Algorytmy Optymalizacji Dyskretnej - Lista 2

Wojciech Typer

Zadanie 1

Cel zadania

Celem zadania jest zminimalizowanie kosztów dostawy paliwa

Opis modelu

W zadaniu mamy następujące dane:

- supply: s_i ilość paliwa dostępna u dostawcy i
- demand: d_j ilość paliwa potrzebna na stacji j
- cost: c_{ij} koszt dostarczenia jednostki paliwa od dostawcy i do stacji j
- Niech S oznacza zbiór dostawców, a D zbiór odbiorców paliwa

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_{ij} - ilość paliwa dostarczona z magazynu i do stacji j

Ograniczenia:

- Podaż dla każdego dostawcy nie może zostać przekroczona:

$$\sum_{j \in D} x_{ij} \leq s_i \quad \forall i \in S \tag{1}$$

- Popyt dla każdej stacji musi zostać zaspokojony:

$$\sum_{i \in S} x_{ij} = d_j \quad \forall j \in D \tag{2}$$

- Zmienne decyzyjne nie mogą być ujemne:

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in S, j \in D \tag{3}$$

- Aby model był możliwy do rozwiązania, całkowita podaż musi być większa bądź równa całkowitemu popytowi:

$$\sum_{i \in S} s_i \geq \sum_{j \in D} d_j \tag{4}$$

Funkcja celu: Chcemy zminimalizować całkowity koszt dostawy paliwa do odbiroców, tak aby każdy z nich otrzymał wymaganą ilość paliwa:

$$\min \sum_{i \in S} \sum_{j \in D} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

Opis rozwiązania

Wyniki możemy przedstawić za pomocą macierzy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 165000.0 & 0 & 110000.0 \\ 110000.0 & 55000.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 330000.0 & 330000.0 \end{bmatrix}$$

Którą należy interpretować w następujący sposób:

- Firma 1 dostarcza 165000 jednostek paliwa do stacji 2 oraz 110000 jednostek do stacji 4, czyli wysyła w sumie 275000 jednostek paliwa
- Firma 2 dostarcza 110000 jednostek paliwa do stacji 1 oraz 55000 jednostek do stacji 2, czyli wysyła w sumie 165000 jednostek paliwa
- Firma 3 dostarcza 330000 jednostek paliwa do stacji 3 oraz 330000 jednostek do stacji 4, czyli wysyła w sumie 660000 jednostek paliwa

Zatem całkowity koszt optymalnego dostarczenia paliwa wynosi 8 525 000 jednostek waluty. Z otrzymanych wyników możemy również wywnioskować, że wszystkie firmy dostarczają paliwo, oraz, że możliwości dostaw firmy 1 i 3 są w pełni wykorzystane.

Zadanie 2

Cel zadania

Wyznaczenie optymalnego tygodniowego planu produkcji poszczególnych wyrobów oraz obliczenie zysku z ich sprzedaży.

Opis modelu

W zadaniu mamy następujące dane:

- Zbiór maszyn produkcyjnych M
- Zbiór gotowych produktów P
- Ceny produktów p_i dla każdego produktu $i \in P$
- Koszty pracy maszyn (za godzinę) c_m dla każdej maszyny $m \in M$
- Koszty materiałów k_i dla każdego produktu $i \in P$
- Maksymalny tygodniowy popyt d_i dla każdego produktu $i \in P$
- Czas produkcji jednostki produktu i na maszynie m wynosi t_{mi}
- Dostępny czas pracy maszyny $m \in M$ w tygodniu wynosi T_m

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- Ilość wyprodukowanego produktu $i \in P$ oznaczona jako x_i

Ograniczenia:

- Dostępny czas pracy maszyny nie może zostać przekroczony:

$$\sum_{i \in P} t_{mi} x_i \leq T_m \quad \forall m \in M \tag{6}$$

- Produkcja nie może przekroczyć maksymalnego popytu oraz musi być nieujemna:

$$0 \leq x_i \leq d_i \quad \forall i \in P \tag{7}$$

Funkcja celu:

Celem jest maksymalizacja zysku z produkcji wyrobów:

$$\max \sum_{i \in P} (p_i - k_i) x_i - \sum_{m \in M} c_m \left(\sum_{i \in P} t_{mi} x_i \right) \tag{8}$$

Opis rozwiązania

Otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$X = [125.0, 100.0, 150.0, 500.0], \text{ gdzie } X = [x_i] \tag{9}$$

Jest to wektor wyprodukowanych jednostek wyrobów $i \in P$. Uzyskany w ten sposób zysk wynosi 3632.5 dolarów. Czas pracy maszyn wynosi:

- Maszyna 1: 3520 minut
- Maszyna 2: 3600 minut
- Maszyna 3: 2100 minut

Zadanie 3

Cel zadania

Wyznaczyć plan produkcji i magazynowania wytwarzanego towaru, który spełnia zapotrzebowanie w każdym okresie i minimalizuje łączny koszt.

Opis modelu

W zadaniu mamy dostępne następujące dane:

- T - liczba okresów planowania
- c_j - koszt produkcji jednostki towaru w okresie $j \in T$
- o_j - koszt produkcji jednostki towaru w nadprodukcji w okresie $j \in T$
- a_j - ilość możliwej nadprodukcji w okresie $j \in T$
- d_j - zapotrzebowanie na towar w okresie $j \in T$
- P_{max} - maksymalna ilość towaru, którą firma może wyprodukować w okresie czasu
- h - koszt magazynowania jednostki towaru przez jeden okres czasu
- s_0 - początkowa ilość towaru w magazynie
- S_{max} - maksymalna pojemność magazynu

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_j - ilość produkowanego towaru w okresie $j \in T$ w standardowej produkcji
- y_j - ilość produkowanego towaru w okresie $j \in T$ w nadprodukcji
- s_j - ilość towaru w magazynie na koniec okresu $j \in T$

Ograniczenia

- Nie ponadmiarowa produkcja nie może przekroczyć maksymalnej produkcji:

$$0 \leq x_j \leq P_{max} \quad \forall j \in T \tag{10}$$

- Ponadmiarowa produkcja nie może przekroczyć możliwej nadprodukcji:

$$0 \leq y_j \leq a_j \quad \forall j \in T \tag{11}$$

- Ilość towaru w magazynie nie może przekroczyć jego maksymalnej pojemności:

$$0 \leq s_j \leq S_{max} \quad \forall j \in T \tag{12}$$

- Bilans zapasu magazynowego w każdym okresie musi zostać zachowany:

$$s_{j-1} + x_j + yj = d_j + s_j \quad \forall j \in T \tag{13}$$

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitych kosztów produkcji i magazynowania towaru:

$$\min \sum_{j \in T} c_j x_j + o_j y_j + h s_j \tag{14}$$

Opis rozwiązania

Otrzymujemy następujące wyniki:

- Okres 1: $x_1 = 100, y_1 = 15, s_1 = 0$
- Okres 2: $x_2 = 100, y_2 = 50, s_2 = 70$
- Okres 3: $x_3 = 100, y_3 = 0, s_3 = 45$
- Okres 4: $x_4 = 100, y_4 = 50, s_4 = 0$

Na podstawie wyników możemy stwierdzić, że minimalny koszt produkcji i magazynowania wynosi 3 842 500 dolarów, w okresach 1, 2 i 4 firma korzysta z nadprodukcji a możliwości magazynowania towaru są wyczerpane na koniec drugiego okresu.

Zadanie 4

Cel zadania

Celem jest znalezienie połączenia z miasta i do miasta j, którego całkowity koszt jest najmniejszy i całkowity czas przejazdu nie przekracza z góry zadanego czasu T.

Opis modelu

W zadaniu mamy następujące dane:

- N - zbiór miasta
- A - zbiór dróg, gdzie każda droga (i, j) łączy miasto $i \in N$ z miastem $j \in T$
- c_{ij} - koszt przejazdu drogą $(i, j) \in A$
- t_{ij} - czas przejazdu drogą $(i, j) \in A$
- i - miasto początkowe
- j - miasto końcowe
- T - maksymalny dozwolony czas podróży

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_{ij} - zmienna binarna wskazująca czy droga $(i, j) \in A$ jest w wybrana w trasie

Ograniczenia

- Całkowity czas podróży nie może przekroczyć zadanego T:

$$\sum_{(i,j)\in A} t_{ij}x_{ij} \leq T \tag{15}$$

- Zachowanie przepływu w każdym mieście $k \in N$:

$$\sum_{j:(k,j)\in A} x_{kj} - \sum_{i:(i,k)\in A} x_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } k = i^\circ \\ -1, & \text{jeśli } k = j^\circ \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

- Zmienne decyzyjne muszą być binarne:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \tag{16}$$

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja kosztu przejazdu z miasta początkowego do miasta końcowego:

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij} \tag{17}$$

Opis rozwiązań

Dla danych z zadania, to jest:

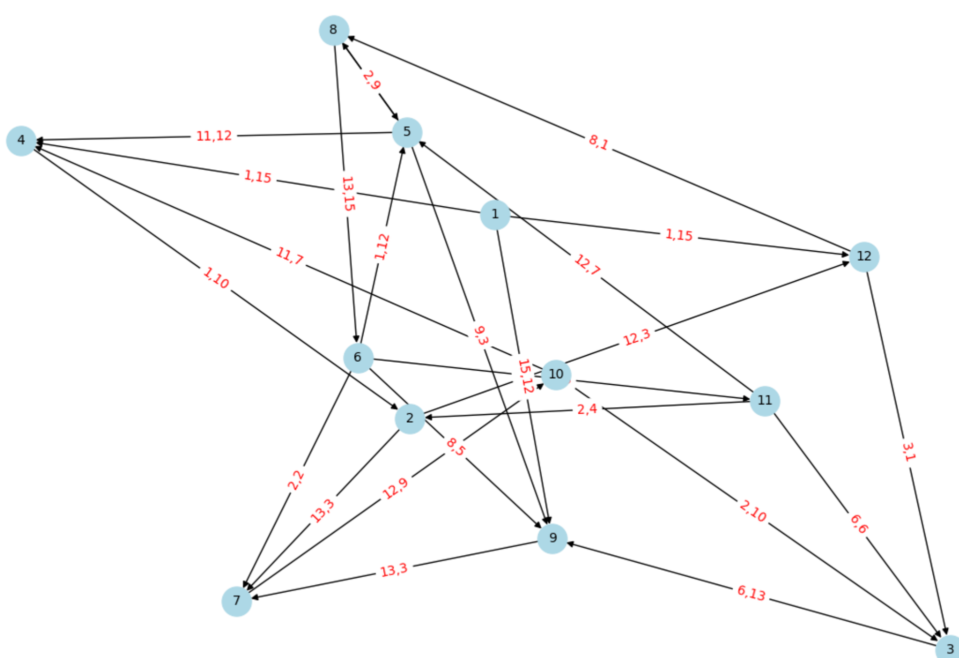
- $N = 10$
- $i = 1$
- $j = 10$
- $T_{max} = 15$
- *arcs* - podane

Otrzymuejmy następujące wyniki:

- Minimalny koszt: 13.0
- Czas przejazdu: 15.0
- Ścieżka: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 7 \to 9 \to 10$

Dla danych z własnego egzemplarza, to jest:

- $N = 12$
- $i = 1$
- $j = 9$
- $T_{max} = 30$
- *arcs* - jak na rysunku poniżej

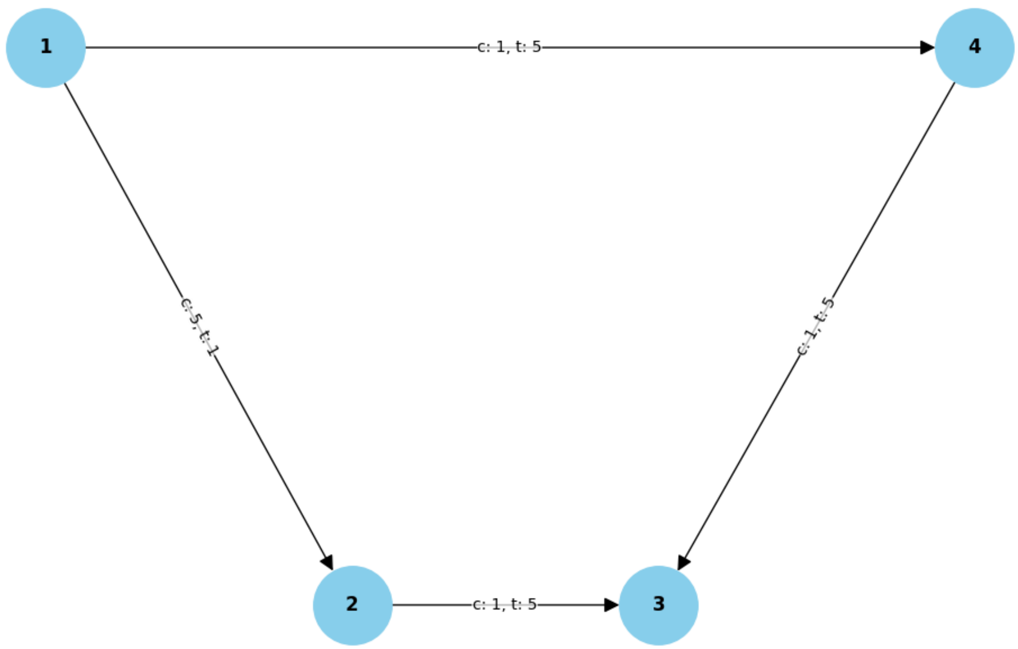


Rysunek 1: Własny egzemplarz do zadania 4

Otrzymujemy następujące wyniki:

- Minimalny koszt: 10.0
- Czas przejazdu: 29.0
- Ścieżka: $1 \to 12 \to 3 \to 9$

Zauważmy, że ograniczenie na całkowitoliczbowość jest istotne. Rozpatrujemy następujący graf:



Rysunek 2: Przykład grafu, w którym ograniczenie na całkowitoliczbowość jest ważna

Mamy następujące dane:

- $N = 4$
- $i = 1$
- $j = 3$
- $T_{max} = 8$
- $arcs$ - jak na rysunku poniżej

Bez ograniczenia na całkowitoliczbowość otrzymuejmy rozwiązanie:

- Minimalny koszt: 4.0
- Czas przejazdu: 8.0
- Ścieżka: —

Do wyboru mieliśmy dwie ścieżki:

- Ścieżka 1: $1 \to 2 \to 3$ o koszcie 6 i czasie 6
- Ścieżka 2: $1 \to 4 \to 3$ o koszcie 2 i czasie 10

Solver, chcąc zminimalizować koszt patrzy na tańszą ścieżkę drugą, która nie mieści się w ograniczeniu czasowym, ale ponieważ pozwoliliśmy na wartości ułamkowe, solver znajduje matematycznie poprawne, ale logicznie bezsensowne rozwiązanie, które polega na wysyłaniu części przepływu jedną ścieżką i pozostałej części przepływu drugą ścieżką.

Zauważmy również, że po usunięciu ograniczenia na czas przejazdu oraz całkowitoliczbowość dostajemy problem najtańszego przepływu w sieci, więc otrzymane rozwiązania będą akceptowalne.

Zadanie 5

Cel zadania

Celem zadania jest zminimalizowanie ilości radiowozów wystawionych do patrolowania poszczególnych dzielnic miasta. Zadanie to należy rozwiązać jako problem cyrkulacji.

Opis modelu

W zadaniu mamy następujące dane:

- P - zbiór dzielnic miasta
- S - zbiór zmian patrolowych
- Macierze ograniczeń dolych i górnych na liczbę radiowozów U_{ij}, L_{ij}, gdzie $i \in P$, $j \in S$
- Wektor minimalnej liczby dostępnych radiowozów w dzielnicy a_i, gdzie $i \in P$
- Wektor minimalej potrzebnej liczby radiowozów w zmianie b_j, gdzie $j \in S$

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_{ij} - liczba radiowozów przypisanych do dzielnicy $i \in P$ w zmianie $j \in S$

Ograniczenia

- Dla każdej dzielnicy $i \in P$ liczba radiowozów przydzielonych we wszystkich zmianach musi być co najmniej równa minimalnej wymaganej liczbie radiowozów:

$$\sum_{j \in S} x_{ij} \geq a_i \quad \forall i \in P \tag{18}$$

- Dla każdej zmiany $j \in S$ liczba radiowozów przydzielonych we wszystkich dzielnicach musi być co najmniej równa wymaganej liczbie radiowozów:

$$\sum_{i \in P} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j \in S \tag{19}$$

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja całkowitej liczby radiowozów przydzielonych do patroli:

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{j \in S} x_{ij} \tag{20}$$

Opis rozwiązania

Dla danych z zadania otrzymujemy, że całkowita liczba radiowozów przydzielonych do patroli wynosi 48.

Zadanie 6

Cel zadania

Celem zadania jest optymalne rozmieszczenie minimalnej ilości kamer potrzebnych do monitorowania placu z kontenerami.

Opis modelu

W zadaniu mamy następujące dane:

- V - siatka, mająca wymiary n x m, reprezentująca plac z kontenerami
- C - zbiór z miejscami zajętymi przez kontenery
- k - liczba reprezentująca zasięg kamery. Kamera widzi w kierunku poziomym i pionowym do odległości k pól

W modelu mamy następujące zmienne decyzyjne:

- x_{ij} - zmienna binarna wskazująca czy kamera jest zainstalowana na polu $(i, j) \in V$

Ograniczenia

- Każde miejsce zajęte przez kontener $p \in C$ musi być monitorowane przez co najmniej jedną kamerę:

$$\sum_{(i,j) \in \text{kamera widzi } p} x_{ij} \geq 1 \quad \forall p \in C \tag{21}$$

- Kamery można instalować tylko w miejscach nie zajętych przez kontenery:

$$x_{ij} = 0 \quad \forall (i, j) \in C \tag{22}$$

- Zmienne decyzyjne muszą być binarne:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in V \tag{23}$$

Funkcja celu

Celem jest minimalizacja liczby zainstalowanych kamer:

$$\min \sum_{(i,j) \in V} x_{ij} \tag{24}$$

Opis rozwiązania

Dla siatki o wymiarach 11 x 11 i 20 kontenerów rozmieszczonych na przekątnej kwadratu (bez kontenera na samym środku) otrzymujemy wyniki:

- dla $k = 3$, minimalna liczba kamer wynosi 8
- dla $k = 5$, minimalna liczba kamer wynosi 6