Sprawozdanie z Laboratorium
Obliczenia Naukowe - Lista 3

Wojciech Typer

23 listopada 2025

Zadanie 1

Cel zadania

Celem zadania było zaimplementowanie metody bisekcji w języku Julia.

Idea metody

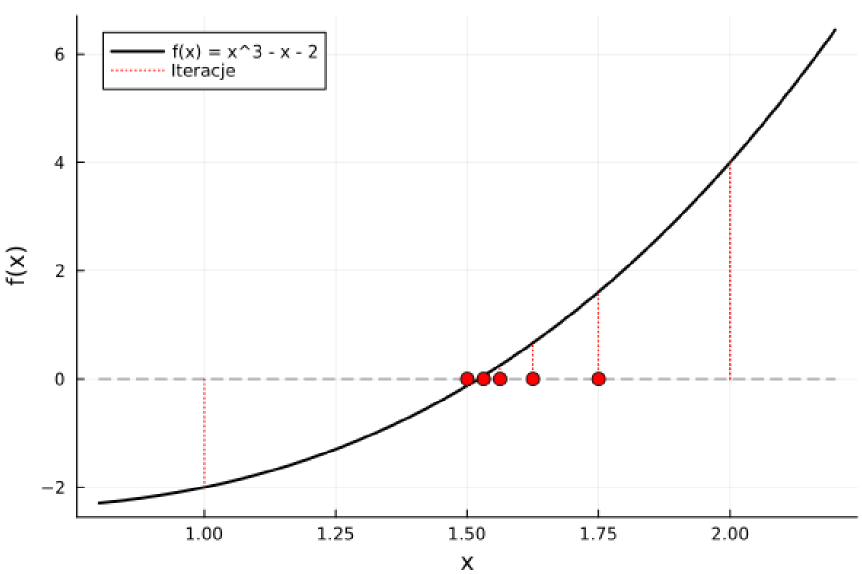
Metoda bisekcji (zwana też metodą połowienia przedziału) to iteracyjny algorytm wyznaczania miejsca zerowego funkcji ciągłej $f(x)$. Bazuje ona na własności Darboux, która gwarantuje istnienie pierwiastka w przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli funkcja przyjmuje na jego końcach wartości o przeciwnych znakach:

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \tag{1}$$

Idea metody polega na systematycznym zawężaniu obszaru poszukiwań poprzez:

- Wyznaczenie środka przedziału $c = \frac{a+b}{2}$.
- Sprawdzenie znaku iloczynu $f(a) \cdot f(c)$.
- Wybór tej połowy przedziału ($[a, c]$ lub $[c, b]$), w której następuje zmiana znaku funkcji.

Procedurę tę powtarza się do momentu, gdy szerokość przedziału będzie mniejsza od zadanej tolerancji δ lub wartość funkcji $|f(c)|$ spadnie poniżej ϵ.



Rysunek 1: Wizualizacja metody bisekcji dla 5 iteracji

Zadanie 2

Cel zadanie

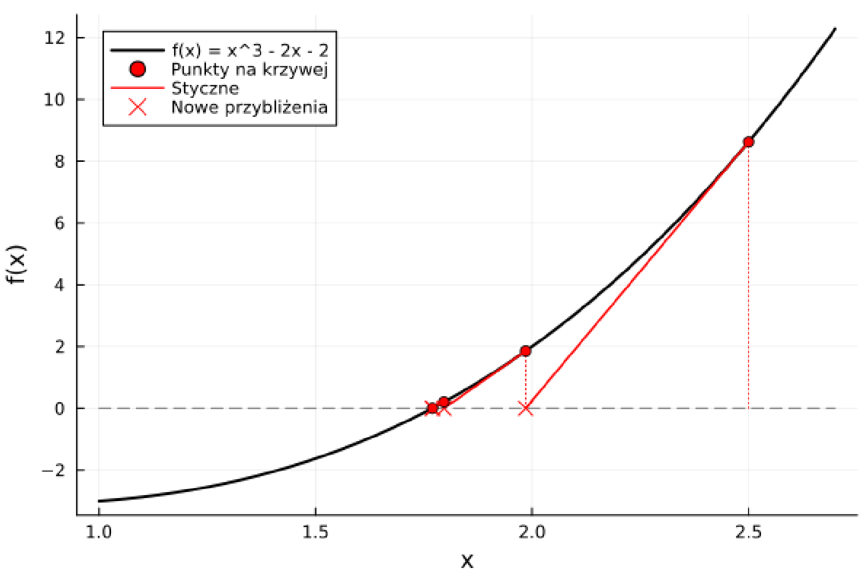
Celem zadania było zaimplementowanie metody Newtona w języku Julia.

Idea metody

Metoda Newtona (nazywana również metodą stycznych) to szybki algorytm iteracyjny służący do znajdowania przybliżonego miejsca zerowego funkcji różniczkowalnej $f(x)$. W przeciwieństwie do metody bisekcji, metoda ta wykorzystuje nie tylko wartość funkcji, ale także jej pierwszą pochodną $f'(x)$. Idea geometryczna metody polega na zastąpieniu wykresu funkcji jej styczną. W punkcie startowym x_0 prowadzimy styczną do krzywej $y = f(x)$. Punkt przecięcia tej stycznej z osią odciętych (oś OX) staje się nowym przybliżeniem pierwiastka (x_1). Proces ten powtarza się dla kolejnych punktów, zgodnie ze wzorem rekurencyjnym:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \tag{2}$$

Warunkiem koniecznym zbieżności jest odpowiedni dobór punktu startowego x_0 (musi znajdować się wystarczająco blisko pierwiastka) oraz to, aby pochodna $f'(x)$ nie była bliska zeru w otoczeniu rozwiązania. Algorytm kończy działanie, gdy różnica między kolejnymi przybliżeniami ($|x_{k+1} - x_k| < \delta$) lub wartość funkcji ($|f(x_{k+1})| < \epsilon$) są dostatecznie małe.



Rysunek 2: Wizualizacja metody Newtona dla 4 iteracji

Zadanie3

Cel zadania

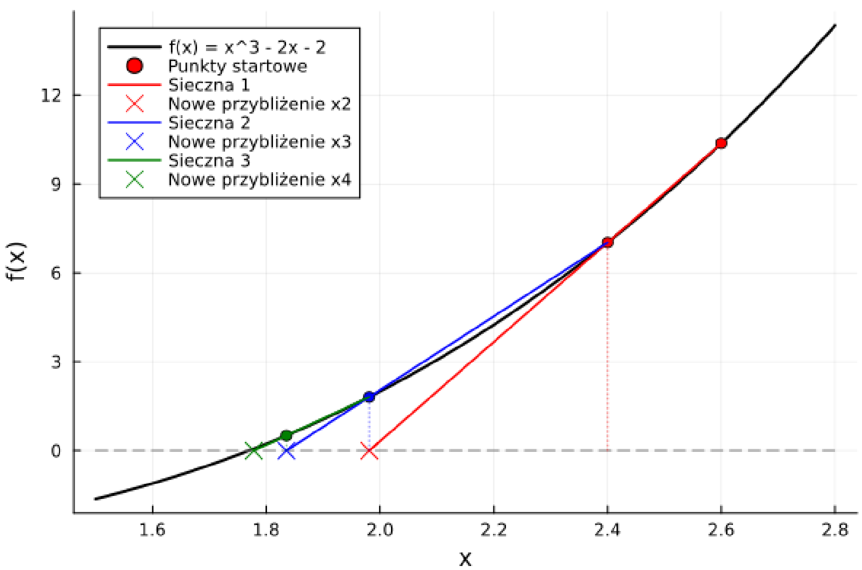
Celem zadania było zaimplementowanie metody siecznych w języku Julia.

Idea metody

Metoda siecznych jest iteracyjnym algorytmem wyznaczania miejsc zerowych funkcji, będącym wariantem metody Newtona. Jej główną zaletą jest brak konieczności analitycznego wyznaczania pochodnej funkcji $f'(x)$, co jest kluczowe w przypadkach, gdy wzór na pochodną jest skomplikowany lub niedostępny. Idea metody polega na przybliżeniu pochodnej za pomocą ilorazu różnicowego, obliczanego na podstawie dwóch poprzednich iteracji. Geometrycznie oznacza to zastąpienie stycznej (używanej w metodzie Newtona) przez sieczną przechodzącą przez dwa ostatnie punkty na wykresie funkcji: $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ oraz $(x_k, f(x_k))$. Punkt przecięcia tej prostej z osią OX wyznacza nowe przybliżenie pierwiastka x_{k+1}, zgodnie ze wzorem rekurencyjnym:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \cdot \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{3}$$

W przeciwieństwie do metody stycznych, algorytm ten wymaga podania dwóch punktów startowych x_0 i x_1. Iteracje są kontynuowane do momentu spełnienia warunków zbieżności, analogicznych do pozostałych metod (mała różnica między kolejnymi przybliżeniami lub wartość funkcji bliska zeru).



Rysunek 3: Wizualizacja metody siecznych dla 3 iteracji

Zadanie 4

Cel zadania

Celem zadania jest wyznaczdenie pierwiasta równania $x - (\frac{1}{2})x^2 = 0$ za pomocą:

- metody bisekcji, gdzie a = 1.5, b = 2.0, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$
- metody Newtona, gdzie $x_0 = 1.5$, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$
- metody siecznych, gdzie $x_0 = 1.0$, $x_1 = 2.0$, $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$

Zauważmy, że do obliczenia pierwiasta funkcji metodą Newtona potrzebna jest pochodna funkcji:

$$f'(x) = cos(x) - \frac{x}{2} \tag{4}$$

Wyniki

Tabela 1: Porównanie wyników metod numerycznych dla funkcji $f(x)$

Metoda	**Przybliżenie x**	**Wartość $f(x)$**	**Iteracje**	**Kod błędu**
Bisekcji	1.933753967	-2.70×10^{-7}	16	0
Stycznych (Newtona)	1.933753780	-2.24×10^{-8}	4	0
Siecznych	1.933753644	1.56×10^{-7}	4	0

Wnioski

Zauważmy, że każda z trzech metod zachowała się poprawnie dla zadanych wartości - zwróciły kod błędu: $err = 0$. Zwróćmy również uwagę na liczbę iteracji: metoda bisekcji okazała się najwolniejsza (potrzebowała 16 iteracji), podczas gdy metody Newtona i siecznych tylko 4. Metoda Newtona zwróciła również najdokładniejszy wynik spośród wszystkich trzech metod.

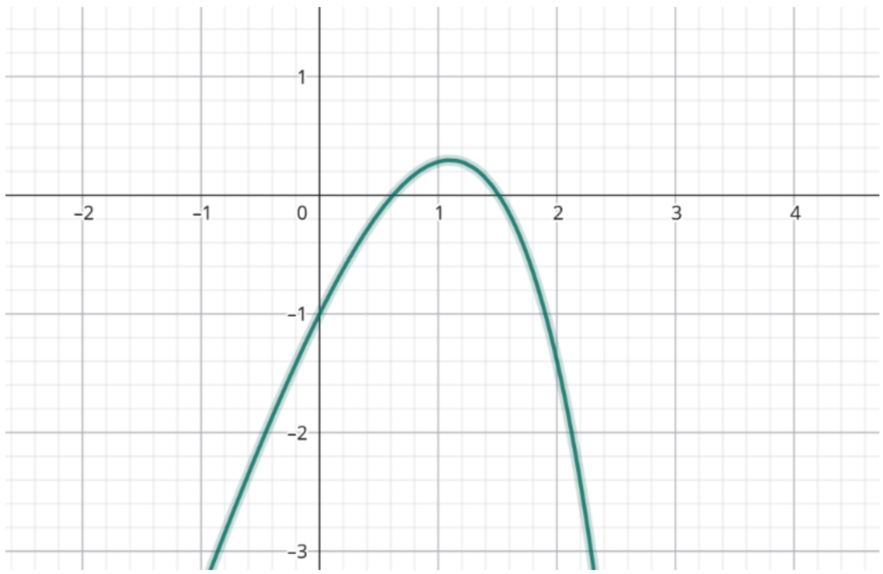
Zadanie 5

Cel zadania

Celem zadania jest znalezienie wartości zmiennej x metodą bisekcji, dla której wykresy funkcji $y = 3x$ i $y = e^x$ przecinają się.

Rozwiązanie

Zauważmy, że zadanie sprowadza się do znalezienia miejsca zerowego funkcji: $f(x) = 3x - e^x$.



Rysunek 4: Fragment wykresu funkcji $f(x) = 3x - e^x$

Na powyższym wykresie widzimy, że funkcja $f(x) = 3x - e^x$ ma dwa miejsca zerowe:

- pierwsze miejsce zerowe znajduje się w przedziale $[0, 1]$
- drugie miejsce zerowe znajduje się w przedziale $[1, 2]$

Zastosujmy metodę bisekcji dla obu przedziałów z parametrami: $\delta = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ i $\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, tak jak w poprzednim zadaniu.

Opis	**Przedział**	**Przybliżenie** x	**Wartość** $f(x)$	**Iter.**	**Err**
Pierwiastek 1	$[0.0, 1.0]$	0.619064331	3.48×10^{-6}	16	0
Pierwiastek 2	$[1.0, 2.0]$	1.512134552	-5.29×10^{-10}	18	0

Tabela 2: Wyniki metody bisekcji dla dwóch różnych miejsc zerowych

Wnioski

Żeby rozwiązać ten problem, musieliśmy go przekształcić do postaci jednej funkcji, aby zastosowanie metody bisekcji było możliwe. Metoda bisekcji zadziałała poprawnie dla obu przedziałów, zwracając kod błędu $err = 0$. Pierwsze miejsce zerowe zostało znalezione w 16 iteracjach, a drugie w 18 iteracjach. Wartości $f(x)$ dla znalezionych miejsc zerowych są bardzo bliskie zeru, co świadczy o poprawności uzyskanych wyników.

Zadanie 6

Cel zadania

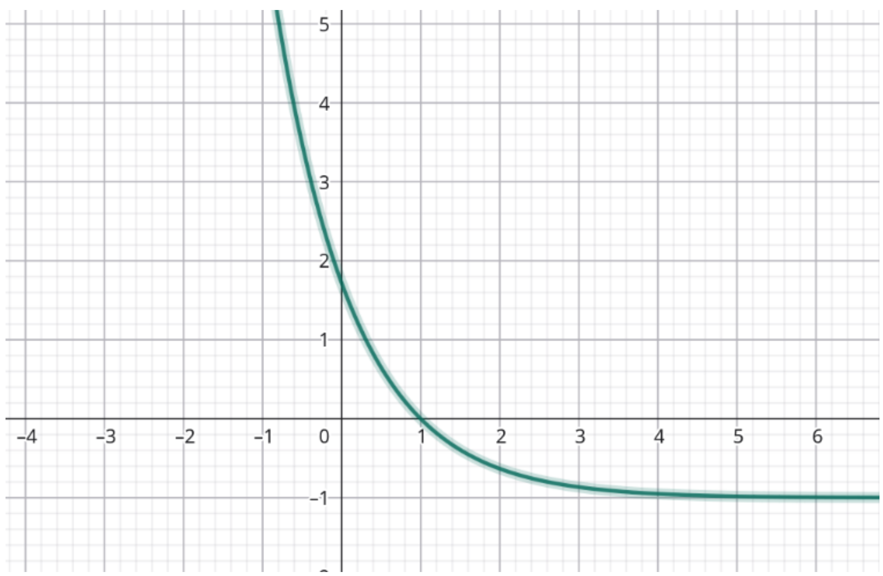
Celem zadania jest znalezienie miejsca zerowego funkcji:

- $f_1(x) = e^{1-x} - 1$
- $f(x) = x \cdot e^{-x}$

za pomocą metody bisekcji, Newtona i siecznych z parametrami: $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$. Musimy również wybrać odpowiednie przedziały i przybliżenia początkowe. Następnie musimy sprawdzić, co stanie się, gdy w metodzie Newtona dla f_1 wybierzemy $x_1 \in (1, \infty)$ a dla f_2 wybierzemy $x_0 > 1$. Należy również odpowiedzieć na pytanie, czy dla f_2 możemy wybrać $x_0 = 1$.

Rozwiązanie dla funkcji $f_1(x) = e^{1-x} - 1$

- Metoda bisekcji: przedział $[0.0, 2.0]$
- Metoda Newtona: przybliżenie początkowe: $x_0 = 0.5$, pochodna funkcji: $f_1'(x) = -e^{1-x}$
- Metoda siecznych: przybliżenia początkowe: $x_0 = 0.0$, $x_1 = 2.0$



Rysunek 5: Fragment wykresu funkcji $f(x) = e^{1-x} - 1$

Metoda	**Przybliżenie** x	**Wartość** $f(x)$	**Iter.**	**Err**
Bisekcji	1.000000000	0.0	1	0
Newtona	0.999999999	1.12×10^{-10}	4	0
Siecznych	1.000001760	-1.76×10^{-6}	6	0

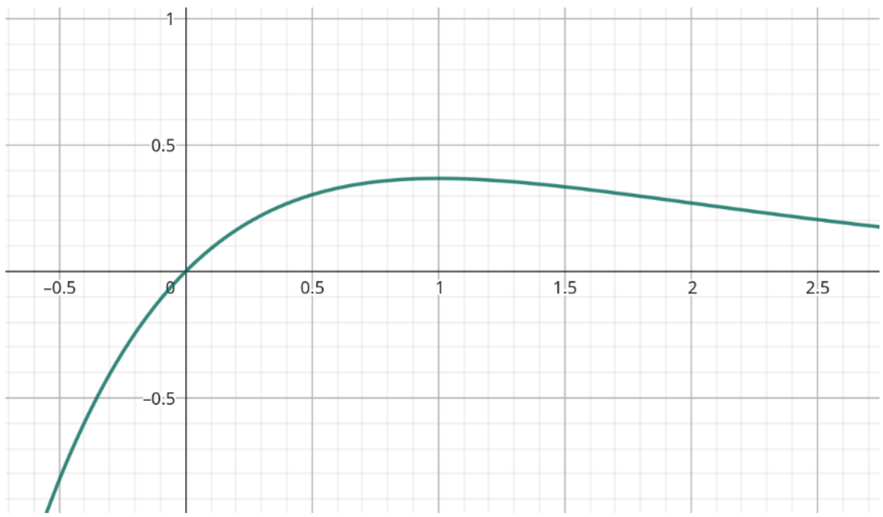
Tabela 3: Wyniki poszukiwania pierwiastka $x \approx 1.0$

Wnioski dla funkcji f_1

Wszystkie trzy metody zadziałały poprawnie, zwracając kod błędu $err = 0$. Metoda bisekcji była najszybsza, znajdując pierwiastek w zaledwie jednej iteracji. Świadczy to o tym, że pierwiastek znajdował się dokładnie w połowie zadanego przedziału początkowego. Metoda Newtona i siecznych również zwróciły poprawne wyniki, potrzebując do tego kolejno 4 i 6 iteracji. Wszystkie 3 metody dały wyniki bardzo bliskie dokładnej wartości pierwiastka $x = 1.0$.

Rozwiązanie dla funkcji $f_2(x) = x \cdot e^{-x}$

- Metoda bisekcji: przedział $[-1.0, 2.0]$
- Metoda Newtona: przybliżenie początkowe: $x_0 = 0.5$, pochodna funkcji: $f_2'(x) = \frac{1-x}{e^x}$
- Metoda siecznych: przybliżenia początkowe: $x_0 = -1.0$, $x_1 = 1.0$



Rysunek 6: Fragment wykresu funkcji $f(x) = x \cdot e^{-x}$

Tabela 4: Wyniki metod numerycznych dla pierwiastka bliskiego zeru

Metoda	**Przybliżenie** x	**Wartość** $f(x)$	**Iter.**	**Err**
Bisekcji	7.63×10^{-6}	7.63×10^{-6}	17	0
Newtona	-3.06×10^{-7}	-3.06×10^{-7}	5	0
Siecznych	1.74×10^{-8}	1.74×10^{-8}	18	0

Wnioski dla funkcji f_2

Wszystkie trzy metody zadziałały poprawnie, zwracając kod błędu $err = 0$. Metoda Newtona była najszybsza, znajdując pierwiastek w 5 iteracjach. Metoda bisekcji potrzebowała 17 iteracji, a metoda siecznych 18 iteracji. Wszystkie trzy metody dały wyniki bardzo bliskie dokładnej wartości pierwiastka $x = 0$.

Co się stanie jeśli w f_1 wybierzemy $x_0 \in (1, \infty)$ w metodzie Newtona?

Wybór punktu startowego $x_0 > 1$ powoduje, że pochodna funkcji f_1 jest bardzo mała. W rezultacie otrzymujemy kod błędu $err = 1$, co oznacza, że nie udało się osiągnąć zadanej dokładności w maksymalnej liczbie iteracji. Oczywiście, gdyy x_0 » 1, to pochodna jest tak mała, że staje się niereprentowalna i w rezultacie otrzymujemy kod błędu $err = 2$.

Co się stanie jeśli w f_2 wybierzemy $x_0 > 1$ w metodzie Newtona?

Wybór punktu startowego $x_0 > 1$, funkcja zwraca niepoprawne wyniki. Wynika to z faktu, że dla x_0 » 1, $f_2(x_0) < \epsilon$ i funkcja kończy działanie przeprowadzając 0 iteracji (lub dla x_0 bliskiego 1, wykonuje kilka iteracji, ale zbliża się do większych wartości x, a nie do pierwiastka). Gdy weźmiemy $x_0 = 1$ to pochodna funkcji f_2 w tym punkcie jest równa 0, co prowadzi do otrzymania kodu błędu $err = 2$.