

Sprawozdanie z Laboratorium Obliczenia Naukowe - Lista 2

Wojciech Typer

4 listopada 2025

Zadanie 1

Cel zadania: Celem zadania jest porównanie wyników z zadania 5 z Listy 1 oraz obecnych. W obydwu zadaniach obliczamy iloczyn skalarny tymi samymi metodami, jednak dane wejściowe w obydwu zadaniach nieco się różnią - sprawdzamy jak usunięcie dziesiątej cyfry po przecinku wpłynie na wyniki

Wyniki z zadania 5 z Listy 1:

Liczba bitów	Metoda	Wynik
Precyzja 32-bitowa (Float32)		
Metoda 1	-0.4999443	
Metoda 2	-0.4543457	
Metoda 3	-0.5	
Metoda 4	-0.5	
Precyzja 64-bitowa (Float64)		
Metoda 1	1.0251881368296672e-10	
Metoda 2	-1.5643308870494366e-10	
Metoda 3	0.0	
Metoda 4	0.0	

Wyniki z obecnego zadania:

Liczba bitów	Metoda	Wynik
Precyzja 32-bitowa (Float32)		
Metoda 1	-0.4999443	
Metoda 2	-0.4543457	
Metoda 3	-0.5	
Metoda 4	-0.5	
Precyzja 64-bitowa (Float64)		
Metoda 1	-0.004296342739891585	
Metoda 2	-0.004296342998713953	
Metoda 3	-0.004296342842280865	
Metoda 4	-0.004296342842280865	

Użyte metody:

Metoda 1: Obliczanie "w przód":

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Metoda 2: Obliczanie "w tyl":

$$\sum_{i=n}^1 x_i y_i$$

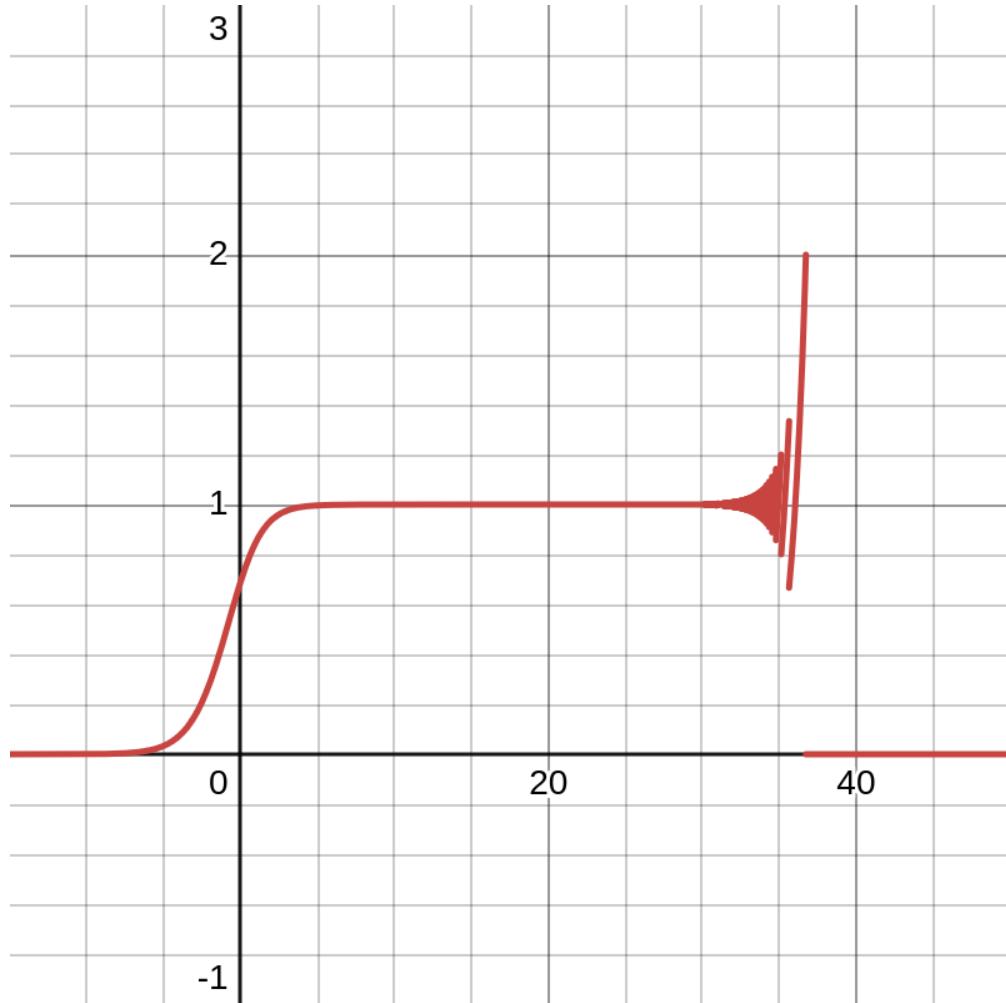
Metoda 3: Sumowanie osobno iloczynów dodatnich w porządku od największego do najmniejszego i osobno iloczynów ujemnych w porządku od najmniejszego do największego, a następnie dodanie obliczonych sum częściowych.

Metoda 4: Przeciwnie do metody 3.

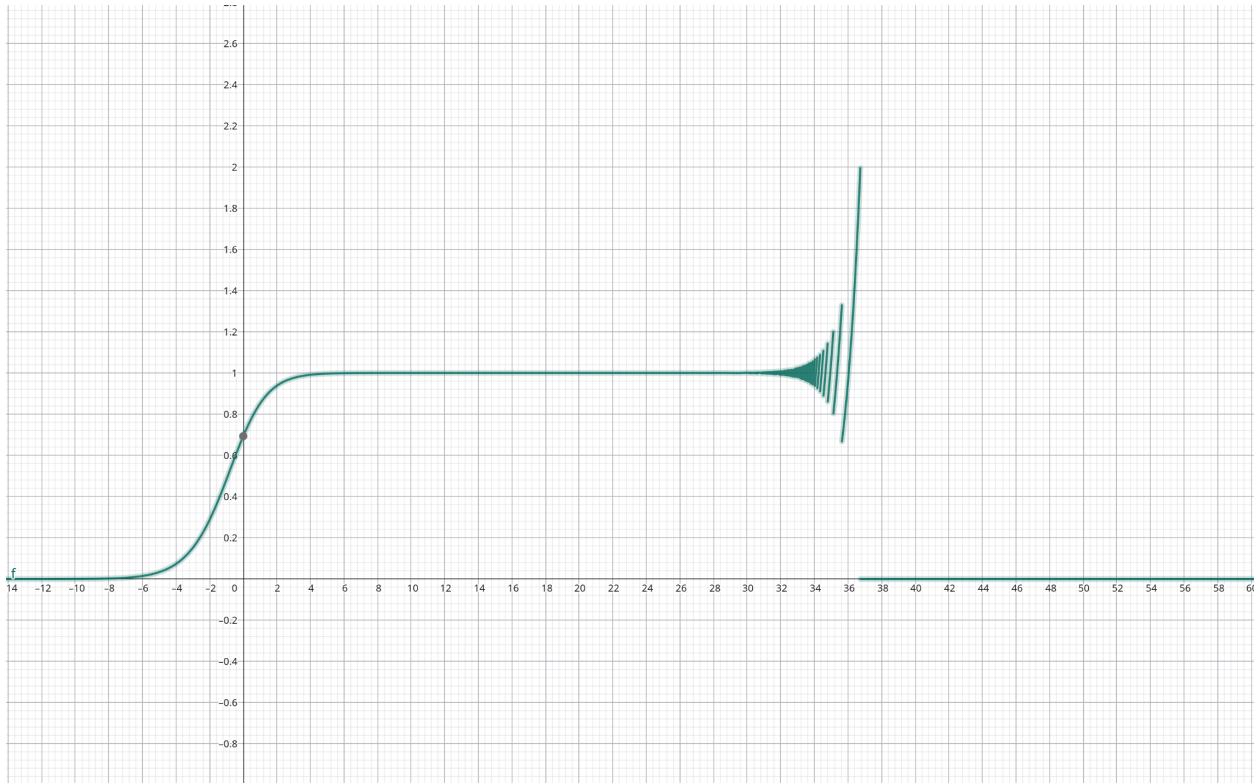
Wnioski: Zauważmy, że dla arytmetyki 32-bitowej wyniki nie uległy zmianie - wynika to ze zbyt małej precyzji tej arytmetyki. Dla arytmetyki 64-bitowej możemy zauważać duże rozbieżności w uzyskanych wynikach, pomimo tego, że zmiana wektora x jest bardzo niewielka - możemy zatem wysnuć wnioski, że algorytmy, z których skorzystaliśmy są bardzo wrażliwe na zmiany danych, co z kolei świadczy o tym, że obliczenie iloczynu skalarnego $x \cdot y$ jest źle uwarunkowane.

Zadanie 2

Cel zadania: Narysowanie wykresu funkcji: $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch programach do wizualizacji oraz policzenie granicy: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ oraz porównanie uzyskanego wyniku z wykresem funkcji.



Rysunek 1: Wykres 1, stworzony w programie Desmos.



Rysunek 2: Wykres 2, stworzony w programie Geogebra.

Obliczmy teraz granicę funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ przy x dążącym do nieskończoności:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} e^x \ln(1 + e^{-x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}} \\
&\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(1 + e^{-x}))}{\frac{d}{dx}(e^{-x})} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot (-e^{-x})}{-e^{-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1 + 0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Wnioski: Zauważmy, że obliczona granica nie pokrywa się z uzyskanymi wykresami funkcji. Na wykresach wartość funkcji zdaje się dążyć do zera wraz ze wzrostem wartości x . Dzieje się tak dlatego, że dla dużych wartości x wyrażenie $\ln(1 + e^{-x})$ jest bardzo małe i podczas obliczeń numerycznych jest zaokrąglane do zera co powoduje, że wartość funkcji $f(x)$ jest również zaokrąglana do zera. Czynnik e^x dla dużych wartości x jest bardzo duży, a mnożenie liczb różniących się wielkością rzędów jest obarczone bardzo dużym błędem, przez co użyte programy graficzne pokazują błędne wyniki.

Zadanie 3

Cel zadania: Rozwiązać układ równań liniowych postaci $Ax = b$ dla danej macierzy współczynników $A \in R^{n \times n}$ oraz wektora prawych stron $b \in R^n$, dwoma metodami: metodą eliminacji Gaussa, oraz metodą korzystającą wprost z równania $x = A^{-1}b$. Macierz A ma być wygenerowana na dwa sposoby: jako macierz Hilberta oraz jako macierz losowa o zadanym uwarunkowaniu.

Tabela 1: Porównanie błędów względnych dla macierzy Hilberta o rosnącym rozmiarze n

n	cond(A)	rank(A)	$\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{gauss}}\ }{\ \mathbf{x}\ }$	$\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{inv}}\ }{\ \mathbf{x}\ }$
1	1.00	1	0.0	0.0
2	1.93e1	2	5.66e-16	1.40e-15
3	5.24e2	3	8.02e-15	0.0
4	1.55e4	4	4.14e-14	0.0
5	4.77e5	5	1.68e-12	3.35e-12
6	1.50e7	6	2.62e-10	2.02e-10
7	4.75e8	7	1.26e-8	4.71e-9
8	1.53e10	8	6.12e-8	3.08e-7
9	4.93e11	9	3.88e-6	4.54e-6
10	1.60e13	10	8.67e-5	2.50e-4
11	5.22e14	10	1.58e-4	7.62e-3
12	1.75e16	11	1.34e-1	2.59e-1
13	3.19e18	11	1.10e-1	5.33
14	6.20e17	11	1.46	8.71
15	3.68e17	12	4.70	7.34
16	7.05e17	12	5.42e1	2.98e1
17	1.25e18	12	1.37e1	1.05e1
18	2.25e18	12	1.03e1	2.48e1

Tabela 2: Porównanie błędów względnych dla losowych macierzy R_n o zadanym wskaźniku uwarunkowania

c	n	cond(A)	rank(A)	$\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{gauss}}\ }{\ \mathbf{x}\ }$	$\frac{\ \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}_{\text{inv}}\ }{\ \mathbf{x}\ }$
1.00	5	1.00	5	1.99e-16	1.40e-16
1.00e1	5	1.00e1	5	1.40e-16	1.49e-16
1.00e3	5	1.00e3	5	5.93e-14	5.90e-14
1.00e7	5	1.00e7	5	3.37e-10	3.51e-10
1.00e12	5	1.00e12	5	1.32e-5	1.35e-5
1.00e16	5	8.26e15	4	1.66e-1	1.71e-1
1.00	10	1.00	10	2.67e-16	3.46e-16
1.00e1	10	1.00e1	10	5.04e-16	3.29e-16
1.00e3	10	1.00e3	10	1.52e-14	1.60e-14
1.00e7	10	1.00e7	10	1.53e-10	1.24e-10
1.00e12	10	1.00e12	10	1.74e-6	4.22e-6
1.00e16	10	8.25e15	9	2.13e-1	2.86e-1
1.00	20	1.00	20	4.44e-16	4.82e-16
1.00e1	20	1.00e1	20	3.24e-16	4.04e-16
1.00e3	20	1.00e3	20	4.18e-15	4.62e-15
1.00e7	20	1.00e7	20	3.35e-10	4.61e-10
1.00e12	20	1.00e12	20	1.32e-5	1.04e-5
1.00e16	20	8.31e15	19	5.17e-2	3.46e-2

Wnioski: W przypadku macierzy Hilberta, wraz ze wzrostem n rośnie jej wskaźnik uwarunkowania, co przekłada się na wzrost błędów względnych obu metod rozwiązywania układu równań. Możemy z tego wywnioskować, że zadanie obliczenia układu równań z macierzą Hilberta jest źle uwarunkowane. W przypadku macierzy losowych, możemy zauważać, że błędy względne są znacznie bardziej zależne od zadanych wskaźników uwarunkowania c niż od rozmiaru macierzy n . Gdy dowolna macierz ma wysoki wskaźnik uwarunkowania, to zadanie obliczenia układu równań z tą macierzą jest źle uwarunkowane.

Zadanie 4

Cel zadania: Dany jest wielomian P , będący naturalną postacią wielomianu Wilkinsona: $p(x) = \prod_{i=1}^{20} (x - i)$. Należy obliczyć: $|P(z_k)|, |p(z_k)|$ oraz $|z_k - k|$. Następnie należy powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić współczynnik przy $x^{19}z - 210$ na $-210 - 2^{-23}$ i opisać otrzymane wyniki

Tabela 3: Analiza błędów dla pierwiastków wielomianu Wilkinsona w jego nie zaburzonej reprezentacji numerycznej

k	z_k	$ z_k - k $	$ P(z_k) $	$ p(z_k) $
1	1.0	0.0000	$3.57e4$	$3.66e4$
2	2.0	0.0000	$1.76e5$	$1.81e5$
3	3.0	0.0000	$2.79e5$	$2.90e5$
4	4.0	0.0000	$3.03e6$	$2.04e6$
5	5.0	0.0000	$2.29e7$	$2.09e7$
6	6.0	0.0000	$1.29e8$	$1.13e8$
7	7.0001	0.0001	$4.81e8$	$4.57e8$
8	7.9994	0.0006	$1.64e9$	$1.56e9$
9	9.0029	0.0029	$4.88e9$	$4.69e9$
10	9.9904	0.0096	$1.36e10$	$1.26e10$
11	11.025	0.0250	$3.59e10$	$3.30e10$
12	11.9533	0.0467	$7.53e10$	$7.39e10$
13	13.0743	0.0743	$1.96e11$	$1.85e11$
14	13.9148	0.0852	$3.58e11$	$3.55e11$
15	15.0755	0.0755	$8.22e11$	$8.42e11$
16	15.9463	0.0537	$1.55e12$	$1.57e12$
17	17.0254	0.0254	$3.69e12$	$3.32e12$
18	17.9909	0.0091	$7.65e12$	$6.34e12$
19	19.0019	0.0019	$1.14e13$	$1.23e13$
20	19.9998	0.0002	$2.79e13$	$2.32e13$

Tabela 4: Analiza błędów dla pierwiastków zaburzonego wielomianu Wilkinsona

k	Przybliżony z_k	$ z_k - k $	$ P(z_k) $	$ p(z_k) $
1	1.0	0.0000	$2.03e4$	$2.00e4$
2	2.0	0.0000	$3.47e5$	$3.52e5$
3	3.0	0.0000	$2.26e6$	$2.42e6$
4	4.0	0.0000	$1.05e7$	$1.13e7$
5	5.0	0.0000	$3.76e7$	$4.48e7$
6	6.0	0.0000	$1.31e8$	$2.14e8$
7	6.9996	0.0004	$3.94e8$	$1.78e9$
8	8.0078	0.0078	$1.18e9$	$1.87e10$
9	8.9158	0.0842	$2.23e9$	$1.37e11$
10	$10.0955 - 0.6449i$	0.6520	$1.07e10$	$1.49e12$
11	$10.0955 + 0.6449i$	1.1109	$1.07e10$	$1.49e12$
12	$11.7939 - 1.6525i$	1.6653	$3.14e10$	$3.30e13$
13	$11.7939 + 1.6525i$	2.0458	$3.14e10$	$3.30e13$
14	$13.9924 - 2.5188i$	2.5188	$2.16e11$	$9.55e14$
15	$13.9924 + 2.5188i$	2.7129	$2.16e11$	$9.55e14$
16	$16.7307 - 2.8126i$	2.9060	$4.85e11$	$2.74e16$
17	$16.7307 + 2.8126i$	2.8255	$4.85e11$	$2.74e16$
18	$19.5024 - 1.9403i$	2.4540	$4.56e12$	$4.25e17$
19	$19.5024 + 1.9403i$	2.0043	$4.56e12$	$4.25e17$
20	20.8469	0.8469	$8.76e12$	$1.37e18$

Wnioski: W przypadku nie zaburzonego wielomianu Wilkinsona, możemy zauważyć, że wyliczone pierwiastki nie pokrywają się z rzeczywistymi wartościami, jednak błędy bezwzględne są stosunkowo niewielkie. Niemniej, wartości wielomianu (zarówno w jego naturalnej jak i oryginalnej formie) w tych punktach są bardzo duże i rosną wraz ze wzrostem wartości k . Dzieje się tak, ponieważ wyliczenie pierwiastków w wielomianie Wilkinsona jest ekstremalnie źle uwarunkowane.

W przypadku zaburzonego wielomianu Wilkinsona, sytuacja jest jeszcze gorsza - błędy bezwzględne pierwiastków są znacznie większe, a dodatkowo pojawiają się pierwiastki zespolone. Wszystkie te błędy wynikają z faktu, że jesteśmy zmuszeni pracować w arytmetyce z ograniczoną precyzyją, a wielomian Wilkinsona jest przykładem wielomianu, którego pierwiastki są bardzo wrażliwe na nawet niewielkie zmiany współczynników.

Zadanie 5

Cel zadania: Rozpatrujemy następujące równanie rekurencyjne: $p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n)$, gdzie r jest pewną stałą, $r(1 - p_n)$ jest czynnikiem wzrostu populacji a p_0 jest wielkością populacji, stanowiącą procent maksymalnej wielkości populacji dla danego stanu środowiska. W zadaniu należy przeprowadzić 40 iteracji dla $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ w arytmetyce float32, następnie ponownie wykonać 40 iteracji, z niewielką modyfikacją, tj. wykonać 10 iteracji, zatrzymać, zastosować obcięcie wyniku, odrzucając cyfry po 3 miejscu po przecinku i kontynuować kolejne 30 iteracji. Należy porównać oba wyniki. Następnie należy wykonać kolejnych 40 iteracji dla danych $p_0 = 0.01$ i $r = 3$ w arytmetyce float32 i float64.

Tabela 5: Wyniki 40 iteracji dla modelu logistycznego z $p_0 = 0.01$ i $r = 3$

Numer iteracji (n)	Wartość p_n
1	0.0397
2	0.15407173
3	0.5450726
4	1.2889781
5	0.1715188
6	0.5978191
7	1.3191134
8	0.056273222
9	0.21559286
10	0.7229306
11	1.3238364
12	0.037716985
13	0.14660022
14	0.521926
15	1.2704837
16	0.2395482
17	0.7860428
18	1.2905813
19	0.16552472
20	0.5799036
21	1.3107498
22	0.088804245
23	0.3315584
24	0.9964407
25	1.0070806
26	0.9856885
27	1.0280086
28	0.9416294
29	1.1065198
30	0.7529209
31	1.3110139
32	0.0877831
33	0.3280148
34	0.9892781
35	1.021099
36	0.95646656
37	1.0813814
38	0.81736827
39	1.2652004
40	0.25860548

Tabela 6: Wyniki 40 iteracji dla modelu logistycznego z $p_0 = 0.01$ i $r = 3$, z obcięciem po 10 iteracjach

Numer iteracji (n)	Wartość p_n
1	0.0397
2	0.154 071 73
3	0.545 072 6
4	1.288 978 1
5	0.171 518 8
6	0.597 819 1
7	1.319 113 4
8	0.056 273 222
9	0.215 592 86
10	0.722 930 6
10	0.722
11	1.324 147 9
12	0.036 488 414
13	0.141 959 44
14	0.507 380 37
15	1.257 216 9
16	0.287 084 52
17	0.901 085 5
18	1.168 476 8
19	0.577 893
20	1.309 691 1
21	0.092 892 17
22	0.345 681 82
23	1.024 239 5
24	0.949 758 23
25	1.092 910 8
26	0.788 281 2
27	1.288 963 1
28	0.171 574 83
29	0.597 985 57
30	1.319 182 2
31	0.056 003 93
32	0.214 606 39
33	0.720 257 8
34	1.324 717 3
35	0.034 241 438
36	0.133 448 33
37	0.480 367 96
38	1.229 211 8
39	0.383 962 2
40	1.093 568

Tabela 7: Wyniki 40 iteracji dla modelu logistycznego w arytmetyce Float64

Numer iteracji (n)	Wartość p_n
1	0.0397
2	0.15407173000000002
3	0.5450726260444213
4	1.2889780011888006
5	0.17151914210917552
6	0.5978201201070994
7	1.3191137924137974
8	0.056271577646256565
9	0.21558683923263022
10	0.722914301179573
11	1.3238419441684408
12	0.03769529725473175
13	0.14651838271355924
14	0.521670621435246
15	1.2702617739350768
16	0.24035217277824272
17	0.7881011902353041
18	1.2890943027903075
19	0.17108484670194324
20	0.5965293124946907
21	1.3185755879825978
22	0.058377608259430724
23	0.22328659759944824
24	0.7435756763951792
25	1.315588346001072
26	0.07003529560277899
27	0.26542635452061003
28	0.8503519690601384
29	1.2321124623871897
30	0.37414648963928676
31	1.0766291714289444
32	0.8291255674004515
33	1.2541546500504441
34	0.29790694147232066
35	0.9253821285571046
36	1.1325322626697856
37	0.6822410727153098
38	1.3326056469620293
39	0.0029091569028512065
40	0.011611238029748606

Wnioski: W przypadku arytmetyki Float32 widzimy, że obcięcie wartości po 10 iteracjach prowadzi do znacznie różnych wyników końcowych. Oznacza to, że model logistyczny jest bardzo wrażliwy na dokładność obliczeń, a nawet niewielkie zmiany mogą prowadzić do znacznych różnic w wynikach.