Sprawozdanie z Laboratorium
Obliczenia Naukowe - Lista 2

Wojciech Typer

3 listopada 2025

Zadanie 1

Cel zadania: Celem zadania jest porównanie wyników z zadania 5 z Listy 1 oraz obecnych. W obydwu zadaniach obliczamy iloczyn skalarny tymi samymi metodami, jednak dane wejściowe w obydwu zadaniach nieco się różnią - sprawdzamy jak usunięcię dziesiątej cyfry po przecinku wpłynie na wyniki

Wyniki z zadania 5 z Listy 1:

Liczba bitów	**Metoda**	**Wynik**
Precyzja 32-bitowa (`Float32`)		
	Metoda 1	-0.4999443
	Metoda 2	-0.4543457
	Metoda 3	-0.5
	Metoda 4	-0.5
Precyzja 64-bitowa (`Float64`)		
	Metoda 1	1.0251881368296672e-10
	Metoda 2	-1.5643308870494366e-10
	Metoda 3	0.0
	Metoda 4	0.0

Wyniki z obecnego zadania:

Liczba bitów	**Metoda**	**Wynik**
Precyzja 32-bitowa (`Float32`)		
	Metoda 1	-0.4999443
	Metoda 2	-0.4543457
	Metoda 3	-0.5
	Metoda 4	-0.5
Precyzja 64-bitowa (`Float64`)		
	Metoda 1	-0.004296342739891585
	Metoda 2	-0.004296342998713953
	Metoda 3	-0.004296342842280865
	Metoda 4	-0.004296342842280865

Użyte metody:

Metoda 1: Obliczanie "w przód":

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Metoda 2: Obliczanie "w tył":

$$\sum_{i=n}^{1} x_i y_i$$

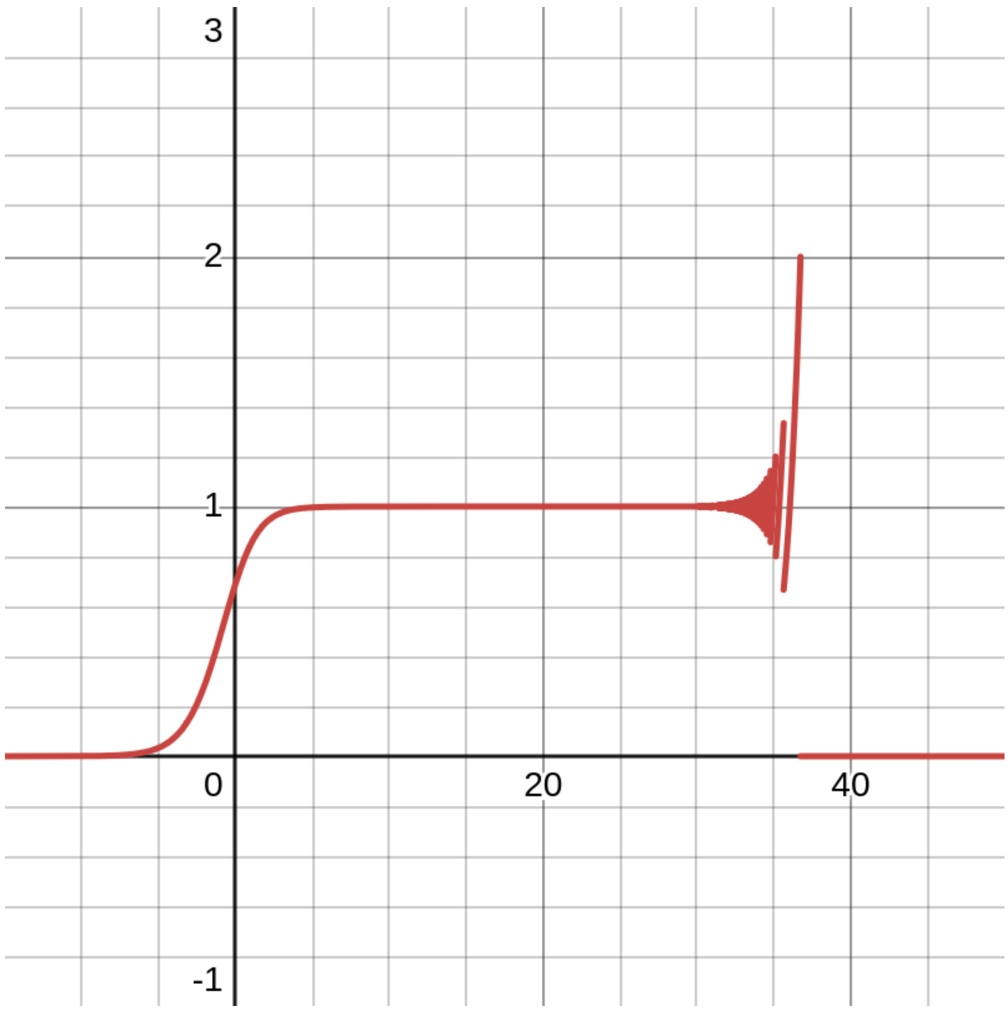
Metoda 3: Sumowanie osobno iloczynów dodatnich w porządku od największego do najmniejszego i osobno iloczynów ujemnych w porządku od najmniejszego do największego, a następnie dodanie obliczonych sum częściowych.

Metoda 4: Przeciwnie do metody 3.

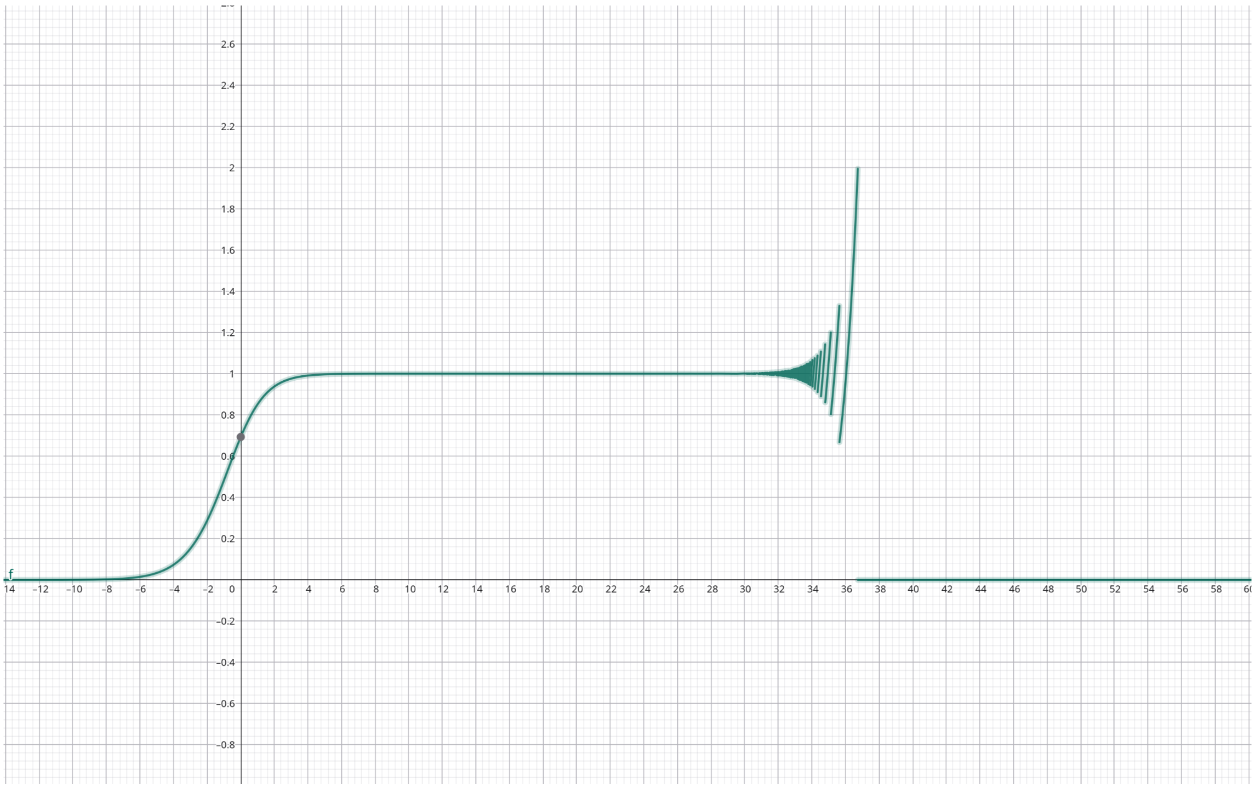
Wnioski: Zauważmy, że dla arytemtyki 32-bitowej wyniki nie uległy zmianie - wynika to ze zbyt małej precyzji tej arytmetyki. Dla arytmetyki 64-bitowej możemy zauważyć duże rozbieżności w uzyskanych wynikach, pomimo tego, że zmiana wektora x jest bardzo niewielka - możemy zatem wysnuć wnioski, że algorytmy, z których skorzystaliśmy są bardzo wrażliwe na zmiany danych, co z kolei świadczy o tym, że obliczenie iloczynu skalarnego $x \cdot y$ jest źle uwarunkowane.

Zadanie 2

Cel zadania: Narysowanie wykresu funkcji: $f(x) = e^x ln(1 + e^{-x})$ w co najmniej dwóch programach do wizualizacji oraz policzenie granicy: $\lim_{x\to\infty} f(x)$ oraz porównanie uzyskanego wyniku z wykresem funkcji.



Rysunek 1: Wykres 1, stworzony w programie Desmos.



Rysunek 2: Wykres 2, stworzony w programie Geogebra.

Obliczmy teraz granicę funkcji $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$ przy x dążącym do nieskończoności:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} e^x \ln(1+e^{-x}) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})}{e^{-x}} \\
&\overset{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln(1+e^{-x})\right)}{\frac{d}{dx}\left(e^{-x}\right)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+e^{-x}} \cdot (-e^{-x})}{-e^{-x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \\
&= \frac{1}{1+0} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Wnioski: Zauważmy, że obliczona granica nie pokrywa się z uzyskanymi wykresami funkcji. Na wykresach wartość funkcji zdaje się dążyć do zera wraz ze wzrostem wartości x. Dzieje się tak dlatego, że dla dużych wartości x wyrażenie $ln(1 + e^{-x})$ jest bardzo małe i podczas obliczeń numerycznych jest zaokrąglane do zera co powoduje, że wartość funkcji $f(x)$ jest również zaokrąglana do zera. Czynnik e^x dla dużych wartości x jest bardzo duży, a mnożenie liczb różniących się wielkością rzędów jest obarczone bardzo dużym błędem, przez co użyte programy graficzne pokazują błędne wyniki.

Zadanie 3

Cel zadania: Rozwiązać układ równań liniowych postaci $Ax = b$ dla danej macierzy współczynników $A \in R^{n\times n}$ oraz wektora prawych stron $b \in R^n$, dwoma metodami: metodą eliminacji Gaussa, oraz metodą korzystającą wprost z równania $x = A^{-1}b$. Macierz A ma być wygenerowana na dwa sposoby: jako macierz Hilberta oraz jako macierz losowa o zadanym uwarunkowaniu.

Tabela 1: Porównanie błędów względnych dla macierzy Hilberta o rosnącym rozmiarze n

n	cond(A)	rank(A)	$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_{\text{gauss}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$	$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_{\text{inv}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$
1	1.00	1	0.0	0.0
2	1.93e1	2	5.66$e-$16	1.40$e-$15
3	5.24e2	3	8.02$e-$15	0.0
4	1.55e4	4	4.14$e-$14	0.0
5	4.77e5	5	1.68$e-$12	3.35$e-$12
6	1.50e7	6	2.62$e-$10	2.02$e-$10
7	4.75e8	7	1.26$e-$8	4.71$e-$9
8	1.53e10	8	6.12$e-$8	3.08$e-$7
9	4.93e11	9	3.88$e-$6	4.54$e-$6
10	1.60e13	10	8.67$e-$5	2.50$e-$4
11	5.22e14	10	1.58$e-$4	7.62$e-$3
12	1.75e16	11	1.34$e-$1	2.59$e-$1
13	3.19e18	11	1.10$e-$1	5.33
14	6.20e17	11	1.46	8.71
15	3.68e17	12	4.70	7.34
16	7.05e17	12	5.42e1	2.98e1
17	1.25e18	12	1.37e1	1.05e1
18	2.25e18	12	1.03e1	2.48e1

Tabela 2: Porównanie błędów względnych dla losowych macierzy R_n o zadanym wskaźniku uwarunkowania

c	n	cond(A)	rank(A)	$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_{\text{gauss}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$	$\frac{\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}_{\text{inv}}\|}{\|\mathbf{x}\|}$
1.00	5	1.00	5	1.99$e-$16	1.40$e-$16
1.00e1	5	1.00e1	5	1.40$e-$16	1.49$e-$16
1.00e3	5	1.00e3	5	5.93$e-$14	5.90$e-$14
1.00e7	5	1.00e7	5	3.37$e-$10	3.51$e-$10
1.00e12	5	1.00e12	5	1.32$e-$5	1.35$e-$5
1.00e16	5	8.26e15	4	1.66$e-$1	1.71$e-$1
1.00	10	1.00	10	2.67$e-$16	3.46$e-$16
1.00e1	10	1.00e1	10	5.04$e-$16	3.29$e-$16
1.00e3	10	1.00e3	10	1.52$e-$14	1.60$e-$14
1.00e7	10	1.00e7	10	1.53$e-$10	1.24$e-$10
1.00e12	10	1.00e12	10	1.74$e-$6	4.22$e-$6
1.00e16	10	8.25e15	9	2.13$e-$1	2.86$e-$1
1.00	20	1.00	20	4.44$e-$16	4.82$e-$16
1.00e1	20	1.00e1	20	3.24$e-$16	4.04$e-$16
1.00e3	20	1.00e3	20	4.18$e-$15	4.62$e-$15
1.00e7	20	1.00e7	20	3.35$e-$10	4.61$e-$10
1.00e12	20	1.00e12	20	1.32$e-$5	1.04$e-$5
1.00e16	20	8.31e15	19	5.17$e-$2	3.46$e-$2

Wnioski: W przypadku macierzy Hilberta, wraz ze wzrostem n rośnie jej wskaźnik uwarunkowania, co przekłada się na wzrost błędów względnych obu metod rozwiązywania układu równań. Możemy z tego wywnioskować, że zadanie obliczenia układu równań z macierzą Hilberta jest źle uwarunkowane. W przypadku macierzy losowych, możemy zauważyć, że błędy względne są znacznie bardziej zależne od zadanych wskaźników uwarunkowania c niż od rozmiaru macierzy n. Gdy dowolna macierz ma wysoki wskaźnik uwarunkowania, to zadanie obliczenia układu równań z tą macierzą jest źle uwarunkowane.

Zadanie 4

Cel zadania: Dany jest wielomian P, będący naturalną postacią wielomianu Wilkinsona: $p(x) = \prod_{i=1}^{20}(x - i)$. Należy obliczyć: $|P(z_k)|, |p(z_k)| oraz |z_k - k|$ Następnie należy powtórzyć eksperyment Wilkinsona, tj. zmienić wpółczynik przy $x^{19} z - 210$ na $-210 - 2^{-23}$ i opisać otrzymane wyniki

Tabela 3: Analiza błędów dla pierwiastków wielomianu Wilkinsona w jego nie zaburzonej reprezentacji numerycznej

k	z_k	$\lvert z_k - k\rvert$	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$
1	1.0	0.0000	$3.57e4$	$3.66e4$
2	2.0	0.0000	$1.76e5$	$1.81e5$
3	3.0	0.0000	$2.79e5$	$2.90e5$
4	4.0	0.0000	$3.03e6$	$2.04e6$
5	5.0	0.0000	$2.29e7$	$2.09e7$
6	6.0	0.0000	$1.29e8$	$1.13e8$
7	7.0001	0.0001	$4.81e8$	$4.57e8$
8	7.9994	0.0006	$1.64e9$	$1.56e9$
9	9.0029	0.0029	$4.88e9$	$4.69e9$
10	9.9904	0.0096	$1.36e10$	$1.26e10$
11	11.025	0.0250	$3.59e10$	$3.30e10$
12	11.9533	0.0467	$7.53e10$	$7.39e10$
13	13.0743	0.0743	$1.96e11$	$1.85e11$
14	13.9148	0.0852	$3.58e11$	$3.55e11$
15	15.0755	0.0755	$8.22e11$	$8.42e11$
16	15.9463	0.0537	$1.55e12$	$1.57e12$
17	17.0254	0.0254	$3.69e12$	$3.32e12$
18	17.9909	0.0091	$7.65e12$	$6.34e12$
19	19.0019	0.0019	$1.14e13$	$1.23e13$
20	19.9998	0.0002	$2.79e13$	$2.32e13$

Tabela 4: Analiza błędów dla pierwiastków zaburzonego wielomianu Wilkinsona

k	Przybliżony z_k	$\lvert z_k - k\rvert$	$\lvert P(z_k)\rvert$	$\lvert p(z_k)\rvert$
1	1.0	0.0000	$2.03e4$	$2.00e4$
2	2.0	0.0000	$3.47e5$	$3.52e5$
3	3.0	0.0000	$2.26e6$	$2.42e6$
4	4.0	0.0000	$1.05e7$	$1.13e7$
5	5.0	0.0000	$3.76e7$	$4.48e7$
6	6.0	0.0000	$1.31e8$	$2.14e8$
7	6.9996	0.0004	$3.94e8$	$1.78e9$
8	8.0078	0.0078	$1.18e9$	$1.87e10$
9	8.9158	0.0842	$2.23e9$	$1.37e11$
10	10.0955 - 0.6449i	0.6520	$1.07e10$	$1.49e12$
11	10.0955 + 0.6449i	1.1109	$1.07e10$	$1.49e12$
12	11.7939 - 1.6525i	1.6653	$3.14e10$	$3.30e13$
13	11.7939 + 1.6525i	2.0458	$3.14e10$	$3.30e13$
14	13.9924 - 2.5188i	2.5188	$2.16e11$	$9.55e14$
15	13.9924 + 2.5188i	2.7129	$2.16e11$	$9.55e14$
16	16.7307 - 2.8126i	2.9060	$4.85e11$	$2.74e16$
17	16.7307 + 2.8126i	2.8255	$4.85e11$	$2.74e16$
18	19.5024 - 1.9403i	2.4540	$4.56e12$	$4.25e17$
19	19.5024 + 1.9403i	2.0043	$4.56e12$	$4.25e17$
20	20.8469	0.8469	$8.76e12$	$1.37e18$

Wnioski: W przypadku nie zaburzonego wielomianu Wilkinsona, możemy zauważyć, że wyliczone pierwiastki nie pokrywają się z rzeczywistymi wartościami, jednak błędy bezwzględne są stosunkowo niewielkie. Niemniej, wartości wielomianu (zarówno w jego naturalnej jak i oryginalnej formie) w tych punktach są bardzo duże i rosną wraz ze wzrostem wartości k. Dzieje się tak, ponieważ wyliczenie pierwiastków w wielomianie Wilkinsona jest ekstrymalnie źle uwarunkowane.
W przypadku zaburzonego wielomianu Wilkinsona, sytuacja jest jeszcze gorsza - błędy bezwzględne pierwiastków są znacznie większe, a dodatkowo pojawiają się pierwiastki zespolone. Wszystkie te błędy wynikają z faktu, że jesteśmy zmuszni pracowac w arytmetyce z ograniczoną precyzją, a wielomian Wilkinsona jest przykładem wielomianu, którego pierwiastki są bardzo wrażliwe na nawet niewielkie zmiany współczynników.