Sprawozdanie z Laboratorium
Obliczenia Naukowe - Lista 3

Wojciech Typer

22 listopada 2025

Zadanie 1

Cel zadania

Celem zadania było zaimplementowanie metody bisekcji w języku Julia.

Idea metody

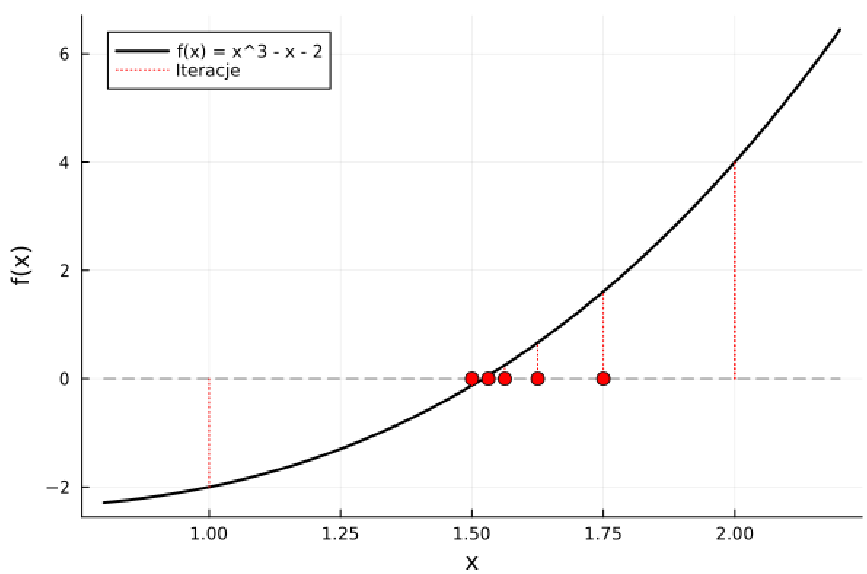
Metoda bisekcji (zwana też metodą połowienia przedziału) to iteracyjny algorytm wyznaczania miejsca zerowego funkcji ciągłej $f(x)$. Bazuje ona na własności Darboux, która gwarantuje istnienie pierwiastka w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli funkcja przyjmuje na jego końcach wartości o przeciwnych znakach:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \tag{1}$$

Idea metody polega na systematycznym zawężaniu obszaru poszukiwań poprzez:

- Wyznaczenie środka przedziału $c = \frac{a+b}{2}$.
- Sprawdzenie znaku iloczynu $f(a) \cdot f(c)$.
- Wybór tej połowy przedziału ($[a, c]$ lub $[c, b]$), w której następuje zmiana znaku funkcji.

Procedurę tę powtarza się do momentu, gdy szerokość przedziału będzie mniejsza od zadanej tolerancji δ lub wartość funkcji $|f(c)|$ spadnie poniżej ϵ.



Rysunek 1: Wizualizacja metody bisekcji dla 5 iteracji

Zadanie 2

Cel zadanie

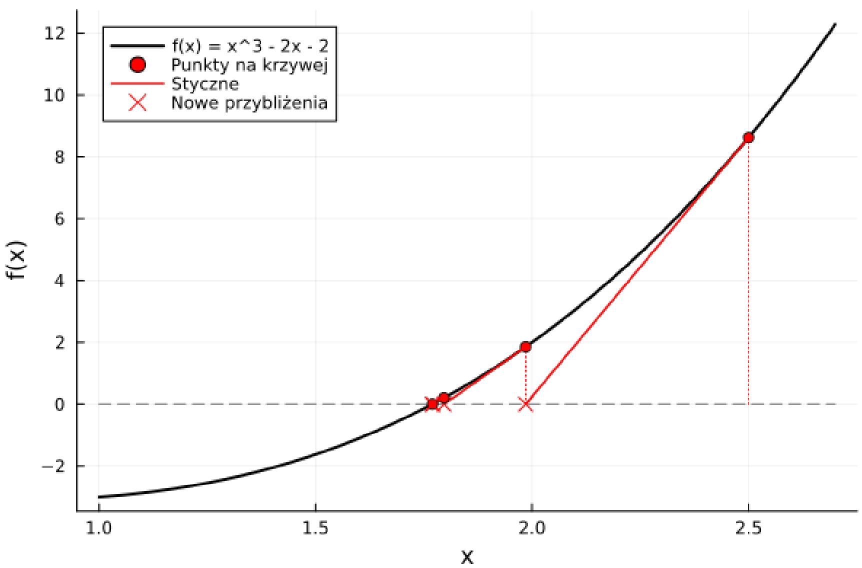
Celem zadania było zaimplementowanie metody Newtona w języku Julia.

Idea metody

Metoda Newtona (nazywana również metodą stycznych) to szybki algorytm iteracyjny służący do znajdowania przybliżonego miejsca zerowego funkcji różniczkowalnej $f(x)$. W przeciwieństwie do metody bisekcji, metoda ta wykorzystuje nie tylko wartość funkcji, ale także jej pierwszą pochodną $f'(x)$. Idea geometryczna metody polega na zastąpieniu wykresu funkcji jej styczną. W punkcie startowym x_0 prowadzimy styczną do krzywej $y = f(x)$. Punkt przecięcia tej stycznej z osią odciętych (oś OX) staje się nowym przybliżeniem pierwiastka (x_1). Proces ten powtarza się dla kolejnych punktów, zgodnie ze wzorem rekurencyjnym:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2}$$

Warunkiem koniecznym zbieżności jest odpowiedni dobór punktu startowego x_0 (musi znajdować się wystarczająco blisko pierwiastka) oraz to, aby pochodna $f'(x)$ nie była bliska zeru w otoczeniu rozwiązania. Algorytm kończy działanie, gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami ($|x_{k+1} - x_k| < \delta$) lub wartość funkcji ($|f(x_{k+1})| < \epsilon$) są dostatecznie małe.



Rysunek 2: Wizualizacja metody Newtona dla 4 iteracji

Zadanie3

Cel zadania

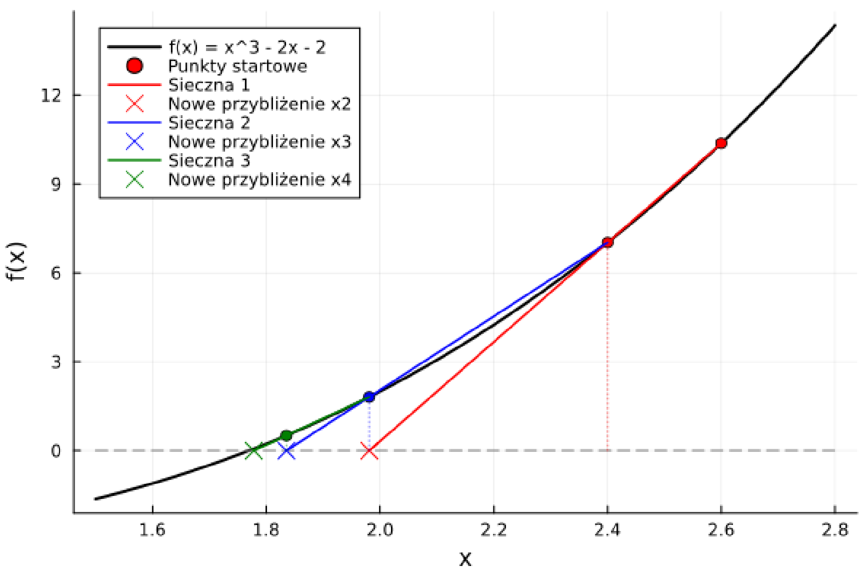
Celem zadania było zaimplementowanie metody siecznych w języku Julia.

Idea metody

Metoda siecznych jest iteracyjnym algorytmem wyznaczania miejsc zerowych funkcji, będącym wariantem metody Newtona. Jej główną zaletą jest brak konieczności analitycznego wyznaczania pochodnej funkcji $f'(x)$, co jest kluczowe w przypadkach, gdy wzór na pochodną jest skomplikowany lub niedostępny. Idea metody polega na przybliżeniu pochodnej za pomocą ilorazu różnicowego, obliczanego na podstawie dwóch poprzednich iteracji. Geometrycznie oznacza to zastąpienie stycznej (używanej w metodzie Newtona) przez sieczną przechodzącą przez dwa ostatnie punkty na wykresie funkcji: $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $(x_k, f(x_k))$. Punkt przecięcia tej prostej z osią OX wyznacza nowe przybliżenie pierwiastka x_{k+1}, zgodnie ze wzorem rekurencyjnym:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

W przeciwieństwie do metody stycznych, algorytm ten wymaga podania dwóch punktów startowych x_0 i x_1. Iteracje są kontynuowane do momentu spełnienia warunków zbieżności, analogicznych do pozostałych metod (mała różnica między kolejnymi przybliżeniami lub wartość funkcji bliska zeru).



Rysunek 3: Wizualizacja metody siecznych dla 3 iteracji

Zadanie 4

Cel zadania

Celem zadania jest wyznaczdenie pierwiasta równania $x - (\frac{1}{2})x^2 = 0$ za pomocą:

- metody bisekcji, gdzie a = 1.5, b = 2.0, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$
- metody Newtona, gdzie $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$
- metody siecznych, gdzie $x_0 = 1.0$, $x_1 = 2.0$, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$