

Teoria Grafów

Wojciech Typer

Wprowadzenie do grafów prostych

Literatura:

- R.J. Wilson, *Wprowadzenie do teorii grafów*
- D.B. West, *Introduction to Graph Theory*

Definicja:

Grafem prostym G nazywamy parę zbiorów rozłącznych (V, E) takich, że $E \subseteq V^{(2)}$, gdzie $V^{(2)}$ to zbiór wszystkich 2-elementowych podzbiorów zbioru V . Elementy zbioru V nazywamy **wierzchołkami**, a elementy zbioru E – **krawędziami** grafu G . Zbiór V nazywamy zbiorem wierzchołków grafu G , a zbiór E – zbiorem krawędzi grafu G .

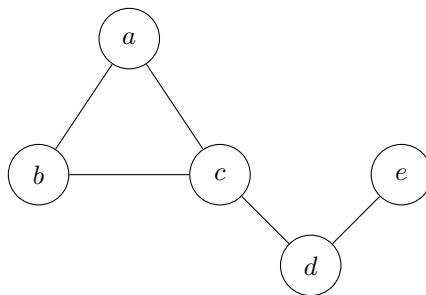
Oznaczenia:

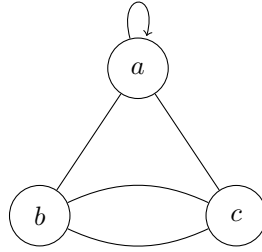
- V – zbiór wierzchołków
- E – zbiór krawędzi

Jeżeli dwie krawędzie mają punkt wspólny, to mówimy, że są to **krawędzie incydentne**.

Przykład grafu prostego:

Załóżmy, że $V = \{a, b, c, d, e\}$, a $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$.
Poniżej znajduje się wizualizacja tego grafu:





Powyższy graf jest multigrafem, zawierający multi krawędź między wierzchołkami b i c i pętlę przy wierzchołku a .

Definicja:

Grafem ogólnym G nazywamy trójkę uporządkowaną (V, E, ϕ) , gdzie V i E są zbiorami rozłącznymi, a ϕ jest funkcją przyporządkowującą każdej krawędzi z E jeden lub dwa (niekoniecznie różne) wierzchołki z V . Funkcję ϕ nazywamy **funkcją incydencji**.

Przykład $G = (V, E, \phi)$

$V = 1, 2, 3$

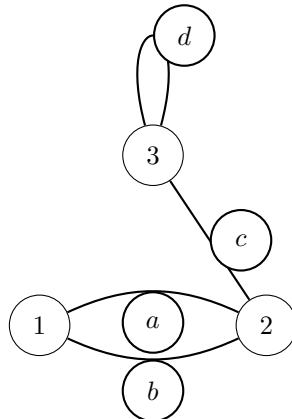
$E = a, b, c, d$

$\phi(a) = \{1, 2\}$

$\phi(b) = \{1, 2\}$

$\phi(c) = \{2, 3\}$

$\phi(d) = \{3\}$



Definicja:

Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym, $v \in V$.

Stopniem wierzchołka v nazywamy liczbę:

$$\deg(v) = 2 |\{e \in E_1 : v \in j(e)\}| + |\{e \in E_2 : v \in j(e)\}|$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi niebędących pętlami.

Lemat Eulera o uściskach dłoni

Niech $G = (V, E, j)$ będzie grafem ogólnym.

Wówczas zachodzi:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in V} \left(2 \cdot \sum_{e \in E_1} [v \in j(e)] + \sum_{e \in E_2} [v \in j(e)] \right)$$

gdzie:

- E_1 — zbiór pętli,
- E_2 — zbiór krawędzi nie będących pętlami,

Ponieważ każda pętla jest incydentna tylko z jednym wierzchołkiem, lecz do stopnia liczymy ją podwójnie, oraz każda krawędź nie będąca pętlą jest incydentna z dwoma (różnymi) wierzchołkami, mamy:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E_1| + 2|E_2| = 2(|E_1| + |E_2|) = 2|E|$$

Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie ogólnym równa się dwukrotności liczby krawędzi:

$$\boxed{\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|}$$

Definicja:

Grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ są **izomorficzne**, jeśli istnieje bijekcja

$$\varphi : V_1 \rightarrow V_2$$

taka, że dla każdych $v, w \in V_1$ zachodzi:

$$\{v, w\} \in E_1 \iff \{\varphi(v), \varphi(w)\} \in E_2.$$

Definicja:

Graf $G = (V, E)$ nazywamy **dwudzielnym**, jeżeli istnieją rozłączne, niepuste zbiory $A, B \subseteq V$ takie, że:

- $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,
- $A \cup B = V$,
- każda krawędź $e = \{v, w\} \in E$ spełnia: $v \in A$ oraz $w \in B$ (lub odwrotnie).

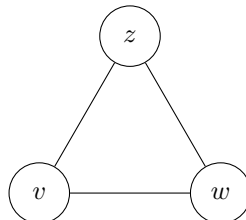
Definicja:

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym. **Trójkątem** nazywamy trójkę parami różnych wierzchołków $v, w, z \in V$, takich że:

$$\{v, w\} \in E, \quad \{w, z\} \in E, \quad \{v, z\} \in E$$

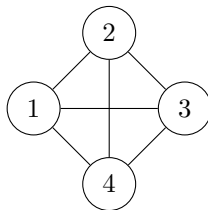
Przykład:

Poniżej znajduje się graf będący trójkątem:

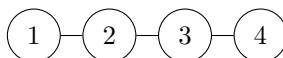


Przykłady grafów:

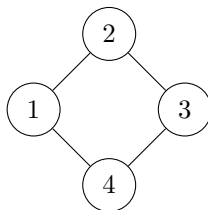
- Graf pełny



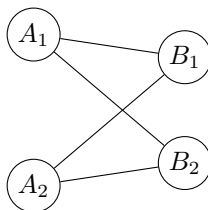
- Graf liniowy



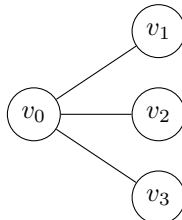
- Cykl



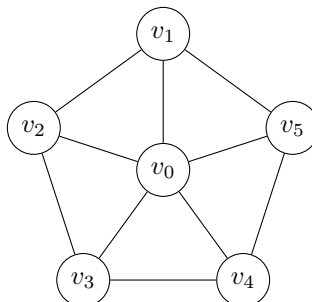
- Graf pełny dwudzielny



- Gwiazda



Graf koło:



Definicja (dopełnienie grafu):

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G} = (V, \overline{E})$, gdzie \overline{E} jest zbiorem wszystkich krawędzi, które nie należą do E , tzn.

$$\overline{E} = \{\{v, w\} : v, w \in V, v \neq w, \{v, w\} \notin E\}$$

Definicja (suma dwóch grafów):

Sumą grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$ (dla $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) nazywamy graf $G = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.

Lemat 1

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym bez trójkątów. Wtedy dla każdej krawędzi $\{v, w\} \in E$ zachodzi:

$$\deg(v) + \deg(w) \leq n = |V|$$

Lemat 2

Niech $G = (V, E)$. Wówczas:

$$\sum_{\{v, w\} \in E} (\deg(v) + \deg(w)) = \sum_{v \in V} (\deg(v))^2$$

Twierdzenie (Mantela):

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym o $n \geq 3$ wierzchołkach, w którym nie ma trójkąta (czyli graf nie zawiera cyklu długości 3). Wówczas:

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Osiągnięcie tej liczby krawędzi jest możliwe tylko wtedy, gdy G jest grafem pełnym dwudzielnym z częściami o rozmiarach $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ i $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Dowód:

Załóżmy, że $G = (V, E)$ jest grafem prostym bez trójkąta, $|V| = n$. Niech A i B będą dwoma rozłącznymi podzbiorami V takimi, że $A \cup B = V$ i $|A| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $|B| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Każda krawędź w grafie dwudzielnym $K_{|A|, |B|}$ łączy wierzchołek z A z wierzchołkiem z B , więc liczba krawędzi wynosi $|A| \cdot |B| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Pokażemy, że żaden graf prosty bez trójkąta nie może mieć więcej krawędzi. Bez straty ogólności, dla dowolnej krawędzi $\{v, w\}$ wszystkie sąsiady v i w są różne, bo inaczej powstałby trójkąt. Zatem suma stopni wszystkich wierzchołków jest ograniczona, a dokładniej liczba krawędzi jest maksymalna wtedy, gdy G jest kompletnym grafem dwudzielnym, czyli $|E| \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Dowód Niech v będzie wierzchołkiem o największym stopniu d . Jego sąsiedzi nie mogą być ze sobą połączeni, więc mogą mieć krawędzie tylko do pozostałych $n - d - 1$ wierzchołków. Zliczając krawędzie i maksymalizując wyrażenie, otrzymujemy ograniczenie $|E| \leq \frac{n^2}{4}$.

Wniosek: Najwięcej krawędzi w grafie prostym bez trójkąta ma graf pełny dwudzielnym z częściami możliwie równymi.

Graf Eulerowski:

Niech $G = (V, E, \gamma)$ będzie grafem ogólnym.

- Trasa to ciąg $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots$ taki, że $v_0, v_1, \dots \in V$ i $e_1, e_2, \dots \in E$
- Ścieżka to trasa, która nie powtarza krawędzi
- Ścieżka zamknięta to ścieżka, w której $v_0 = v_k$ (zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku)
- Droga to ścieżka, która nie powtarza wierzchołków.
- Cykl to ścieżka, w której wierzchołki się nie powtarzają, poza $v_0 = v_k$

Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$, $v, w \in V$. Odległością v od w nazywamy $d(v, w)$ - długość najkrótszej drogi z v do w . Jeżeli taka droga nie istnieje, to $d(v, w) = \infty$.

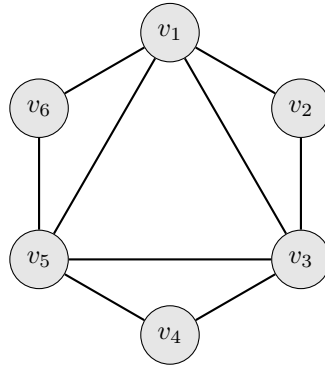
Definicja Niech $G = (V, E, \gamma)$ G jest spójny, jeżeli: $\forall v, w \in V d(v, w) < \infty$

Fakt: Na zbiorze V można wprowadzić relację równoważności:

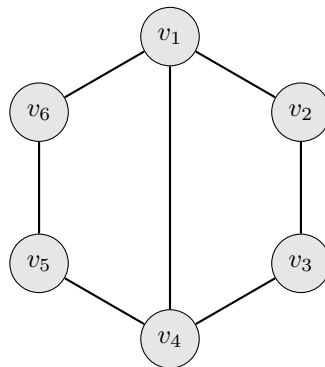
$$\forall v, w \in V v \equiv w \iff d(v, w) < \infty$$

Klasy abstrakcji relacji definiujemy tzw. spójne składowe (komponenty) grafu G

Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$. G nazywamy eulerowskim, jeżeli w G istnieje ścieżka zamknięta, zawierająca każdą krawędź z E .



Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$. G nazywamy pół eulerowskim, jeśli G nie jest eulerowski oraz w G istnieje ścieżka zawierająca każdą krawędź z E



Lemat: Niech $G = (V, E, \gamma)$. Jeżeli $\forall v \in V, \deg(v) \geq 2$, to w G występuje cykl.

Tw. Eulera, 1736 Niech $G = (V, E, \gamma)$ G jest eulerowski $\equiv G$ jest spójny i $\forall v \in V \ 2 \mid \deg(v)$

Definicja: Niech $G = (V, E, \gamma)$, $c(G)$ oznacza liczbę komponent grafu G . Krawędź $e \in E$ nazywamy mostem, jeżeli $c(G - e)$ (graf G po usunięciu krawędzi e) $> c(G)$

Ćwiczenia

Zadanie 1/1

Wiemy, że ilość wszystkich par wierzchołków w grafie prostym $G = (V, E)$ o n wierzchołkach wynosi $\binom{n}{2}$. Każdą parę możemy połączyć krawędzią lub nie. Zatem ilość wszystkich grafów prostych na n wierzchołkach wynosi:

$$2^{\binom{n}{2}}$$

Pytanie: Ile z nich ma dokładnie m krawędzi?

Jest to równoważne z wyborem m krawędzi spośród wszystkich $\binom{n}{2}$ możliwych, zatem:

$$\binom{\binom{n}{2}}{m}$$

zadanie 1/2

Pytanie: Czy istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie?

Taki graf n -wierzchołkowy musiałby mieć wierzchołki o stopniach: $0, 1, 2, \dots, n-1$. Wierzchołek o stopniu $n-1$ jest połączony z wszystkimi innymi wierzchołkami, co oznacza, że nie może istnieć wierzchołek o stopniu 0 (izolowany). Zatem nie istnieje graf prosty o co najmniej dwóch wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki mają różne stopnie.

zadanie 1/3

Pytanie: Czy suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie prostym może być nieparzysta?

Nie, ponieważ zgodnie z lematem o uściskach dłoni (handshaking lemma), suma stopni wszystkich wierzchołków w grafie jest równa podwojonej liczbie krawędzi ($\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$), a więc jest zawsze liczbą parzystą.