Sprawozdanie z Laboratorium
Obliczenia Naukowe - Lista 1

Wojciech Typer

28 października 2025

Zadanie 1

Ta część zadania polegała na wyznaczeniu epsilona maszynowego

0.1 Epsilon maszynowy (*macheps*)

Epsilonem maszynowym *macheps* nazywamy najmniejszą liczbę dodatnią taką, że w arytmetyce zmiennoprzecinkowej zachodzi $1.0 + \text{macheps} > 1.0$. Jest to miara precyzji obliczeń, która określa odległość od liczby 1.0 do następnej reprezentowalnej liczby maszynowej. Im mniejszy epsilon, tym większa precyzja arytmetyki, co jest bezpośrednio związane z liczbą bitów przeznaczonych na mantysę w danym typie zmiennoprzecinkowym.

Poniżej przedstawiono porównanie wartości *macheps* uzyskanych iteracyjnie, wartości zwracanych przez funkcję `eps()` w Julii oraz wartości zdefiniowanych w pliku nagłówkowym `float.h` kompilatora C (GCC 13).

Tabela 1: Porównanie wartości epsilona maszynowego.

Typ danych	Wartość z `float.h` (GCC)	Wartość z `eps(T)` (Julia)	Wartość wyznaczona iteracyjnie
`Float16`	$9.7656e{-4}$	$9.77e{-4}$	$9.77e{-4}$
`Float32`	$1.192\,093e{-7}$	$1.192\,092\,9e{-7}$	$1.192\,092\,9e{-7}$
`Float64`	$2.220\,446e{-16}$	$2.220\,446\,049\,250\,313e{-16}$	$2.220\,446\,049\,250\,313e{-16}$

Jak widać w tabeli 1, wartości uzyskane eksperymentalnie są zgodne z wartościami referencyjnymi.

Związek między macheps a ϵ: Porównując wartość macheps z wartościami precyzji arytmetyki podanymi na wykładzie, to możemy zauważyć następującą zależność: $\text{macheps} = 2 \cdot \epsilon$.

0.2 Najmniejsza dodatnia liczba maszynowa (*eta*)

W tym podpunkdzie należało iteracyjnie wyznaczyć liczbę eta - najmniejszej liczby maszynowej większej od 0 dla różnych typów

Liczba *eta* (η) to najmniejsza dodatnia wartość, jaką można reprezentować w danym standardzie zmiennoprzecinkowym. Wartość ta jest związana z liczbami subnormalnymi (denormalizowanymi), które pozwalają na płynne "wypełnienie"luki między zerem a najmniejszą dodatnią liczbą znormalizowaną.

- **Związek z MIN_{sub}**: Liczba *eta* jest tożsama z MIN_{sub}, czyli najmniejszą możliwą do reprezentowania dodatnią liczbą subnormalną. W języku Julia wartość tę można uzyskać za pomocą funkcji `nextfloat(T(0.0))`.
- **Związek z MIN_{nor}**: Funkcja `floatmin(T)` zwraca najmniejszą dodatnią liczbę **znormalizowaną**, znaną jako MIN_{nor}. Dla odpowiednio `Float32` i `Float64` wartości te wynoszą: $1.175\,494\,4e{-38}$ i $2.225\,073\,858\,507\,201\,4e{-308}$, co zgadza się z wartościami podanymi na wykładzie.

Wartości *eta* wyznaczone iteracyjnie (poprzez dzielenie 1.0 przez 2 aż do uzyskania 0.0) są zgodne z wynikami funkcji `nextfloat(T(0.0))`. Porównanie tych wartości przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2: Porównanie wartości *eta* (η).

Typ danych	**Wartość z `nextfloat(T(0.0))`**	**Wartość wyznaczona iteracyjnie**
`Float16`	$6.0e{-8}$	$6.0e{-8}$
`Float32`	$1.0e{-45}$	$1.0e{-45}$
`Float64`	$5.0e{-324}$	$5.0e{-324}$

0.3 Największa wartość skończona (MAX)

W tej części zadania należało wyznaczyć maksymalną wartość zmiennoprzecinkową dla różnych typów

Liczba MAX to największa skończona wartość, jaką można zapisać w danym typie zmiennoprzecinkowym. Próba reprezentacji liczby większej niż MAX prowadzi do uzyskania wartości nieskończonej (`Inf`). Doświadczalne wyznaczenie tej wartości polega na iteracyjnym mnożeniu liczby przez 2, aż do momentu, gdy stanie się ona nieskończona, a następnie cofnięciu ostatniej operacji.

Tabela 3: Porównanie maksymalnych wartości zmiennoprzecinkowych.

Typ danych	**Wartość z `float.h` (GCC)**	**Wartość wyznaczona iteracyjnie**	**Wartość z `floatmax(T)` (Julia)**
`Float16`	—	$6.55e4$	$6.55e4$
`Float32`	$3.402\,823\,466\,385\,288\,6e38$	$3.402\,823\,5e38$	$3.402\,823\,5e38$
`Float64`	$1.797\,693\,134\,862\,315\,7e308$	$1.797\,693\,134\,862\,315\,7e308$	$1.797\,693\,134\,862\,315\,7e308$

Jak widać w tabeli 3, wartości uzyskane eksperymentalnie są zgodne z wartościami referencyjnymi.

Zadanie 2

Celem tego zadania było wyznaczenie epsilona maszynowego za pomocą metody Kahana

W tabeli poniżej znajdują się wartości epsilona maszynowego, obliczone metodą Kahana i te, zwrócone przez funkcję `eps()` w Julii.

Typ danych	**Wartość z metody Kahana**	**Wartość z `eps(T)` (Julia)**
`Float16`	$-9.77e{-4}$	$9.77e{-4}$
`Float32`	$1.192\,092\,9e{-7}$	$1.192\,092\,9e{-7}$
`Float64`	$-2.220\,446\,049\,250\,313e{-16}$	$2.220\,446\,049\,250\,313e{-16}$

Wnioski Z powyższej tabeli widzimy, że aby wyrażenie Kahana poprawnie wyznaczało epsilon maszynowy dla wszystkich typów zmiennopozycyjnych, należy na wynik nałożyć wartość bezwzględną. Błędy w bicie znaku wynikają z reprezentacji rozwinięcia binarnego ułamka $\frac{4}{3}$.

Zadanie 3

Celem tego zadania było sprawdzenie hipotezy, czy liczby zmiennoprzecinkowe na przedziale $[1, 2]$ są rozmieszczone z jednakowym krokiem $\delta = 2^{-52}$. Następnie należało wyznaczyć kroki dla przedziałów $[0.5, 1]$ oraz $[2, 4]$.

W zadaniu przeanalizowano rozkład liczb zmiennoprzecinkowych w arytmetyce `double` w różnych przedziałach. Gęstość rozmieszczenia tych liczb, czyli odległość między dwiema kolejnymi reprezentacjami, zależy od przedziału, w którym się znajdujemy. Sprawdzono to eksperymentalnie dla trzech przypadków.

- **Przedział** $[1, 2]$**:** W arytmetyce `double`, liczby zmiennoprzecinkowe są rozmieszczone równomiernie na przedziale $[1, 2]$ z krokiem równym $\delta = 2^{-52}$. Oznacza to, że każda kolejna liczba na tym przedziale różni się od poprzedniej o dokładnie δ. Sprawdzono to eksperymentalnie: 1000-krotnie generując losową liczbę z tego przedziału i wyznaczając kolejną liczbę maszynową za pomocą funkcji `nextfloat()`, różnica między nimi zawsze była równa δ.
- **Przedział** $[0.5, 1]$**:** Dla tego przedziału krok wynosi $\delta = 2^{-53}$. Każda liczba może być przedstawiona jako: $x = 1 + k \cdot \delta$, gdzie k jest liczbą całkowitą, a $\delta = 2^{-53}$.
- **Przedział** $[2, 4]$**:** W tym przypadku krok jest większy i wynosi $\delta = 2^{-51}$. Dla tego przedziału każda liczba może być przedstawiona jako: $x = 2 + k \cdot \delta$, gdzie $\delta = 2^{-51}$.

Powyższe eksperymenty potwierdzają, że w arytmetyce zmiennoprzecinkowej liczby są rozmieszczone gęściej bliżej zera i rzadziej w miarę oddalania się od niego. Zjawisko to nie jest przypadkowe, lecz wynika bezpośrednio ze sposobu, w jaki liczby są reprezentowane w formacie IEEE 754.

Zadanie 4

Celem zadania było wyznaczyć eksperymentalnie liczbę x w arytmetyce Float64 taką, że: $1 < x < 2$ oraz $fl(x \cdot fl(\frac{1}{x})) \neq 1$

- Liczba znaleziona eksperymentalnie: 1.7935706239891005 - generujemy losową liczbę z przedziału $[1.0, 2.0]$ i sprawdzamy, czy $x \cdot \frac{1}{x} \neq 1$.
- Najmniejsza liczba z przedziału $[1.0, 2.0]$, dla której zachodzi $x \cdot \frac{1}{x} \neq 1$ to 1.000000057228997. Iterujemy od 1.0 w górę, aż do momentu, gdy warunek będzie spełniony.

Wnioski: Działania w arytmetyce zmiennopozycyjnej obarczone są błędem, który należy brać pod uwagę nawet podczas podstawowych operacji.

Zadanie 5

Celem zadania było obliczenie iloczynu skalarnego dwóch wektorów czterema różnymi metodami

W zadaniu porównano cztery różne metody obliczania iloczynu skalarnego wektorów, aby zbadać ich stabilność numeryczną i wpływ na błędy zaokrągleń. Wyniki dla precyzji 32-bitowej (`Float32`) oraz 64-bitowej (`Float64`) przedstawiono w tabeli 0.3.

Liczba bitów	Metoda	Wynik
Precyzja 32-bitowa (`Float32`)		
	Metoda 1	-0.4999443
	Metoda 2	-0.4543457
	Metoda 3	-0.5
	Metoda 4	-0.5
Precyzja 64-bitowa (`Float64`)		
	Metoda 1	1.0251881368296672e-10
	Metoda 2	-1.5643308870494366e-10
	Metoda 3	0.0
	Metoda 4	0.0

Metoda 1: Obliczanie "w przód":

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Metoda 2: Obliczanie "w tył":

$$\sum_{i=n}^{1} x_i y_i$$

Metoda 3: Sumowanie osobno iloczynów dodatnich w porządku od największego do najmniejszego i osobno iloczynów ujemnych w porządku od najmniejszego do największego, a następnie dodanie obliczonych sum częściowych.

Metoda 4: Przeciwnie do metody 3.

Wnioski:

- Kolejność sumowania ma znaczenie, a wielkość błędu w poszczególnych metodach jest różna.

Zadanie 6

Zadanie polegało na porównaniu dwóch funkcji matematycznych f i g, które są równoważne matematycznie:

- $f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$
- $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$

Wartość x	**Wynik metody 1**		**Wynik metody 2**	
8^{-1}	7.782 218 537 318 641 4	$e{-3}$	7.782 218 537 318 706 5	$e{-3}$
8^{-2}	1.220 628 628 286 757 3	$e{-4}$	1.220 628 628 287 590 1	$e{-4}$
8^{-3}	1.907 346 813 823 096 5	$e{-6}$	1.907 346 813 826 566	$e{-6}$
8^{-4}	2.980 232 194 360 610 3	$e{-8}$	2.980 232 194 360 611 6	$e{-8}$
8^{-5}	4.656 612 873 077 393	$e{-10}$	4.656 612 871 993 190 4	$e{-10}$
8^{-6}	7.275 957 614 183 426	$e{-12}$	7.275 957 614 156 956	$e{-12}$
8^{-7}	1.136 868 377 216 160 3	$e{-13}$	1.136 868 377 216 095 7	$e{-13}$
8^{-8}	1.776 356 839 400 250 5	$e{-15}$	1.776 356 839 400 248 9	$e{-15}$
8^{-9}	0.0		2.775 557 561 562 891 4	$e{-17}$
8^{-10}	0.0		4.336 808 689 942 018	$e{-19}$
8^{-20}	0.0		3.761 581 922 631 32	$e{-37}$
8^{-21}	0.0		5.877 471 754 111 438	$e{-39}$
8^{-22}	0.0		9.183 549 615 799 121	$e{-41}$
8^{-23}	0.0		1.434 929 627 468 612 7	$e{-42}$
8^{-24}	0.0		2.242 077 542 919 707 3	$e{-44}$
8^{-25}	0.0		3.503 246 160 812 043	$e{-46}$

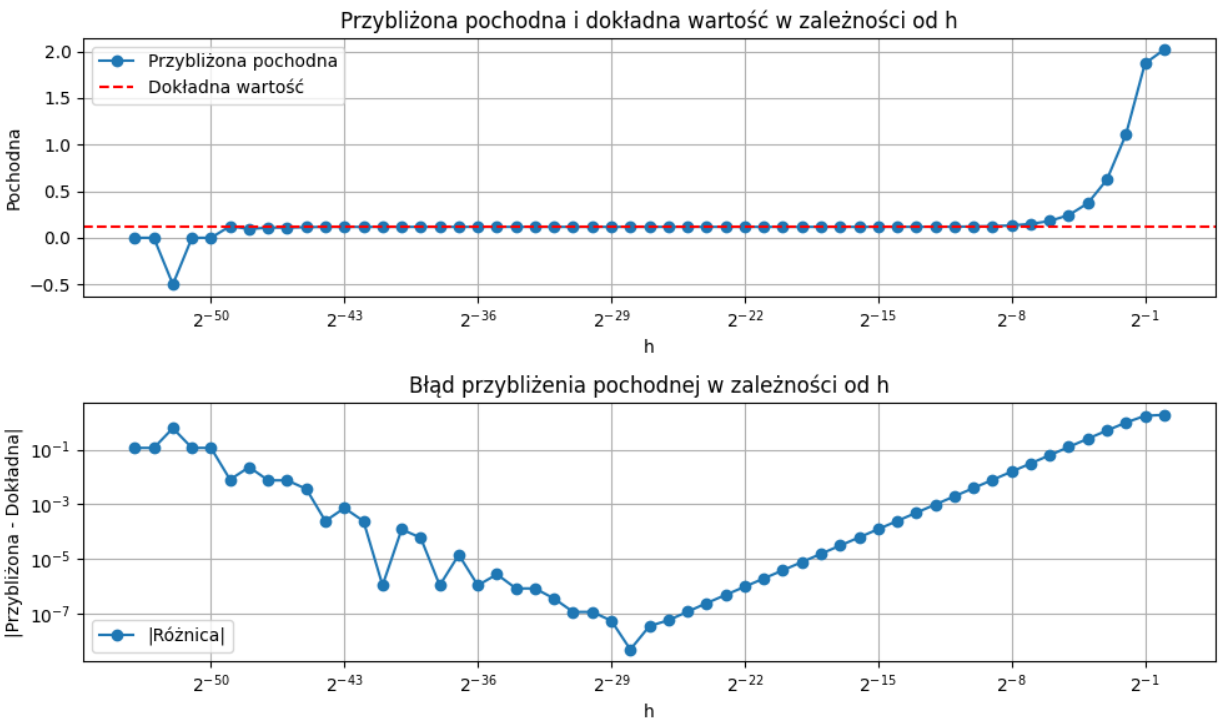
Z matematycznego punktu widzenia f = g. Dla pierwszych iteracji obie funkcje dają zbliżone wyniki, jednak dla $x \leq 8^{-9}$ funkcja f zaczyna zwracać wyniki mocno odbiegające od rzeczywistych wartości. Znacznie bardziej wiarygodne są wyniki zwracane przez funkcję g. Problemem funkcji f jest odejmowanie, zauważmy bowiem, że: $x \to 0 : \sqrt{x^2+1} \to 1$, zaś odejmowanie liczb bardzo bliskich sobie jest obarczone dużym błędem. W funkci g ten problem nie występuje, dzięki przekształceniu wyrażenia unikamy odejmowania.

Zadanie 7

Celem zadania było wyznaczenie numeryczne pochodnej funkcji $f(x) = sin(x) + cos(3x)$ w punkcie $x_0 = 1$ za pomocą wzoru:

$$\tilde{f}'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

dla różnych wartości h, oraz porównanie wyniku z dokładną wartością pochodnej.



Dokładną wartość pochodnej możemy uzyskać obliczając: $\frac{d}{dx} sin(x) + cos(3x) = cos(x) - 3sin(3x)$ Analizując otrzymane wyniki, widzimy, że początkowo wraz ze zmniejszeniem wartości h, błąd przybliżenia pochodnej maleje. Jednak od około $h = 2^{-27}$ błąd zaczyna rosnąć, wraz ze zmniejszaniem wartości h. Jest to spowodowane błędami zaokrągleń. Gdy h jest bardzo małe, różnica $f(x + h) - f(x)$ staje się bardzo mała i jest reprezentowana z ograniczoną precyzją w arytmetyce zmiennoprzecinkowej.

h	$\tilde{f}'(x_0)$	Błąd bezwzględny
2^0	2.017989	1.901047
2^{-1}	1.870441	1.753499
2^{-2}	1.107787	0.990845
2^{-3}	0.623241	0.506299
2^{-4}	0.370400	0.253458
2^{-5}	0.243443	0.126501
2^{-6}	0.180098	0.0631553
2^{-7}	0.148491	0.0315491
2^{-8}	0.132709	0.0157668
2^{-9}	0.124824	0.00788141
2^{-10}	0.120882	0.00394020
2^{-11}	0.118912	0.00196997
2^{-12}	0.117927	0.000984952
2^{-13}	0.117435	0.000492468
...	...	...
2^{-28}	0.116942	$4.803 \cdot 10^{-9}$
...	...	...
2^{-50}	0.0	0.116942
2^{-51}	0.0	0.116942
2^{-52}	-0.5	0.616942
2^{-53}	0.0	0.116942
2^{-54}	0.0	0.116942

Tabela 4: Przybliżone wartości pochodnej i błędy bezwzględne dla różnych h
. W tabelce również widać, że najbardziej dokładny wynik uzyskujemy dla $h = 2^{-28}$