Teoria Grafów

Wojciech Typer

Wprowadzenie do grafów prostych

Literatura:

- R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*
- D.B. West, *Introduction to Graph Theory*

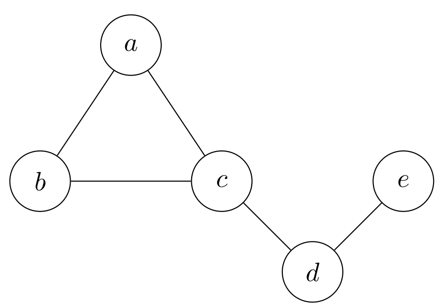
Definicja:
Grafem prostym G nazywamy parę zbiorów rozłącznych (V, E) takich, że $E \subseteq V^{(2)}$, gdzie $V^{(2)}$ to zbiór wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru V. Elementy zbioru V nazywamy **wierzchołkami**, a elementy zbioru E – **krawędziami** grafu G. Zbiór V nazywamy zbiorem wierzchołków grafu G, a zbiór E – zbiorem krawędzi grafu G.

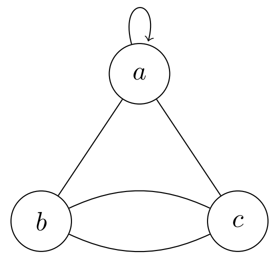
Oznaczenia:

- V – zbiór wierzchołków
- E – zbiór krawędzi

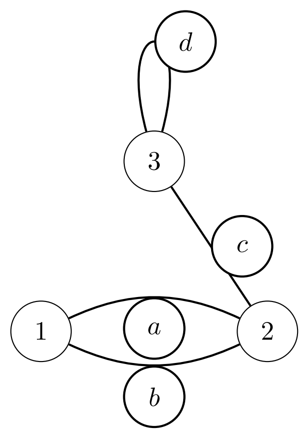
Jeżeli dwie krawędzie mają punkt wspólny, to mówimy, że są to **krawędzie incydentne**.

Przykład grafu prostego:
Załóżmy, że $V = \{a, b, c, d, e\}$, a $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.
Poniżej znajduje się wizualizacja tego grafu:





Powyższy graf jest multigrafem, zawierający multi krawędź między wierzchołkami b i c i pętlę przy wierzchołku a.
Definicja:
Grafem ogólnym G nazywamy trójkę uporządkowaną (V, E, ϕ), gdzie V i E są zbiorami rozłącznymi, a ϕ jest funkcją przyporządkowującą każdej krawędzi z E jeden lub dwa (niekoniecznie różne) wierzchołki z V. Funkcję ϕ nazywamy **funkcją incydencji**.
Przykład $G = (V, E, \phi)$
$V = 1, 2, 3$
$E = a, b, c, d$
$\phi(a) = \{1, 2\}$
$\phi(b) = \{1, 2\}$
$\phi(c) = \{2, 3\}$
$\phi(d) = \{3\}$



Definicja:
Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym, $v \in V$.
Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę:

$$\deg(v) = 2\ |\{e \in E_1 : v \in j(e)\}| + |\{e \in E_2 : v \in j(e)\}|$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi niebędących pętlami.

Lemat Eulera o uściskach dłoni
Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym.
Wówczas zachodzi:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} \left(2 \cdot \sum_{e \in E_1} [v \in j(e)] + \sum_{e \in E_2} [v \in j(e)] \right)$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi nie będących pętlami,

Ponieważ każda pętla jest incydentna tylko z jednym wierzchołkiem, lecz do stopnia liczymy ją podwójnie, oraz każda krawędź nie będąca pętlą jest incydentna z dwoma (różnymi) wierzchołkami, mamy:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E_1| + 2|E_2| = 2(|E_1| + |E_2|) = 2|E|$$

Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie ogólnym równa się dwukrotności liczby krawędzi:

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|}$$

Definicja:
Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ są **izomorficzne**, jeśli istnieje bijekcja

$$\varphi : V_1 \to V_2$$

taka, że dla każdych $v, w \in V_1$ zachodzi:

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2.$$

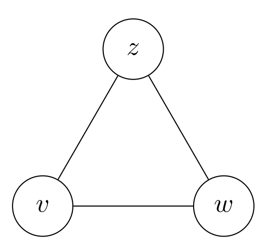
Definicja:
Graf $G = (V, E)$ nazywamy **dwudzielnym**, jeżeli istnieją rozłączne, niepuste zbiory $A, B \subseteq V$ takie, że:

- $A \cap B = \emptyset, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset$,
- $A \cup B = V$,
- każda krawędź $e = \{v, w\} \in E$ spełnia: $v \in A$ oraz $w \in B$ (lub odwrotnie).

Definicja:
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. **Trójkątem** nazywamy trójkę parami różnych wierzchołków $v, w, z \in V$, takich że:

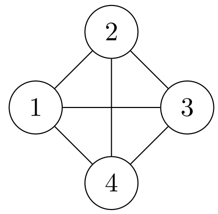
$$\{v, w\} \in E, \quad \{w, z\} \in E, \quad \{v, z\} \in E$$

Przykład:
Poniżej znajduje się graf będący trójkątem:

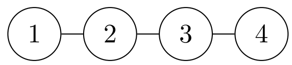


Przykłady grafów:

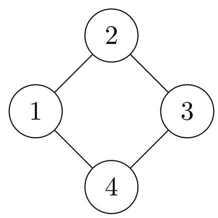
- Graf pełny



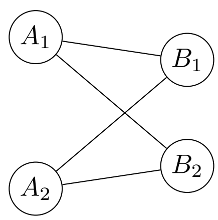
- Graf liniowy



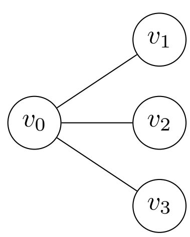
- Cykl



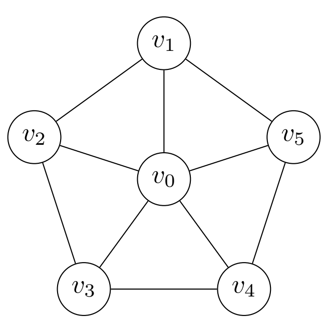
- Graf pełny dwudzielny



- Gwiazda



Graf koło:



Definicja (dopełnienie grafu):
Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, gdzie $\overline{E}$ jest zbiorem wszystkich krawędzi, które nie należą do E, tzn.

$$\overline{E} = \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w, \{v, w\} \notin E\}$$

Definicja (suma dwóch grafów):
Sumą grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ (dla $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nazywamy graf $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
Lemat 1
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym bez trójkątów. Wtedy dla każdej krawędzi $\{v, w\} \in E$ zachodzi:

$$\deg(v) + \deg(w) \leq n = |V|$$

Lemat 2
Niech $G = (V, E)$. Wówczas:

$$\sum_{\{v,w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$$

Twierdzenie (Mantela):
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach, w którym nie ma trójkąta (czyli graf nie zawiera cyklu długości 3). Wówczas:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Osiągnięcie tej liczby krawędzi jest możliwe tylko wtedy, gdy G jest grafem pełnym dwudzielnym z częściami o rozmiarach $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ i $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Dowód:
Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem prostym bez trójkąta, $|V| = n$. Niech A i B będą dwoma rozłącznymi podzbiorami V takimi, że $A \cup B = V$ i $|A| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $|B| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Każda krawędź w grafie dwudzielnym $K_{|A|,|B|}$ łączy wierzchołek z A z wierzchołkiem z B, więc liczba krawędzi wynosi $|A| \cdot |B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Pokażemy, że żaden graf prosty bez trójkąta nie może mieć więcej krawędzi. Bez straty ogólności, dla dowolnej krawędzi $\{v, w\}$ wszystkie sąsiady v i w są różne, bo inaczej powstałby trójkąt. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków jest ograniczona, a dokładniej liczba krawędzi jest maksymalna wtedy, gdy G jest kompletnym grafem dwudzielnym, czyli $|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Szkic dowodu alternatywnego: Niech v będzie wierzchołkiem o największym stopniu d. Jego sąsiedzi nie mogą być ze sobą połączeni, więc mogą mieć krawędzie tylko do pozostałych $n-d-1$ wierzchołków. Zliczając krawędzie i maksymalizując wyrażenie, otrzymujemy ograniczenie $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

Wniosek: Najwięcej krawędzi w grafie prostym bez trójkąta ma graf pełny dwudzielny z częściami możliwie równymi.