

# Teoria Grafów

Wojciech Typer

## Wprowadzenie do grafów prostych

### Literatura:

- R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*
- D.B. West, *Introduction to Graph Theory*

### Definicja:

Grafem prostym  $G$  nazywamy parę zbiorów rozłącznych  $(V, E)$  takich, że  $E \subseteq V^{(2)}$ , gdzie  $V^{(2)}$  to zbiór wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru  $V$ . Elementy zbioru  $V$  nazywamy **wierzchołkami**, a elementy zbioru  $E$  – **krawędziami** grafu  $G$ . Zbiór  $V$  nazywamy zbiorem wierzchołków grafu  $G$ , a zbiór  $E$  – zbiorem krawędzi grafu  $G$ .

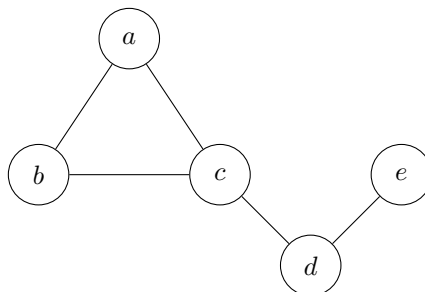
### Oznaczenia:

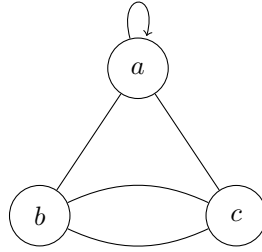
- $V$  – zbiór wierzchołków
- $E$  – zbiór krawędzi

Jeżeli dwie krawędzie mają punkt wspólny, to mówimy, że są to **krawędzie incydentne**.

### Przykład grafu prostego:

Załóżmy, że  $V = \{a, b, c, d, e\}$ , a  $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$ .  
Poniżej znajduje się wizualizacja tego grafu:





Powyższy graf jest multigrafem, zawierający multi krawędź między wierzchołkami  $b$  i  $c$  i pętlę przy wierzchołku  $a$ .

**Definicja:**

Grafem ogólnym  $G$  nazywamy trójkę uporządkowaną  $(V, E, \phi)$ , gdzie  $V$  i  $E$  są zbiorami rozłącznymi, a  $\phi$  jest funkcją przyporządkowującą każdej krawędzi z  $E$  jeden lub dwa (niekoniecznie różne) wierzchołki z  $V$ . Funkcję  $\phi$  nazywamy **funkcją incydencji**.

**Przykład**  $G = (V, E, \phi)$

$V = 1, 2, 3$

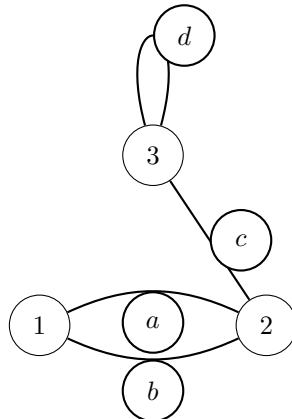
$E = a, b, c, d$

$\phi(a) = \{1, 2\}$

$\phi(b) = \{1, 2\}$

$\phi(c) = \{2, 3\}$

$\phi(d) = \{3\}$



**Definicja:**

Niech  $G = (V, E, j)$  będzie grafem ogólnym,  $v \in V$ .

**Stopniem** wierzchołka  $v$  nazywamy liczbę:

$$\deg(v) = 2 |\{e \in E_1 : v \in j(e)\}| + |\{e \in E_2 : v \in j(e)\}|$$

gdzie:

- $E_1$  — zbiór pętli,
- $E_2$  — zbiór krawędzi niebędących pętlami.

**Lemat Eulera o uściskach dłoni**

Niech  $G = (V, E, j)$  będzie grafem ogólnym.

Wówczas zachodzi:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} \left( 2 \cdot \sum_{e \in E_1} [v \in j(e)] + \sum_{e \in E_2} [v \in j(e)] \right)$$

gdzie:

- $E_1$  — zbiór pętli,
- $E_2$  — zbiór krawędzi nie będących pętlami,

Ponieważ każda pętla jest incydentna tylko z jednym wierzchołkiem, lecz do stopnia liczymy ją podwójnie, oraz każda krawędź nie będąca pętlą jest incydentna z dwoma (różnymi) wierzchołkami, mamy:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E_1| + 2|E_2| = 2(|E_1| + |E_2|) = 2|E|$$

Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie ogólnym równa się dwukrotności liczby krawędzi:

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|}$$

**Definicja:**

Grafy  $G_1 = (V_1, E_1)$  oraz  $G_2 = (V_2, E_2)$  są **izomorficzne**, jeśli istnieje bijekcja

$$\varphi : V_1 \rightarrow V_2$$

taka, że dla każdych  $v, w \in V_1$  zachodzi:

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2.$$

**Definicja:**

Graf  $G = (V, E)$  nazywamy **dwudzielnym**, jeżeli istnieją rozłączne, niepuste zbiory  $A, B \subseteq V$  takie, że:

- $A \cap B = \emptyset, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset,$
- $A \cup B = V,$
- każda krawędź  $e = \{v, w\} \in E$  spełnia:  $v \in A$  oraz  $w \in B$  (lub odwrotnie).

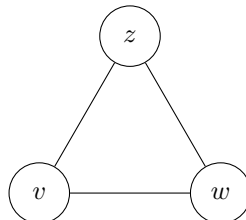
**Definicja:**

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem prostym. **Trójkątem** nazywamy trójkę parami różnych wierzchołków  $v, w, z \in V$ , takich że:

$$\{v, w\} \in E, \quad \{w, z\} \in E, \quad \{v, z\} \in E$$

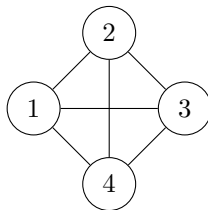
**Przykład:**

Poniżej znajduje się graf będący trójkątem:

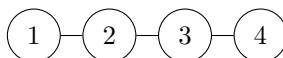


**Przykłady grafów:**

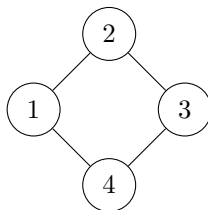
- Graf pełny



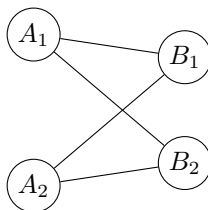
- Graf liniowy



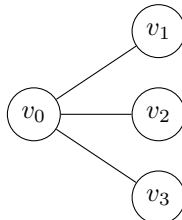
- Cykl



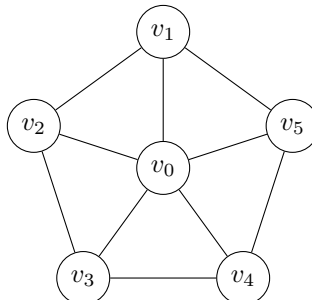
- Graf pełny dwudzielny



- Gwiazda



**Graf koło:**



**Definicja (dopełnienie grafu):**

Dopełnieniem grafu  $G = (V, E)$  nazywamy graf  $\overline{G} = (V, \overline{E})$ , gdzie  $\overline{E}$  jest zbiorem wszystkich krawędzi, które nie należą do  $E$ , tzn.

$$\overline{E} = \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w, \{v, w\} \notin E\}$$

**Definicja (suma dwóch grafów):**

Sumą grafów  $G_1 = (V_1, E_1)$  oraz  $G_2 = (V_2, E_2)$  (dla  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ) nazywamy graf  $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ .

**Lemat 1**

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem prostym bez trójkątów. Wtedy dla każdej krawędzi  $\{v, w\} \in E$  zachodzi:

$$\deg(v) + \deg(w) \leq n = |V|$$

**Lemat 2**

Niech  $G = (V, E)$ . Wówczas:

$$\sum_{\{v, w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$$

**Twierdzenie (Mantela):**

Niech  $G = (V, E)$  będzie grafem prostym o  $n \geq 3$  wierzchołkach, w którym nie ma trójkąta (czyli graf nie zawiera cyklu długości 3). Wówczas:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Osiągnięcie tej liczby krawędzi jest możliwe tylko wtedy, gdy  $G$  jest grafem pełnym dwudzielnym z częściami o rozmiarach  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  i  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

**Dowód:**

Załóżmy, że  $G = (V, E)$  jest grafem prostym bez trójkąta,  $|V| = n$ . Niech  $A$  i  $B$  będą dwoma rozłącznymi podzbiorami  $V$  takimi, że  $A \cup B = V$  i  $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $|B| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ .

Każda krawędź w grafie dwudzielnym  $K_{|A|, |B|}$  łączy wierzchołek z  $A$  z wierzchołkiem z  $B$ , więc liczba krawędzi wynosi  $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

Pokażemy, że żaden graf prosty bez trójkąta nie może mieć więcej krawędzi. Bez straty ogólności, dla dowolnej krawędzi  $\{v, w\}$  wszystkie sąsiady  $v$  i  $w$  są różne, bo inaczej powstałby trójkąt. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków jest ograniczona, a dokładniej liczba krawędzi jest maksymalna wtedy, gdy  $G$  jest kompletnym grafem dwudzielnym, czyli  $|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ .

*Szkic dowodu alternatywnego:* Niech  $v$  będzie wierzchołkiem o największym stopniu  $d$ . Jego sąsiedzi nie mogą być ze sobą połączeni, więc mogą mieć krawędzie tylko do pozostałych  $n - d - 1$  wierzchołków. Zliczając krawędzie i maksymalizując wyrażenie, otrzymujemy ograniczenie  $|E| \leq \frac{n^2}{4}$ .

**Wniosek:** Najwięcej krawędzi w grafie prostym bez trójkąta ma graf pełny dwudzielnym z częściami możliwie równymi.

## Ćwiczenia

### Zadanie 1/1

Wiemy, że ilość wszystkich par wierzchołków w grafie prostym  $G = (V, E)$  o  $n$  wierzchołkach wynosi  $\binom{n}{2}$ . Każdą parę możemy połączyć krawędzią lub nie. Zatem ilość wszystkich grafów prostych na  $n$  wierzchołkach wynosi:

$$2^{\binom{n}{2}}$$

**Pytanie:** Ile z nich ma dokładnie  $m$  krawędzi?

Jest to równoważne z wyborem  $m$  krawędzi spośród wszystkich  $\binom{n}{2}$  możliwych, zatem:

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

### zadanie 1/2

**Pytanie:** Czy istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie?

Taki graf  $n$ -wierzchołkowy musiałby mieć wierzchołki o stopniach:  $0, 1, 2, \dots, n-1$ . Wierzchołek o stopniu  $n-1$  jest połączony z wszystkimi innymi wierzchołkami, co oznacza, że nie może istnieć wierzchołek o stopniu 0 (izolowany). Zatem nie istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie.

### zadanie 1/3

**Pytanie:** Czy suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie prostym może być nieparzysta?

Nie, ponieważ zgodnie z lematem o uściskach dłoni (handshaking lemma), suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest równa podwojonej liczbie krawędzi ( $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ ), a więc jest zawsze liczbą parzystą.