

Nierówność Jensena: f-wypukła:

$$f(E(x)) \leq E(f(x))$$

Zamiast analizować zmienną losową $h(t)$ będziemy się zajmować zmienną losową H_n , będziemy się zajmować $Y_n = 2^{H_n}$

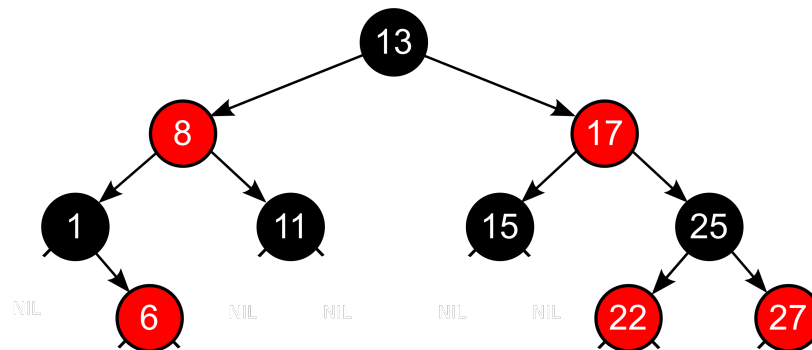
Pokażemy, że $E(Y_n) = O(n^3)$

$$2^{H_n} \leq E(2^{H_n}) = E(Y_n) = O(n^3) / \log_2$$

$$E(H_n) = 3 \cdot \log_2 n + o(\ln n)$$

Drzewa czerwono-czarne

- Drzewo czerwono-czarne jest drzewem BST
- Każdy węzeł jest czerwony albo czarny
- Korzeń oraz liście są czarne
- Czerwony węzeł nie może mieć czerwonego ojca
- Każda ścieżka od węzła do liścia ma tę samą liczbę czarnych węzłów (ścieżkę tę będziemy nazywać black-height i oznaczać jako $bh(x)$)



Lemat: Niech T będzie drzewem czerwono-czarnym o n węzłach. Wówczas wysokość drzewa T jest z góry ograniczona przez:

$$\text{wysokość}(T) \leq 2 \cdot \log_2(n + 1)$$

RB - Insert

- Wstawiamy węzeł z w taki sposób jak w BST
- $z.\text{kolor} = \text{czerwony}$
- FixUp (nie chodzi o zespół punkowy)

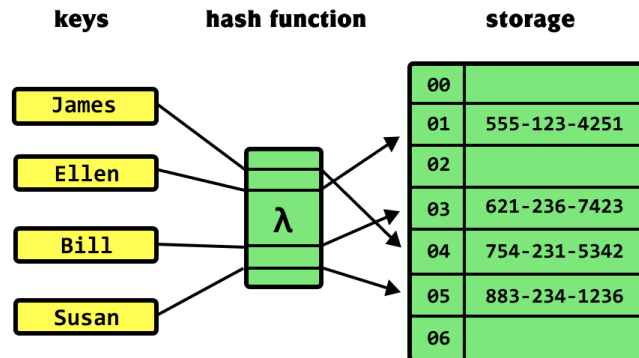
Więcej o drzewach czerwono - czarnych można znaleźć pod linkiem:

<https://inf.ug.edu.pl/~pmp/Z/ASDwyklad/czczWUd.pdf>

Directed Access Array

- klucze należą do $0, \dots, k-1$, k = moc zbioru kluczy
- klucze będziemy utożsamiać z adresami w pamięci komputera

Hash Tables

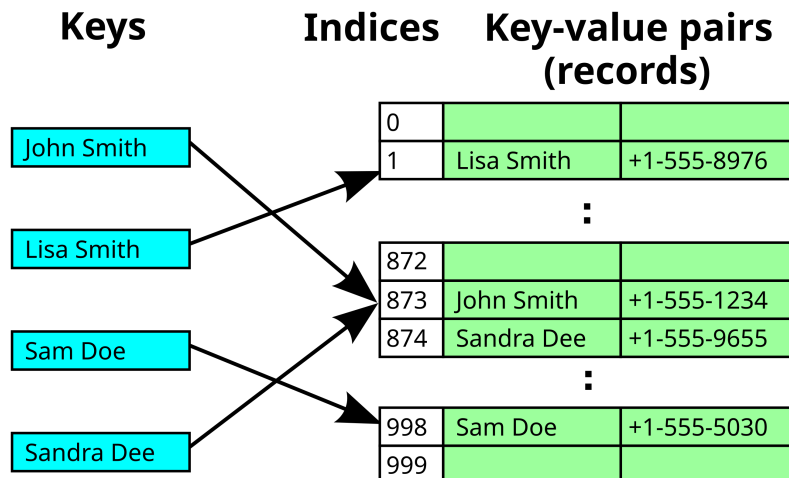


Ponieważ $k \gg m$ (k - zbiór kluczy, m - wartości hash): funkcja hash nie będzie różnowartościowa:

$$\exists k_1, k_2 : h(k_1) = h(k_2)$$

Aby poradzić sobie z tym problemem:

- open addressing



Chcemy aby funkcja $h(\text{hash})$ zwracała wyniki z rozkładu jednostajnego na zbiorze $0, \dots, m-1$

- Division hash function: $h(k) = k \bmod m$
- Universal hash function: $H_{a,b}(k) = ((a \cdot k + b) \bmod p) \bmod m$

$$H(p, m) = h_{a,b} : a, b \in 0, \dots, p-1, a \neq 0$$

Własności Universal hash function:

- Universal hash property:

$$P_{h \in H}(h(k_i) = h(k_j)) \leq \frac{1}{m}, \forall k_i, k_j \in \{0, \dots, k-1\}$$

D - d:

zakładamy, że $h_{a,b}$ ma Universal Hash Property.

$$a \cdot x + b \equiv a \cdot y + b + i \cdot m \bmod p$$

Skoro $p > k$, $x \neq y \rightarrow x - y \neq 0$ oraz ma odwrotność mod p .

$$a \equiv i \cdot m \cdot (x - y)^{-1} \bmod p$$

zatem otrzymujemy:

$$P_r(\text{kolizja}) \leq \frac{\lfloor \frac{p-1}{m} \rfloor}{p-1} \leq \frac{\frac{p-1}{m}}{p-1} = \frac{1}{m} \text{ Wartość oczekiwana kolizji jest rzędu } \Theta(1)$$

Wzbogacanie struktur danych

- Ex - dynamiczne statystyki pozycyjne
 - dynamiczna struktura danych
 - OS-Select(i) - zwróci i-tą statystykę pozycyjną z danych
 - OS-Rank(x) - numer statystyki pozycyjnej X w danych

Algorithm 14 OS-Select

```

1: procedure OS-SELECT( $x, i$ )
2:    $k \leftarrow \text{size}(x.\text{left}) + 1$ 
3:   if  $i = k$  then
4:     return  $x$ 
5:   else if  $i < k$  then
6:     return OS-SELECT( $x.\text{left}, i$ )
7:   else
8:     return OS-SELECT( $x.\text{right}, i - k$ )
9:   end if
10: end procedure

```

Algorithm 15 OS-Rank

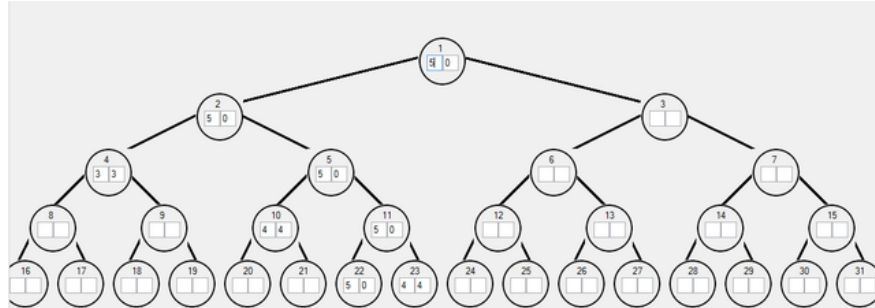
```

1: procedure OS-RANK( $x$ )
2:    $r \leftarrow \text{size}(x.\text{left}) + 1$ 
3:    $y \leftarrow x$ 
4:   while  $y \neq \text{root}$  do
5:     if  $y = y.\text{parent}.\text{right}$  then
6:        $r \leftarrow r + \text{size}(y.\text{parent}.\text{left}) + 1$ 
7:     end if
8:      $y \leftarrow y.\text{parent}$ 
9:   end while
10:  return  $r$ 
11: end procedure

```

- Metodologia wzbogacenia struktur danych
 - Wybierz strukturę
 - Wybrać dodatkową informację, która ma być przechowywana w strukturze
 - Upewnić się, że złożoność obliczeniowa operacji na strukturze danych nie ulegnie pogorszeniu
 - Zaprojektować dodatkowe operacje na strukturze danych, wykorzystującą dodatkową informację

Drzewa przedziałowe



Własności:

- Przechowuje punkty oraz wszystkie przedziały związane z tymi punktami
- Jest zrównoważone
- Odpowiada na pytania dotyczące przedziałów w czasie logarytmicznym

Algorithm 16 IntervalSearch

```

1: procedure INTERVALSEARCH( $i, T$ )
2:    $x \leftarrow \text{root}(T)$ 
3:   while  $x \neq \text{null}$  and  $(i.\text{low} > x.\text{high} \text{ or } x.\text{low} > i.\text{high})$  do
4:     if  $x.\text{left} \neq \text{null}$  and  $i.\text{low} < x.\text{left}.m$  then
5:        $x \leftarrow x.\text{left}$ 
6:     else
7:        $x \leftarrow x.\text{right}$ 
8:     end if
9:   end while
10:  return  $x$ 
11: end procedure

```

Programowanie dynamiczne

Programowanie dynamiczne to technika projektowania algorytmów polegająca na rozwiązywaniu podproblemów i zapamiętywaniu ich wyników
Przykład: n -ta liczba Fibonacciego (memoizacja):

Algorithm 17 FibonacciMemo

```
1: procedure FIBONACCI MEMO( $n, memo$ )
2:   if  $n \leq 1$  then
3:     return  $n$ 
4:   end if
5:   if  $memo[n] \neq -1$  then
6:     return  $memo[n]$ 
7:   end if
8:    $memo[n] \leftarrow \text{FIBONACCI MEMO}(n - 1, memo) + \text{FIBONACCI MEMO}(n - 2, memo)$ 
9:   return  $memo[n]$ 
10: end procedure
```

Problem wydawania reszty

Dane: $c_1 < c_2 < \dots < c_k$ - zbiór nominałów $\in \mathbb{N}$

Szukamy minimalnej liczby monet, które sumują się do kwoty n

Niech $L(i)$ będzie minimalną liczbą monet dla reszty i

$$L(i) = 1 + \min_{1 \leq j \leq n} \{L(i - c_j) : c_j \leq i\}$$

Problem plecakowy

Dane: n przedmiotów, w_i - waga przedmiotu i , v_i - wartość przedmiotu i

Ograniczenie górne na pojemność plecaka: W

Szukamy maksymalnej wartości przedmiotów, które zmieszczą się w plecaku: $\mathbb{I} \in \{1, \dots, n\}$ takie, że:

- $\sum_{i \in \mathbb{I}} w_i \leq W$
- $\sum_{i \in \mathbb{I}} v_i$ jest maksymalne

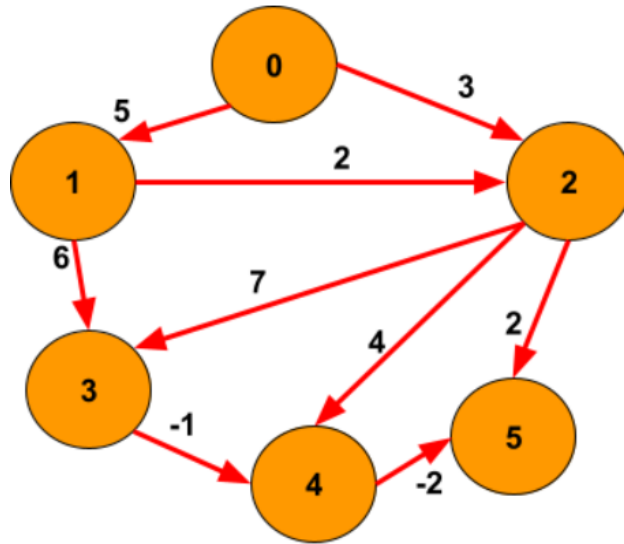
Algorithm 18 Algorytm plecakowy

```
1: procedure KNAPSACK( $W, w, c, n$ )
2:   utwórz tablicę  $A[0 \dots W]$ 
3:   for  $i \leftarrow 0$  to  $W$  do
4:      $A[i] \leftarrow 0$ 
5:   end for
6:   for  $i \leftarrow 0$  to  $W$  do
7:     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
8:       if  $w[j] \leq i$  then
9:          $A[i] \leftarrow \max(A[i], A[i - w[j]] + c[j])$ 
10:      end if
11:    end for
12:  end for
13:  return  $A[W]$ 
14: end procedure
```

Grafiy jako struktura danych

Grafiy w informatyce to nieliniowa struktura danych, składająca się z wierzchołków (węzłów) i krawędzi, które je łączą. Modelują relacje między obiektami, jak np. sieci społecznościowe, sieci komputerowe czy mapy drogowe.

Krawędzie mogą być skierowane (grafy skierowane) lub nieskierowane (grafy nieskierowane).



W grafach możemy wyróżnić pewne węzły na podstawie ich krawędzi.

Jeżeli do węzła u nie wchodzi żadne krawędzie, to nazywamy go źródłem.

Jeżeli z węzła u nie wychodzą żadne krawędzie, to nazywamy go ujściem.

Liczenie najkrótszej ścieżki w DAG (skierowany graf acykliczny)

można wykonać w czasie $O(V + E)$, gdzie V to liczba węzłów, a E to liczba krawędzi.

$$L(A) = \max \begin{cases} L(S) + w(S, A) \\ L(C) + w(C, A) \end{cases}$$

W pseudokodzie można to zaprezentować w następujący sposób:

Algorithm 19 Najkrótsza ścieżka w DAG

```

1: procedure SHORTESTPATH( $G, E$ )
                                                    ▷ Inicjalizacja:  $\Theta(|V|)$ 
2:   for  $v \in V$  do
3:      $L(v) \leftarrow \infty$ 
4:   end for
5:    $L(S) \leftarrow 0$ 
                                                    ▷ Meat algorytmu:  $\Theta(|E|)$ 
6:   for  $v \in V \setminus \{S\}$  do
7:      $L(v) \leftarrow \min_{(u,v) \in E} \{L(u) + w(u, v)\}$ 
8:   end for
9:   return  $L$ 
10: end procedure

```

Całkowita złożoność algorytmu to $\Theta(|V| + |E|)$, ponieważ w najgorszym przypadku musimy przejść przez wszystkie węzły i krawędzie. **Edit Distance**

Przykładem wykorzystania tego problemu jest użycie go w spellcheckerach. Sugerują one poprawki do błędnie napisanych słów.

- **Input:** w_1, w_2 – słowa, Σ – alfabet
- **Output:** $EditDistance(w_1, w_2)$ – minimalna liczba operacji potrzebnych do przekształcenia w_1 w w_2
- **Problem:** Znaleźć minimalną liczbę operacji potrzebnych do przekształcenia w_1 w w_2

Zobaczmy to najpierw na **przykładzie**:

$$w_1 = \text{SNOWY}, \quad w_2 = \text{SUNNY}.$$

$d_{i,j}$		S	U	N	N	Y
	0	1	2	3	4	5
S	1	0	1	2	3	4
N	2	1	1	1	2	3
O	3	2	2	2	2	3
W	4	3	3	3	3	3
Y	5	4	4	4	4	3

Stąd

$$EditDistance(\text{SNOWY}, \text{SUNNY}) = d_{5,5} = 3,$$

czyli potrzebne są trzy podstawienia (np. $N \rightarrow U$, $O \rightarrow N$, $W \rightarrow N$).

Niech $E(i, j)$ – edit distance $w_1[1 \dots i], w_2[1 \dots j]$. Mamy następujące możliwości

- dodanie litery do $w_1 \leftarrow E(i, j - 1) + 1$
- usunięcie litery z $w_2 \leftarrow E(i - 1, j) + 1$
- podmienienie litery w $w_2 \leftarrow E(i - 1, j - 1) + 1$
- bez zmian $w_1 \leftarrow E(i - 1, j - 1)$

Przy wykonywaniu tego algorytmu musimy brać minimum z tych czterech możliwości, a więc

$$E(i, j) = \min \begin{cases} E(i, j-1) + 1 \\ E(i-1, j) + 1 \\ E(i-1, j-1) + 1 \\ E(i-1, j-1) \end{cases}$$

A jak wygląda graf?

$d_{i,j}$	0	1	2	3	4	...
0	0	1	2	3	4	5
1	1	0	1	2	3	4

Pseudokod:

Algorithm 20 Edit Distance

```

1: procedure EDITDISTANCE( $w_1, w_2$ )
2:    $n \leftarrow |w_1|$ 
3:    $m \leftarrow |w_2|$ 
4:   for  $i = 0$  to  $n$  do
5:     for  $j = 0$  to  $m$  do
6:       if  $i = 0$  then
7:          $d(i, j) = j$ 
8:       else if  $j = 0$  then
9:          $d(i, j) = i$ 
10:      else
11:         $d(i, j) = \min \begin{cases} d(i-1, j) + 1 \\ d(i, j-1) + 1 \\ d(i-1, j-1) + 1 \\ d(i-1, j-1) \end{cases}$ 
12:      end if
13:    end for
14:  end for
15:  return  $d(n, m)$ 
16: end procedure

```
