Filtracja w domenie przestrzeni

1 Filtracja

Filtracja liniowa jest procesem splotu (konwolucji) obrazu z maską (filtrem). Dla dwuwymiarowej i dyskretnej funkcji filtracja dana jest wzorem:

$$L2(m,n) = (w \times L1)(m,n) = \sum_{p,q \in MF} L1(m-p, n-q)w(p,q), \tag{1}$$

gdzie w(p,q) - maska filtru MF

Do filtracji służy polecenie `imfilter(obraz, maska, opcje);` Dostępne opcje są pogrupowane w 3 kategoriach:

- Opcje związane z brzegiem obrazu:
  - **X** - punkty leżące na zewnątrz obszaru, a pokryte maską, mają przypisaną wartość X. Domyślnie X=0;
  - 'symmetric' - potrzebne obszary są tworzone poprzez odbicie symetryczne
  - 'replicate' - potrzebne obszary są tworzone poprzez kopiowanie brzegowych wartości
  - 'circular' - potrzebne obszary są doklejane cyklicznie
- Opcje związane z rozmiarem wyjściowym:
  - **'same'** - obraz wyjściowy ma taki sam rozmiar jak wejściowy
  - 'full' - obraz wyjściowy jest większy niż wejściowy
- algorytm filtracji
  - **'corr'** - filtracja jest dokonywana z wykorzystaniem funkcji korelacji.
  - 'conv' - wielowymiarowa filtracja z wykorzystaniem splotu.

Poprzez maskę należy rozumieć macierz o wymiarach PxQ (najczęściej kwadratową o nieparzystym wymiarze), której element centralny wskazuje punkt obrazu cyfrowego podlegającemu filtracji.

1.1 Rodzaje filtracji

Filtrację można podzielić na względem kilku kryteriów:

- wg pasma przepuszczania: np. dolno-, górno-, pasmoprzepustowe;
- wg liniowości: liniowe i nieliniowe.
- wg istnienia uprzywilejowanych kierunków działania: izotropowe, anizotropowe

2 Filtracja liniowa

2.1 Filtracja dolnoprzepustowa

Przypisują one elementowi centralnemu średnią z obszaru pokrytego maską. Stosuje się do tego maski typu: `MF=ones(3)/9`, `MF=ones(5)/25`. Działanie tego rodzaju filtru powoduje na ogół rozmycie krawędzi, generalizację obrazu oraz zawężenie zakresu intensywności. Cechą charakterystyczną tej filtracji jest, że suma elementów maski równa się 1. Najczęściej spotykane maski bazują na średniej ważonej, gdzie waga elementu centralnego jest większa od pozostałych, np. `MF=[1 1 1; 1 2 1; 1 1 1]/10`.

2.2 Filtracja górnoprzepustowa

Filtracja górnoprzepustowa służy do wyeksponowania detali i zmienności na obrazach, takich jak krawędzie, narożniki, pojedyncze punkty. Wykorzystuje się do tego pierwsze i drugie pochodne intensywności. Najczęściej używanymi operatorami są: gradienty Robertsa, Sobela czy Prewitta oraz laplasjany.

2.2.1 Operator Prewitta

Operator ten jest oparty o pierwszą pochodną. Wykorzystuje on następujące maski (po lewej maska horyzontalna, po prawej wertykalna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Operator Sobela

Operator ten jest oparty o uśrednioną pochodną dyskretną, gdzie wartość pochodnej liczonej przez środek ma dwukrotnie wiekszą wagę niż pochodne liczone z elementów sąsiadujących. Wykorzystuje on następujące maski (po lewej maska horyzontalna, po prawej wertykalna):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Operator Robertsa

Operatory Robertsa to osiem masek, obracanych o 45 stopni względem siebie.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.2.4 Operator Nevatia-Babu

Operator Nevatia-Babu bazuje na obszarze 5x5 i wyznacza gradienty dla kierunków 0^o, 30^o i 60^o (od lewej do prawej).

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & -100 & -100 & -100 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 78 & -32 \\ 100 & 92 & 0 & -92 & -100 \\ 32 & -78 & -100 & -100 & -100 \\ -100 & -100 & -100 & -100 & -100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 100 & 100 & -32 & -100 \\ 100 & 100 & 92 & -78 & -100 \\ 100 & 100 & 0 & -100 & -100 \\ 100 & 78 & -92 & -100 & -100 \\ 100 & 32 & -100 & -100 & -100 \end{bmatrix}$$

2.2.5 Operator Kirscha

Operator Kirscha polega na przypisaniu elementowi centralnemu wartości maksymalnej z filtracji ośmioma maskami, obróconymi względem siebie o 45^o. Pozwala to lepiej wyodrębnić maksymalną amplitudę z ośmiu kierunków filtracji. Pierwsze trzy maski dane są następującymi tablicami:

$$MF^0 = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad MF^{45} \begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \quad MF^{90} \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

2.2.6 Składanie filtracji

Ze względu na kierunkowość masek (ich anizotropowość), w celu wykrycia wszystkich krawędzi na obrazie konieczne jest składanie wyników filtracji, uzyskanych w wyniku działania ortogonalnych masek. Do najczęściej spotykanych metod składania można zaliczyć:

- wg Normy L2 - wartość filtracji uzyskujemy w wyniku złożenia przy użyciu normy Euklidesowej obrazów po filtracji:
$$Wynik = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2} \tag{2}$$
- wg Normy Czebyszewa (maksimum) - wartość filtracji uzyskujemy w wyniku złożenia przy użyciu normy maksimum obrazów po filtracji:
$$Wynik = \max\left(\left|\frac{\partial I}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|\right) \tag{3}$$
- wg Normy L1 (czasem 1/2 jest pomijana):
$$Wynik = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial I}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right|\right) \tag{4}$$

2.2.7 Laplasjany

Lapsjan jest kombinacją drugich pochodnych cząstkowych funkcji I(m,n): (wyostrzające, gradientowe):

$$L(x, y) = \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \tag{5}$$

Suma elementów maski laplasjanów może być równa 0 (wykrywanie krawędzi) lub 1 (wyostrzanie obrazu). Jest to filtracja izotropowa. Do najczęściej spotykanych masek laplasjanów zaliczamy:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.75 & -1.5 & -0.75 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -1.5 & -2 & -1.5 & -0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -0.75 & -1.5 & -0.75 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & -0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}$$

2.3 fspecial

Polecenie `fspecial(typ, parametry)` tworzy maski specjalne. Do parametrów funkcji fspecial należą:

- ('average', [rozmiar]) filtr uśredniający. Wartość domyślna to [3 3]. Maska filtru jest liczona według wzoru:
$$h = ones(N, M)/(N \cdot M) \tag{6}$$
- ('disk', promień) uśredniająca maska kołowa. Promień domyślnie = 5;
- ('gaussian', rozmiar, sigma) dolnoprzepustowy filtr gaussowski o symetrii kołowej. Wartości domyślne to [3 3] i $\sigma = 0.05$. Maska filtru **h** jest tworzona w następujący sposób:
$$h_g(n_1, n_2) = \exp\frac{-(n_1^2 + n_2^2)}{2\sigma^2} \tag{7}$$
$$h(n_1, n_2) = \frac{h_g(n_1, n_2)}{\sum_{n_1}\sum_{n_2} h_g(n_1, n_2)} \tag{8}$$
Zamiast tworzyć maskę i następnie filtrować, można skorzystać z funkcji `imgaussfilt`.
- ('laplacian', alpha) dwuwymiarowy laplasjan, $\alpha \in (0, 1)$, domyślnie 0.2. Maska jest tworzona w następujący sposób:
$$\bigtriangledown^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \approx \frac{1}{\alpha+1}\begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\alpha & -4 & 1-\alpha \\ \alpha & 1-\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$
- ('log', rozmiar,sigma) laplasjan filtru gaussowskiego. Rozmiar domyślny to [5 5], a $\sigma = 0.5$. Filtr **h** jest tworzony z wykorzystaniem wzoru 7:
$$h(n_1, n_2) = \frac{(n_1^2 + n_2^2 - 2\sigma^2)h_g(n_1, n_2)}{2\pi\sigma^6 \sum_{n_1}\sum_{n_2} h_g} \tag{9}$$
- ('motion', len, theta) aproksymacja przesuwania się kamery. Len określa długość przesunięcia (**9**) pod kątem θ (domyślnie kąt=**0**)
- 'prewitt', 'sobel' - horyzontalna maska Prewitta, Sobela
- ('unsharp', alpha) - filtr rozmywający, działanie odwrotne do laplasjanu. Filtr jest tworzony na podstawie wzoru:
$$h = \frac{1}{\alpha+1}\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \\ \alpha-1 & \alpha+5 & \alpha-1 \\ -\alpha & \alpha-1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

2.4 Operatory krawędziowe kolorowe

Filtracja realizowana jest jako suma różnic trzech par punktów leżących symetrycznie względem punktu centralnego. Różnicę dwóch D punktów P1(R,G,B) i P2(R,G,B) możemy zdefiniować na 4 sposoby[1]:

[1] Opis kolorowych operatorów krawędziowych oraz działania filtru Canny pochodzi z: Kasprzak, W. (2009), *Rozpoznawanie obrazów i sygnałów mowy*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa

1. z wykorzystaniem normy Euklidesowej:

$$D(P1, P2) = \sqrt{(R1 - R2)^2 + (G1 - G2)^2 + (B1 - B2)^2} \quad (10)$$

2. z wykorzystaniem normy L1:

$$D(P1, P2) = |R1 - R2| + |G1 - G2| + |B1 - B2| \quad (11)$$

3. jako maksimum z wartości bezwzględnych poszczególnych składowych:

$$D(P1, P2) = \max(|R1 - R2|, |G1 - G2|, |B1 - B2|) \quad (12)$$

4. jako średnia ważona wartości bezwzględnych różnic poszczególnych składowych:

$$D(P1, P2) = \omega_1 \cdot |R1 - R2| + \omega_3 \cdot |G1 - G2| + \omega_3 \cdot |B1 - B2| \quad (13)$$

3 Filtracja nieliniowa

Istnieje również cała gama filtrów, których działanie zależy od np. uporządkowania obrazu. Są to np. filtry medianowe, maksymalizujące, minimalizujące czy entropii, które przypisują filtrowanemu punktowi odpowiednio medianę, maksimum, minimum i entropię z obszaru pokrytego maską. W pakiecie MatLAB 2014b zostały zdefiniowane następujące metody filtracji:

- `medfilt2(obraz, [rozmiar]);` - filtracja medianowa
- `ordfilt2(obraz, nr, zasięg);` - zwraca wartość znajdującą się na pozycji `nr` w uporządkowanym wektorze (1 - minimum, wielkość maski - maksimum).
- `rangefilt(obraz, zasięg)` - zwraca różnicę pomiędzy maksimum i minimum intensywności dla pikseli otoczenia zdefiniowanych w tablicy *zasięg*, np. ones(3).
- `entropyfilt(obraz, zasięg);` - zwraca wartość entropii E w blokach o zadanym rozmiarze (domyślnie 9x9 pikseli), obliczoną wg wzoru:

$$E = -\sum_{n=0}^{N} \log p(n) \cdot p(n) \quad (14)$$

  N - ilość poziomów intensywności
  p(n) - prawdopodobieństwo wystąpienia piksela o intensywności n
- `stdfilt(obraz, zasięg)` - dla każdego piksela zwraca wartość odchylenia standardowego z otoczenia.
- `modefilt(obraz, [rozmiar]` - filtracja dominanty.

3.1 Operacje blokowe

Inną możliwością tworzenia filtrów nieliniowych są tzw. operacje blokowe. Do implementacji tego typu filtrów służ polecenie `nlfilter(obraz, [rozmiar], funkcja)`, np.: `nlfilter(obraz, [3 3], 'min(x(:))')`.

Cechują się one znacznie dłuższym czasem działania niż gotowe funkcje, dlatego jeżeli istnieją gotowe funkcje filtrujące (jak np. `medfilt2`), należy z nich korzystać, a operacje blokowe stosować tylko w ostateczności.

3.2 Funkcja edge

Do wykrywania naroży może również służyć funkcja `edge(obraz, 'metoda', parametry)`. Funkcja ta na wejściu przyjmuje obraz monochromatyczny, a zwraca mapę logiczną, gdzie wartość logiczną "1" ma wykryty narożnik. Funkcja ta posiada 6 metod detekcji krawędzi (zarówno liniowych, jak i nieliniowych):

- `edge(obraz,'Sobel', próg, 'kierunek', 'opcje')`. Wykorzystuje ona maskę Sobela. Dozwolone są następujące kierunki: 'horizontal', 'vertical', **'both'**. Do opcji zaliczamy operację **'thinnning'** i 'nothinning'
- `edge(obraz,'prewitt', próg, 'kierunek')`. Operator Prewitta, parametry analogicznie do Sobela.
- `edge(obraz,'roberts', próg, 'kierunek', 'opcje')` - filtracja wykorzystująca operator Robertsa.
- `edge(obraz,'log', próg, sigma)` - Laplasjan metody Gaussa. Parametr sigma określa standardowe odchylenie metody. Wartością domyślną jest **2**. Wielkość maski filtru $(n \times n)$ jest liczona według wzoru: $n = ceil(\sigma * 3) * 2 + 1$
- `edge(obraz,'zerocross', próg, filtr_h)`
- `edge(obraz, 'canny',` $[\theta_1, \theta_2]$`, sigma)` - operator Canny. θ_1 określa dolny próg odcięcia, θ_2 określa górny. Jeżeli podany jest tylko jeden próg, to jest on traktowany jako górny, a dolny jest liczony według wzoru: $\theta_1 = 0.4 \cdot \theta_2$. Sigma jest to standardowe odchylenie dla filtru gaussowskiego. Domyślnie $\sigma =$**1**. Filtr Canny działa w kilku krokach:
  1. Wygładzanie obrazu za pomocą filtru Gaussa o wariancji σ^2
  2. Wyznaczenie obrazu krawędziowego prostym operatorem krawędziowym w obszarze 2x2 lub 3x3
  3. Cieniowanie krawędzi metodą tłumienia niemaksymalnego - zerowanie elementów krawędziowych niebędących maksymami lokalnymi
  4. Cieniowanie krawędzi metodą tłumienia z progami histerezy θ_1, θ_2

Dla wszystkich tych metod, poleceniem `[BW, próg]=edge(....)` można uzyskać informacje o użytym progu detekcji krawędzi. Dla metod gradientowych (Sobel, Prewitt, Roberts) automatyczny próg binaryzacji jest liczony na podstawie magnitudy policzonego gradientu.

3.3 VMF - Vector median flow

Jest to filtracja stosowana wyłącznie dla obrazów wielokanałowych (np. RGB, CMYK, satelitarne). Polega ona na zastąpieniu wartości piksela centralnego przez wartość koloru leżącego najbliżej w przestrzeni kolorów. Jeżeli w masce istnieje piksel o identycznej wartości koloru jak piksel centralny, to wartość piksela nie ulega zmianie. Odległość dwóch wartości kolorów w danej przestrzeni najczęściej liczona jest z użyciem normy L1 lub L2.

4 Filtracja adaptacyjna

Osobną kategorią filtrów nieliniowych są filtry adaptacyjne. Są to filtry, których charakterystyka zmienia się w zależności od analizowanego obszaru.

Dolnoprzepustowa **filtracja Wienera** działa dwuetapowo:

1. Dla każdego punktu i jego otoczenia obliczamy wartość parametru, który kwalifikuje dany punkt jako należący lub nie do krawędzi.
2. jeżeli dany punkt został zakwalifikowany jako nie należący do krawędzi, zostaje on poddany silnemu uśrednieniu. W przeciwnym wypadku jego wartość pozostaje bez zmian lub poddany zostaje uśrednieniu o niewielkiej mocy.

Realizujemy ją poleceniem: `wiener2(obraz, [rozmiar])`.

Innym rodzajem jest **adaptacyjny filtr medianowy**. Działa on w następujący sposób:

1. Dla każdego piksela obliczamy średnią i odchylenie standardowe w pewnej masce.
2. Jeżeli wartość intensywności piksela centralnego mieści się w zakresie średnia +/- (współczynnik*odchylenie), to wartość piksela nie ulega zmianie.
3. Jeżeli wartość piksela jest poza przedziałem, to zastępowana jest on wartością mediany z wartości pikseli otoczenia mieszczących się we wspomnianym przedziale.

Ilość zmian zależy od wielkości maski oraz od wartości współczynnika. Jego wartość w większości przypadków nie przekracza wartości 2 (zwykle wynosi 1).

5 Dekonwolucja

Operacją odwrotną do splotu (czyli m.in. filtracji) jest dekonwolucja. Istnieje kilka technik dekonwolucji zaimplementowanych w MatLABie:

- Dekonwolucja ślepa: `deconvblind`
- Dekonwolucja przy użyciu algorytmu Lucy-Richardsona: `deconvlucy`
- Dekonwolucja przy użyciu algorytmu Wienera: `deconvwnr`
- Dekonwolucja "unormowana": `deconvreg`

6 Szum

Do "zaszumiania" obrazów służy polecenie `imnoise(obraz, typ, parametry)`. Podstawowymi rodzajami szumu są:

- 'gaussian' - szum o rozkładzie gaussa z średnią m i wariancją σ^2. Domyślnie m=0 i σ^2=0.01;
- 'localvar' - szum gaussowski o średniej m=0 i wariancji zależnej od otoczenia punktu. Aby użyć tej funkcji należy jako parametr dodać tablicę rozkładu wariancji o rozmiarze równym zaszumionemu obrazowi.
- 'poisson' - szum o rozkładzie Poissona
- 'salt & pepper' - (szum impulsowy) zamienia wartość pixela na minimum lub maximum z dostępnej skali z gęstością zmiany d. Domyślnie d=0.05;
- 'speckle' - multiplikatywny szum zmieniający wartość pixela zgodnie z równaniem:

$$L(m,n) = L(m,n) + n \cdot L(m,n) \tag{15}$$

  gdzie n - liczba z rozkładu normalnego o średniej m=0 i wariancji σ^2. Domyślnie σ^2=0.04;