

**Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych**  
**Politechnika Warszawska**

**Pracownia problemowa magisterska**  
(semestr letni 23/24L)

**Zastosowanie modeli statyki typu Takagi-Sugeno z  
następnikami hiperbolicznymi w algorytmach  
regulacji predykcyjnej**

**Autor:**  
Wojciech Rogalski

**Promotor:**  
dr hab. inż. Piotr Marusak

# Spis treści

<b>1. Wstęp</b>	2
<b>2. Identyfikacja</b>	3
2.1. Charakterystyka statyczna	3
2.2. Wymuszenia	4
2.3. Podejście inżynierskie	6
<b>3. Model Hammersteina</b>	9
3.1. Nieliniowy blok statyczny	9
3.2. Następniki liniowe	9
3.3. Następniki hiperboliczne	17
<b>4. Model Wienera</b>	25
4.1. Następniki liniowe	25
4.2. Następniki hiperboliczne	35
<b>5. Podsumowanie</b>	44
<b>Spis rysunków</b>	45

# 1. Wstęp

Praca zawiera porównanie modeli Hammersteina oraz Wienera w regulacji kaskadowej. Bazą porównania był obiekt opisany równaniami fizycznymi postaci:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = F_1 + F_D - F_2(h_1) \\ \frac{dV_2}{dt} = F_2(h_1) - F_3(h_2) \\ F_2(h_1) = \alpha_1 \sqrt{h_1}, \quad F_3(h_2) = \alpha_2 \sqrt{h_2}, \quad V_1(h_1) = A_1 h_1, \quad V_2(h_2) = C_2 h_2^2, \quad F_1(t) = F_{1in}(t - \tau) \end{cases} \quad (1.1)$$

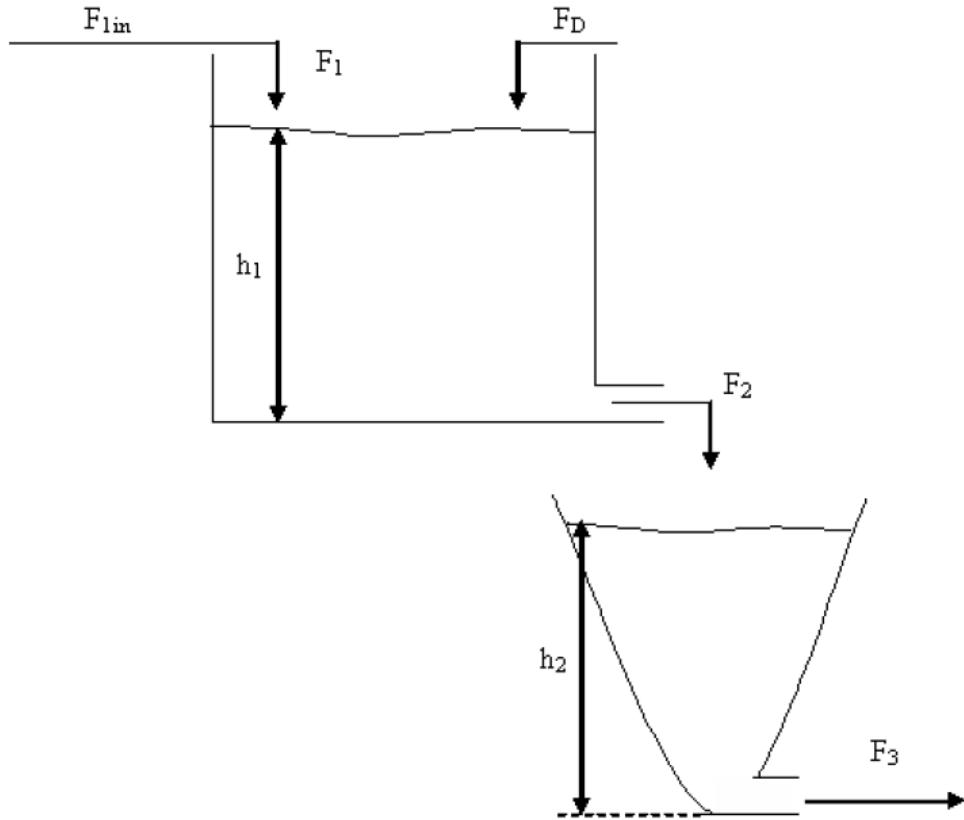
- Stałe:

$$A_1 = 540 \text{ cm}^2, \quad C_2 = 0,85, \quad \alpha_1 = 26, \quad \alpha_2 = 20 \quad (1.2)$$

- Punkt pracy:

$$F_1 = 90 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}, \quad F_D = 30 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}, \quad \tau = 100, \quad h_2 = 36 \text{ cm} \quad (1.3)$$

gdzie użyte oznaczenia odpowiadają tym zastosowanym na rys. 1.1.



Rys. 1.1: Obiekt regulacji automatycznej.

Wartością sterującą był dopływ \$F\_{1in}\$ natomiast zakłóceniem - \$F\_D\$. Z kolei wyjściem - wartością regulowaną - wysokość cieczy w drugim zbiorniku \$h\_2\$. W pierwszej kolejności dokonano identyfikacji modelu, sprawdzono jego nieliniowość i dobrano odpowiedni rzad dynamiki modelu liniowego.

## 2. Identyfikacja

### 2.1. Charakterystyka statyczna

Poświęcono jej bardzo dużo uwagi, ze względu na kluczową rolę, jaką odgrywa we wspomnianych modelach Hammersteina i Wienera. Korzystając z modelu fizycznego, z równania 1.1 wyznaczono:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

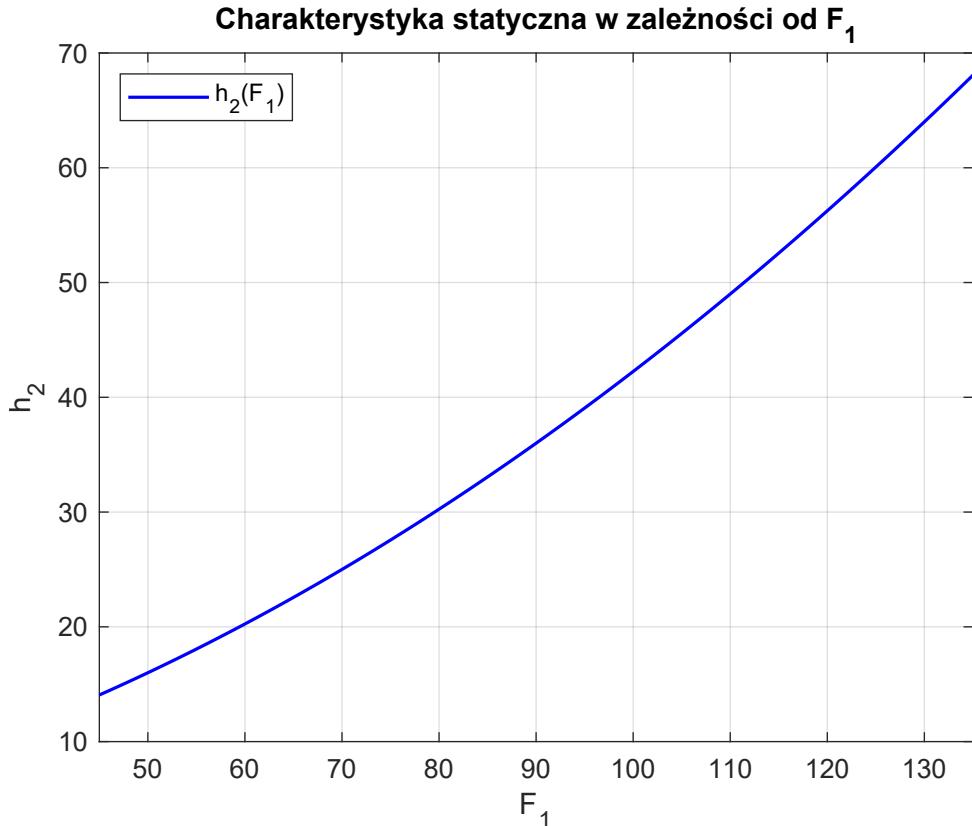
wobec tego:

$$\begin{cases} F_1 + F_D - \alpha_1 \sqrt{h_1} = 0 \\ \alpha_1 \sqrt{h_1} - \alpha_2 \sqrt{h_2} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Po prostych przekształceniach otrzymano wzór opisujący charakterystykę statyczną:

$$h_2 = \left( \frac{F_1 + F_D}{\alpha_2} \right)^2 \quad (2.3)$$

Wykres odpowiadający wyprowadzonemu wzorowi prezentuje się następująco:



Rys. 2.1: Charakterystyka statyczna  $h_2(F_1)$ .

Załóżono przedział zmienności sygnału sterującego w zakresie  $F_1 \in [-45, 45]$ .

## 2.2. Wymuszenia

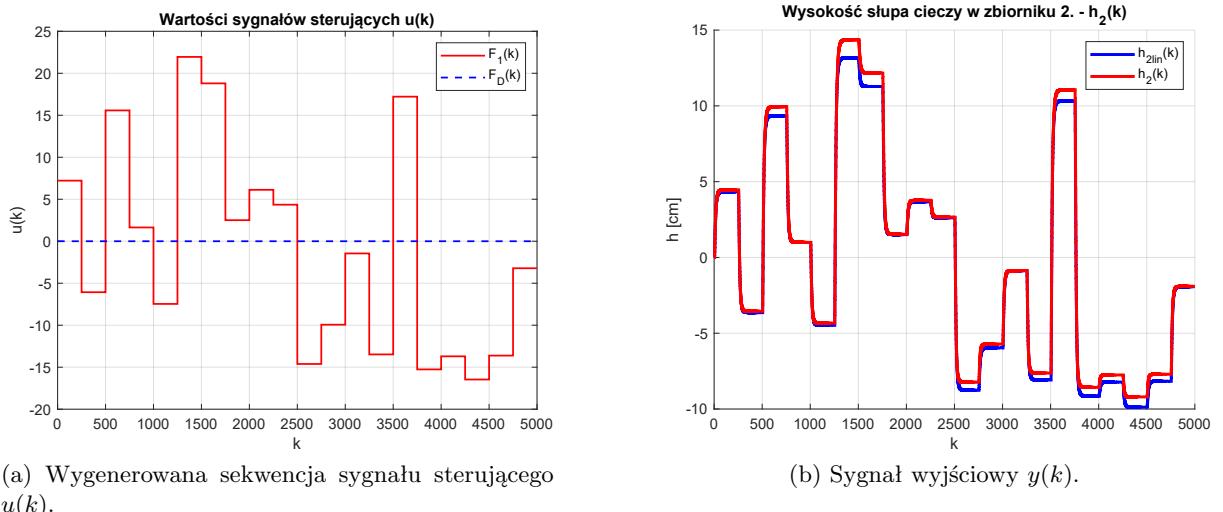
Po dokonaniu pierwszego kroku identyfikacji - wykreślenia charakterystyki statycznej - uzyskano wstępne informacje o obiekcie. Równania opisujące model (1.1) oraz charakterystyka statyczna przedstawiona na rys. 2.1 pokazuje, że obiekt jest nieliniowy, stąd dokonano jego linearyzacji w punkcie pracy, tj.:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} \cong F_1 + F_D - \alpha_1 \sqrt{\frac{V_{10}}{A}} - \frac{\alpha_1}{2\sqrt{A \cdot V_{10}}} \cdot (V_1 - V_{10}) \\ \frac{dV_2}{dt} \cong \alpha_1 \sqrt{\frac{V_{10}}{A}} - \alpha_2 \sqrt[4]{\frac{V_{20}}{C}} + \frac{\alpha_1}{2\sqrt{A \cdot V_{10}}} \cdot (V_1 - V_{10}) - \frac{\alpha_2}{4\sqrt[4]{C \cdot V_{20}^3}} \cdot (V_2 - V_{20}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Linearyzacji dokonano przyjmując jako zmienną stanu objętość cieczy w obu zbiornikach.

$$x = [V_1 \quad V_2]^T \quad (2.5)$$

Następnie, podając wygenerowaną sekwencję sygnału sterującego, zbadano rozbieżność modelu liniowego i nieliniowego.



Rys. 2.2: Porównanie modelu liniowego z nieliniowym.

Otrzymano dokładnie to czego się spodziewano. Wymuszenia nie większe niż  $\pm 10 \frac{cm^3}{s}$  nie powodują znacznego wytrącenia układu z położenia równowagi, dzięki czemu model liniowy bardzo dobrze aproksymuje zachowanie układu. Niestety sytuacja pogarsza się wraz z oddalaniem się od punktu pracy - model liniowy zaczyna poważnie odbiegać od modelu nieliniowego, opisującego obiekt. W celach porównawczych policzono błędy, testując model w trybie bez rekurencji (ARX) oraz z rekurencją OE, przyjmując jako kryterium jakości błąd średni kwadratowy, tj.:

$$E = \sum_{k=0}^N (y(k) - y^{mod}(k))^2 \quad (2.6)$$

Wcześniej dokonano podziału wygenerowanych danych dynamicznych na dwa zbiory - uczący i weryfikujący - stosując zasadę podziału 0% – 50%/50% – 100%, potrzebne do późniejszego, ewentualnego dostrajania modelu. Otrzymano następujące wyniki:

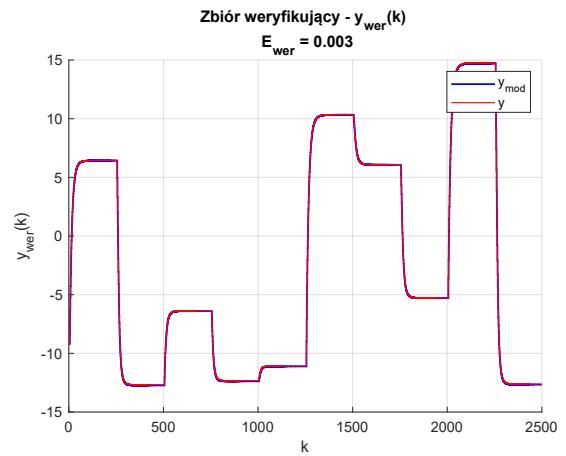
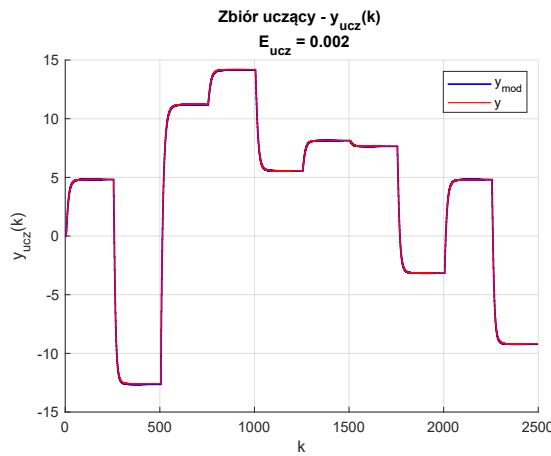
**ARX**

$$E_{ucz} = 0,002 \quad E_{wer} = 0,003 \quad (2.7)$$

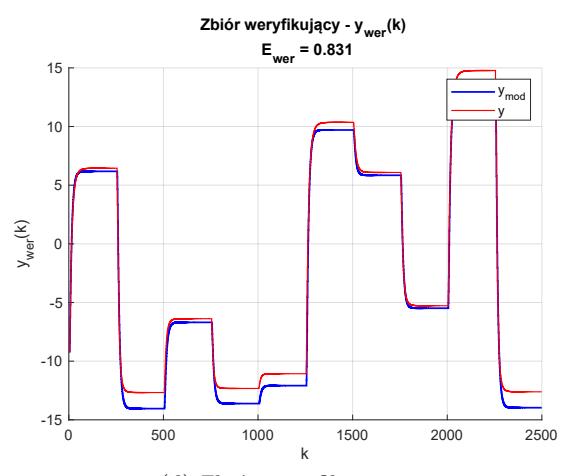
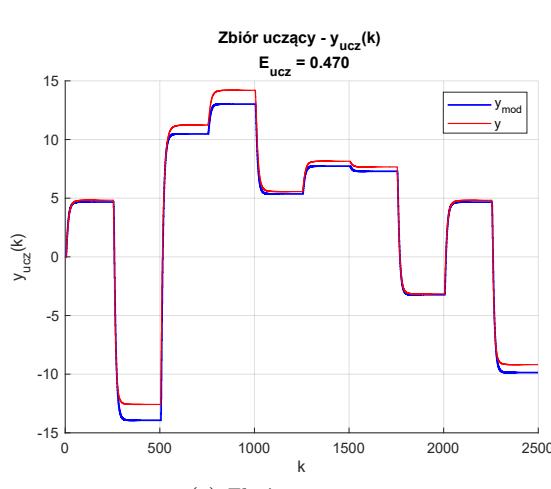
**OE**

$$E_{ucz} = 0,470 \quad E_{wer} = 0,831 \quad (2.8)$$

## Model ARX



## Model OE



Rys. 2.3: Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.

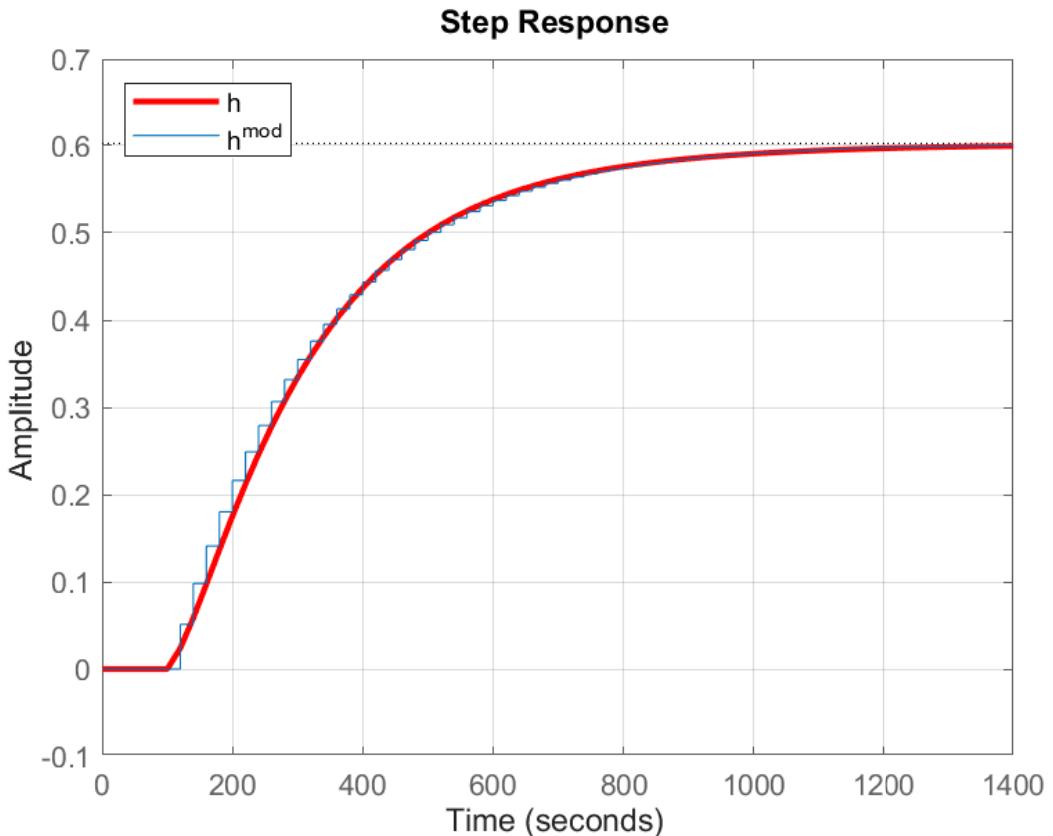
### 2.3. Podejście inżynierskie

Od tej pory do dalszej analizy postanowiono przyjąć model szarej skrzynki. Informacją o obiekcie był fakt, że układ był inercyjny. Zadano więc wymuszenie w postaci skoku jednostkowego i starano się aproksymować odpowiedź układu dobierając odpowiednie parametry dla modelu transmitancji *First Order Plus Dead Time* (FOPDT), który wyraża się wzorem:

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-sT_0}}{T_1 s + 1} \quad (2.9)$$

Dobrane parametry:

$$K_0 = 0,6025 \quad T_0 = 100 \quad T_1 = 225 \quad (2.10)$$



Rys. 2.4: Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem FOPDT.

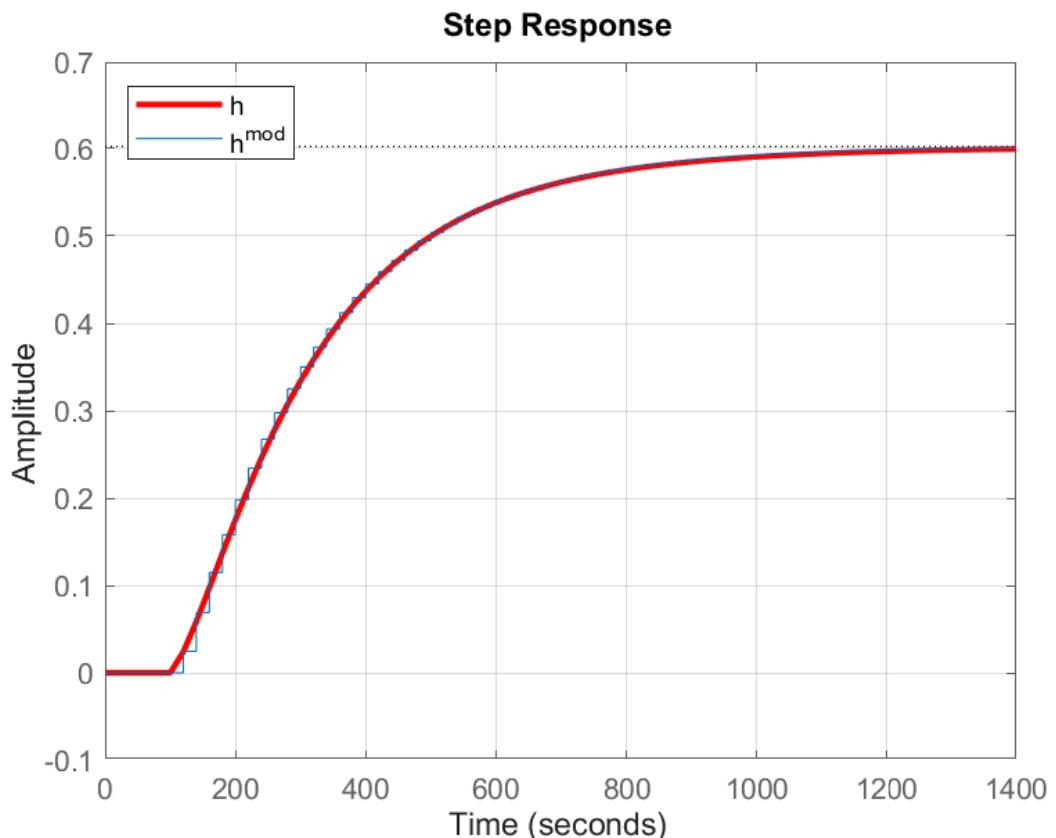
Uzyskany rezultat nie był satysfakcjonujący stąd przyjęto model *Second Order Plus Dead Time* (SOPDT), tj.

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-sT_0}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (2.11)$$

Dobrane parametry:

$$K_0 = 0,6025 \quad T_0 = 100 \quad T_1 = 212 \quad T_2 = 15 \quad (2.12)$$

Wynik prezentował się następująco:



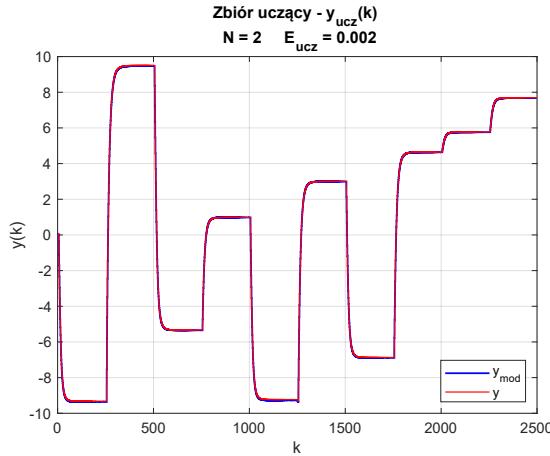
Rys. 2.5: Aproxymacja odpowiedzi skokowej układu modelem SOPDT.

Ponownie, chcąc sprawdzić skuteczność opisu obiektu regulacji wygenerowanym modelem, którego równanie różnicowe jest postaci:

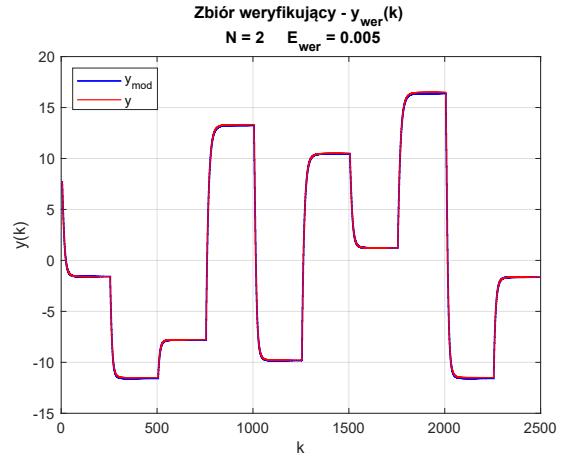
$$\begin{aligned} y(k) = & 1,174y(k-1) - 0,2399y(k-2) + 0,02459u_1(k-6) + 0,01536u_1(k-7) \\ & + 0,02459u_2(k-1) + 0,01536u_2(k-2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

wygenerowano sekwencję sygnału sterującego  $u_1(k)$  oraz  $u_2(k)$ , który są przyrostami wartości sterujących odpowiednio  $F_1$  oraz  $F_D$ .

## Model ARX

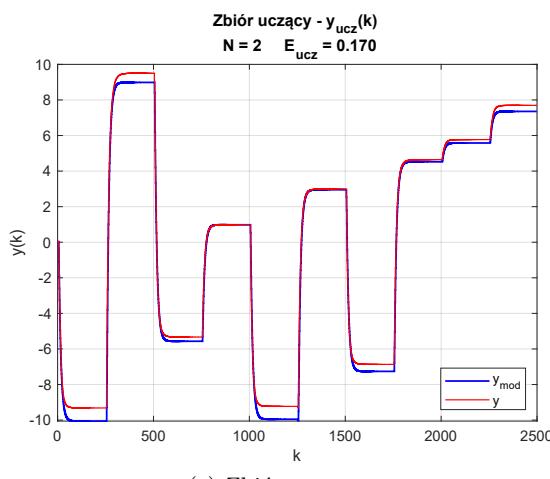


(a) Zbiór uczący.

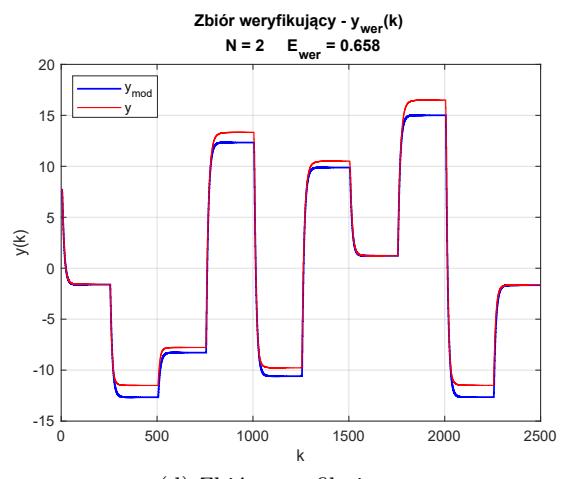


(b) Zbiór weryfikujący.

## Model OE



(c) Zbiór uczący.



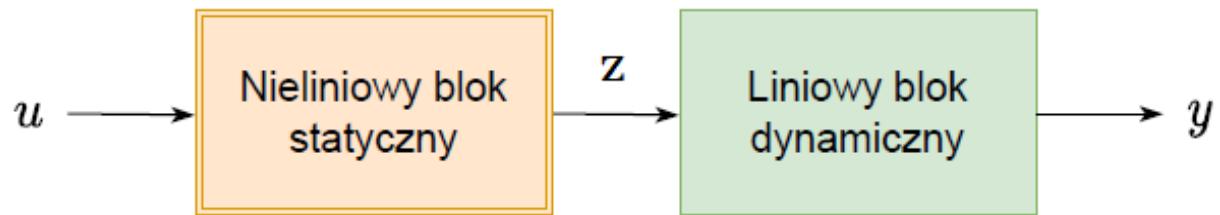
(d) Zbiór weryfikujący.

Rys. 2.6: Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.

Błędy uznano za akceptowalne na tym poziomie identyfikacji i przyjęto wyznaczony model do dalszej analizy.

### 3. Model Hammersteina

W przypadku modelu Hammersteina istota polega na rozdzieleniu dynamiki i statyki w sposób przedstawiony na rys. 3.2.



Rys. 3.1: Reprezentacja graficzna modelu Hammersteina.

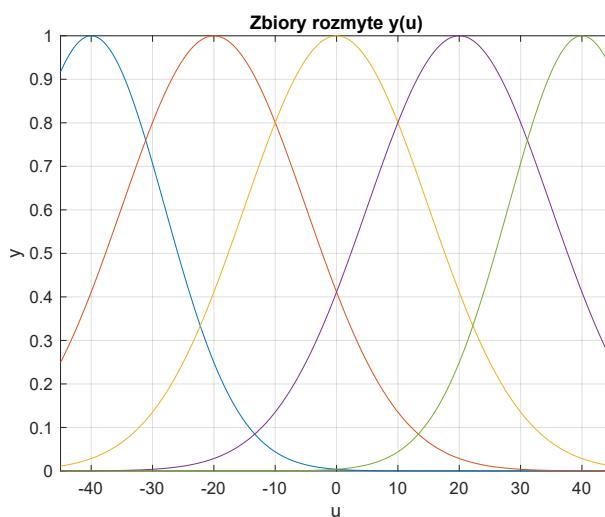
Zatem sygnał sterujący trafia na blok nieliniowej statyki, gdzie jest przekonwertowany na sygnał  $z = f(u)$ , który następnie trafia na liniowy bloczek dynamiczny.

#### 3.1. Nieliniowy blok statyczny

Nieliniowość w charakterystyce statycznej została wprowadzona za pomocą logiki rozmytej (ang. *fuzzy logic*), a konkretnie za pomocą modeli rozmytych Takagi-Sugeno. Zastosowano dwa podejścia, jedno standardowe z następnikami liniowymi, natomiast drugie z następnikami hiperbolicznymi.

#### 3.2. Następniki liniowe

Zaczęto od rozmycia zmiennej wejściowej. Symulacyjnie wyznaczono odpowiednią liczbę zbiorów - w tym przypadku pięć.

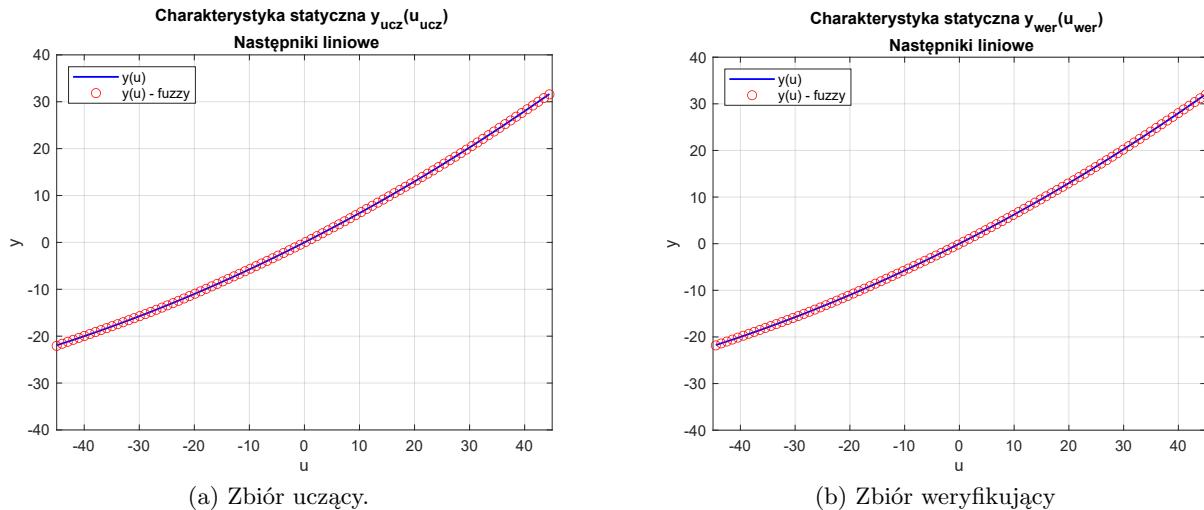


Rys. 3.2: Zbiory rozmyte - następniki liniowe.

Zastosowano następujące liniowe postaci:

$$\begin{aligned}
 \text{Reguła 1: } & \text{Jeśli } u^1(k) \text{ jest } U_1, \text{ to : } y^1(k) = a_1 + b_1 u^1(k) \\
 \text{Reguła 2: } & \text{Jeśli } u^2(k) \text{ jest } U_2, \text{ to : } y^2(k) = a_2 + b_2 u^2(k) \\
 & \vdots \\
 \text{Reguła 5: } & \text{Jeśli } u^5(k) \text{ jest } U_5, \text{ to : } y^2(k) = a_5 + b_5 u^5(k)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Współczynniki w pierwszej iteracji dobierane były poprzez rozwiązywanie nieliniowego zadania optymalizacji. W tym celu skorzystano z dostępnych funkcji programu MATLAB, tj. `fminsearch()`, gdzie minimalizowaną funkcją był kwadrat różnicy wyjść wyznaczonej analitycznie charakterystyki statycznej i wyznaczanej charakterystyki rozmytej. Dane statyczne podzielono na zbiory uczący i weryfikujący z tą różnicą - w porównaniu do danych dynamicznych - że wzięto co drugą próbkę do każdego ze zbiorów. Dokładność aproksymacji charakterystyki statycznej przedstawiono na rys. 3.3, natomiast uzyskane błędy były na poziomie 0,001.

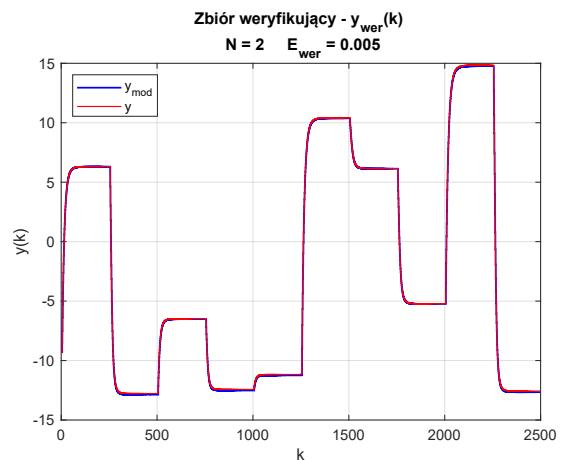
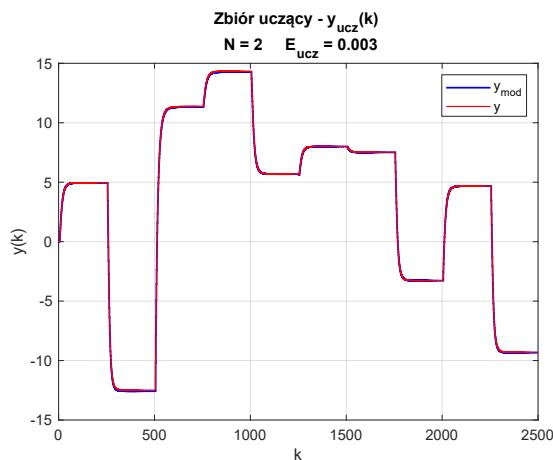


Rys. 3.3: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następni liniowe.

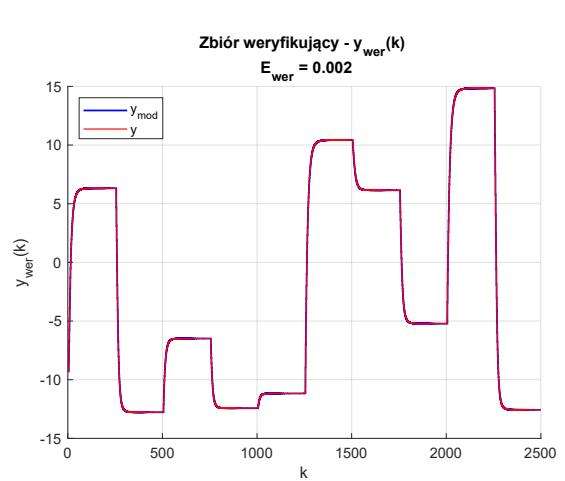
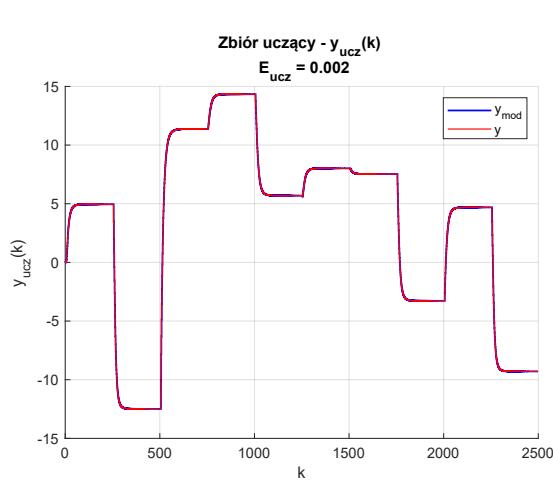
Następnie korzystając z wcześniej opracowanego modelu dynamicznego wykonano szereg symulacji, sprawdzając jak zachowuje się układ w zależności od losowo wygenerowanych sygnałów sterujących. Efekty symulacji przedstawiono poniżej.

## I sekwencja

### Model dynamiczny



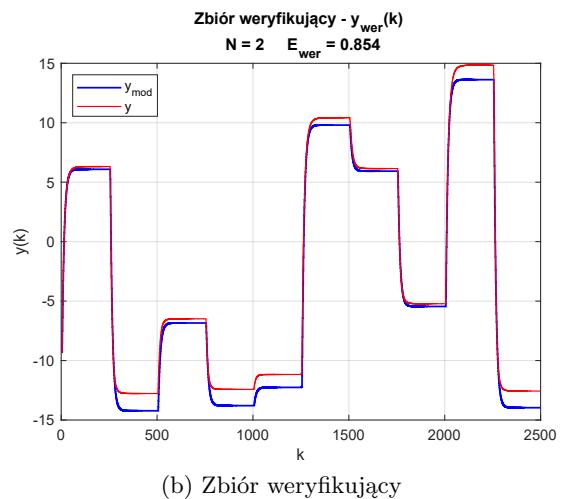
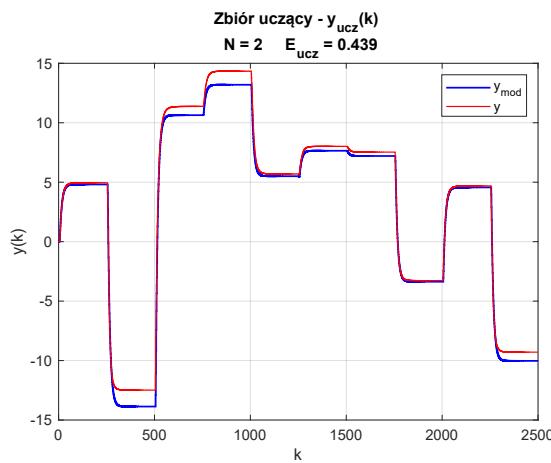
### Model Hammersteina



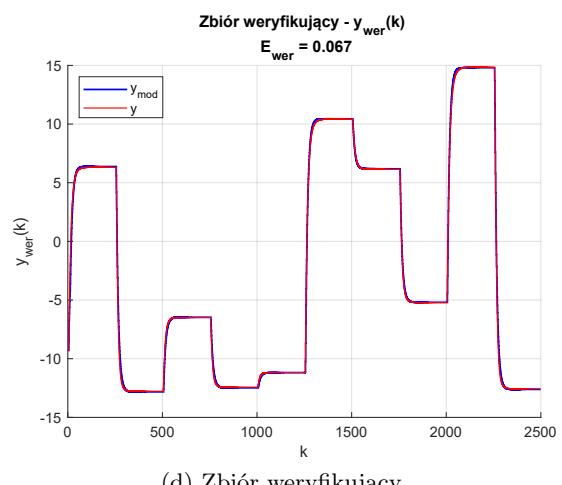
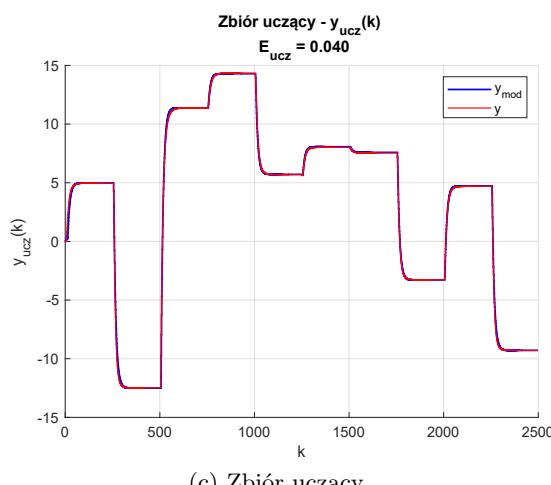
Rys. 3.4: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

## I sekwencja

### Model dynamiczny



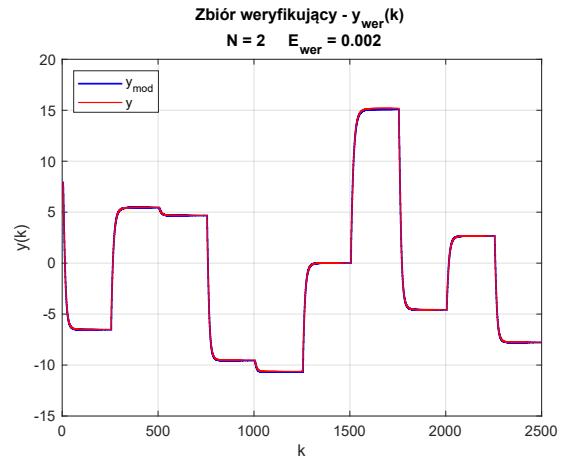
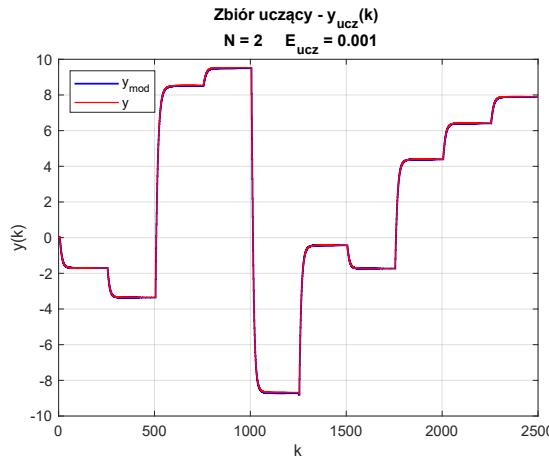
### Model Hammersteina



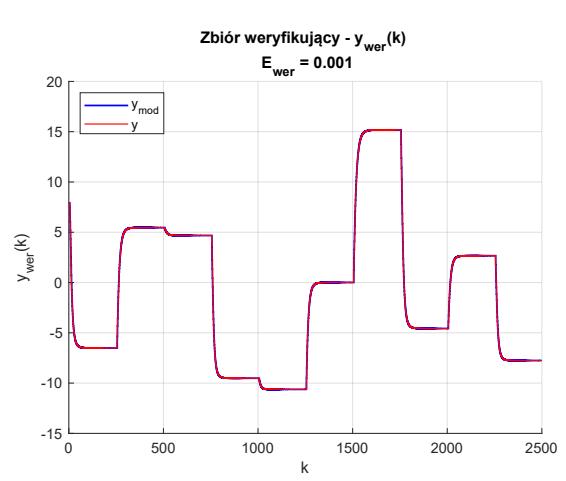
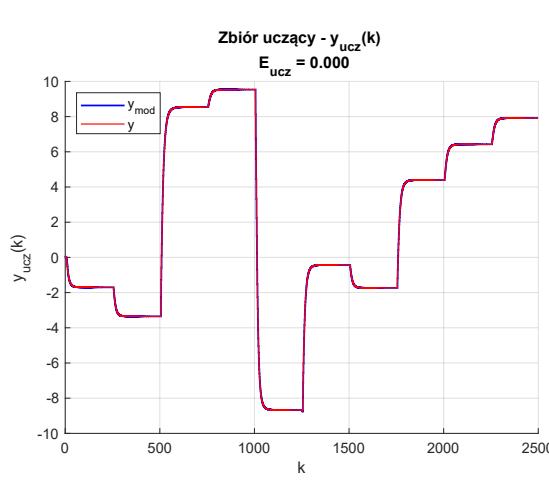
Rys. 3.5: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



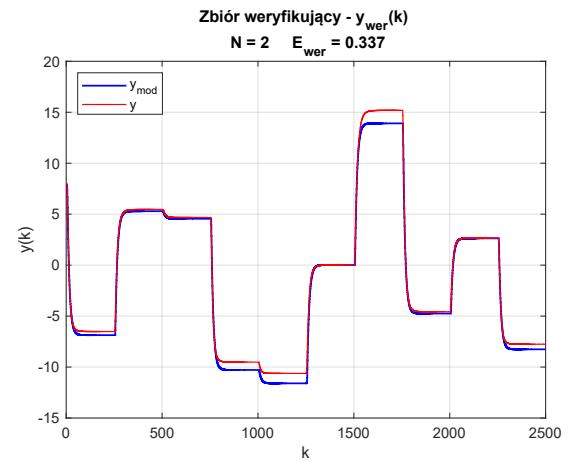
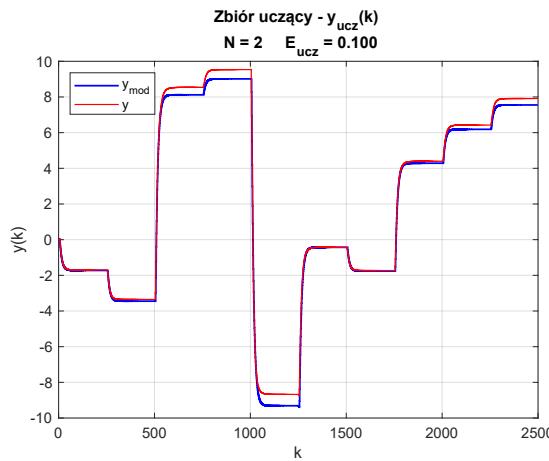
### Model Hammersteina



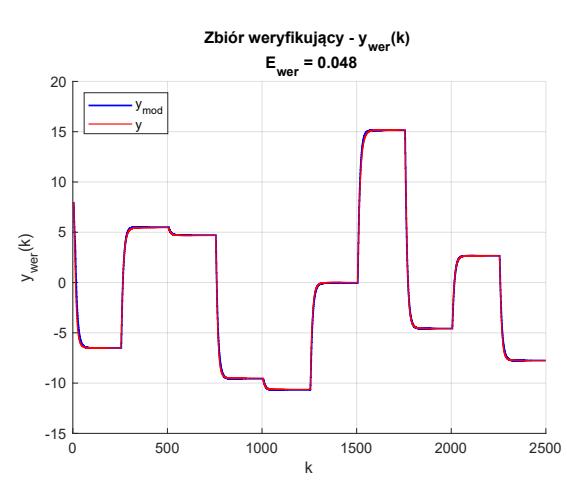
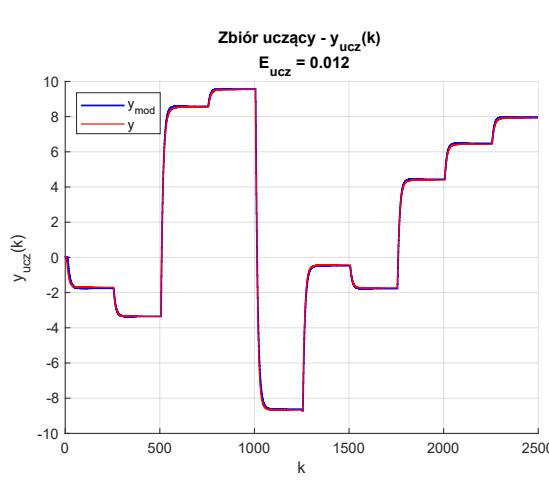
Rys. 3.6: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



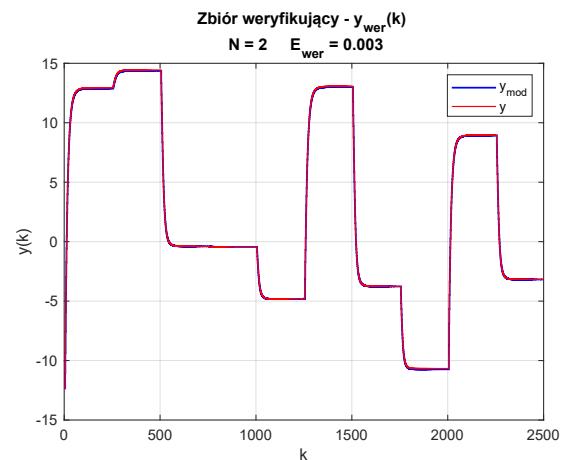
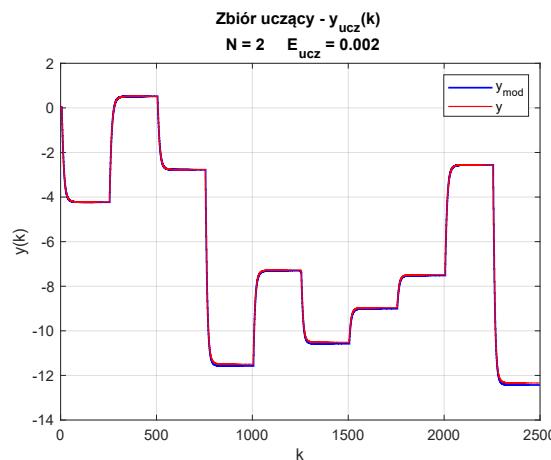
### Model Hammersteina



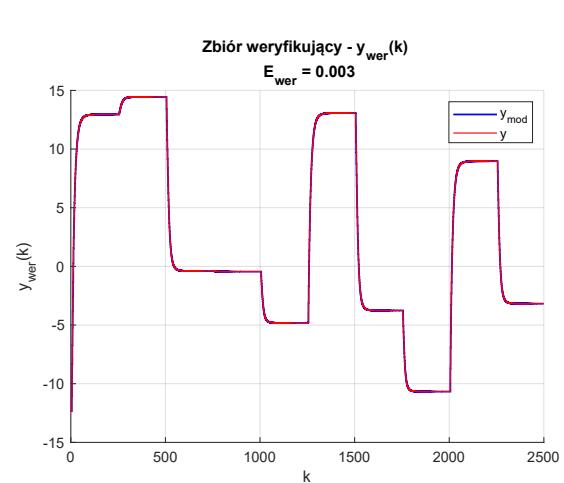
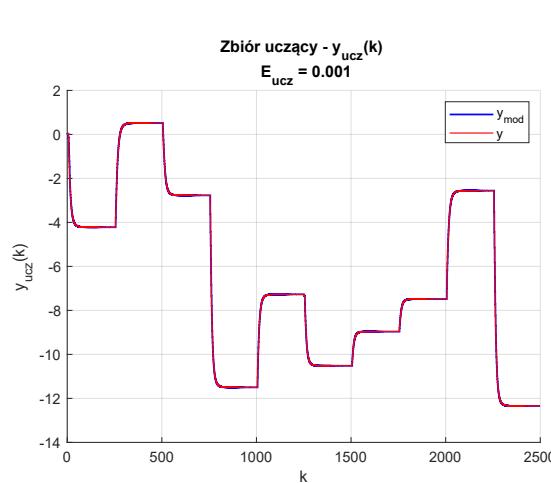
Rys. 3.7: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



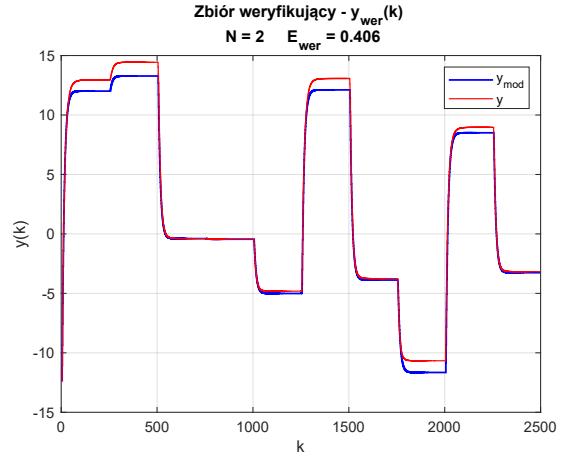
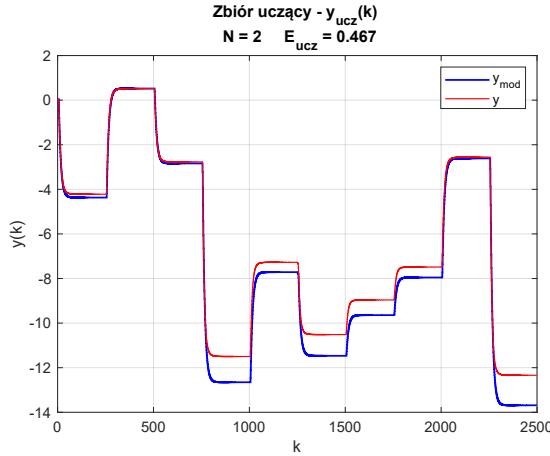
#### Model Hammersteina



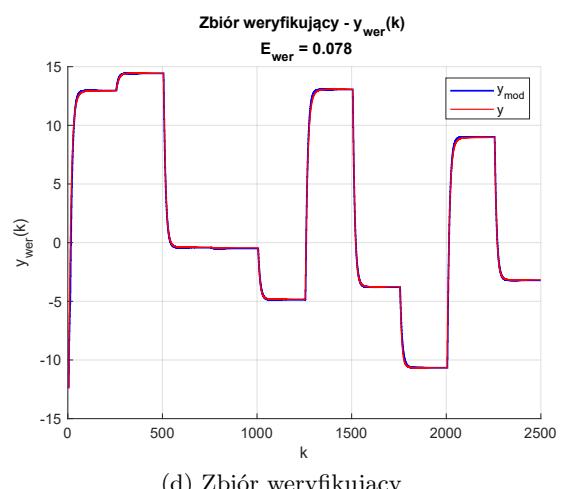
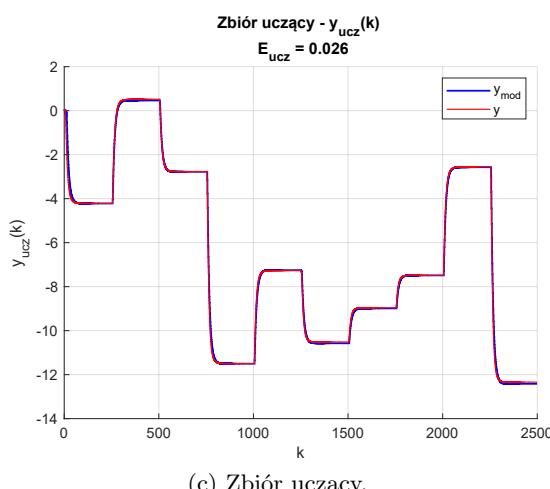
Rys. 3.8: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



#### Model Hammersteina

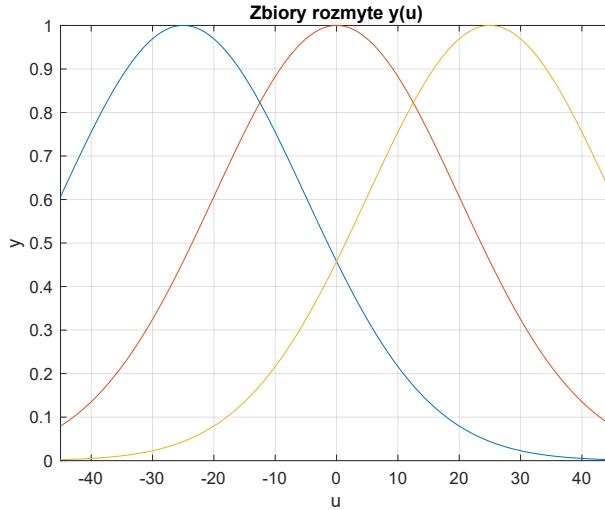


Rys. 3.9: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

W każdym z otrzymanych przypadków model Hammersteina z rozmytą statyką i następującymi liniowymi okazywał się być lepszy niż standardowy model dynamiczny, zarówno ten testowany w trybie bez rekurencji, jak i z rekurencją. Istotnie, wprowadzenie nieliniowości do obiektu nieliniowego opisanego liniowym modelem dynamicznym poprawia dokładność otrzymywanych wyników. Jako akceptowalną granicę przyjęto błąd na poziomie  $E = 0,1$ , a kluczowym przypadkiem był model testowany w trybie rekurencyjnym dla zbioru weryfikującego. Model Hammersteina w tej konfiguracji dawał na tyle satysfakcjonujące wyniki, że postanowiono dalej nie ingerować w dostrajanie współczynników modelu.

### 3.3. Następni hiperboliczne

Wprowadzając dodatkową nieliniowość w opisie obiektu - poprzez zastosowanie następników hiperbolicznych - spodziewano się poprawy dokładności otrzymywanych wyników. Ponadto, zdecydowano się zmniejszyć liczbę funkcji przynależności, zachowując wcześniej uzyskaną dokładność. Wspomniane funkcje przynależności przedstawiono na rys. 3.10.

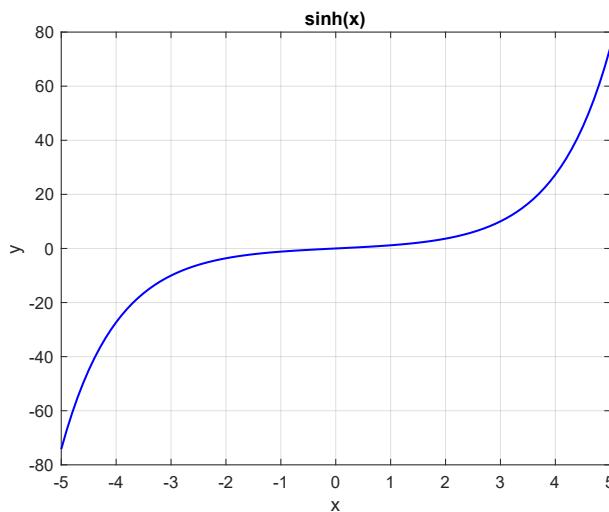


Rys. 3.10: Zbiory rozmyte - następcy hiperboliczne.

Dużo czasu poświęcono podczas dobory odpowiednich następców hiperbolicznych. Rozpatrzone następujące przykłady:

$$\begin{aligned} y(k) &= a + \tanh(bu(k)) \\ y(k) &= a \cdot \tanh(bu(k) + c) \\ y(k) &= a + \sinh(bu(k)) \\ y(k) &= a \cdot \sinh(bu(k) + c) \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ostatecznie wybór padł na ostatni z przypadków - następnik wykorzystujący funkcję sinusa hiperbolicznego (rys. 3.11).

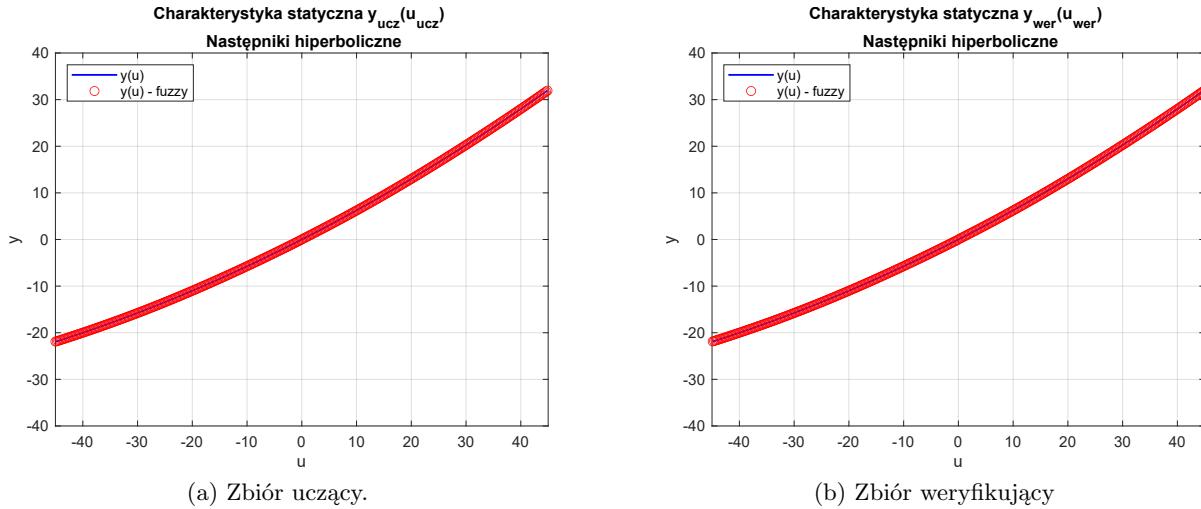


Rys. 3.11: Wykres sinusa hiperbolicznego  $\sinh(x)$ .

Zatem po wyborze postaci następców reguły prezentowały się następująco:

- Reguła 1: Jeśli  $u^1(k)$  jest  $U_1$ , to :  $y^1(k) = a_1 \cdot \sinh(b_1 u^1(k) + c_1)$   
 Reguła 2: Jeśli  $u^2(k)$  jest  $U_2$ , to :  $y^2(k) = a_2 \cdot \sinh(b_2 u^2(k) + c_2)$   
 Reguła 3: Jeśli  $u^3(k)$  jest  $U_3$ , to :  $y^3(k) = a_3 \cdot \sinh(b_3 u^3(k) + c_3)$

Po wyborze postaci następców i ilości zbiorów rozpoczęto analizę stworzonego modelu rozmytego. Poniżej przedstawiono aproksymację charakterystyki statycznej.

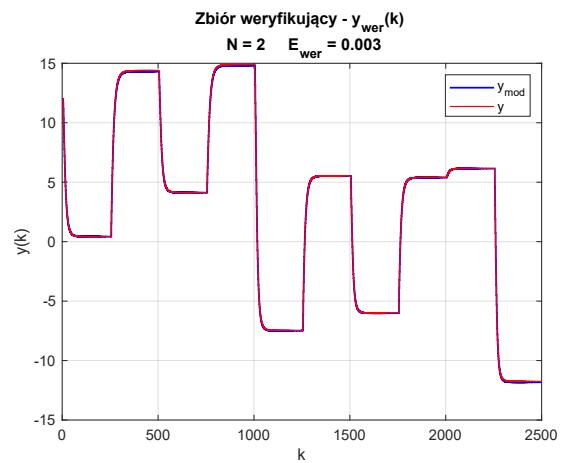
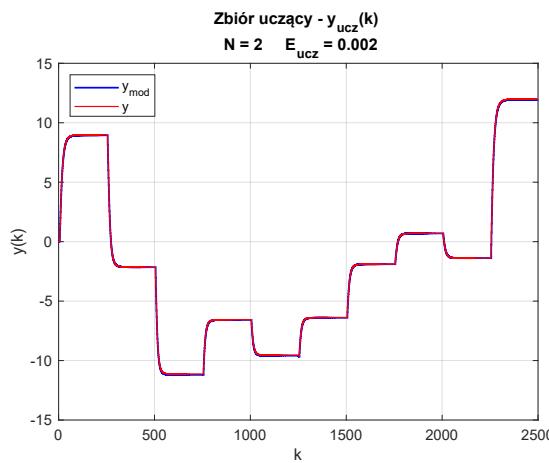


Rys. 3.12: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następcy hiperbowe.

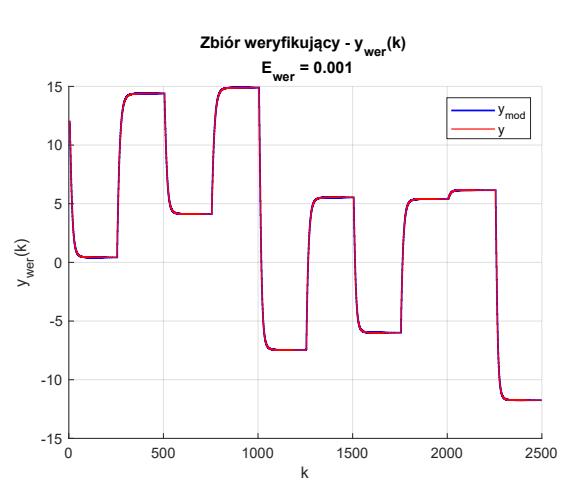
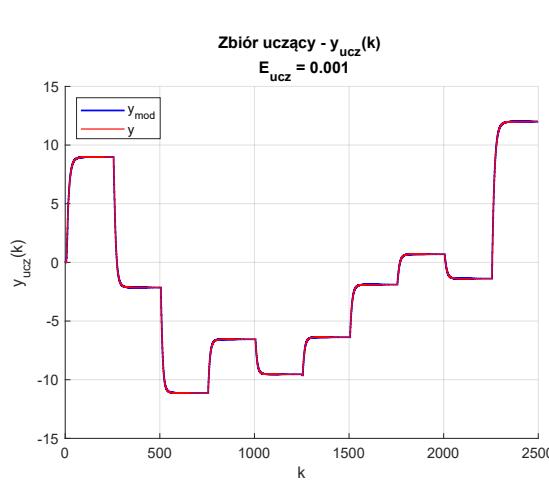
Dokładność jest bardzo dobra, a błąd uczenia rzędu  $E = 0,0001$ . Następnym krokiem było zbadanie zachowania modelu dla danych dynamicznych testowanych w dwóch trybach - ARX oraz OE.

## I sekwencja

### Model dynamiczny



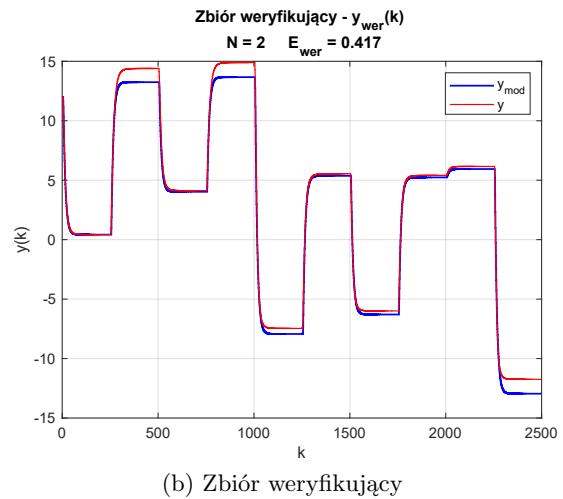
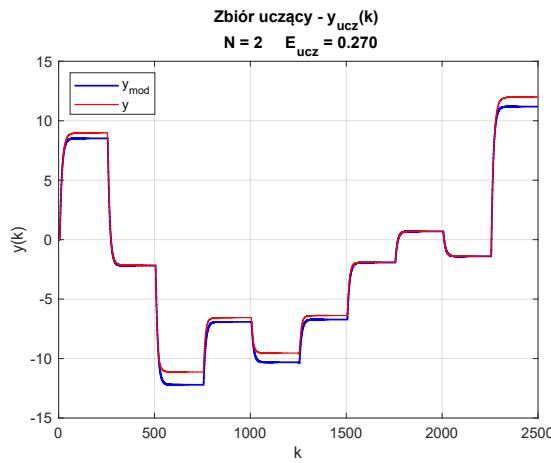
### Model Hammersteina



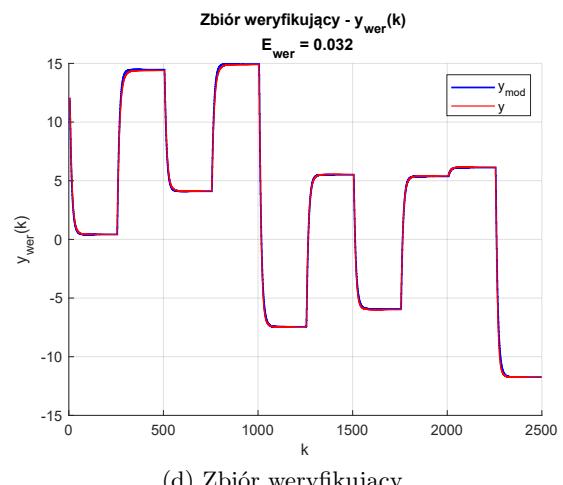
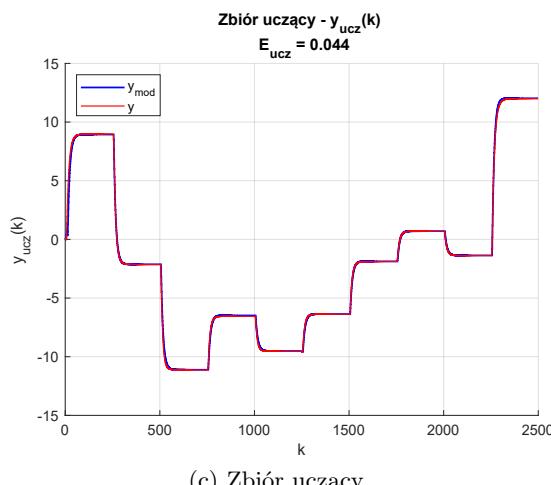
Rys. 3.13: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

## I sekwencja

### Model dynamiczny



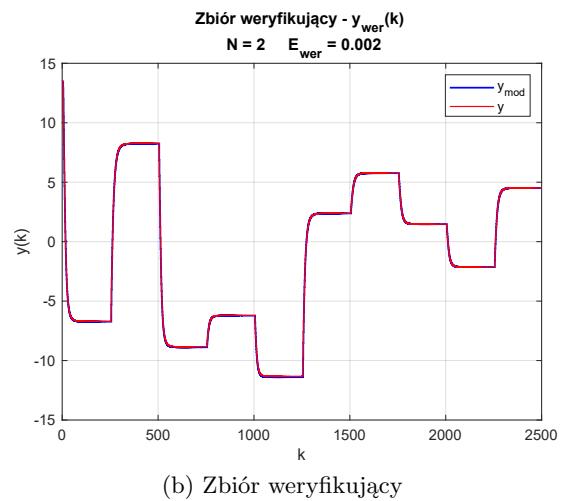
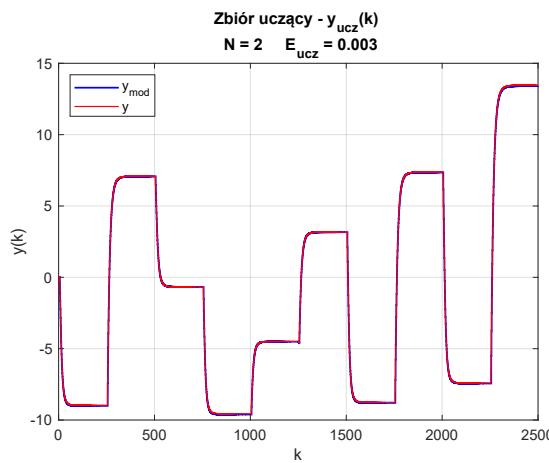
### Model Hammersteina



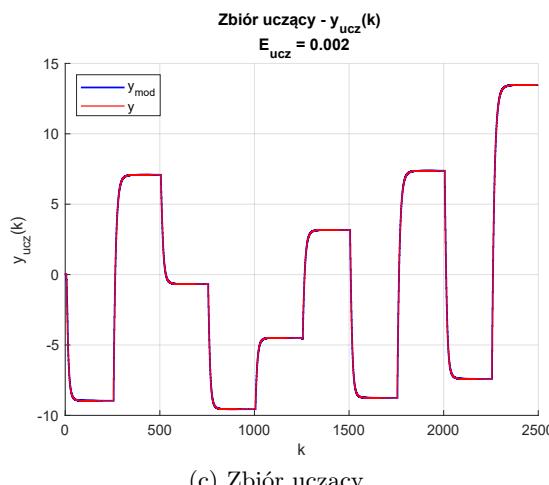
Rys. 3.14: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



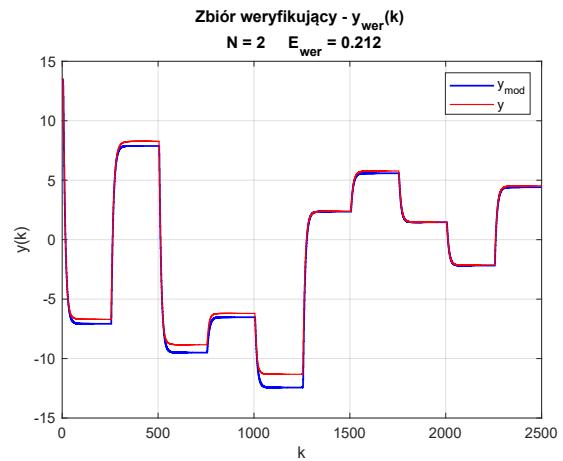
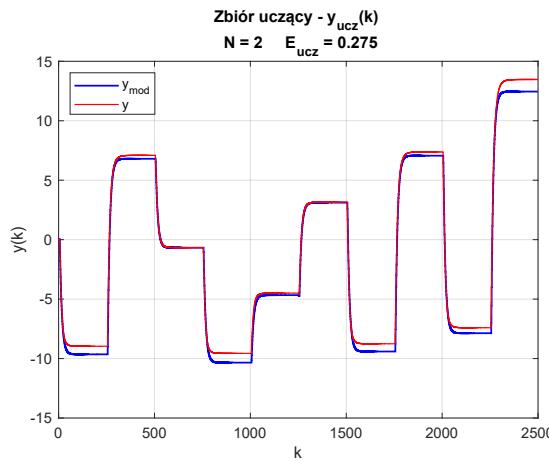
### Model Hammersteina



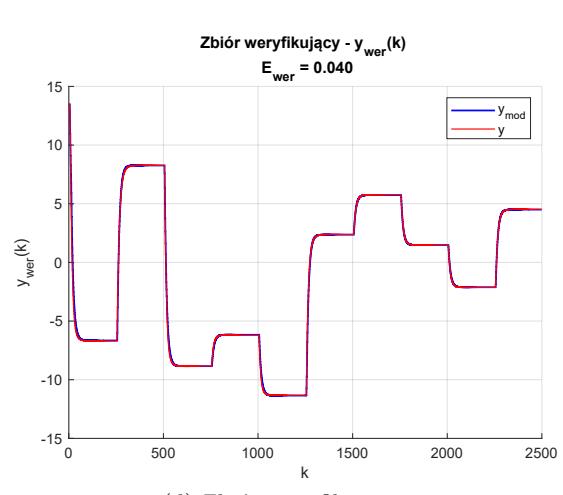
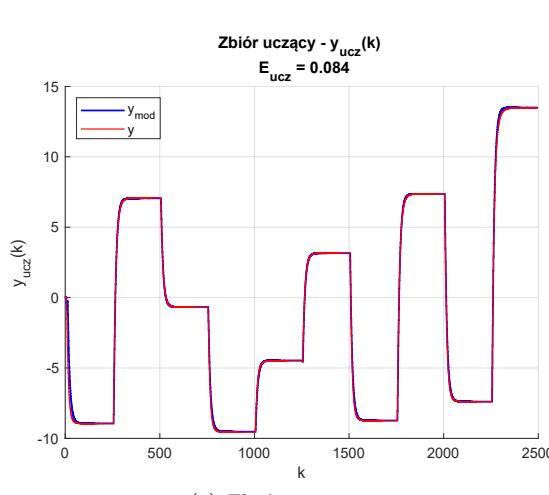
Rys. 3.15: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



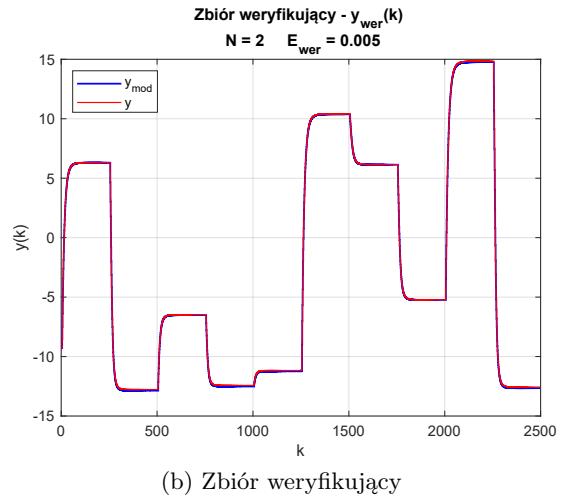
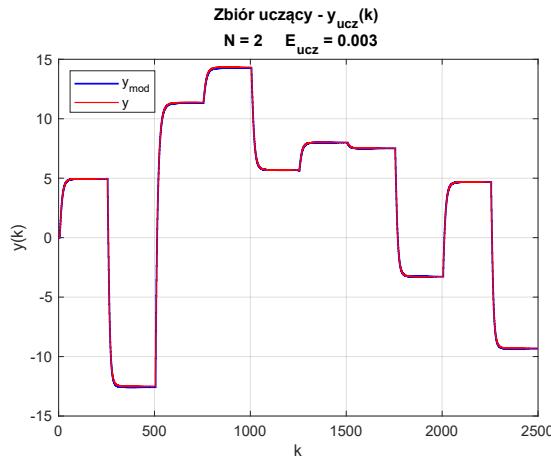
### Model Hammersteina



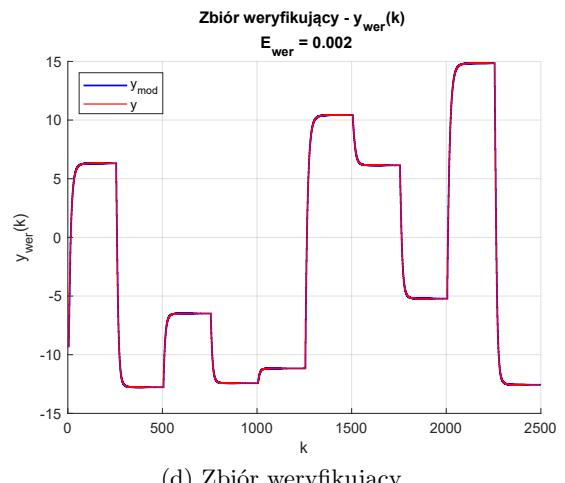
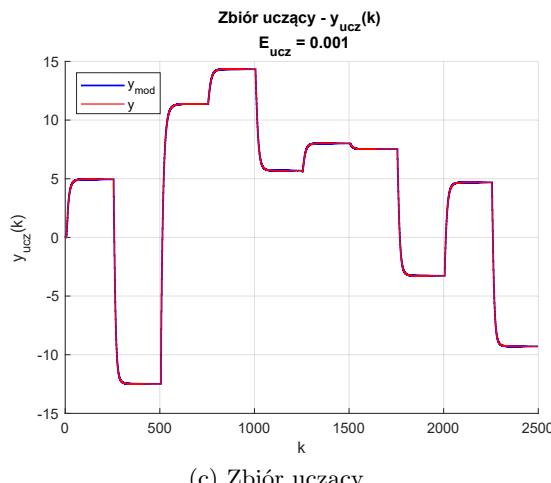
Rys. 3.16: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



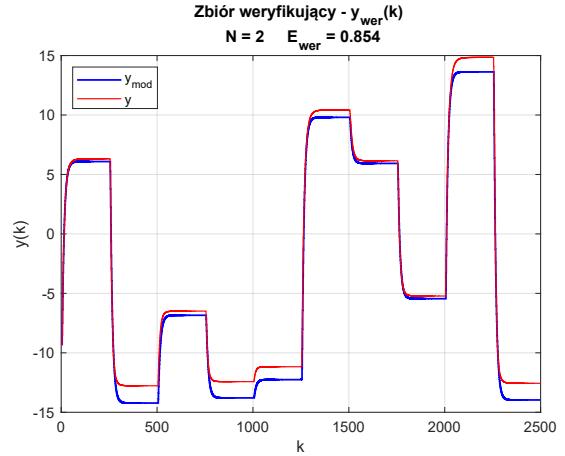
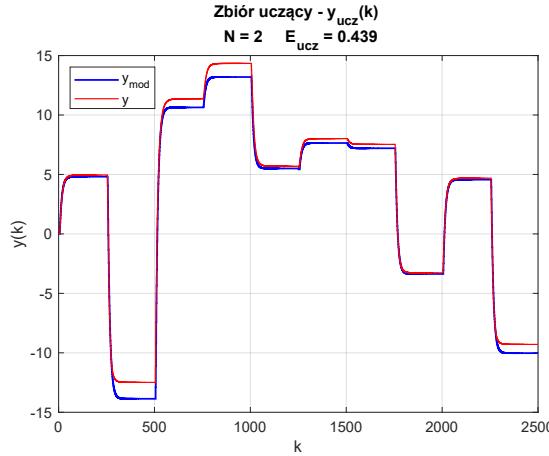
#### Model Hammersteina



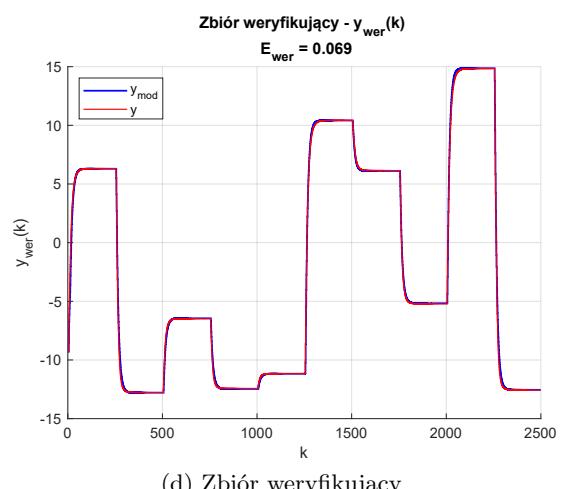
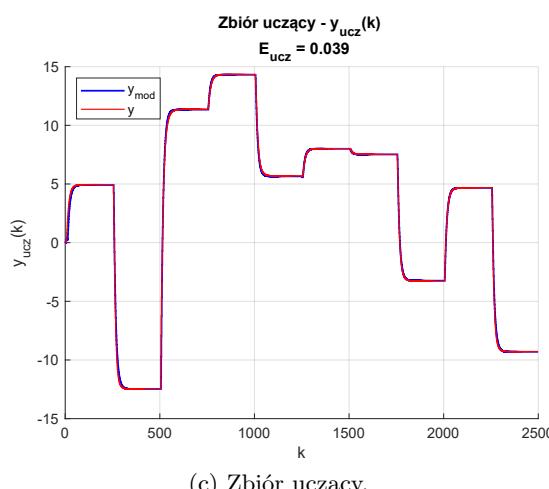
Rys. 3.17: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



#### Model Hammersteina

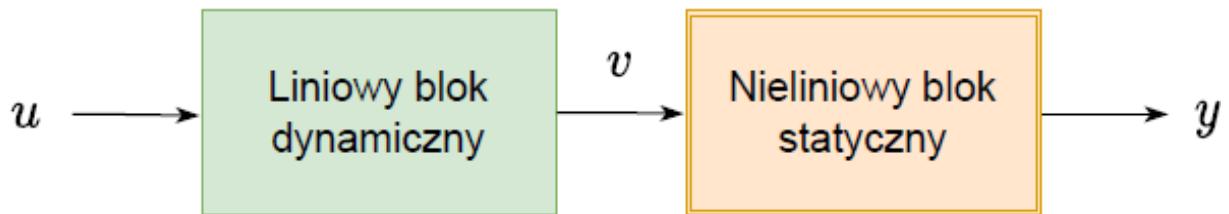


Rys. 3.18: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

Na podstawie powyższych wykresów można wysnuć wniosek, że cel został osiągnięty. Przy mniejszej liczbie zbiorów rozmytych udało się uzyskać tą samą dokładność, jak w przypadku następców liniowych. Ponownie, jakość opisu obiektu uznano na tyle dobry, że postanowiono nie stroić modelu ręcznie. Reasumując, wprowadzenie dodatkowej nieliniowości w postaci następców hiperbolicznych pozwala osiągnąć satysfakcjonujące rezultaty.

## 4. Model Wienera

Istota modelu Wienera jest dokładnie taka sama jak w przypadku modelu Hammersteina z tym, że nieliniową statykę poprzedzono liniową dynamiką - odwrotnie niż jak to było w przypadku omówionego modelu.



Rys. 4.1: Reprezentacja graficzna modelu Wienera.

Sygnal wejściowy trafia na liniowy blok dynamiczny, gdzie jest przekonwertowany na sygnał  $v = f(u)$ , który trafia na nieliniową statykę, której wyjściem jest sygnał  $y$ . W przypadku dynamiki skorzystano z wyznaczonego wcześniej modelu dynamicznego (2.13), natomiast zmianie uległa charakterystyka statyczna.

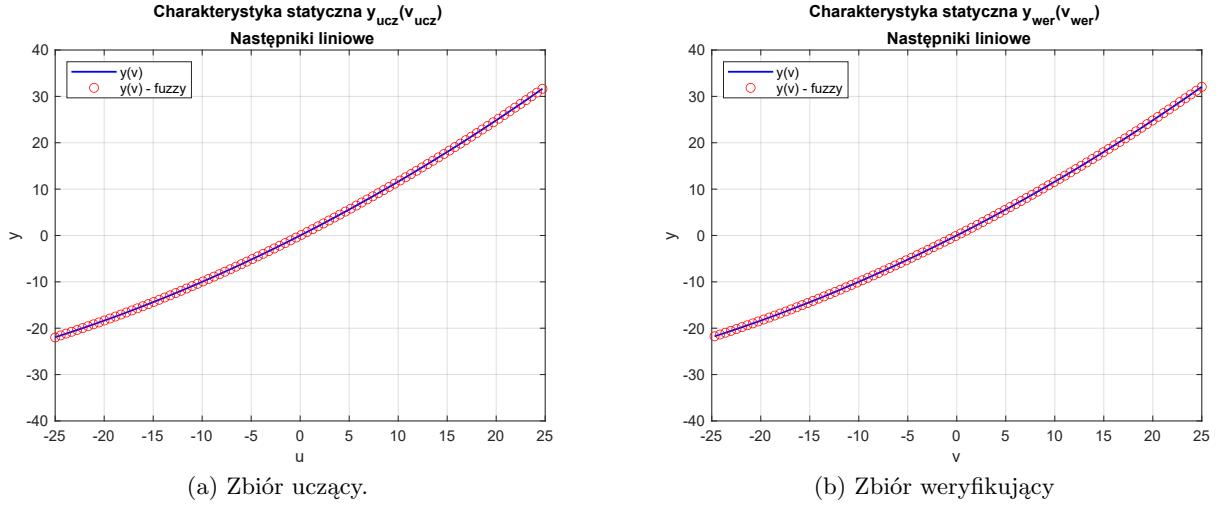
### 4.1. Następniaki liniowe

W przypadku modelu Wienera aproksymacja charakterystyki statycznej przysporzyła więcej problemów niżeli w przypadku modelu Hammersteina. Przyjęty przedział rozmywania zmiennej  $v \in [-25; 25]$  podzielono na pięć zbiorów.



Rys. 4.2: Zbiory rozmyte - następniaki liniowe.

Dzięki zastosowanemu podziałowi udało się otrzymać następującą aproksymację charakterystyki statycznej.

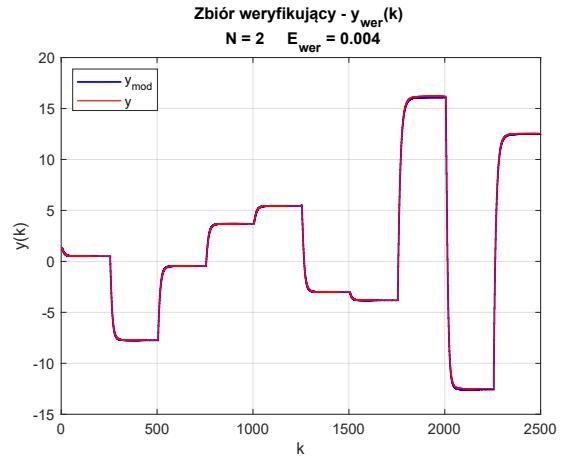
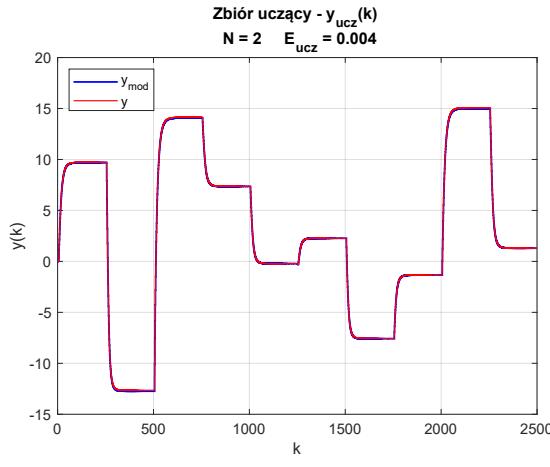


Rys. 4.3: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następniki liniowe.

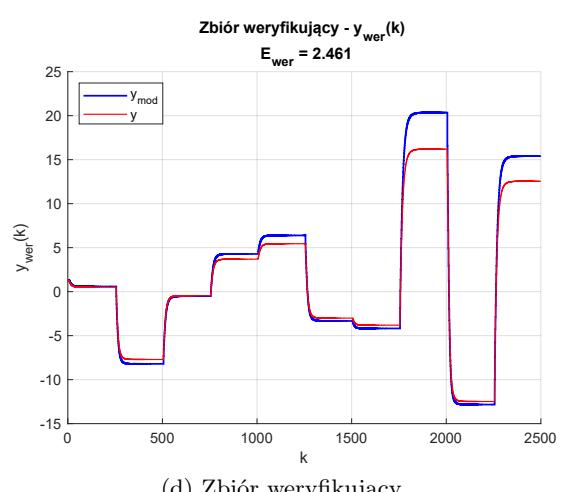
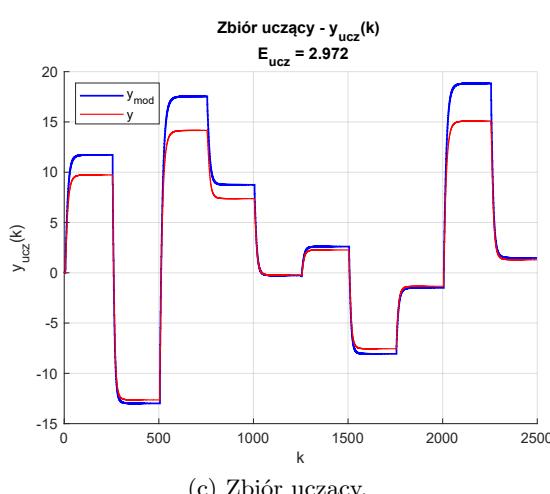
Następniki liniowe reguł przybrały postać zaprezentowaną w 3.1. Ponownie pierwsze przybliżenie zostało wyznaczone w za pomocą funkcji MATLAB, tym razem jednak niezbędne okazało się ręczne dostrajanie otrzymanych współczynników. Do problemu zdecydowano podejść w następujący sposób - starano się minimalizować błąd zbioru uczącego, następnie analizowano zachowanie modelu w przypadku zbioru weryfikującego. Wygenerowano kilka sekwencji sygnału sterującego i porównano zachowanie modelu dynamicznego i modelu Wienera.

## I sekwencja

### Model dynamiczny

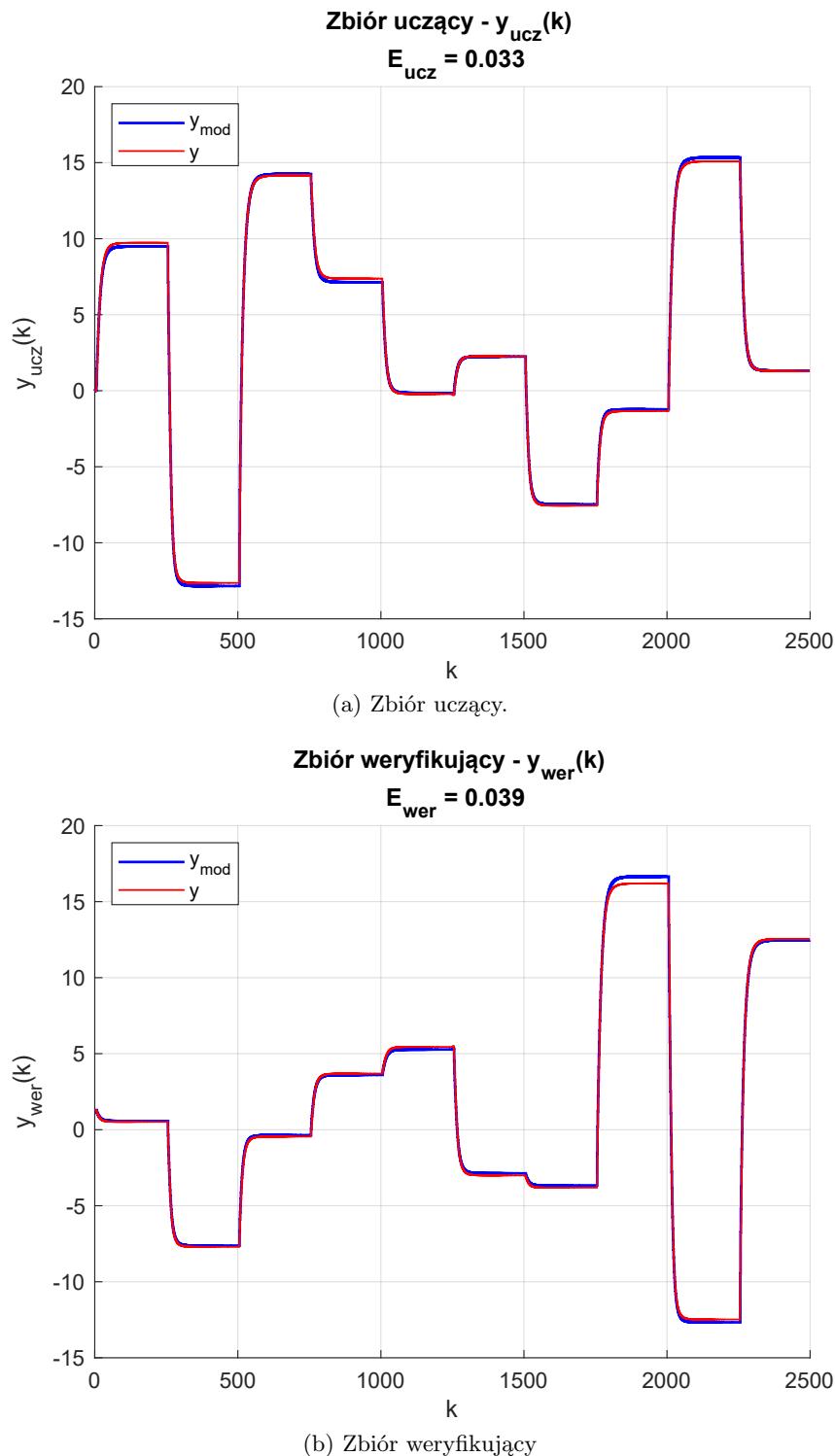


### Model Wienera



Rys. 4.4: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

Jak widać na powyższych rysunkach dokładność osiągnięta przez model Wienera w trybie ARX jest nieakceptowalna - postanowiono ręcznie dostroić model. Dokonano tego tylko poprzez zmianę wartości współczynników lokalnych modeli systemu rozmytego. Uzyskane rezultaty zaprezentowano na rys. 4.5.

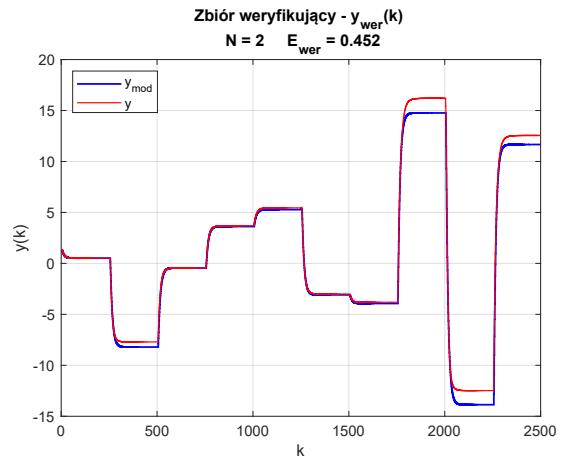
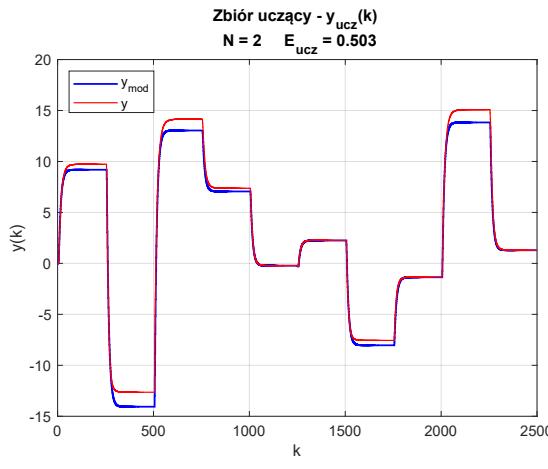


Rys. 4.5: Przebiegiu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następników.

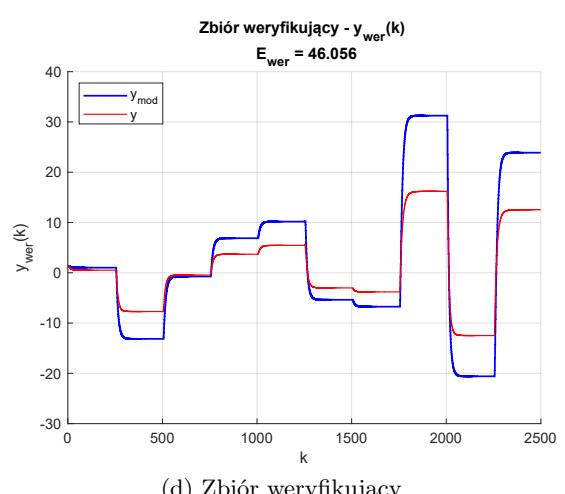
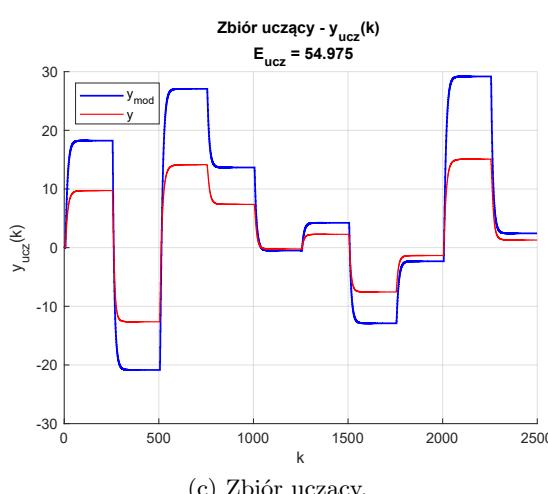
Model Wienera po ręcznym strojeniu osiągnął próg akceptowalności w kontekście kryterium jakości -  $E = 0,1$ . Analogiczne podejście zastosowano w przypadku testowania modelu w trybie rekurencyjnym.

## I sekwencja

### Model dynamiczny

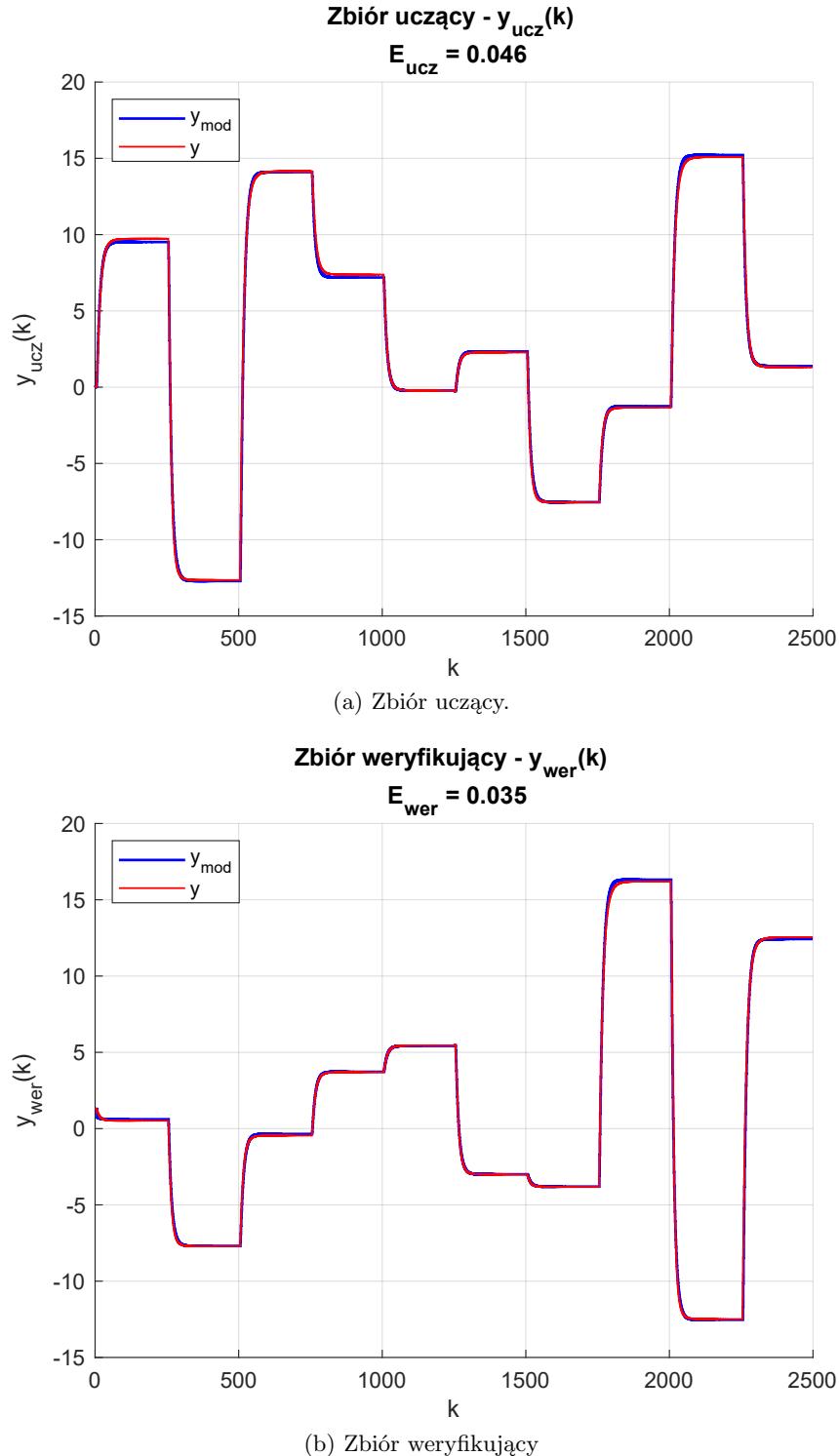


### Model Wienera



Rys. 4.6: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Model Wienera w trybie rekurencyjnym osiągnął bardzo duże wartości błędów. Natomiast postanowiono przyjąć inną strategię dostrajania, widać bowiem, że przemnożenie wyjścia modelu przez pewną stałą dałoby już zadowalający rezultat. Konieczne okazało się również dostrojenie wartości poszczególnych współczynników modeli lokalnych systemu rozmytego, aby osiągnąć zakładaną dokładność. Efekt przedstawiono na rys. 4.7.

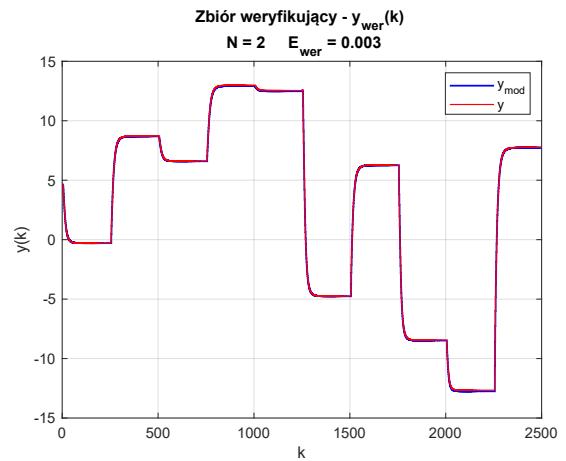
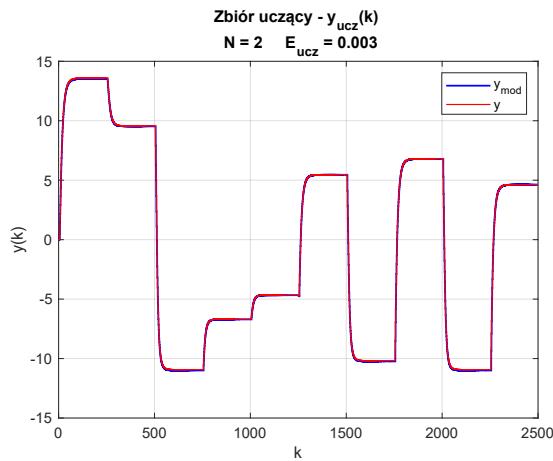


Rys. 4.7: Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następników.

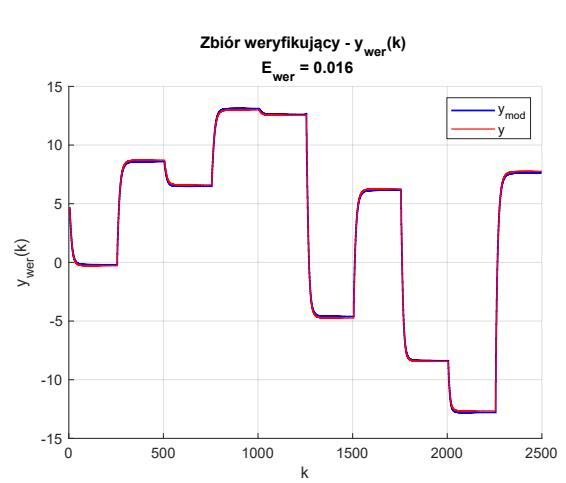
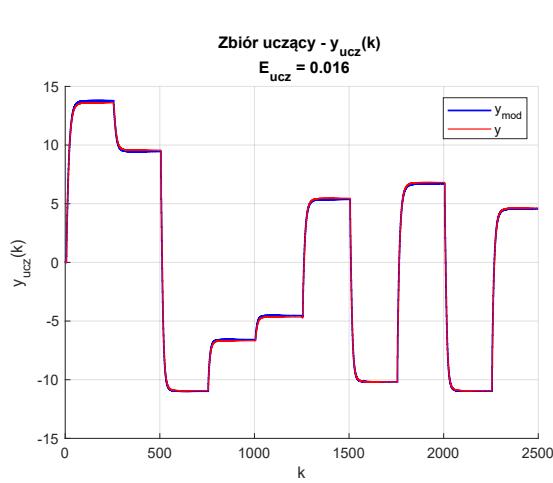
Jak pokazują powyższe ilustracje osiągnięto satysfakcjonującą dokładność, zbliżoną do tych uzyskanych podczas symulacji modelu Hammersteina (w niektórych przypadkach nawet lepszą). Dostrojony model poddano testom, generując kolejne dwie sekwencje sygnału sterującego.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



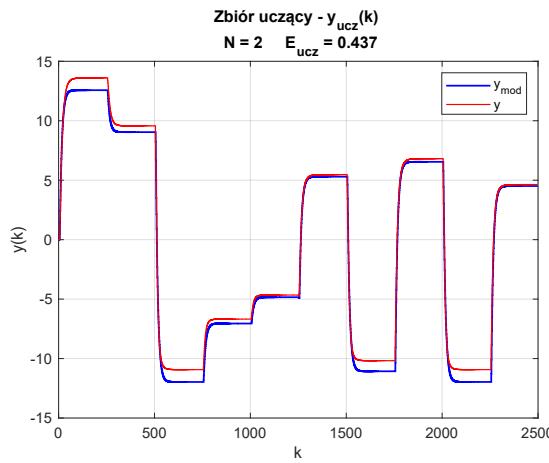
### Model Wienera



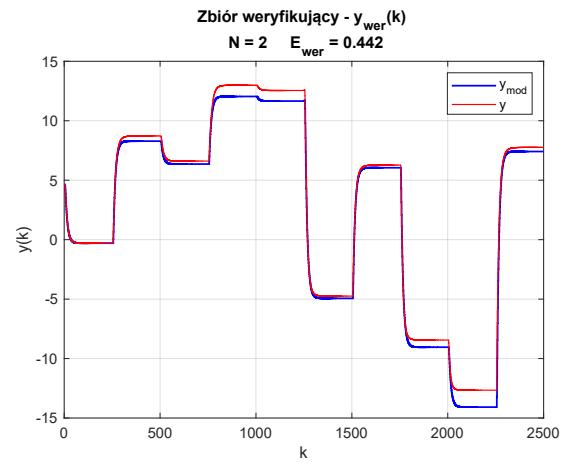
Rys. 4.8: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

## II sekwencja

### Model dynamiczny

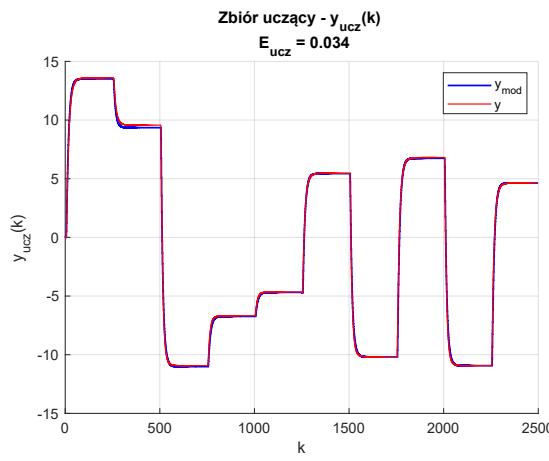


(a) Zbiór uczący.

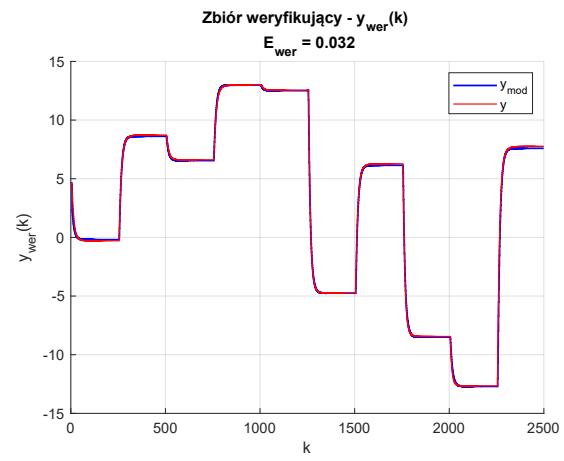


(b) Zbiór weryfikujący.

### Model Wienera



(c) Zbiór uczący.

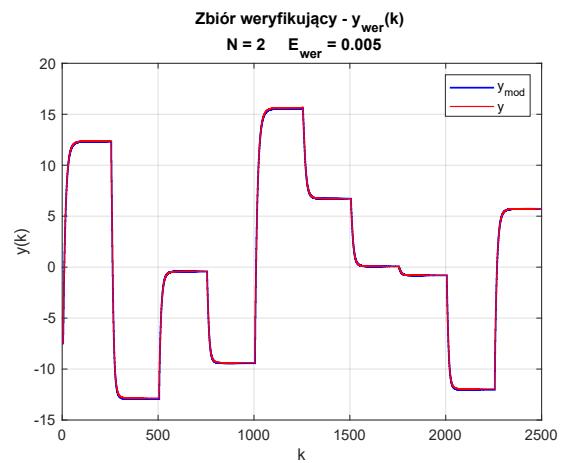
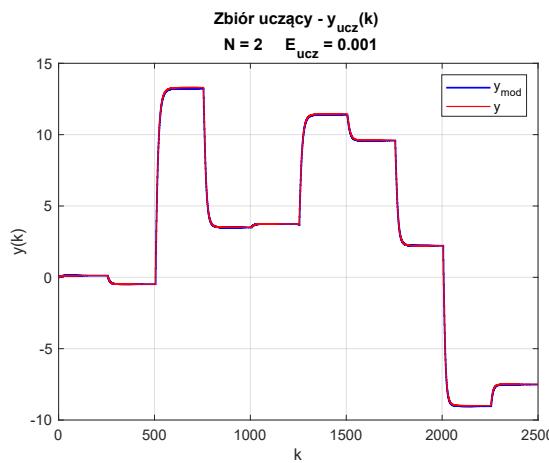


(d) Zbiór weryfikujący.

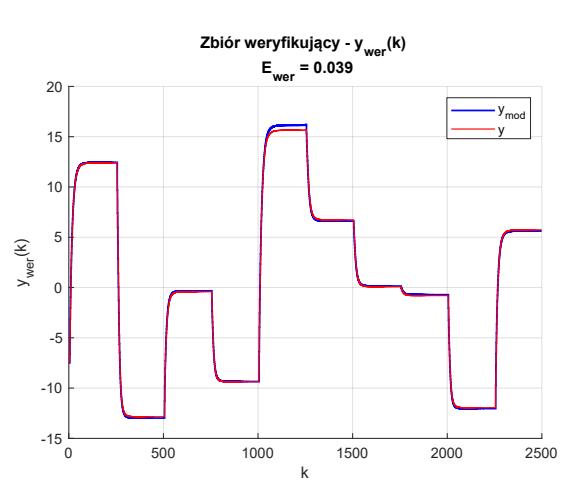
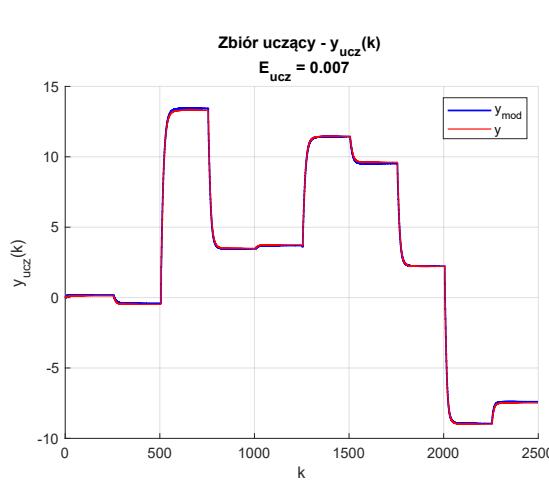
Rys. 4.9: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



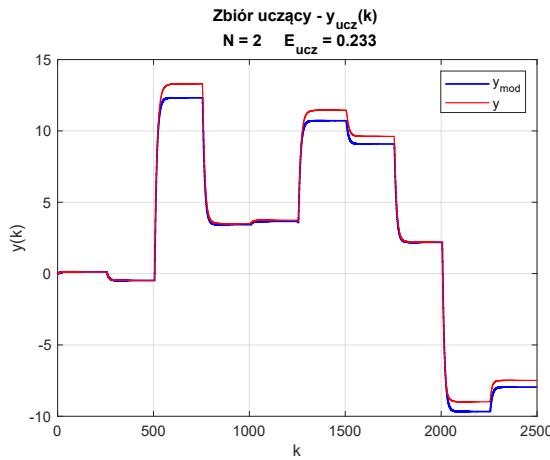
#### Model Wienera



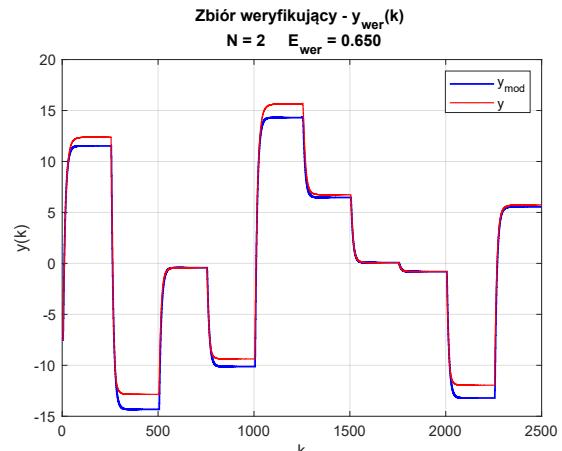
Rys. 4.10: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny

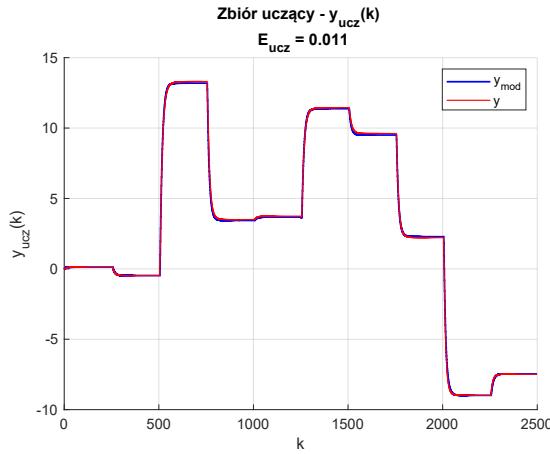


(a) Zbiór uczący.

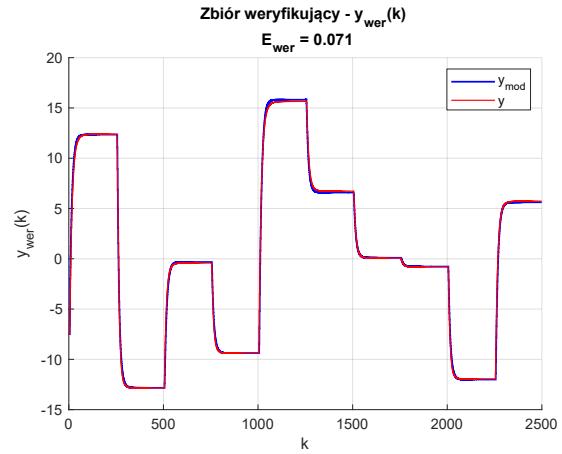


(b) Zbiór weryfikujący.

#### Model Wienera



(c) Zbiór uczący.



(d) Zbiór weryfikujący.

Rys. 4.11: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Na podstawie powyższych wykresów, można wysnuć wniosek, że model Wienera został dobrze dostrojony, ponieważ w każdym z testowanych przypadków uzyskano błąd mniejszy niż przyjęty za graniczny  $E = 0.1$ . Co ciekawe, strojąc model dobrano pewny współczynnik, który przemnażał wyjście liniowej dynamiki  $v = f(u)$ . Najlepszy rezultat uzyskano, gdy ta stała była równa wzmacnieniu statycznemu otrzymanej transmitancji, tj.

$$K_{stat} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (4.1)$$

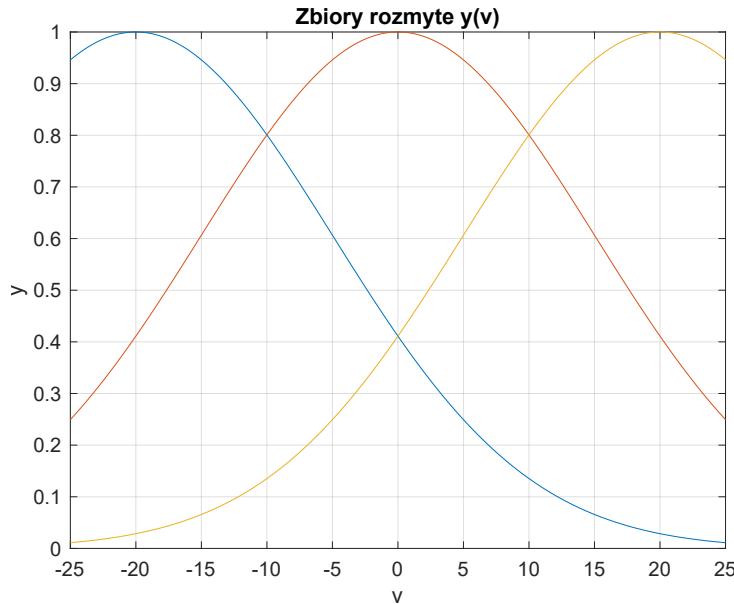
Wcześniej w równaniu różnicowym zadbane, aby wzmacnienie statyczne wynosiło 1, jednak mimo to, konieczne okazało się zastosowanie współczynnika regulującego.

## 4.2. Następni hiperboliczne

W przypadku nastęników hiperbolicznych postąpiono analogicznie jak w przypadku modelu Hammersteina - zredukowano liczbę zbiorów przynależności jednocześnie starając się zachować dokładność osiągniętą dla nastęników liniowych. Z doświadczeń empirycznych postanowiono przyjąć taką samą postać nastęników jak poprzednio, tj.:

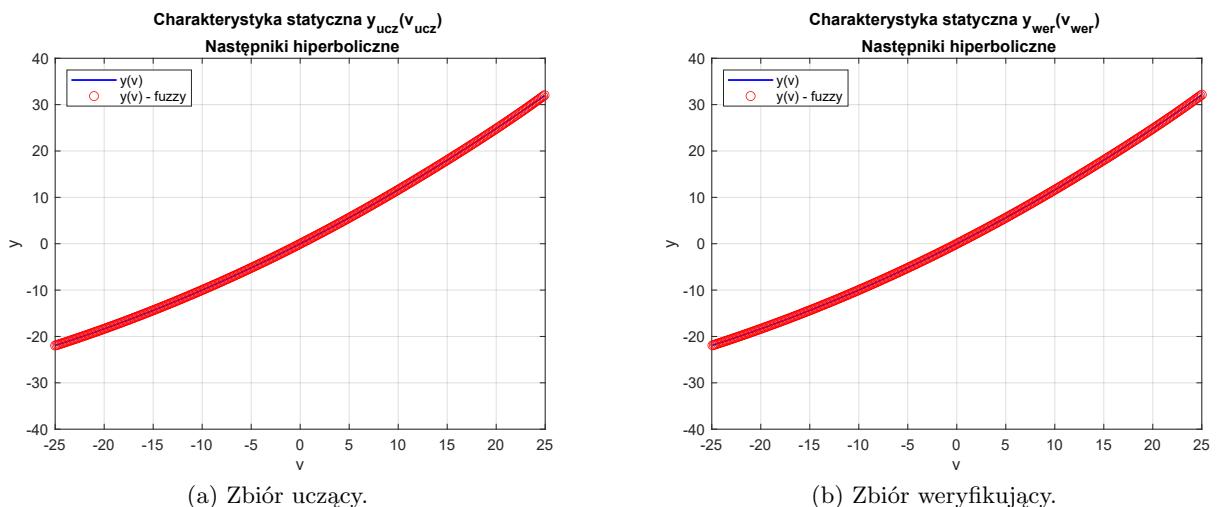
$$\text{Reguła n: Jeśli } u^n(k) \text{ jest } U_n, \text{ to : } y^n(k) = a_n \cdot \sinh(b_n u^n(k) + c_n) \quad (4.2)$$

Natomiast zbiory przynależności zmiennej  $v$  prezentowały się następująco:



Rys. 4.12: Zbiory rozmyte - następi hiperboliczne.

Z kolei dokładność aproksymacji charakterystyki statycznej przedstawiono na rys. 4.13.

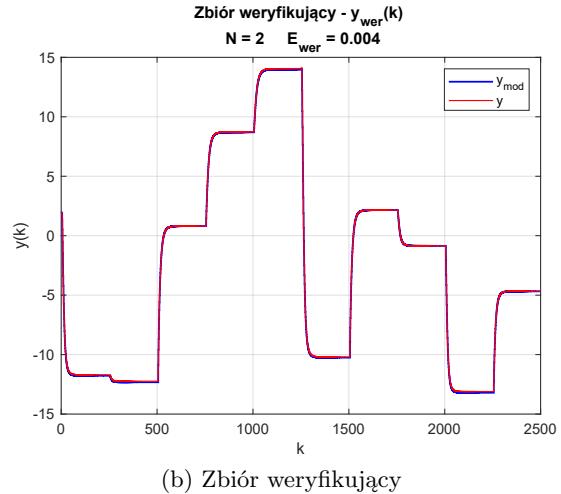
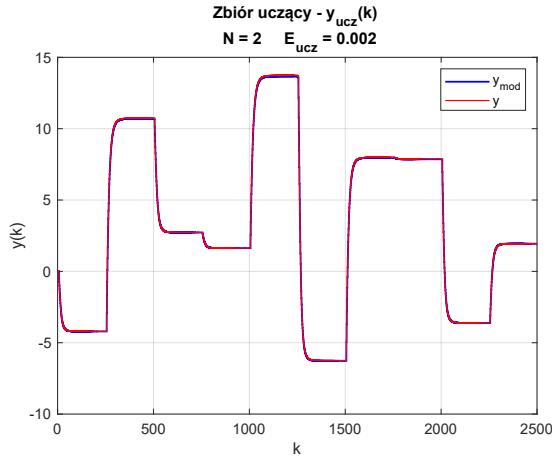


Rys. 4.13: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następi hiperboliczne.

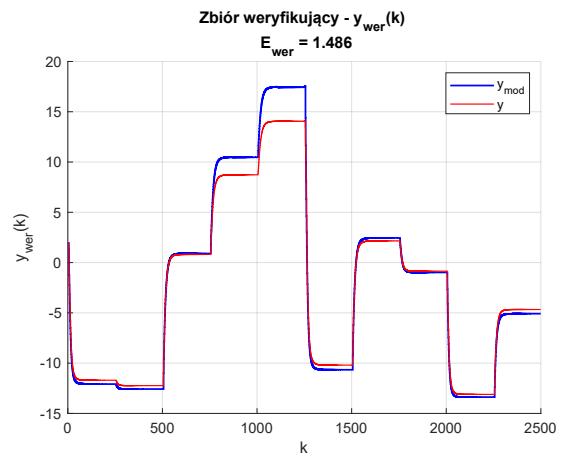
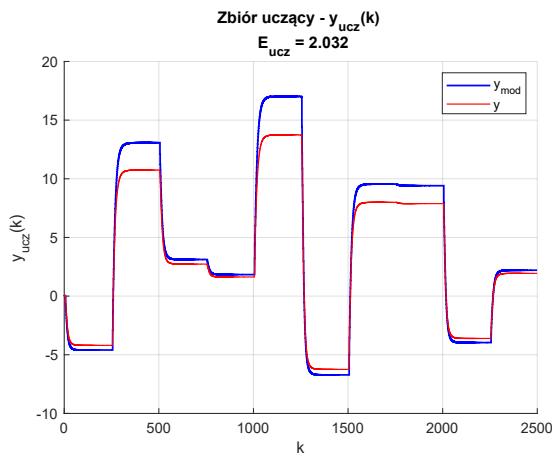
Przystąpiono do testowania modeli, generując kolejne sekwencje sygnału sterującego.

## I sekwencja

### Model dynamiczny

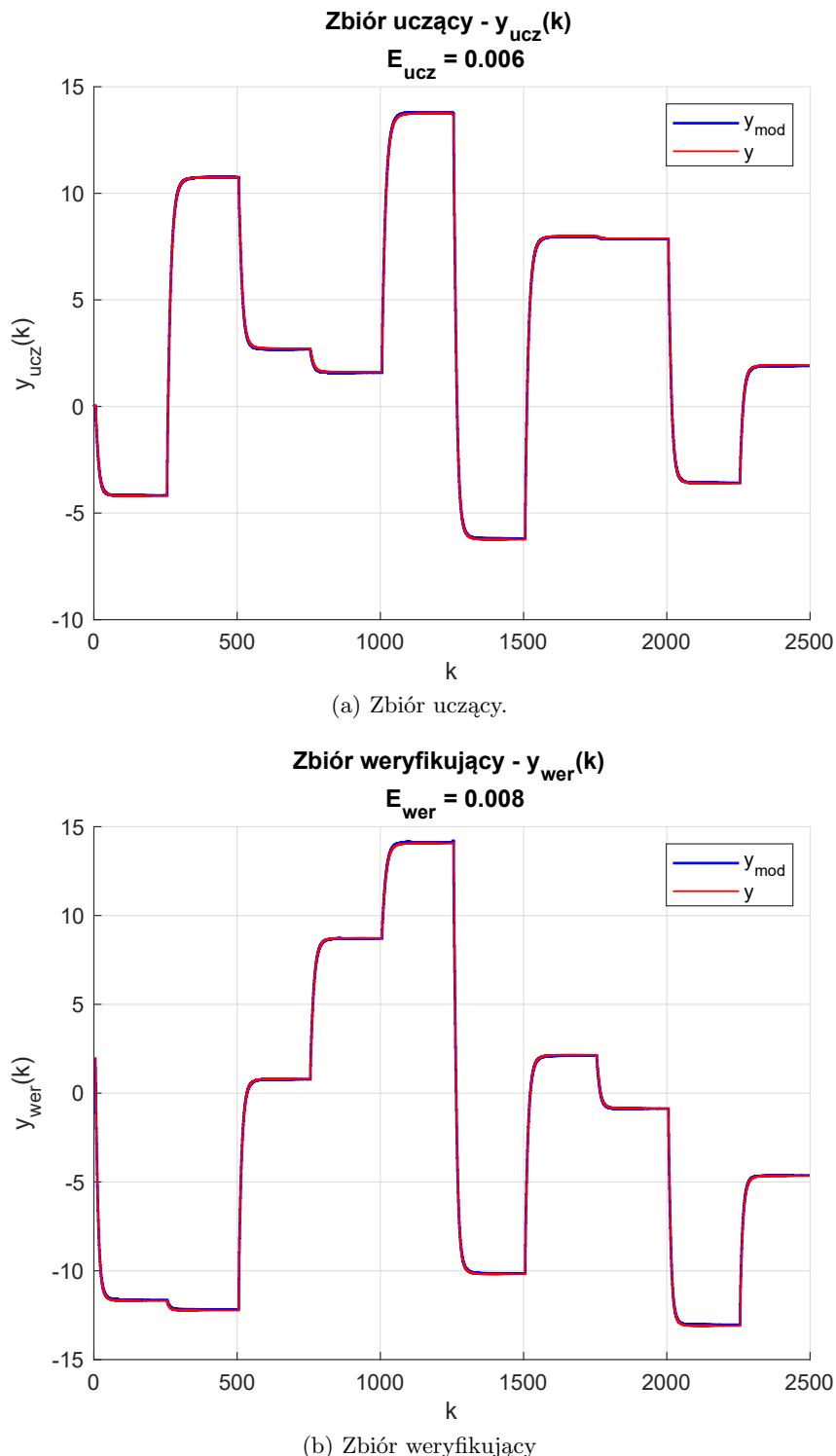


### Model Wienera



Rys. 4.14: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

Po raz kolejny model Wienera wymagał ręcznego strojenia. Tym razem natomiast oprócz lokalnych poprawek modeli systemu rozmytego zdecydowano się na przemnożenie wyjścia modelu przez stałą.

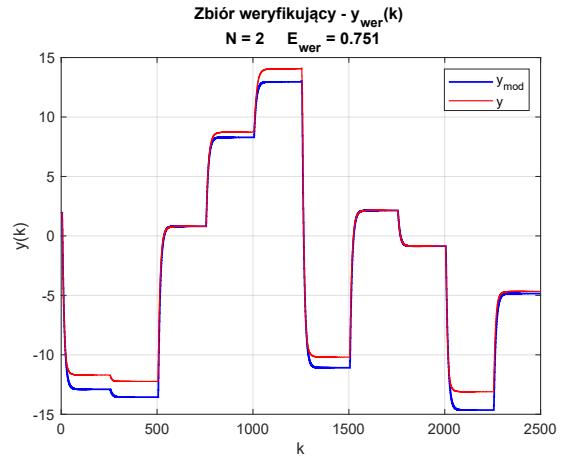
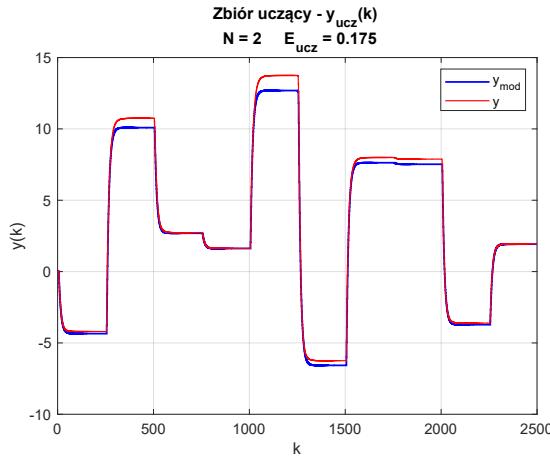


Rys. 4.15: Przebiegi sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następników.

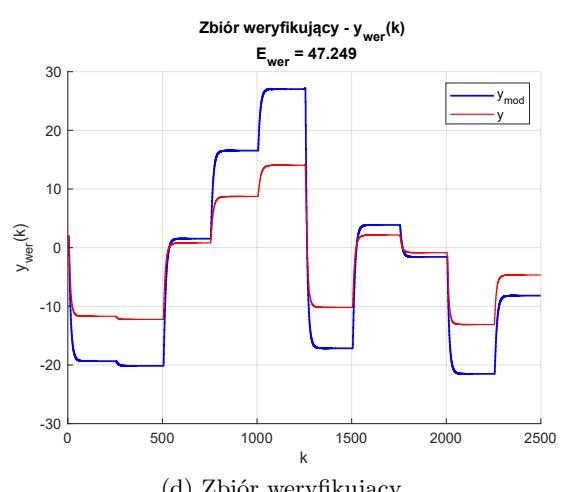
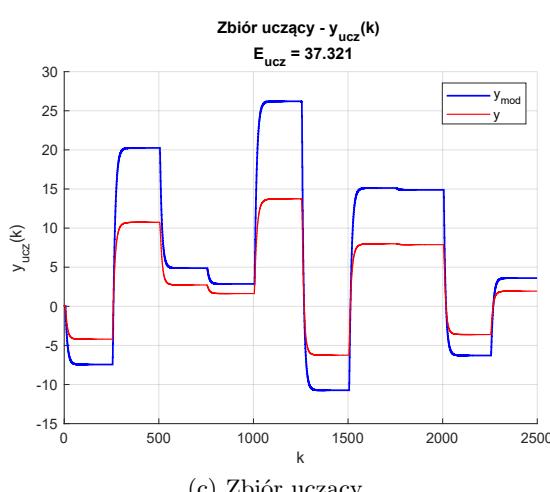
Udało się uzyskać satysfakcyjujące rezultaty. Model Wienera w trybie ARX po dostrojeniu prezentował się bardzo dobrze.

## I sekwencja

### Model dynamiczny

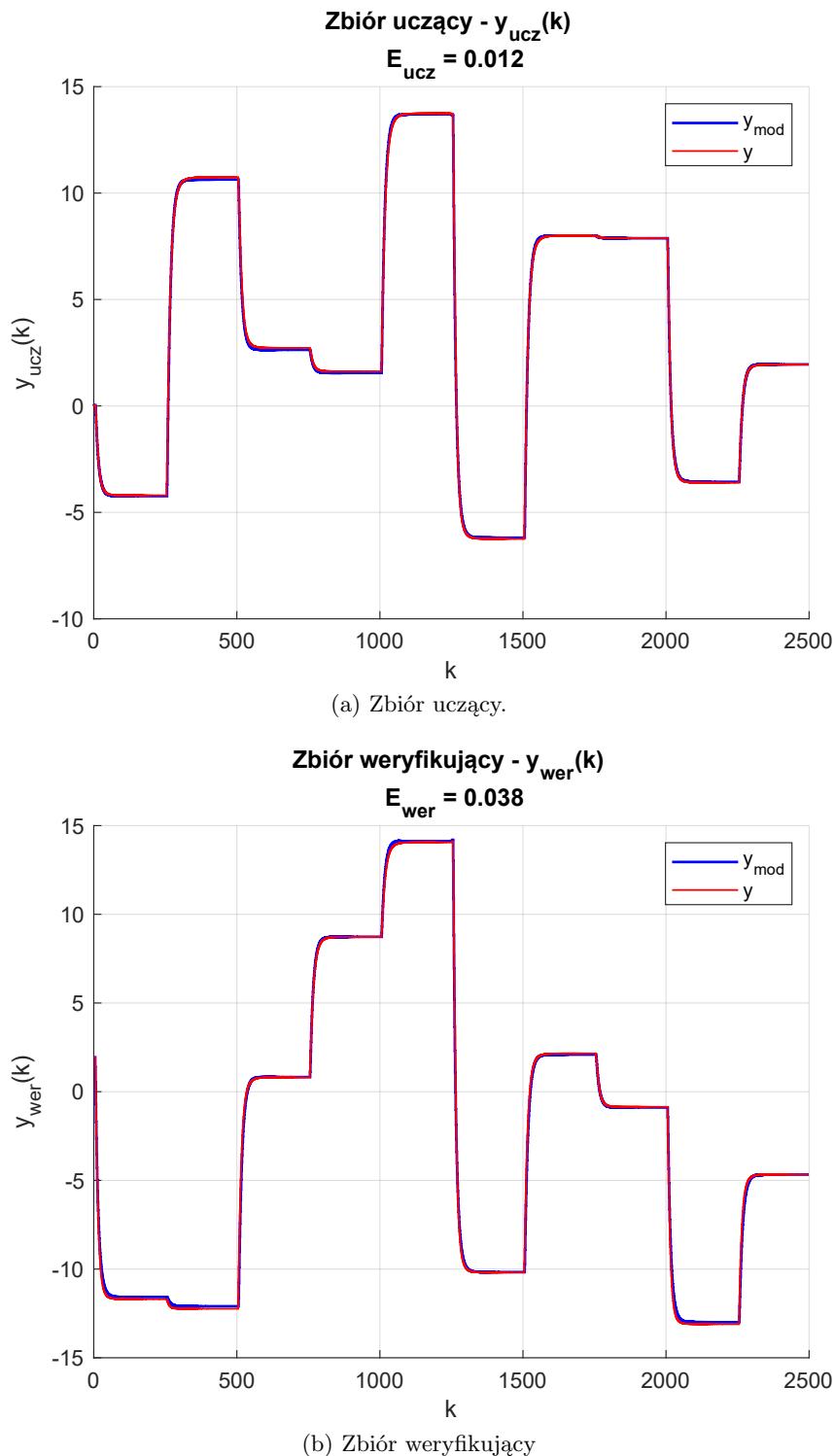


### Model Wienera



Rys. 4.16: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Model testowany w trybie rekurencyjnym wymagał dużej ingerencji. Przede wszystkim przemnożenie wyjścia modelu przez stałą - w tym przypadku 0,54 - znacznie poprawiło otrzymane wyniki. Dostrojenie modeli lokalnych pozwoliło uzyskać satysfakcyjujący rezultat.

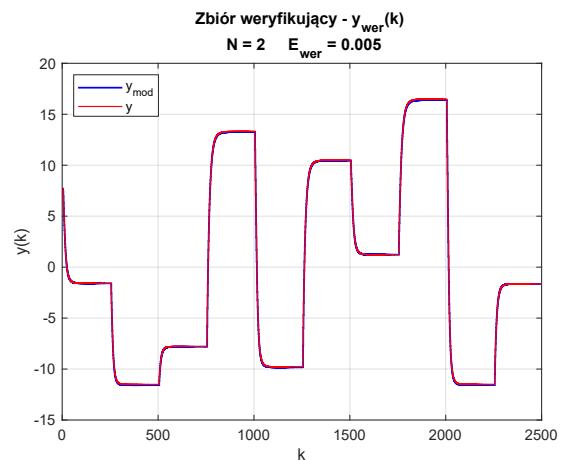
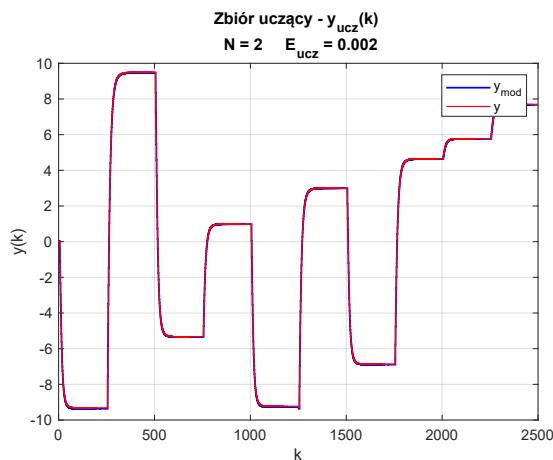


Rys. 4.17: Przebiegi sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następników.

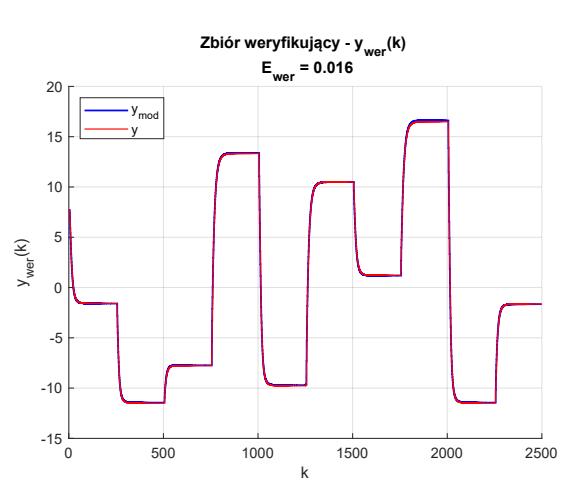
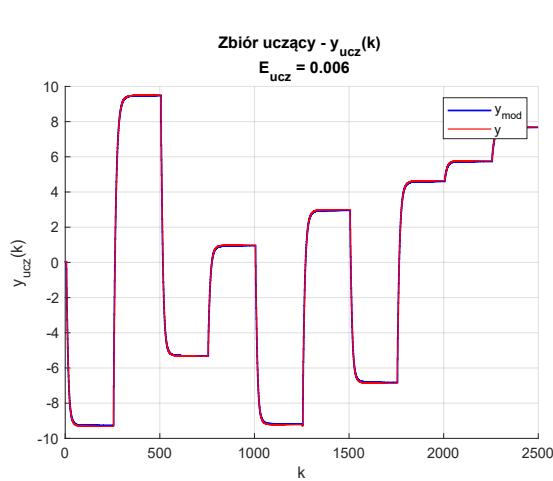
Z tak wystrojony model rozmyty poddano kolejnym dwóm testom, generując odpowiednią sekwencję sygnału sterującego.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



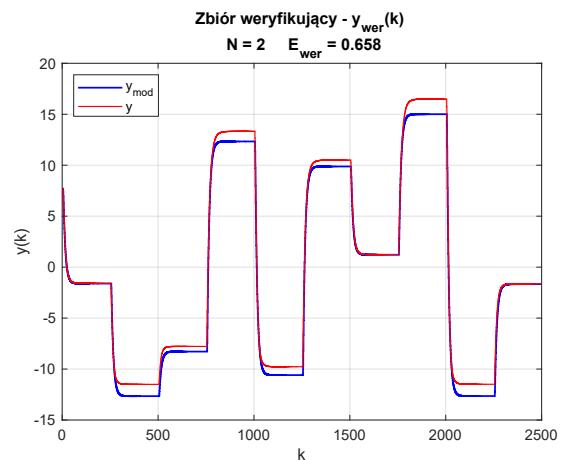
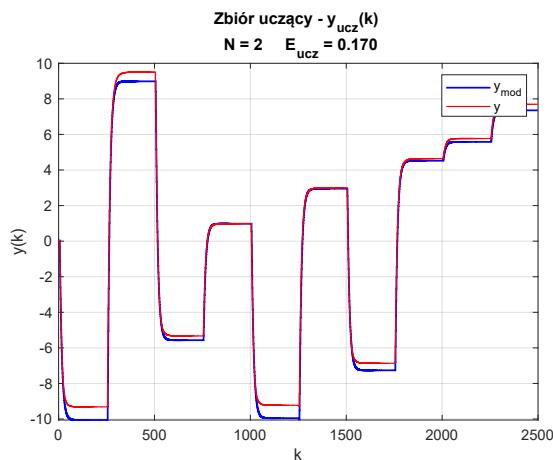
### Model Wienera



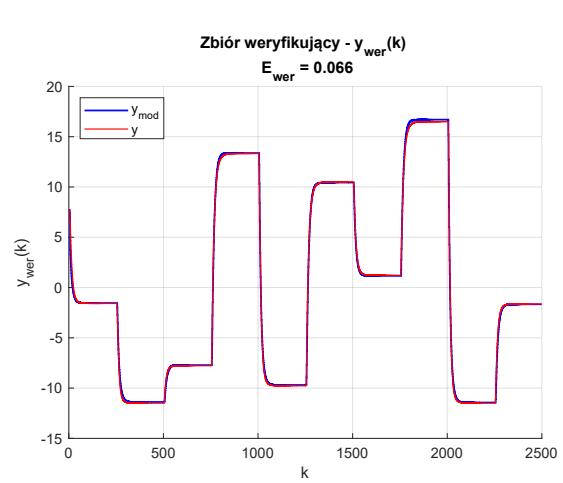
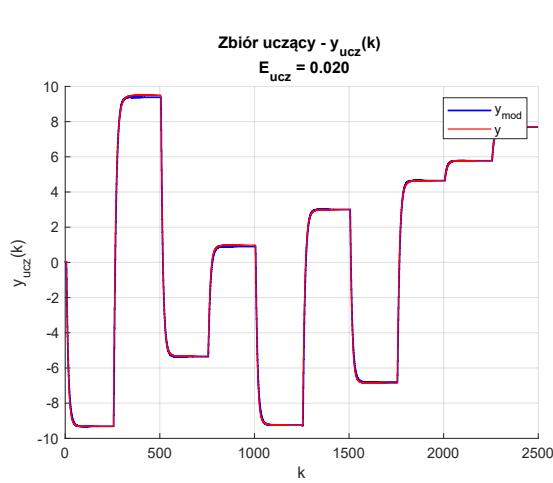
Rys. 4.18: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

## II sekwencja

### Model dynamiczny



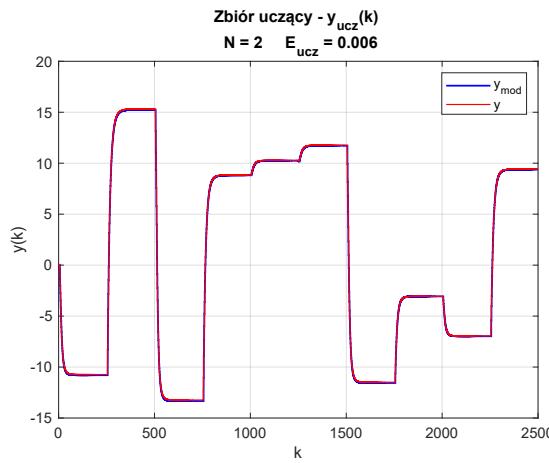
### Model Wienera



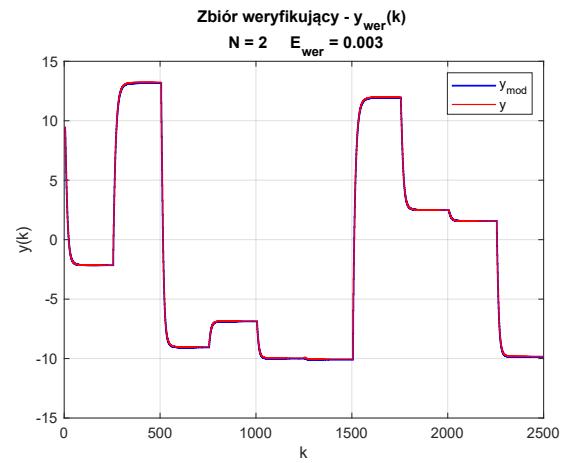
Rys. 4.19: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny

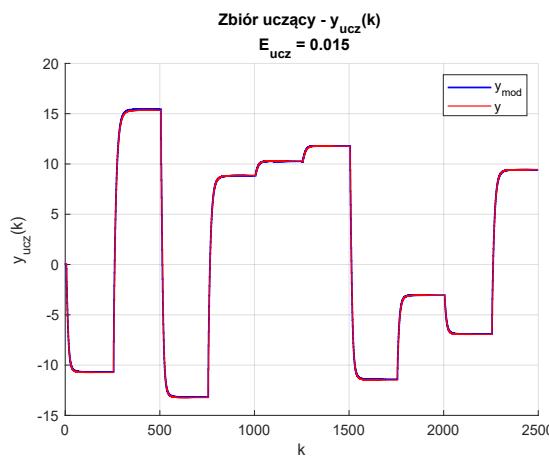


(a) Zbiór uczący.

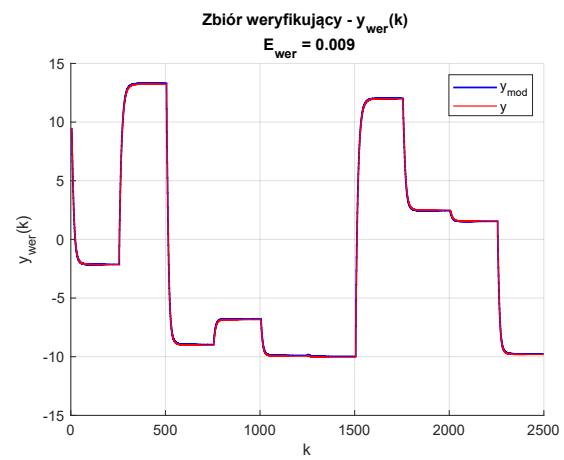


(b) Zbiór weryfikujący

#### Model Wienera



(c) Zbiór uczący.

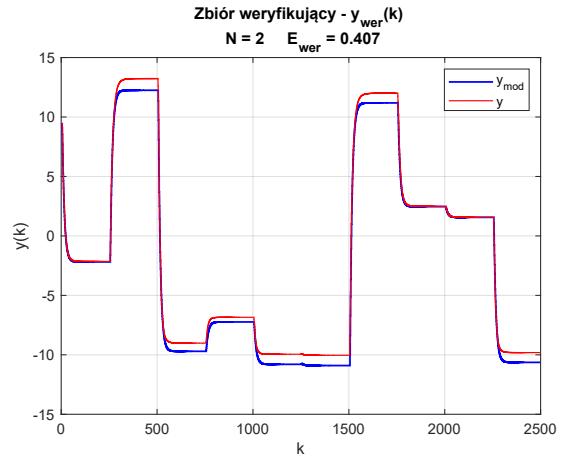
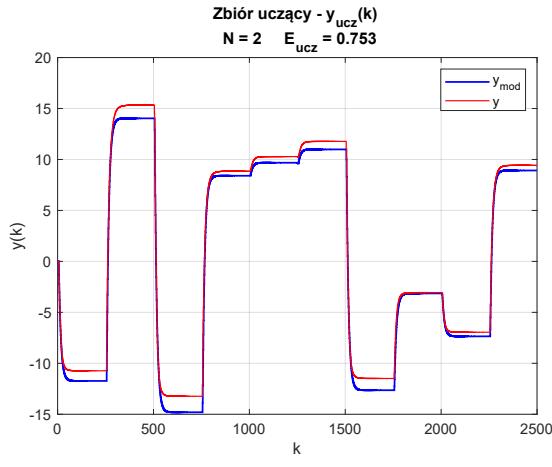


(d) Zbiór weryfikujący

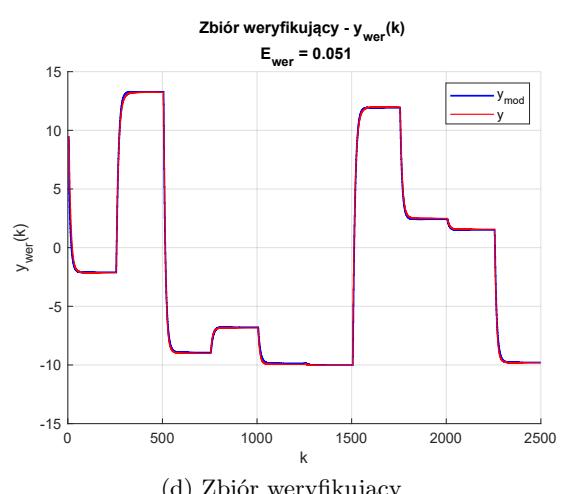
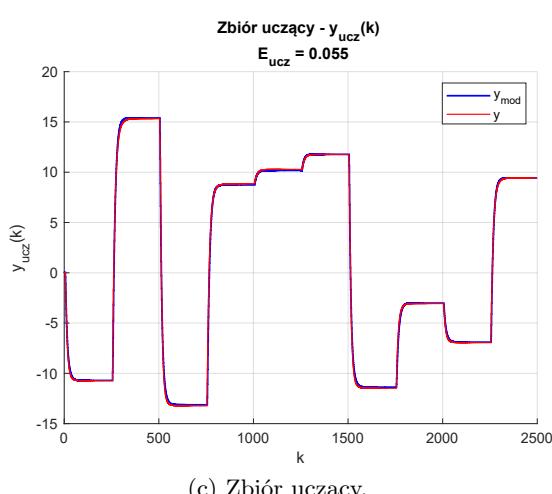
Rys. 4.20: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

### III sekwencja

#### Model dynamiczny



#### Model Wienera



Rys. 4.21: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Na podstawie powyższych wykresów można wysnuć wniosek, że udało się osiągnąć zamierzony cel - zredukowano liczbę zbiorów rozmytych i tym samym modeli lokalnych przy zachowaniu wcześniej osiągniętej dokładności. Niemniej, ręczne dostrajanie współczynników następek hiperbolicznych było procesem czasochłonnym i mało intuicyjnym, bowiem chcąc poprawić działanie modelu w danym przedziale wartości często okazywało się, że należy zmienić parametry modelu, który w tym przedziale wydawał się być nieistotny. Ostateczny efekt uznano za satysfakcyjający.

## 5. Podsumowanie

W trakcie wykonywania projektu oraz identyfikując dany obiekt regulacji automatycznej nasunęło się kilka wniosków, które postarano się opisać poniżej.

Modele Hammersteina składają się z nieliniowego bloku wejściowego, który jest połączony szeregowo z liniowym dynamicznym blokiem. Nieliniowość jest zazwyczaj statyczna i jest aplikowana do sygnału wejściowego przed jego przetworzeniem przez liniowy system dynamiczny. Ten rodzaj modelu jest używany do opisu systemów, gdzie nieliniowość występuje na wejściu, a reszta systemu zachowuje się liniowo. Modele Hammersteina są użyteczne w identyfikacji systemów i projektowaniu regulatorów.

Modele Wienera, odwrotnie do modeli Hammersteina, mają liniowy dynamiczny blok na wejściu, który jest połączony szeregowo z nieliniowym blokiem wyjściowym. Liniowy blok dynamiczny przetwarza sygnał wejściowy, który następnie przechodzi przez nieliniowy blok. Modele te są stosowane, gdy nieliniowość występuje na wyjściu systemu, po przetworzeniu przez liniowy system dynamiczny. Modele Wienera są przydatne w analizie systemów z nieliniowymi elementami wyjściowymi.

Stosowanie modeli Hammersteina i Wienera w obiektach regulacji automatycznej jest ważne, ponieważ pozwalają one na dokładniejsze modelowanie rzeczywistych systemów, które często zawierają zarówno elementy liniowe, jak i nieliniowe. Dzięki nim można lepiej zrozumieć zachowanie takich systemów i opracować bardziej precyzyjne i skuteczne strategie regulacji. To z kolei prowadzi do poprawy wydajności, stabilności i niezawodności systemów automatyki. Integracja tych modeli w procesie projektowania systemów automatyki umożliwia także lepsze przewidywanie i kompensowanie nieliniowych efektów w działaniu systemów.

Jak można było zauważyć na zaprezentowanych wykresach, zaimplementowanie nieliniowej statyki, którą poprzedzała, bądź występowała po niej, liniowa dynamika diametralnie poprawiała jakość opisu obiektu. W każdym z rozpatrywanych przypadków udało się osiągnąć założone kryterium jakości, którym był błąd średnio kwadratowy, nie większy niż 0,1.

# Spis rysunków

1.1	Obiekt regulacji automatycznej.	2
2.1	Charakterystyka statyczna $h_2(F_1)$ .	3
2.2	Porównanie modelu liniowego z nieliniowym.	4
2.3	Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.	5
2.4	Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem FOPDT.	6
2.5	Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem SOPDT.	7
2.6	Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.	8
3.1	Reprezentacja graficzna modelu Hammersteina.	9
3.2	Zbiory rozmyte - następniki liniowe.	9
3.3	Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następniki liniowe.	10
3.4	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	11
3.5	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	12
3.6	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	13
3.7	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	14
3.8	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	15
3.9	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	16
3.10	Zbiory rozmyte - następniki hiperboliczne.	17
3.11	Wykres sinusa hiperbolicznego $\sinh(x)$ .	17
3.12	Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następniki hiperboliczne.	18
3.13	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	19
3.14	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	20
3.15	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	21
3.16	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	22
3.17	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	23
3.18	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	24
4.1	Reprezentacja graficzna modelu Wienera.	25
4.2	Zbiory rozmyte - następniki liniowe.	25
4.3	Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następniki liniowe.	26
4.4	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.	27
4.5	Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następników.	28

4.6 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	29
4.7 Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następców. . . . .	30
4.8 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji. . . . .	31
4.9 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	32
4.10 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji. . . . .	33
4.11 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	34
4.12 Zbiory rozmyte - następcy hiperboliczne. . . . .	35
4.13 Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty - następcy hiperboliczne. . . . .	35
4.14 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji. . . . .	36
4.15 Przebiegi sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następców. . . . .	37
4.16 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	38
4.17 Przebiegi sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następców. . . . .	39
4.18 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji. . . . .	40
4.19 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	41
4.20 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji. . . . .	42
4.21 Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym. . . . .	43