Teoria Grafów

Wojciech Typer

Wprowadzenie do grafów prostych

Literatura:

- R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*
- D.B. West, *Introduction to Graph Theory*

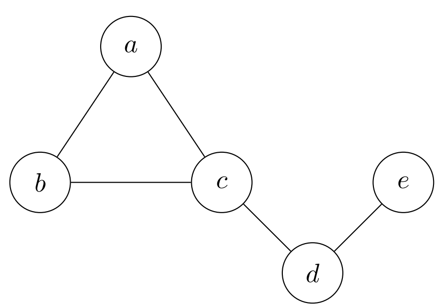
Definicja:
Grafem prostym G nazywamy parę zbiorów rozłącznych (V, E) takich, że $E \subseteq V^{(2)}$, gdzie $V^{(2)}$ to zbiór wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru V. Elementy zbioru V nazywamy **wierzchołkami**, a elementy zbioru E – **krawędziami** grafu G. Zbiór V nazywamy zbiorem wierzchołków grafu G, a zbiór E – zbiorem krawędzi grafu G.

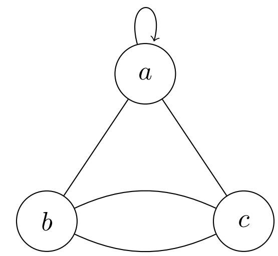
Oznaczenia:

- V – zbiór wierzchołków
- E – zbiór krawędzi

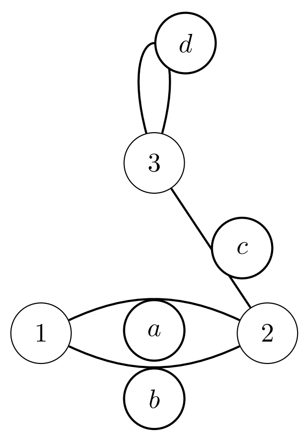
Jeżeli dwie krawędzie mają punkt wspólny, to mówimy, że są to **krawędzie incydentne**.

Przykład grafu prostego:
Załóżmy, że $V = \{a, b, c, d, e\}$, a $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.
Poniżej znajduje się wizualizacja tego grafu:





Powyższy graf jest multigrafem, zawierający multi krawędź między wierzchołkami b i c i pętlę przy wierzchołku a.
Definicja:
Grafem ogólnym G nazywamy trójkę uporządkowaną (V, E, ϕ), gdzie V i E są zbiorami rozłącznymi, a ϕ jest funkcją przyporządkowującą każdej krawędzi z E jeden lub dwa (niekoniecznie różne) wierzchołki z V. Funkcję ϕ nazywamy **funkcją incydencji**.
Przykład $G = (V, E, \phi)$
$V = 1, 2, 3$
$E = a, b, c, d$
$\phi(a) = \{1, 2\}$
$\phi(b) = \{1, 2\}$
$\phi(c) = \{2, 3\}$
$\phi(d) = \{3\}$



Definicja:
Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym, $v \in V$.
Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę:

$$\deg(v) = 2\,|\{e \in E_1 : v \in j(e)\}| + |\{e \in E_2 : v \in j(e)\}|$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi niebędących pętlami.

Lemat Eulera o uściskach dłoni
Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym.
Wówczas zachodzi:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = \sum_{v\in V} \left(2 \cdot \sum_{e\in E_1} [v \in j(e)] + \sum_{e\in E_2} [v \in j(e)] \right)$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi nie będących pętlami,

Ponieważ każda pętla jest incydentna tylko z jednym wierzchołkiem, lecz do stopnia liczymy ją podwójnie, oraz każda krawędź nie będąca pętlą jest incydentna z dwoma (różnymi) wierzchołkami, mamy:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E_1| + 2|E_2| = 2(|E_1| + |E_2|) = 2|E|$$

Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie ogólnym równa się dwukrotności liczby krawędzi:

$$\boxed{\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E|}$$

Definicja:
Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ są **izomorficzne**, jeśli istnieje bijekcja

$$\varphi : V_1 \to V_2$$

taka, że dla każdych $v, w \in V_1$ zachodzi:

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2.$$

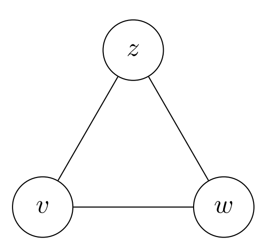
Definicja:
Graf $G = (V, E)$ nazywamy **dwudzielnym**, jeżeli istnieją rozłączne, niepuste zbiory $A, B \subseteq V$ takie, że:

- $A \cap B = \emptyset, \quad A \neq \emptyset, \quad B \neq \emptyset,$
- $A \cup B = V,$
- każda krawędź $e = \{v, w\} \in E$ spełnia: $v \in A$ oraz $w \in B$ (lub odwrotnie).

Definicja:
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. **Trójkątem** nazywamy trójkę parami różnych wierzchołków $v, w, z \in V$, takich że:

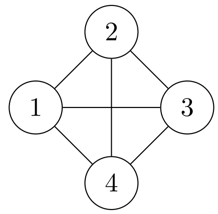
$$\{v, w\} \in E, \quad \{w, z\} \in E, \quad \{v, z\} \in E$$

Przykład:
Poniżej znajduje się graf będący trójkątem:

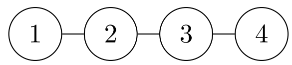


Przykłady grafów:

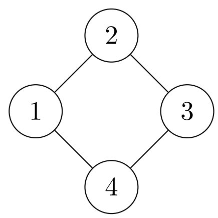
- Graf pełny



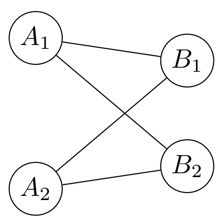
- Graf liniowy



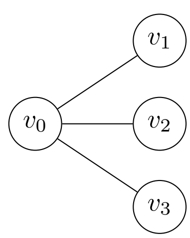
- Cykl



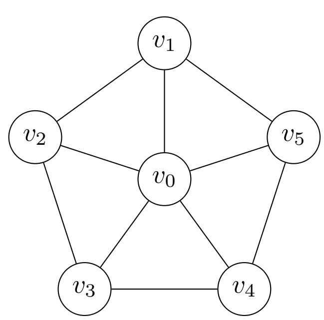
- Graf pełny dwudzielny



- Gwiazda



Graf koło:



Definicja (dopełnienie grafu):
Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, gdzie $\overline{E}$ jest zbiorem wszystkich krawędzi, które nie należą do E, tzn.

$$\overline{E} = \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w, \{v, w\} \notin E\}$$

Definicja (suma dwóch grafów):
Sumą grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ (dla $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nazywamy graf $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
Lemat 1
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym bez trójkątów. Wtedy dla każdej krawędzi $\{v, w\} \in E$ zachodzi:

$$\deg(v) + \deg(w) \leq n = |V|$$

Lemat 2
Niech $G = (V, E)$. Wówczas:

$$\sum_{\{v,w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$$

Twierdzenie (Mantela):
Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach, w którym nie ma trójkąta (czyli graf nie zawiera cyklu długości 3). Wówczas:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Osiągnięcie tej liczby krawędzi jest możliwe tylko wtedy, gdy G jest grafem pełnym dwudzielnym z częściami o rozmiarach $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ i $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Dowód:
Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem prostym bez trójkąta, $|V| = n$. Niech A i B będą dwoma rozłącznymi podzbiorami V takimi, że $A \cup B = V$ i $|A| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, $|B| = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

Każda krawędź w grafie dwudzielnym $K_{|A|,|B|}$ łączy wierzchołek z A z wierzchołkiem z B, więc liczba krawędzi wynosi $|A| \cdot |B| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Pokażemy, że żaden graf prosty bez trójkąta nie może mieć więcej krawędzi. Bez straty ogólności, dla dowolnej krawędzi $\{v, w\}$ wszystkie sąsiady v i w są różne, bo inaczej powstałby trójkąt. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków jest ograniczona, a dokładniej liczba krawędzi jest maksymalna wtedy, gdy G jest kompletnym grafem dwudzielnym, czyli $|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Dowód Niech v będzie wierzchołkiem o największym stopniu d. Jego sąsiedzi nie mogą być ze sobą połączeni, więc mogą mieć krawędzie tylko do pozostałych $n - d - 1$ wierzchołków. Zliczając krawędzie i maksymalizując wyrażenie, otrzymujemy ograniczenie $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

Wniosek: Najwięcej krawędzi w grafie prostym bez trójkąta ma graf pełny dwudzielny z częściami możliwie równymi.

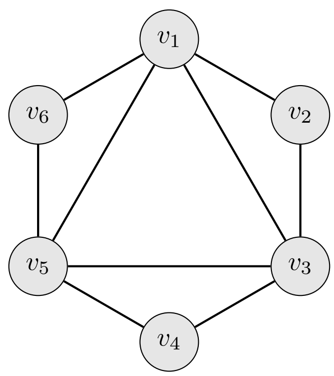
Graf Eulerowski:
Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie grafem ogólnym.

- Trasa to ciąg $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots$ taki, że $v_0, v_1, \dots \in V$ i $e_1, e_2, \dots \in E$
- Ścieżka to trasa, która nie powtarza krawędzi
- Ścieżka zamknięta to ścieżka, w której $v_0 = v_k$ (zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku)
- Droga to ścieżka, która nie powtarza wierzchołków.
- Cykl to ścieżka, w której wierzchołki się nie powtarzają, poza $v_0 = v_k$

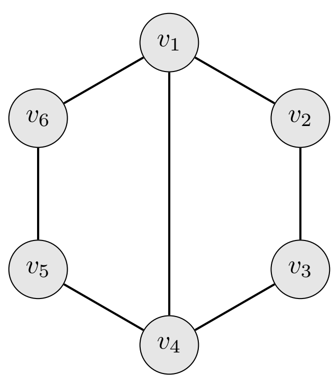
Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma), v, w \in V$. Odległością v od w nazywamy $d(v, w)$ - długość najkrótszej drogi z v do w. Jeżeli taka droga nie istnieje, to $d(v, w) = \infty$.
Definicja Niech $G = (V, E, \gamma)$ G jest spójny, jeżeli: $\forall v, w \in V d(v, w) < \infty$
Fakt: Na zbiorze V można wprowadzić relację równoważności:

$$\forall v, w \in V v \ w \equiv d(v, w) < \infty$$

Klasy abstrakcji relacji   definiujemy tzw. spójne składowe (komponenty) grafu G
Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$. G nazywamy eulerowskim, jeżeli w G istnieje ścieżka zamknięta, zawierająca każdą krawędź z E.



Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$. G nazywamy pół eulerowskim, jeśli G nie jest eulerowski oraz w G istnieje ścieżka zawierająca każda krawędź z E

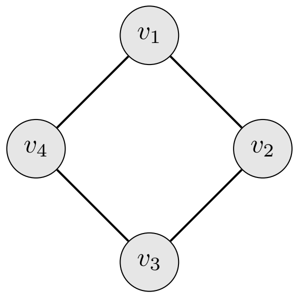


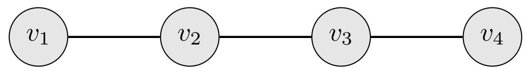
Lemat: Niech $G = (V, E, \gamma)$. Jeżeli $\forall v \in V$, deg(v) $\geq$ 2, to w G występuje cykl.
Tw. Eulera, 1736 Niech $G = (V, E, \gamma)$ G jest eulerowski $\equiv$ G jest spójny i $\forall v \in V$ $2 \mid$ deg(v)
Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$, c(G) oznacza liczbe komponent grafu G. Krawędź $e \in E$ nazywamy mostem, jeżeli c(G / e) (graf G po usunięciu krawędzi e) > c(G)

Grafy Hamiltonowskie

Graf $G = (V, E)$ nazywamy *hamiltonowskim*, jeśli w G istnieje cykl, który zawiera każdy wierzchołek z V (dokładnie jeden raz).

Definicja: Graf $G = (V, E)$ nazywamy *półhamiltonowskim*, jeżeli G nie jest hamiltonowski i w G istnieje droga zawierająca każdy wierzchołek z V (dokładnie jeden raz). Ta droga nazywana jest drogą lub ścieżką Hamiltona.





Graf półhamiltonowski

Uwaga: Pętle i multikrawędzie nie mają wpływu na rozważania nad hamiltonowskością grafu, zatem ograniczamy się do grafów prostych.

Tabela 1: Porównanie cyklu Eulera i cyklu Hamiltona

Cykl Eulera	**Cykl Hamiltona**
Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia w grafie spójnym jest to, aby każdy wierzchołek miał stopień parzysty. Każda krawędź musi być użyta dokładnie jeden raz. Istnieją algorytmy o złożoności wielomianowej znajdujące cykl (np. algorytm Hierholzera O($\|E\|$)).	Odwiedza każdy wierzchołek grafu dokładnie jeden raz. Może pomijać niektóre krawędzie, aby uniknąć ponownego odwiedzania wierzchołków. Problem decyzyjny jest NP-zupełny. Nie jest znany algorytm o złożoności wielomianowej, który by orzekał, czy dany graf jest hamiltonowski.

Twierdzenie Diraca (1952): Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o $|V| \geq 3$ oraz $\forall v \in V$: $\deg(v) \geq \frac{|V|}{2}$. Wówczas G jest hamiltonowski.

Twierdzenie Orego (1960): Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o $|V| \geq 3$ oraz dla każdej pary niepołączonych krawędzią wierzchołków $\{v, w\}$ zachodzi $\deg(v) + \deg(w) \geq |V|$. Wówczas G jest hamiltonowski.

Ćwiczenia - Lista 1

Zadanie 1/1

Wiemy, że ilość wszystkich par wierzchołków w grafie prostym $G = (V, E)$ o n wierzchołkach wynosi $\binom{n}{2}$. Każdą parę możemy połączyć krawędzią lub nie. Zatem ilość wszystkich grafów prostych na n wierzchołkach wynosi:

$$2^{\binom{n}{2}}$$

Pytanie: Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?
Jest to równoważne z wyborem m krawędzi spośród wszystkich $\binom{n}{2}$ możliwych, zatem:

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

zadanie 1/2

Pytanie: Czy istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie?

Taki graf n-wierzchołkowy musiałby mieć wierzchołki o stopniach: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Wierzchołek o stopniu $n - 1$ jest połączony z wszystkimi innymi wierzchołkami, co oznacza, że nie może istnieć wierzchołek o stopniu 0 (izolowany). Zatem nie istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie.

zadanie 1/3

Pytanie: Czy suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie prostym może być nieparzysta?

Nie, ponieważ zgodnie z lematem o uściskach dłoni (handshaking lemma), suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest równa podwojonej liczbie krawędzi ($\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$), a więc jest zawsze liczbą parzystą.

Ćwiczenia - Lista 2

zadanie 2/1

Wiemy, że graf $G = (V, E)$ jest grafem prostym bez trójkątów - nie pojawiają się w nim podgrafy o trzech wierzchołkach, gdzie każdy wierzchołek jest połączony z pozostałymi dwoma.

Oznaczmy: $N(x)$ - zbiór sąsiadów wierzchołka x w grafie G. Z własności grafu bez trójkątów wynika, że $N(v) \cap N(w) = \emptyset$ dla każdej krawędzi $\{v, w\} \in E$.

Ponieważ zbiory $N(v)$ i $N(w)$ są rozłączne, suma mocy ich zbiorów jest równa mocy ich unii: $|N(v)| + |N(w)| = |N(v) \cup N(w)|$. Zbiór $N(v) \cup N(w)$ jest podzbiorem V, więc $|N(v) \cup N(w)| \leq |V|$. Zatem $\deg(v) + \deg(w) \leq |V|$.

Dowód własności z trójkątem: Niech $v, w \in E$. Załóżmy, że $N(v) \cap N(w) \neq \emptyset$. Wowczas wynika z tego:
$\exists u \in V : u \in N(v) \wedge u \in N(w)$
Zatem $\{u, v\} \in E \wedge \{u, w\} \in E$, co oznacza, że wierzchołki u, v, w tworzą trójkąt, co jest sprzeczne z założeniem.

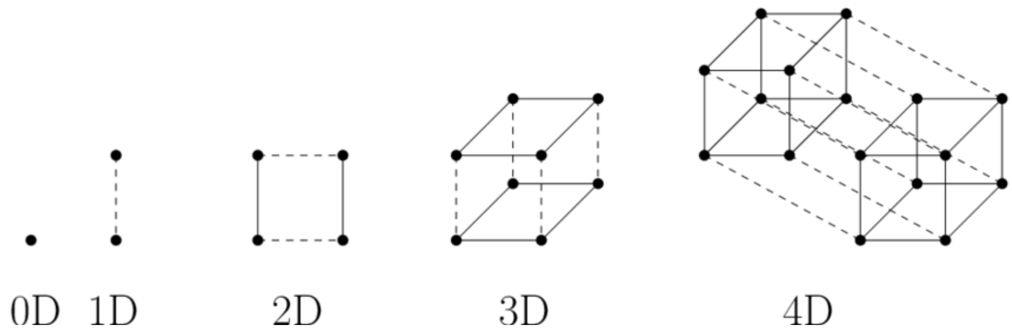
zadanie 2/2

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. Musimy uzasadnić poniższe równanie: $\sum_{\{v,w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$.
Po lewej stronie sumujemy dla każdej krawędzi $\{v, w\}$ sumę stopni jej końców. Oznacza to, że każdy wierzchołek v jest liczony dokładnie $\deg(v)$ razy (raz dla każdej krawędzi incydentnej z v). Zatem lewa strona równania to:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) \cdot \deg(v) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$$

co jest dokładnie prawą stroną równania.

zadanie 2/3



Rysunek 1: Hiperkostka w kolejnych wymiarach.

W Q_k

- ilość wierzchołków: 2^k
- stopnie wierzchołków: k
- ilość krawędzi: Z lematu o uściskach dłoni: $|E| = \frac{2^k \cdot k}{2} = k \cdot 2^{k-1}$, dla $k \geq 1$

Średnica hiperkostki:
Średnica hiperkostki Q_k wynosi k. Wynika to z faktu, że hiperkostka formalnie definiowana jest jako graf, w którym wierzchołkami są wszystykie ciągi binarne dlugości k. Średnica to maksymalna odległość między dwoma wierzchołkami, a odległość między dwoma wierzchołkami w hiperkostce to liczba pozycji, na których ich reprezentacje binarne różnią się (odległość Hamminga). Największa możliwa odległość występuje między wierzchołkami reprezentowanymi przez ciągi 000...0 i 111...1, które różnią się na wszystkich k pozycjach. Zatem średnica hiperkostki Q_k wynosi k.

Q_k jako graf dwudzielny:
W hiperkostka Q_k każdy wierzchołek można zdefiniować jako ciąg binarny długości k. Każdy wierzchołek łączy się z innymi, wtedy, gdy ich reprezentacje różnią się dokładnie na jednej pozycji. Możemy podzielić wierzchołki na dwa zbiory:

- A - wierzchołki z parzystą liczbą jedynek w reprezentacji binarnej,
- B - wierzchołki z nieparzystą liczbą jedynek w reprezentacji binarnej.

W ten sposób widać, że graf Q_k jest dwudzielny.

zadanie 2/4

$K_{2,2}$ to graf dwudzielny, w którym wierzchołki są podzielone na dwa zbiory, oba zawierające po 2 wierzchołki.

zadanie 2/5

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwudzielnym z trójkątem. Oznacza to, że:
$\exists(A, B \subseteq V)(A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = V \wedge \forall w, v \in E(w \in A \wedge v \in B))$
Weźmy jeden z takich trójkątów i pokolorujmy jego wierzchołki na dwa kolory, tak aby żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie miały tego samego koloru. Ponieważ trójkąt ma trzy wierzchołki, a my mamy tylko dwa kolory, to zgodnie z zasadą szufladkową, co najmniej dwa wierzchołki muszą być tego samego koloru. Jednak te dwa wierzchołki są połączone krawędzią (bo są częścią trójkąta), co jest sprzeczne z założeniem, że żadne dwa sąsiednie wierzchołki nie mogą mieć tego samego koloru.