Sprawozdanie z Laboratorium
Obliczenia Naukowe - Lista 4

Wojciech Typer

4 grudnia 2025

Zadanie 1

Cel zadania

Celem zadania jest napisanie funkcji obliczającej ilorazy różnicowe. Funkcja ma przyjmować dwa argumenty:

- x → wektor długości n + 1 zawierający węzły: x_0, ..., x_n
- f → wektor długości n + 1 zawierający wartości interpolowanej funkcji w węzłach $f(x_0, ..., f(x_n))$

Funkcja ma zwracać fx → wektor długości n + 1, zawierający obliczone ilorazy róznicowe:

$$fx = f[x_0], ..., fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$$

Idea metody

Obliczymy to na podstawie wzoru rekurencyjnego: iloraz rzędu k możemy policzyć na podstawie ilorazu rzędku k - 1:

$$f[x_i, ..., x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Implementacja

Algorithm 1 Obliczanie ilorazów różnicowych (Newton)

Require: x: wektor węzłów $(x_0, \ldots, x_n)$
Require: f: wektor wartości funkcji $(f(x_0), \ldots, f(x_n))$
Ensure: fx: wektor ilorazów różnicowych

function IlorazyRoznicowe(x, f)
    $n \leftarrow \text{length}(f) - 1$
    $fx \leftarrow \text{copy}(f)$

    for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**
        for $i \leftarrow n+1$ **downto** $j+1$ **do**
            $licznik \leftarrow fx[i] - fx[i-1]$
            $mianownik \leftarrow x[i] - x[i-j]$
            $fx[i] \leftarrow \frac{licznik}{mianownik}$
        end for
    end for
    return fx
end function

Zadanie 2

Cel zadania

Celem zadania jest napisanie funkcji obliczającej wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona za pomocą uogólnionego schematu Hornera w czasie O(n). Funkcja ma przyjmować trzy argumenty:

- x → wektor długości n + 1 zawierający węzły: x_0, ..., x_n
- fx → wektor długości n + 1, zawierający ilorazy różnicowe: $fx = f[x_0]$, ..., $fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$
- t → punkt, w którym liczymy wartość wielomianu

Funkcja ma zwracać wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie t.

Idea metody

Wielomian Newtona możemy zapisać w postaci:

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

Gdybyśmy chcieli policzyć każdy składnik osobno, to złożoność obliczeniowa wyniosłaby O(n^2). Możemy jednak skorzystać z uogólnionego schematu Hornera, który pozwala na obliczenie wartości wielomianu w czasie O(n):

$$N_n(x) = c_0 + (t - x_0)\left(c_1 + (t - x_1)\left(c_2 + \cdots + (t - x_{n-1})c_n\right)\right)$$

Słownie mówiąc, zaczynamy od ostatniego współczynnika c_n i iteracyjnie dodajemy kolejne składniki, mnożąc je przez odpowiednie czynniki $(t - x_i)$ i dodając c_i.

Implementacja

Algorithm 2 Obliczanie wartości wielomianu Newtona (Schemat Hornera)

Require: x: wektor węzłów $(x_0, \ldots, x_n)$
Require: fx: wektor ilorazów różnicowych $(f[x_0], \ldots, f[x_0, \ldots, x_n])$
Require: t: punkt, w którym liczymy wartość
Ensure: nt: wartość wielomianu w punkcie t

function WarNewton(x, fx, t)
  $n \leftarrow \text{length}(fx) - 1$ ▷ Stopień wielomianu
  $nt \leftarrow fx[n+1]$ ▷ Inicjalizacja ostatnim współczynnikiem

  for $i \leftarrow n$ **downto** 1 **do** ▷ Iteracja od przedostatniego wyrazu
    $nt \leftarrow fx[i] + (t - x[i]) \cdot nt$
  end for
  return nt
end function

Zadanie 3

Cel zadania

Celem zadanie jest napisanie funkcji obliczającej w czasie $O(n^2)$ współczynniki wielomianu zapisanego w postaci naturalnej. Funkcja ma przyjmować dwa argumenty:

- x → wektor długości n + 1 zawierający węzły: x_0, ..., x_n
- fx → wektor długości n + 1, zawierający ilorazy różnicowe: $fx = f[x_0]$, ..., $fx[n+1] = f[x_0, ..., x_n]$

Funkcja ma zwracać wektor a długości n + 1, zawierający współczynniki wielomianu w postaci naturalnej:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

Idea metody

Wielomian w postaci Newtona zadany jest wzorem:

$$N_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + c_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

Aby uzyskać postać naturalną, musimy wymnożyć wszystkie czynniki $(x-x_i)$ i uporządkować wyrazy według potęg x. Możemy to zrobić iteracyjnie, korzystając ze schematu Hornera do mnożenia wielomianów. Algorytm polega na aktualizacji tablicy współczynników, "wciągając"kolejne czynniki $(x - x_k)$ do obliczonych już współczynników postaci naturalnej. Złożoność obliczeniowa wynosi $O(n^2)$ ze względu na zagnieżdżone pętle (dla każdego z n czynników wykonujemy do n operacji aktualizacji).

Implementacja

Algorithm 3 Konwersja postaci Newtona do postaci naturalnej

Require: x: wektor węzłów $(x_0, \dots, x_n)$
Require: fx: wektor ilorazów różnicowych $(c_0, \dots, c_n)$
Ensure: a: wektor współczynników postaci naturalnej $(a_0, \dots, a_n)$

function NATURALNA(x, fx)
    $n \leftarrow \text{length}(fx) - 1$
    $a \leftarrow \text{copy}(fx)$

    for $k \leftarrow n$ **downto** 1 **do** ▷ Iteracja po węzłach x_{n-1} do x_0
        for $j \leftarrow k$ **to** n **do** ▷ Aktualizacja współczynników
            $a[j] \leftarrow a[j] - a[j+1] \cdot x[k]$
        end for
    end for
    return a
end function

Zadanie 4

Cel zadania

Celem zadania jest napisanie funkcji, która będzie interpolować zadaną funkcję f w przedziale [a, b] za pomocą wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona. Następnie funkcja ma za zadanie rysować wykres wielomianu interpolacyjnego i interpolowanej funkcji. Funkcja ma przyjmować pięć argumentów:

- f → funkcja anonimowa
- a → początek przedziału
- b → koniec przedziału
- n → stopień wielomianu interpolacyjnego
- wezly → typ węzłów: 'rownoodlegle' lub 'czebyszew'

W interpolacji należy użyć węzłów równoodległych, czyli:

$$x_k = a + kh, \text{ gdzie } h = \frac{b-a}{n}$$

lub węzłów będących zerami n + 1 wielomianu Czebyszewa, czyli:

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right)$$

Implementacja

Algorithm 4 Pseudokod funkcji `rysujNnfx`

Utwórz tablicę x_nodes o długości $n+1$
if wezly = rownoodlegle **then**
  $h \leftarrow (b-a)/n$
  for $k = 0$ to n **do**
    $x\_nodes[k] \leftarrow a + k \cdot h$
  end for
else if wezly = czebyszew **then**
  for $k = 1$ to $n+1$ **do**
    $x\_raw \leftarrow \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2(n+1)}\right)$
    $x\_nodes[k-1] \leftarrow \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot x\_raw$
  end for
else
  Zgłoś błąd: "Nieznany typ węzłów"
end if
$y\_nodes \leftarrow f(x\_nodes)$
$coeffs \leftarrow$ ilorazyRoznicowe(x_nodes, y_nodes)
Utwórz siatkę x_plot (1000 punktów na $[a, b]$)
$y\_true \leftarrow f(x\_plot)$
$y\_interp \leftarrow$ wartości warNewton(x_nodes, $coeffs$, t) dla każdego t z x_plot
Narysuj wykres $f(x)$
Narysuj wykres $N_n(x)$ przerywaną linią
Narysuj punkty (x_nodes, y_nodes) jako węzły
Ustaw etykiety osi i tytuł
Wyświetl wykres

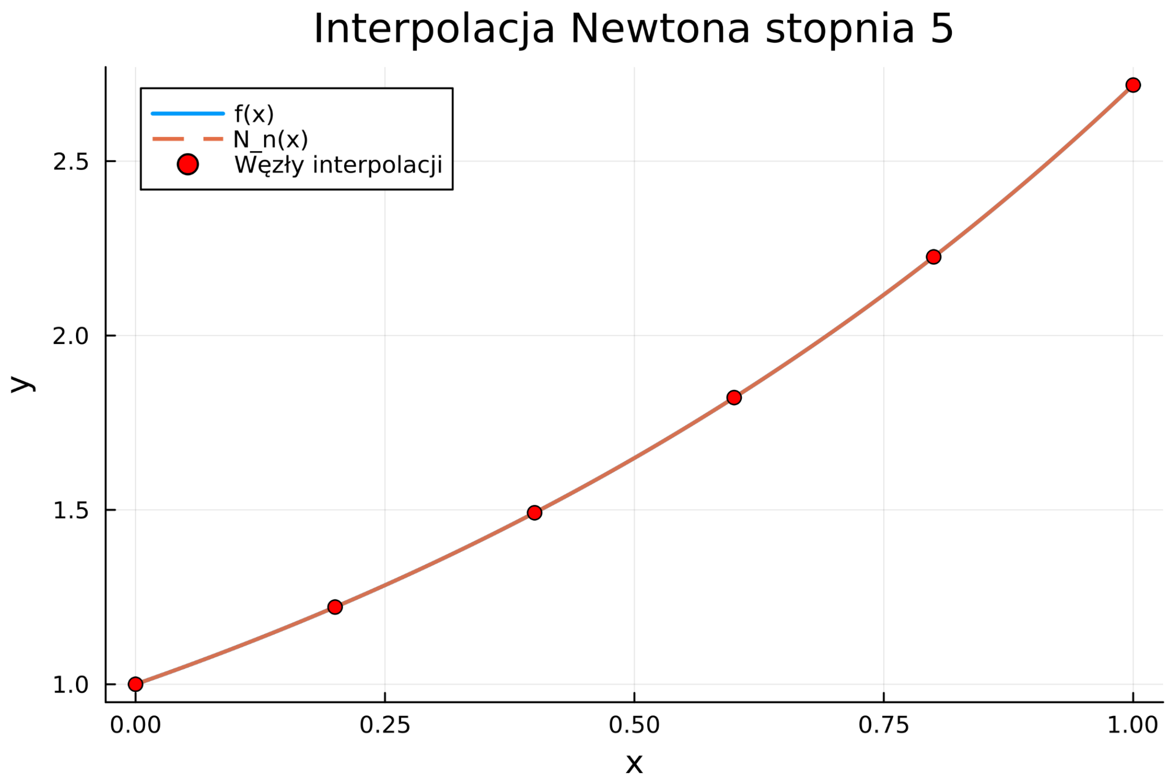
Zadanie 5

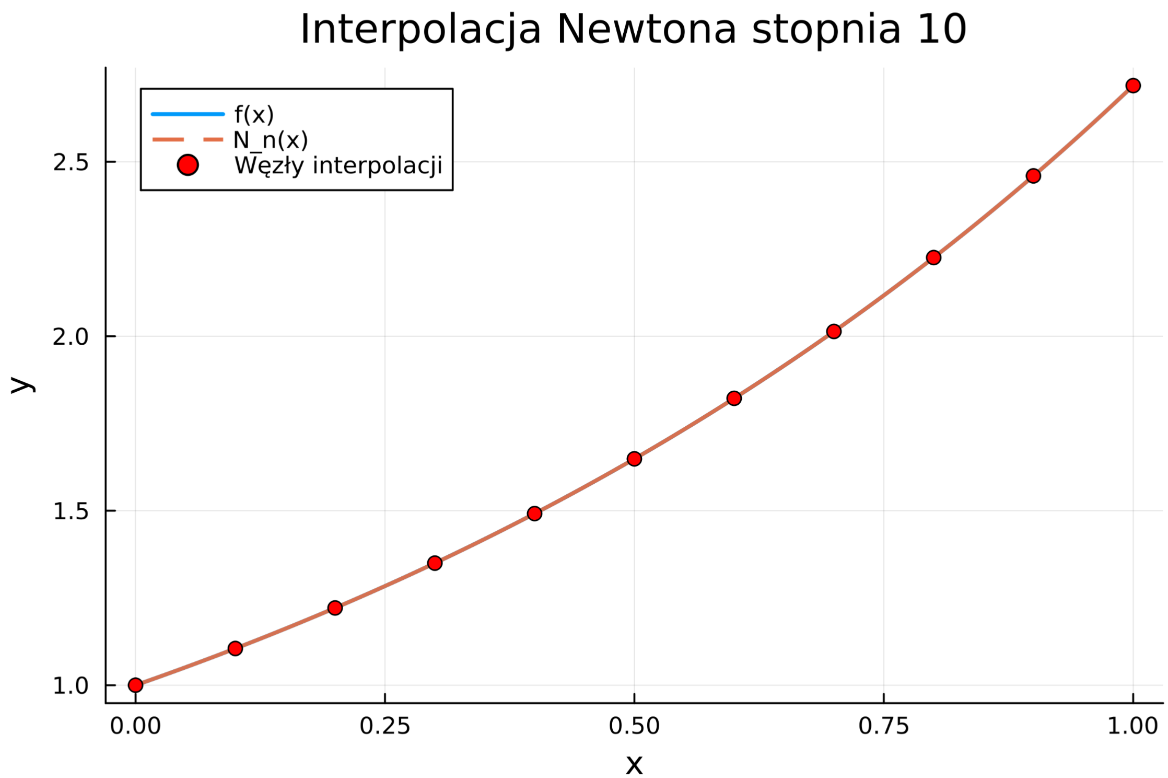
Celem zadania jest przetestowanie funkcji z poprzedniego zadania, na węzłach równoodległych na następujących przykładach:

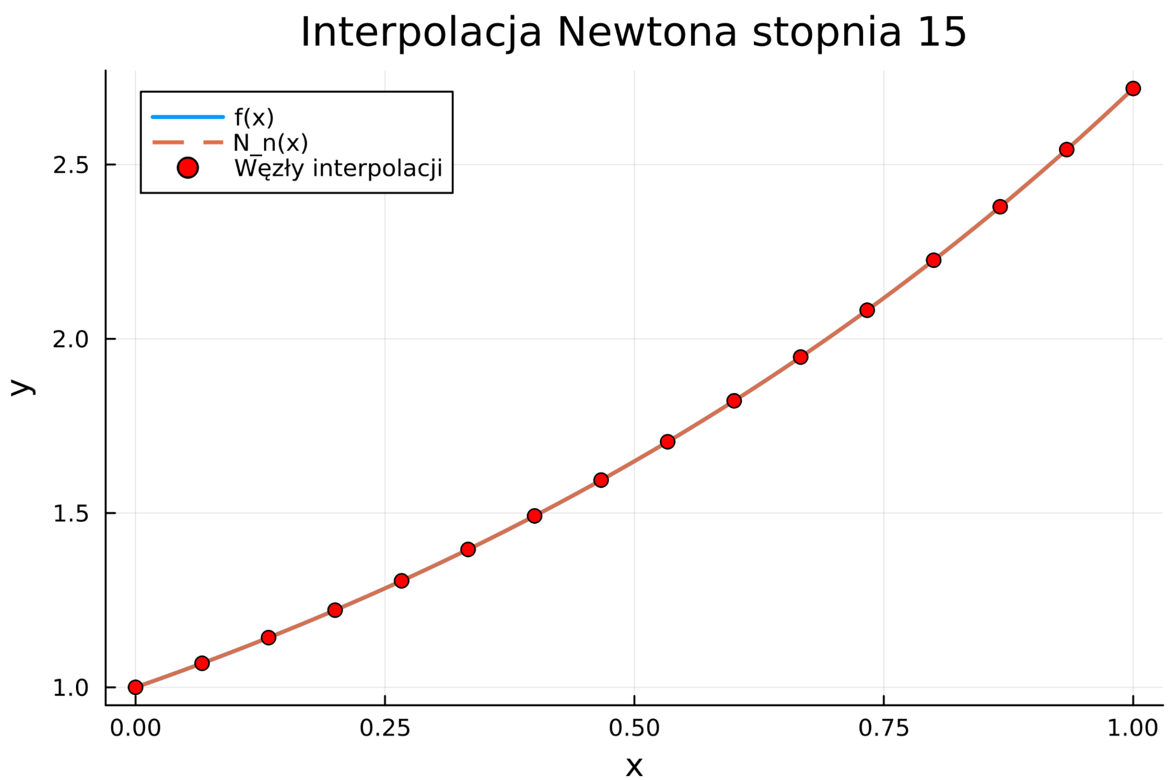
- $f(x) = e^x$ na przedziale [0, 1] dla n = 5, 10, 15
- $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ na przedziale [-1, 1] dla n = 5, 10, 15

Wyniki

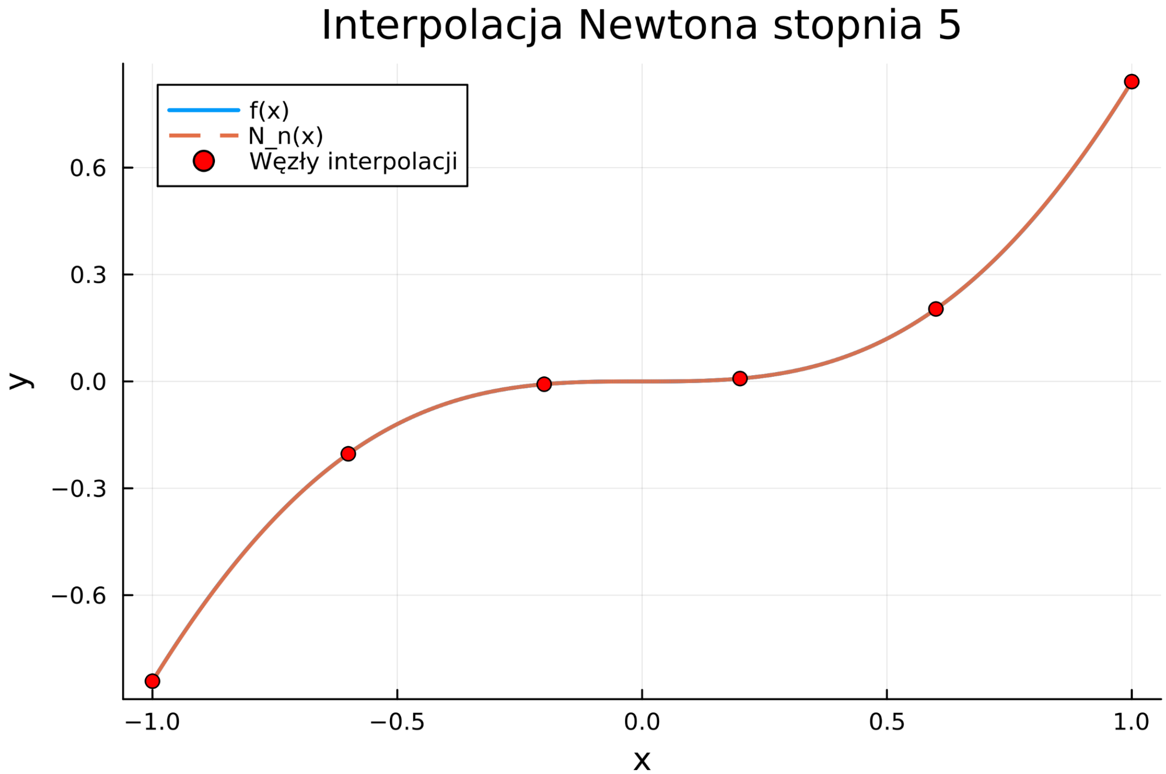
Wyniki dla $f(x) = e^x$ na przedziale [0, 1]:

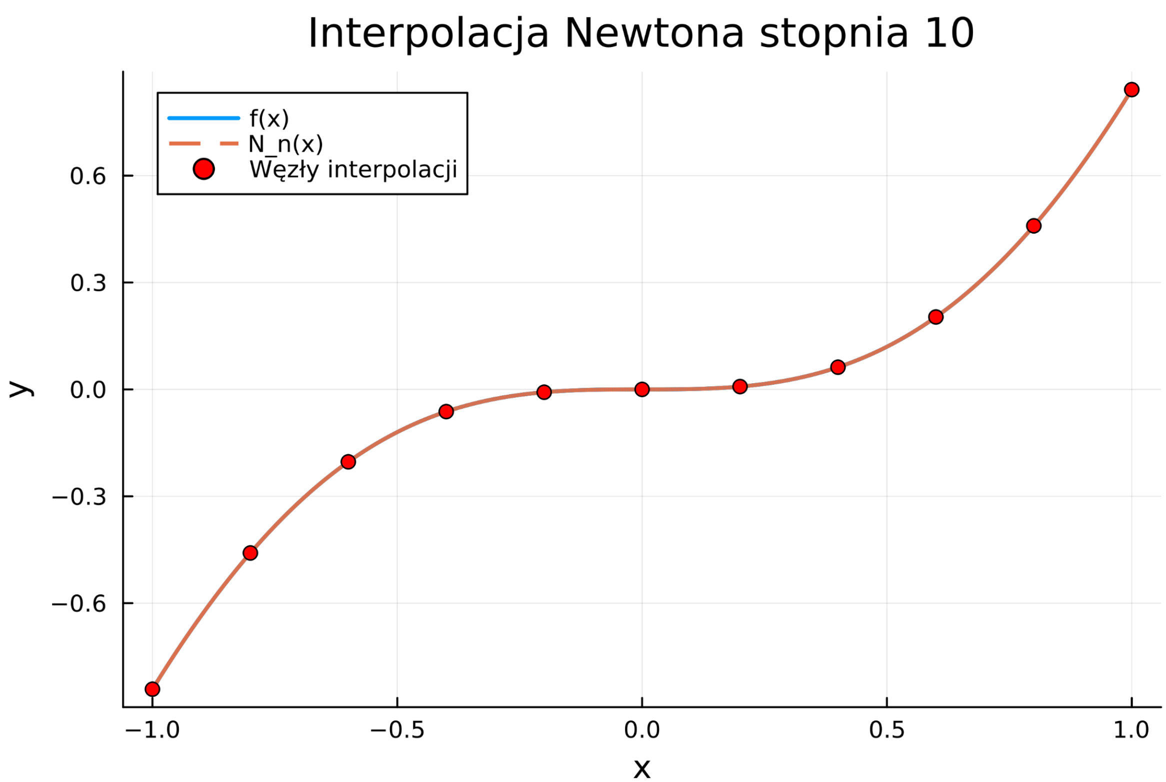


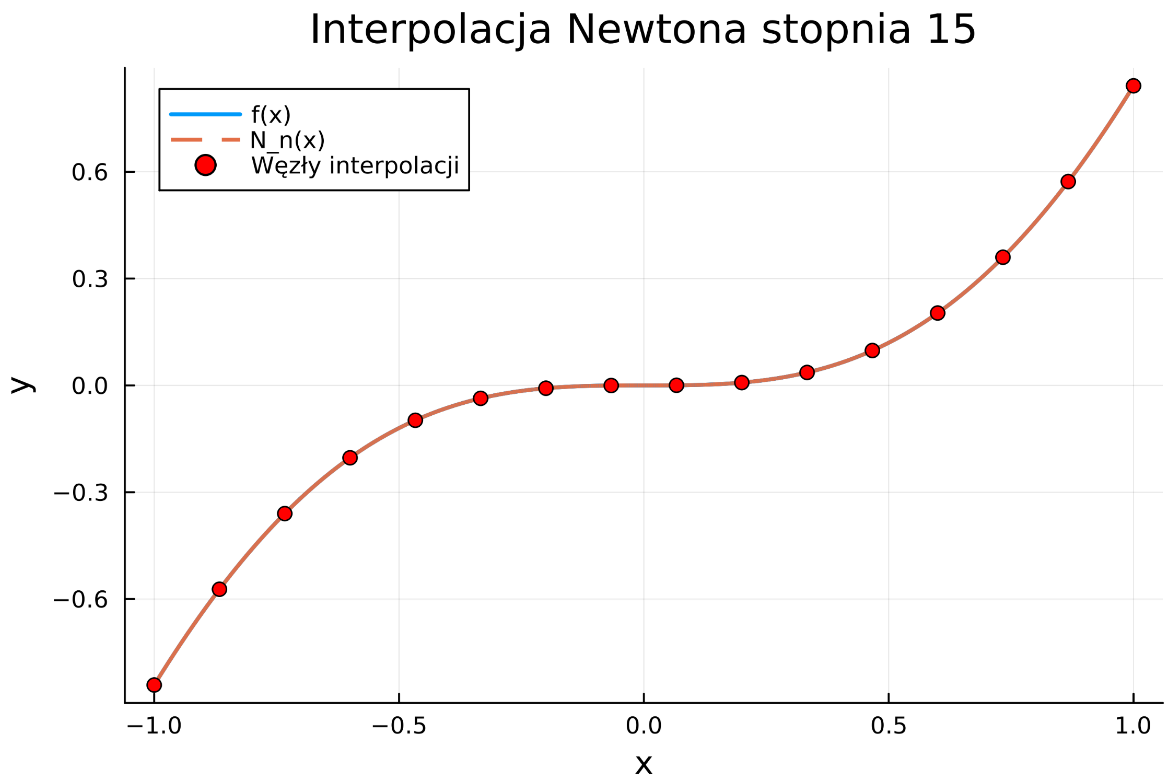

Interpolacja Newtona stopnia 10
f(x)
N_n(x)
Węzły interpolacji
2.5
2.0
1.5
1.0
y
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x


Interpolacja Newtona stopnia 15
f(x)
N_n(x)
Węzły interpolacji
2.5
2.0
1.5
1.0
y
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x

Wyniki dla $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ na przedziale [-1, 1]:







Wnioski

Na powyższych wykresach widać, że zarówno dla $f(x) = e^x$ jak i dla $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$, już dla ilości węzłow n = 5, wielomian interpolacyjny bardzo dobrze pokrywa się z wykresem funkcji. Zwiększanie ilości węzłów do n = 10 i n = 15 powoduje jedynie minimalne poprawienie dokładności interpolacji. Możemy na tej podstawie wysnuć wnioski, że dla tych funkcji w przedziałach [0, 1] oraz [-1, 1], węzły równoodległe są wystarczające do uzyskania dobrej jakości interpolacji już przy niewielkiej liczbie węzłów.

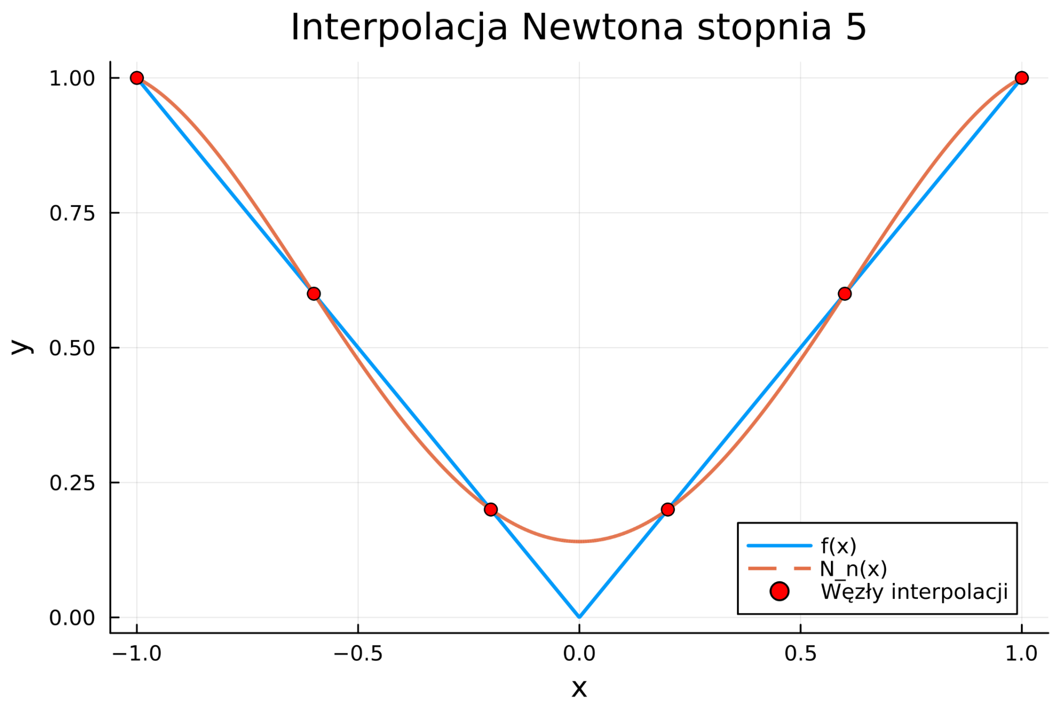
Zadanie 6

Celem zadanie jest przetestowanie funkcji z zadania 4 na węzłach równoodległych i węzłach Czebyszewa na następujących przykładach:

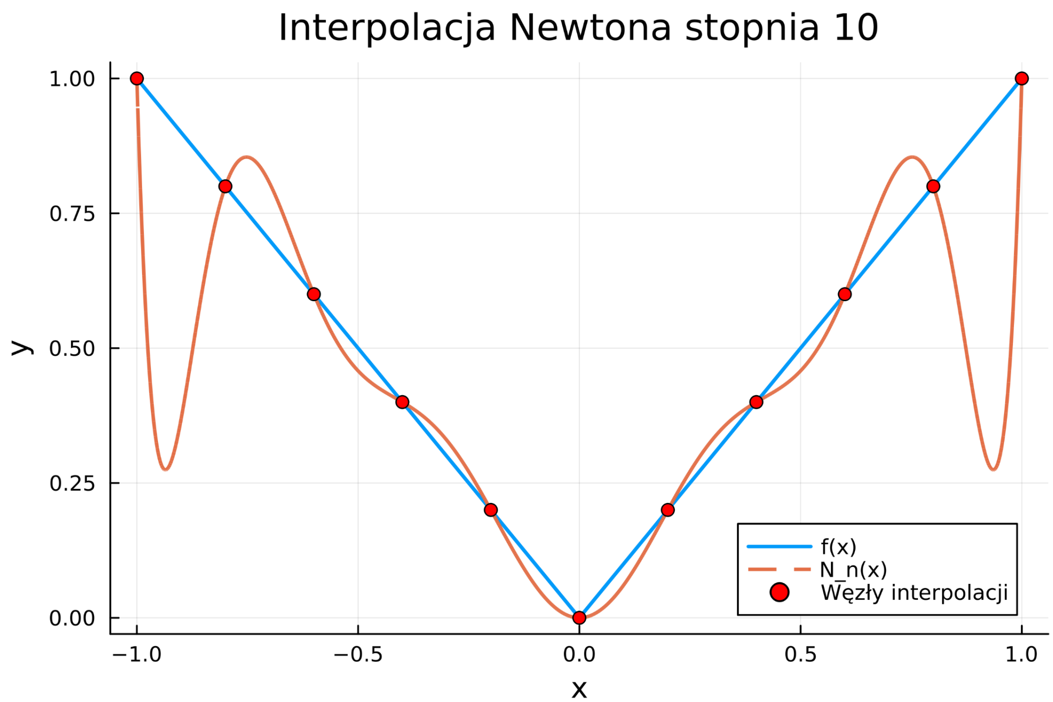
- $f(x) = |x|$ na przedziale [-1, 1] dla n = 5, 10, 15
- $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale [-1, 1] dla n = 5, 10, 15

Wyniki

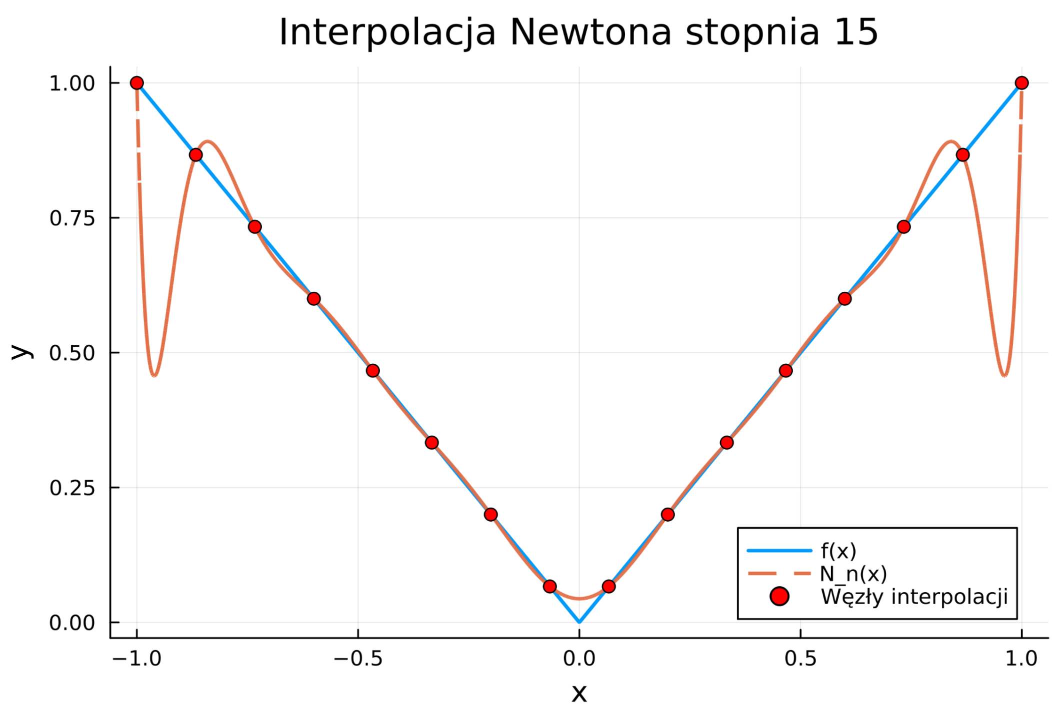
Wyniki dla $f(x) = |x|$ na przedziale [-1, 1]:



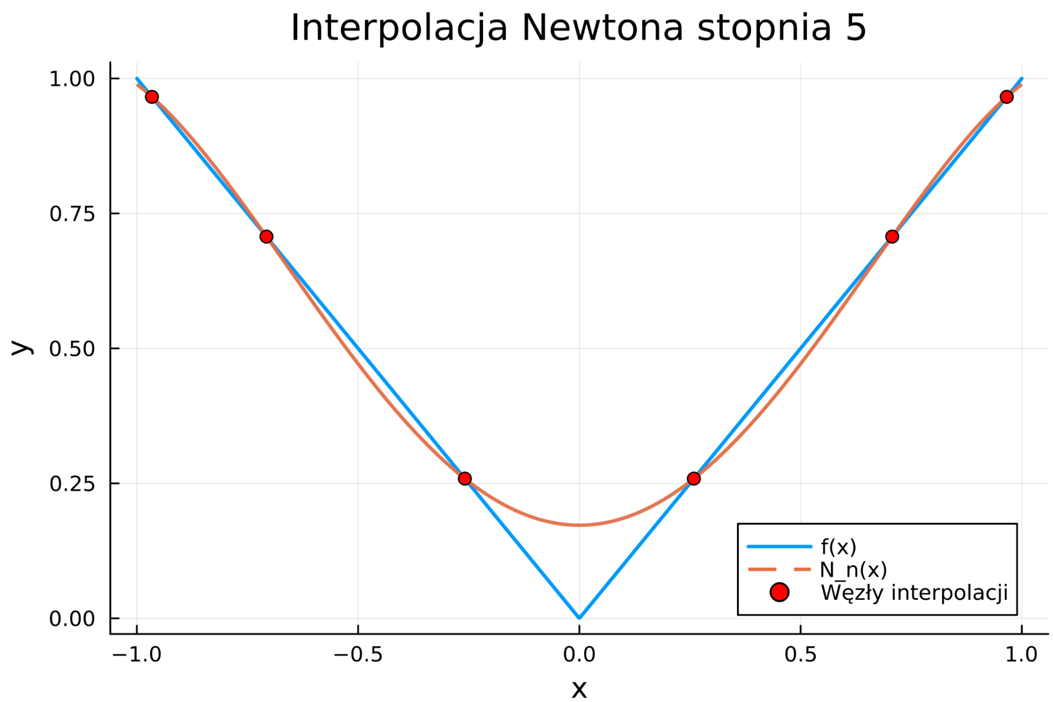
Rysunek 1: Stopień wielomianu: 5, węzły równoodległe, $f(x) = |x|$



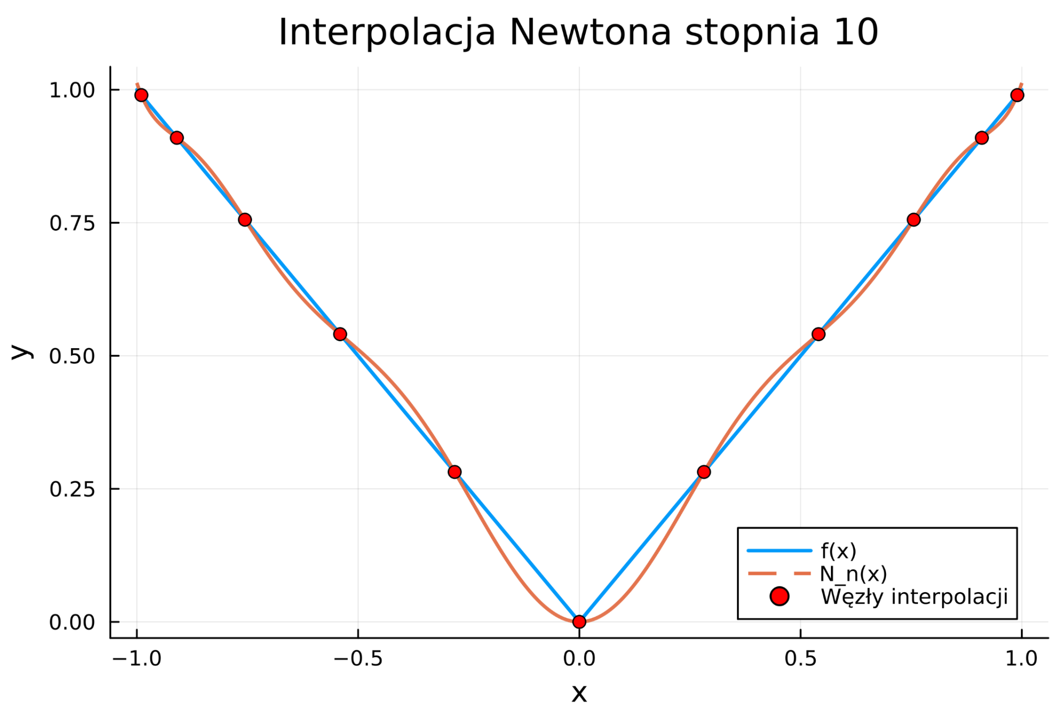
Rysunek 2: Stopień wielomianu: 10, węzły równoodległe, $f(x) = |x|$



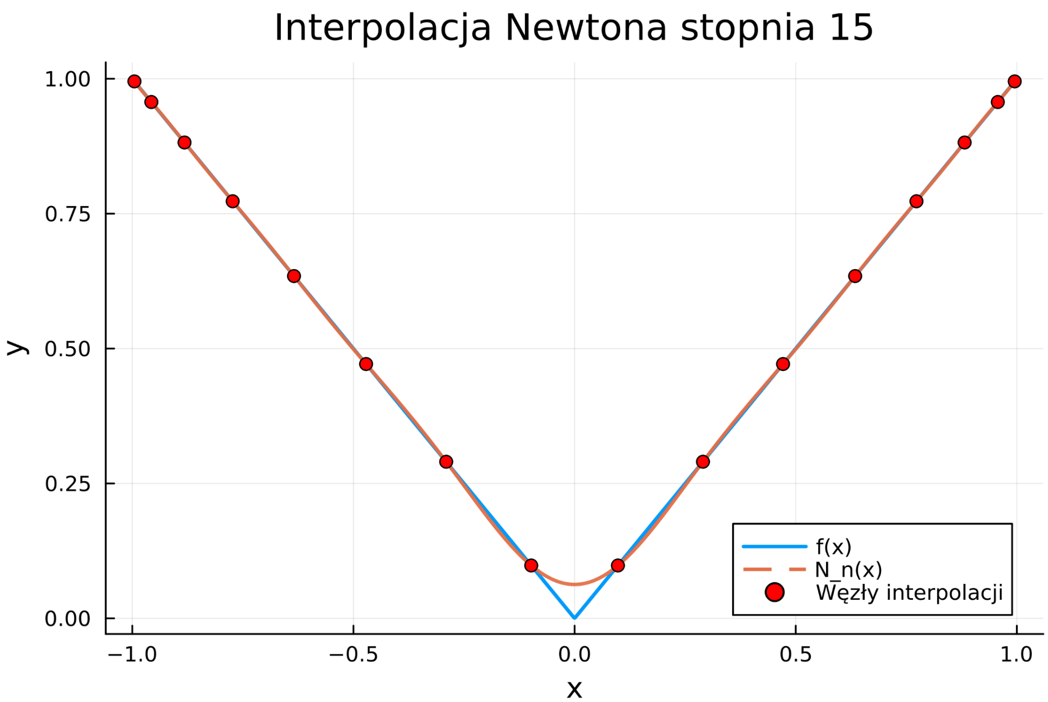
Rysunek 3: Stopień wielomianu: 15, węzły równoodległe, $f(x) = |x|$



Rysunek 4: Stopień wielomianu: 5, węzły Czebyszewa, $f(x) = |x|$

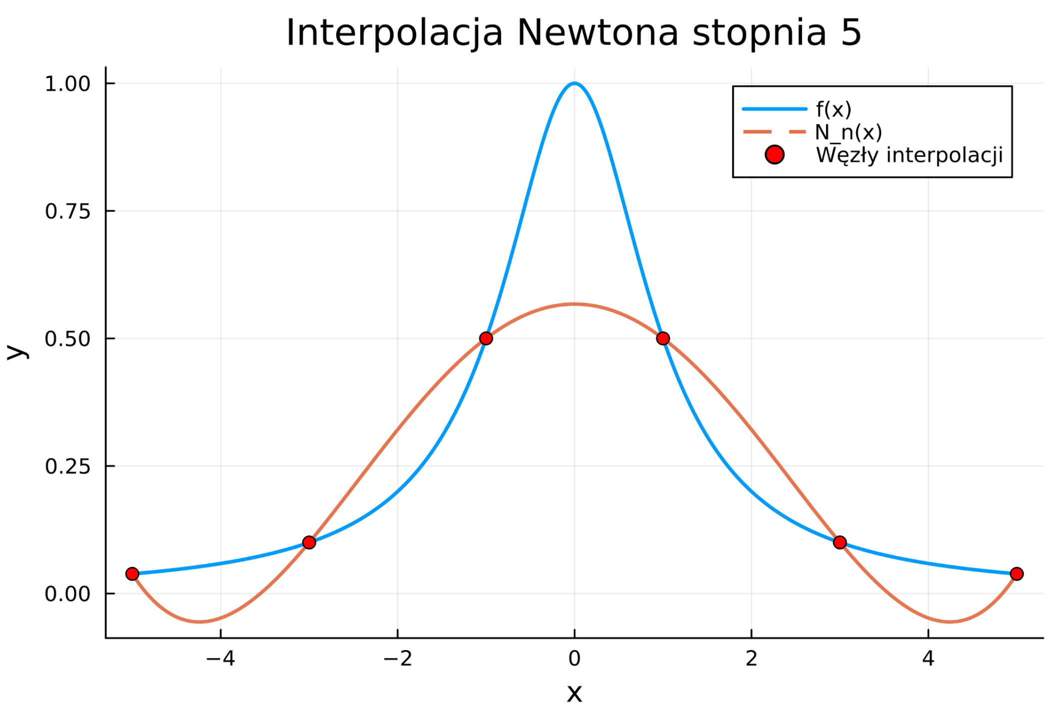


Rysunek 5: Stopień wielomianu: 10, węzły Czebyszewa, $f(x) = |x|$

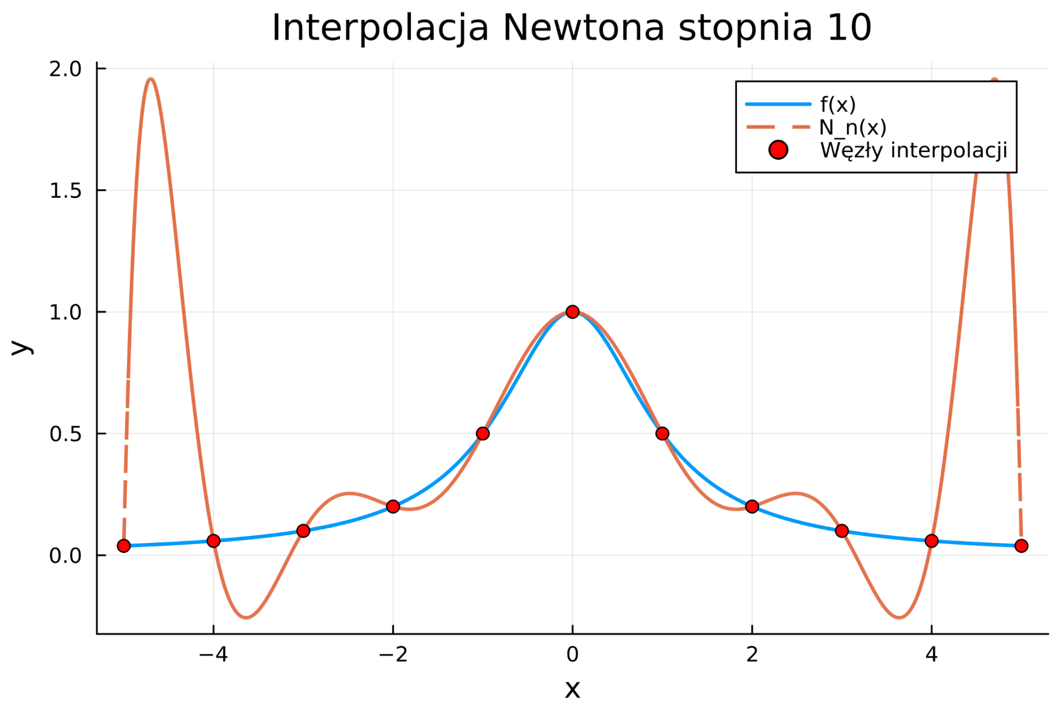


Rysunek 6: Stopień wielomianu: 15, węzły Czebyszewa, $f(x) = |x|$

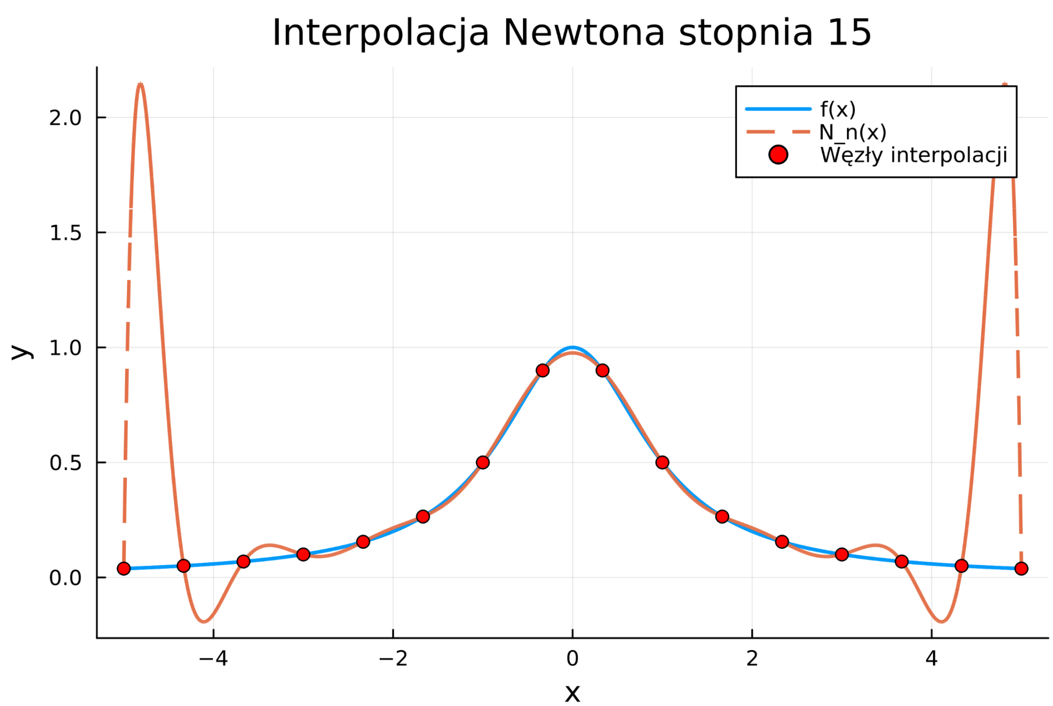
Wyniki dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na przedziale [-5, 5]:



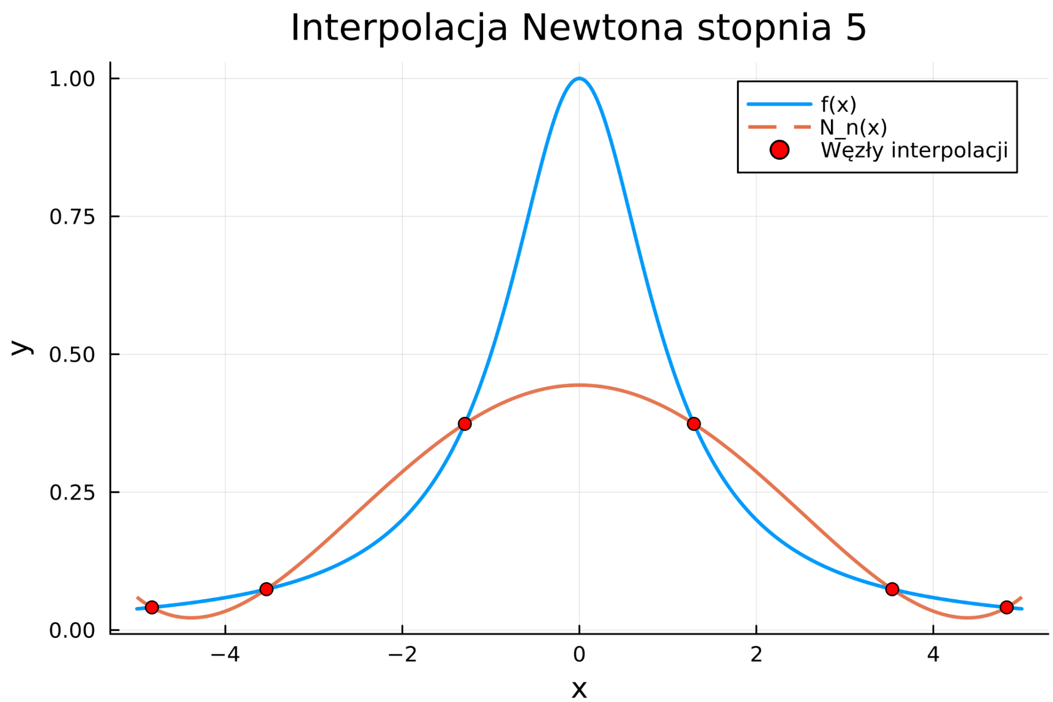
Rysunek 7: Stopień wielomianu: 5, węzły równoodległe, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



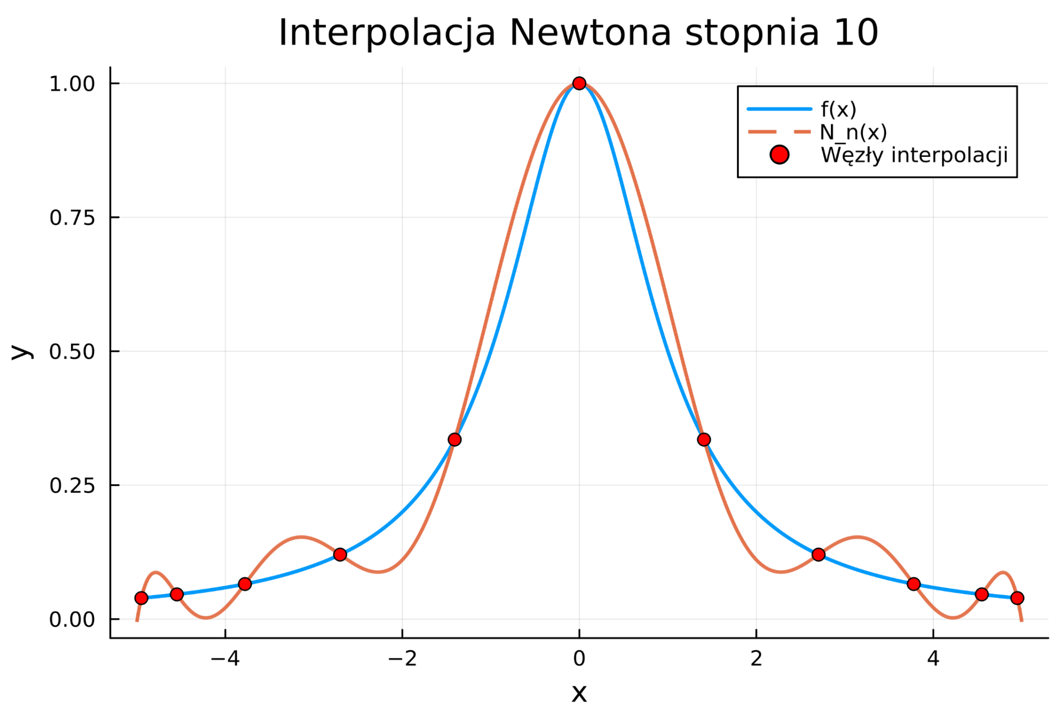
Rysunek 8: Stopień wielomianu: 10, węzły równoodległe, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



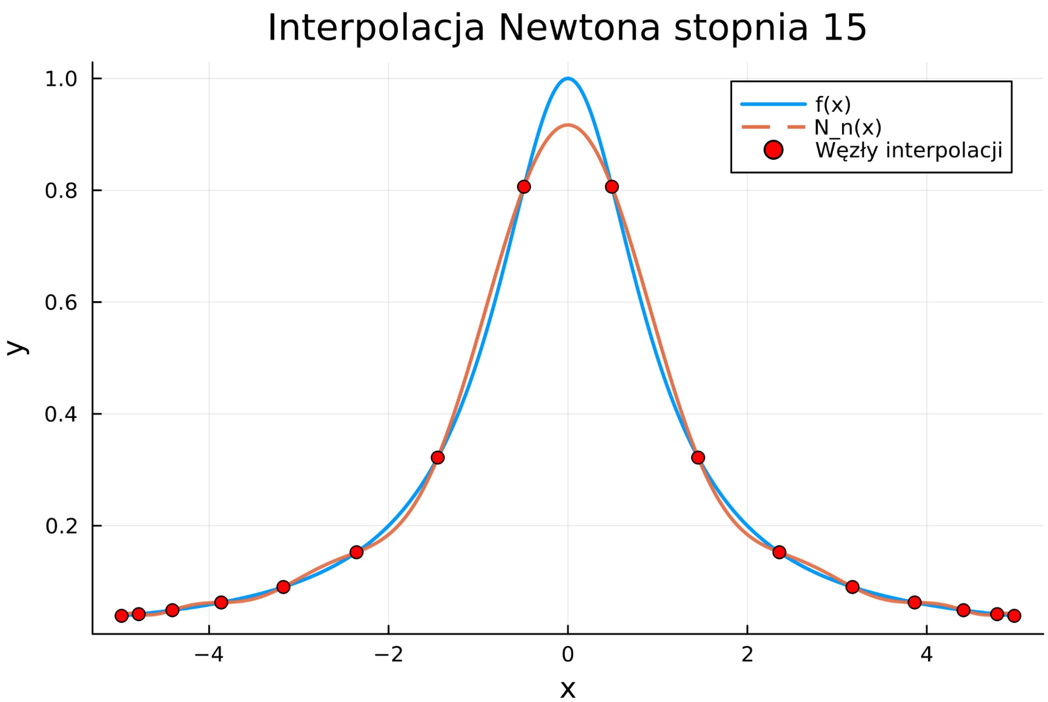
Rysunek 9: Stopień wielomianu: 15, węzły równoodległe, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 10: Stopień wielomianu: 5, węzły Czebyszewa, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 11: Stopień wielomianu: 10, węzły Czebyszewa, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$



Rysunek 12: Stopień wielomianu: 15, węzły Czebyszewa, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Wnioski

Powyższe wykresy pokazują, że sytuacja w porównaniu z tą z zadania 5 jest zupełnie inna. Widzimy tu znaczną różnicę pomiędzy wielomianami interpolacyjnymi a funkcjami, a zwiększenie ilości węzłów nie poprawia znacznie jakości wielomianów interpolacynych. Dla $f(x) = |x|$ lepiej prezentuje się sytuacja, w której użyto węzłów będących zerami wielomianu Czebyszewa. W tej sutyacji wraz ze wzrostem stopnia wielomianu, jakość interpolacji się poprawia. Dla $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$