Języki Formalne i Techniki Translacji

Wojciech Typer 279730

Zadanie 8 Lista 2

Udowodnij, że klasa języków regularnych jest zamknięta na operację różnicy (zbiorów)

Chcemy udowodnić, że jeżeli języki $L_1 i L_2$ są regularne, to język $L_1 - L_2$ (rozumiany jako różnica zbiorów) też jest regularny.
Podstawą naszego dowodu będzie tożsamość z teorii zbiorów: $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$, gdzie $\overline{L_2}$ oznacza dopełnienie języka L_2, czyli zbiór wszystkich słów nad alfabetem języka L_2, które nie należą do L_2.
Teraz musimy udowodnić:

- Jeśli język L_2 jest regularny, to jego dopełnienie $\overline{L_2}$ też jest regularne.
- Jeśli $L_1 i \overline{L_2}$ są regularne, to ich przecięcie $L_1 \cap \overline{L_2}$ też jest regularne.

Dowód: Jeśli język L_2 jest regularny, to jego dopełnienie $\overline{L_2}$ też jest regularne
Skoro język L_2 jest regularny, to istnieje dla niego automat skończony deterministyczny (DFA) $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, który go rozpoznaje. Automat M akceptuje słowo w wtedy i tylko wtedy, gdy po przetworzeniu w kończy w jednym ze stanów akceptujących z F.
Żeby skonstruować automat rozpoznający dopełnienie języka L_2, wystarczy zamienić stany akceptujące na nieakceptujące i odwrotnie:

$$M_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \overline{F})$$

gdzie $\overline{F} = Q - F$
W ten sposób udało się nam skonstruować automat M_2, który akceptuje słowo w wtedy i tylko wtedy, gdy M go nie akceptuje, czyli dokładnie wtedy, gdy w należy do dopełnienia języka L_2.
Zatem $\overline{L_2}$ jest regularny.
Dowód: Jeśli $L_1 i \overline{L_2}$ są regularne, to ich przecięcie $L_1 \cap \overline{L_2}$ też jest regularne.
Skoro języki L_1 i $\overline{L_2}$ są regularne, to istnieją dla nich automaty skończone deterministyczne.
Niech:

- $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{0_1}, F_1)$ - automat rozpoznający język L_1
- $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{0_2}, F_2)$ - automat rozpoznający język $\overline{L_2}$

Teraz skonstruujmy automat, który będzie akceptował słowa należące do $L_1 \cap \overline{L_2}$.
Nazwijmy ten automat jako M_p i zdefiniujmy go następująco:

$$M_p = (Q_p, \Sigma, \delta_p, q_{p_0}, F_p), \text{ gdzie:}$$

- Q_p to iloczyn kartezjański stanów z automatów M_1 i M_2: $Q_p = Q_1 \times Q_2$
- Alfabet Σ pozostaje ten sam
- Funkcja przejścia δ_p dla każdego stanu (q_1, q_2) i symbolu $a \in \Sigma$, nowe przejście jest zdefiniowane jako: $\delta_p((q_1, q_2), a) = (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a))$
- Stan początkowy q_{p_0} to para stanów początkowych z automatów M_1 i M_2: $q_{p_0} = (q_{0_1}, q_{0_2})$

- Zbiór stanów akceptujących F_p: Słowo należy do przecięcia wtedy i tylko wtedy, gdy jest akceptowane przez oba automaty. Dlatego stan w automacie M_p jest akceptujący, gdy oba stany w parze są akceptujące: $F_p = F_1 \times F_2 = \{(q_1, q_2) | q_1 \in F_1 \text{ i } q_2 \in F_2\}$

Skonstruowaliśmy automat M_p, co dowodzi, że przecięcie języków regularnych L_1 i $\overline{L_2}$ jest również językiem regularnym.