4

Wielomianowe modele Wienera

W tym rozdziale omówiono wielomianowe modele Wienera, tj. modele składające się z modelu przenoszenia impulsów liniowego układu dynamicznego i wielomianowego modelu elementu nieliniowego lub odwrotnego elementu nieliniowego. Wprowadzono zmodyfikowaną definicję błędu równania i zmodyfikowany szeregowo-równoległy model Wienera. Zakładając, że element nieliniowy jest odwracalny, a odwrotny element nieliniowy można opisać wielomianem, zmodyfikowany szeregowo-równoległy model Wienera można przekształcić do postaci liniowej w parametrach, a jego parametry można obliczyć metodą najmniejszych kwadratów. Takie podejście skutkuje jednak niespójnymi oszacowaniami parametrów. Jako remedium na ten problem zaproponowano metodę zmiennych instrumentalnych ze zmiennymi instrumentalnymi wybranymi jako opóźnione wejścia systemu oraz opóźnione i zasilane opóźnione wyjścia modelu uzyskane metodą najmniejszych kwadratów.

Alternatywą dla tego połączonego podejścia najmniejszych kwadratów i zmiennych instrumentalnych jest metoda predykcji, w której estymowane są parametry nieodwróconego elementu nieodwracającego, patrz [128] dla wersji wsadowej i [85] dla wersji sekwencyjnej. Metoda regresji pseudolinearnej [86], będąca uproszczoną wersją metody błędu predykcji o niższych wymaganiach obliczeniowych, jest kolejną skuteczną techniką estymacji parametrów w systemach Wienera zaburzonych addytywnie przez dyskretny biały szum.

Rozdział ten jest zorganizowany w następujący sposób: Po pierwsze, metoda najmniejszych kwadratów do identyfikacji systemów Wienera opartych na zmodyfikowanym modelu szeregowo-równoległym została wprowadzona w sekcji 4.1. Rozważane są dwa różne przypadki systemu Wienera z członem liniowym i bez niego. Rozdział 4.2 zawiera szczegóły rekurencyjnego podejścia do błędu predykcji w identyfikacji wielomianowych układów Wienera. Metoda regresji pseudoliniowej została omówiona w sekcji 4.3. Krótkie podsumowanie znajduje się w sekcji 4.4.

A. Janczak: Identification of Nonlinear Systems, LNCIS 310, pp. 117-141, 2005.

4.1 Podejście najmniejszych kwadratów do identyfikacji systemów Wienera

W tej części przedstawiono metodę najmniejszych kwadratów do identyfikacji wielomianowych systemów Wienera. Aby przekształcić model Wienera do postaci liniowej w parametrach, stosuje się nieodwrócony model liniowego układu dynamicznego i odwrotny model elementu nieliniowego. W odniesieniu do zidentyfikowanego systemu Wienera przyjmuje się następujące założenia:
Założenie 4.1. System SISO Wienera jest

$$y(n) = f\left(\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(n) + \varepsilon(n)\right), \tag{4.1}$$

gdzie

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \ldots + a_{na} q^{-na}, \tag{4.2}$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}, \tag{4.3}$$

, a $\varepsilon(n)$ jest zaburzeniem addytywnym.
Założenie 4.2. Wielomiany $A(q^{-1})$ i $B(q^{-1})$ są całkowite. Założenie 4 .3. Rzędy na i nb wielomianów $A(q^{-1})$ i $B(q^{-1})$ są znane.
Założenie 4.4. Liniowy układ dynamiczny jest swobodny i asymptotycznie stabilny.
Założenie 4.5. Wejście $u(n)$ ma skończone momenty i jest niezależne od $\varepsilon(k)$ dla wszystkich n i k.
Założenie 4.6. Nieliniowa funkcja $f(\cdot)$ jest określona na przedziale $[a, b]$.
Założenie 4.7. Funkcja nieliniowa $f(\cdot)$ jest nieobliczalna.
Założenie 4.8. Odwrotna funkcja nieliniowa $f^{-1}(y(n))$ można wyrazić przez wielomian

$$f^{-1}(y(n)) = \gamma_0 + \gamma_1 y(n) + \gamma_2 y(n)^2 + \cdots + \gamma_r y(n)^r \tag{4.4}$$

znanego rzędu r.

Problem identyfikacji można sformułować następująco: Biorąc pod uwagę sekwencję pomiarów wejściowych i wyjściowych systemu Wienera $\{u(n), y(n)\}$, $i = 1, \ldots, N$, oszacować parametry liniowego systemu dynamicznego i in- wersyjnego elementu nieliniowego minimalizując następujące kryterium:

$$J(n) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(y(n) - \hat{y}(n)\right)^2, \tag{4.5}$$

gdzie $\hat{y}(n)$ jest wynikiem modelu Wienera.

4.1.1 Błąd identyfikacji

W przypadku wielomianowego modelu Wienera zarówno jego postać równoległa, jak i szeregowo-równoległa są nieliniowymi funkcjami parametrów modelu. Co więcej, model szeregowo-równoległy zawiera nie tylko model elementu nieliniowego, ale także jego odwrotność [73] - rys. 4.2. Rozważmy model równoległy modelu Wienera dany przez

$$\hat{y}(n)=\hat{f}\left(\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u(n)\right), \tag{4.6}$$

z

$$\hat{A}(q^{-1}) = 1+\hat{a}_1 q^{-1}+\dots+\hat{a}_{na} q^{-na}, \tag{4.7}$$

$$\hat{B}(q^{-1}) = \hat{b}_1 q^{-1}+\dots+\hat{b}_{nb} q^{-nb}. \tag{4.8}$$

Jeśli $\hat{f}(\cdot)$ jest odwracalne, to (4.6) można zapisać jako

$$\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right) = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u(n). \tag{4.9}$$

Założenie 4.9. Odwrotna funkcja nieliniowa $\hat{f}^{-1}(\cdot)$ ma postać wielomianu rzędu r:

$$\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right) = \hat{\gamma}_0+\hat{\gamma}_1\hat{y}(n)+\hat{\gamma}_2\hat{y}^2(n)+\dots+\hat{\gamma}_r\hat{y}^r(n). \tag{4.10}$$

Załóżmy również, że wielomian (4.10) zawiera człon liniowy, tj. $\hat{\gamma}_1 \neq 0$. Następnie łącząc (4.10) i (4.9), wynik modelu można wyrazić jako [80, 83]:

$$\hat{y}(n)=\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\left[\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})}u(n)-\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right], \tag{4.11}$$

gdzie

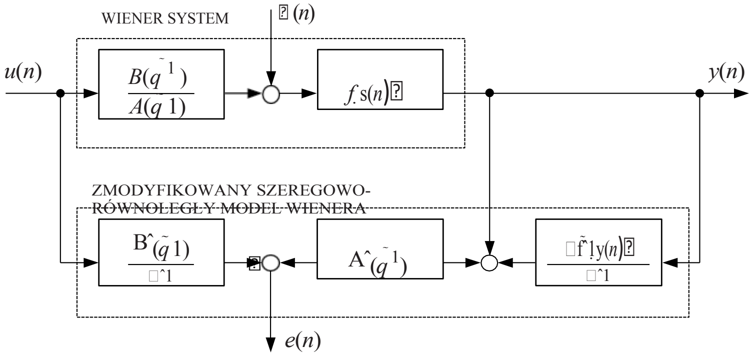
$$\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)=\hat{\gamma}_0+\hat{\gamma}_2\hat{y}^2(n)+\hat{\gamma}_3\hat{y}^3(n)+\dots+\hat{\gamma}_r\hat{y}^r(n). \tag{4.12}$$

Model (4.11) można zapisać jako

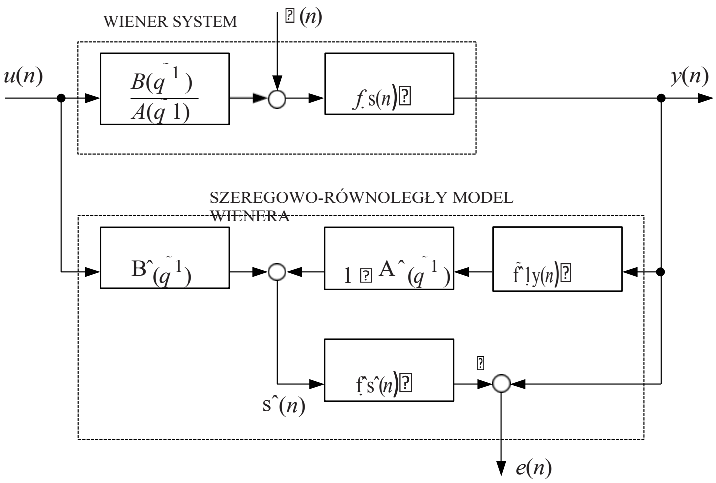
$$\hat{y}(n)=\left[1-\hat{A}(q^{-1})\right]\hat{y}(n)+\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\left[\hat{B}(q^{-1})u(n)-\hat{A}(q^{-1})\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right]. \tag{4.13}$$

Zastępując $\hat{y}(n)$ przez $y(n)$ na r.h.s. z (4.13), można uzyskać następujący zmodyfikowany model szeregowo-równoległy:

$$\hat{y}(n)=\left[1-\hat{A}(q^{-1})\right]y(n)+\frac{1}{\hat{\gamma}_1}\left[\hat{B}(q^{-1})u(n)-\hat{A}(q^{-1})\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right]. \tag{4.14}$$



Rys. 4.1. Zmodyfikowany szeregowo-równoległy model Wienera. Definicja błędu identyfikacji dla systemów z członem liniowym



Rys. 4.2. Szeregowo-równoległy model Wienera. Definicja błędu identyfikacji

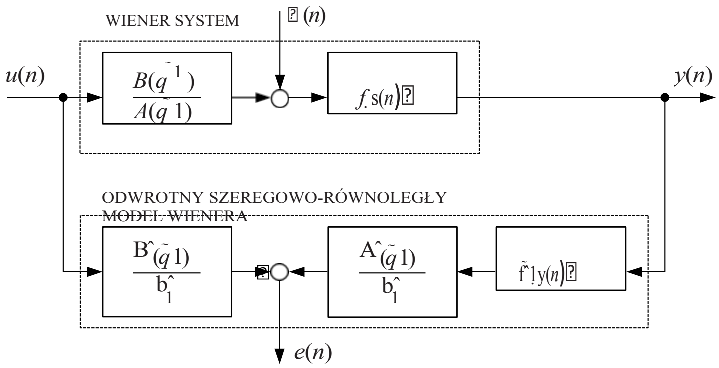
Zmodyfikowany model szeregowo-równoległy, pokazany na rys. 4.1, różni się od modelu szeregowo-równoległego, który zawiera zarówno model elementu nieliniowego, jak i jego odwrotność,

$$\hat{y}(n) = \hat{f}\left(\left[1 - \hat{A}(q^{-1})\right]\hat{f}^{-1}\left(y(n)\right) + \hat{B}(q^{-1})u(n)\right), \tag{4.15}$$

i odwrotny model szeregowo-równoległy

$$\hat{u}(n-1) = \frac{1}{\hat{b}_1}\left[\left(\hat{b}_1 - \hat{B}(q^{-1})\right)u(n) + \hat{A}(q^{-1})\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right], \tag{4.16}$$

patrz rysunki 4.2 - 4.3 dla porównania. Stosując (4.14), można wprowadzić następującą zmodyfikowaną definicję błędu identyfikacji:



Rys. 4.3. Odwrotny szeregowo-równoległy model Wienera. Definicja błędu identyfikacji

$$e(n) = y(n) - \hat{y}(n) \tag{4.17}$$

$$e(n) = \hat{A}(q^{-1})y(n) - \frac{1}{\hat{\gamma}_1}\Big[\hat{B}(q^{-1})u(n) - \hat{A}(q^{-1})\Delta\hat{f}^{-1}\hat{y}(n)\Big]. \tag{4.18}$$

4.1.2 Charakterystyka nieliniowa z członem liniowym

Zakładając, że zidentyfikowany układ Wienera ma odwracalną nieliniową cha- rakterystykę z $\gamma_1 = 0$, wyrazimy zmodyfikowany szeregowo-równoległy układ Wienera w postaci liniowej w parametrach.
Wprowadzić wektor parametrów $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \big[\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_{na}\ \hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_{nb}\ \hat{\alpha}_{00}\ \hat{\alpha}_{20} \ldots \hat{\alpha}_{rna}\big]^T, \tag{4.19}$$

and the regression vector x(n)

$$\begin{aligned} x(n) = \big[- y(n-1) \ldots - y(n-na)\ u(n-1) \ldots u(n-nb) \\ 1 - y^2(n) \ldots - y^r(n-na)\big]^T, \end{aligned} \tag{4.20}$$

gdzie

$$\beta_k = \frac{\hat{b}_k}{\hat{\gamma}_1},\ k = 1, \ldots, nb, \tag{4.21}$$

$$\hat{\alpha}_{jk} = \begin{cases} 1 + \dfrac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}_1}\displaystyle\sum_{m=1}^{na} \hat{a}_m \dfrac{\hat{\gamma}}{\hat{\gamma}_1}, & k = 0, j = 0, \\ \dfrac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_1}, & k = 0, j = 2, 3, \ldots, r, \\ \hat{a}_k \dfrac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_1}, & k = 1, \ldots, na, j = 2, 3, \ldots, r. \end{cases} \tag{4.22}$$

Wówczas model (4.14) można zapisać jako

$$\hat{y}(n) = x^T(n)\hat{\theta}. \tag{4.23}$$

Minimalizując (4.5), wektor parametrów $\hat{\theta}$ można obliczyć metodą najmniejszych kwadratów (LS) lub rekurencyjną metodą najmniejszych kwadratów (RLS). Należy zauważyć, że liczba parametrów w (4.14) wynosi $na + nb + r(na + 1)$, podczas gdy liczba parametrów $\hat{A}(q^{-1})$, $\hat{B}(q^{-1})$ i $\hat{f}(\,)$ wynosi $na + nb + r + 1$. W związku z tym, aby uzyskać unikalne rozwiązanie, należy zastosować metody podobne do tych zaproponowanych w [34] do identyfikacji
Można zastosować modele Hammersteina.

4.1.3 Charakterystyka nieliniowa bez członu liniowego

Rozważmy system Wienera, który spełnia następujące założenia:

– Termin liniowy $\gamma_1 = 0$.
– Termin drugiego rzędu $\gamma_2 \neq 0$.

W takim przypadku można zdefiniować następujący zmodyfikowany model szeregowo-równoległy (rys. 4.4):

$$\hat{y}^2(n) = \left(1-\hat{A}(q^{-1})\right) y^2(n) + \frac{1}{\hat{\gamma}_2}\left(\hat{B}(q^{-1})u(n) - \hat{A}(q^{-1})\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right). \tag{4.24}$$

Teraz błąd identyfikacji można zdefiniować jako

$$\begin{aligned} e(n) &= y^2(n) - \hat{y}^2(n) \\ &= \hat{A}(q^{-1})y^2(n) - \frac{1}{\hat{\gamma}_2}\left(\hat{B}(q^{-1})u(n) - \hat{A}(q^{-1})\Delta\hat{f}^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Stąd (4.24) można zapisać w następującej postaci liniowej w parametrach:

$$\hat{y}^2(n) = x^T(n)\hat{\theta}, \tag{4.26}$$

z wektorem parametrów $\hat{\theta}$,

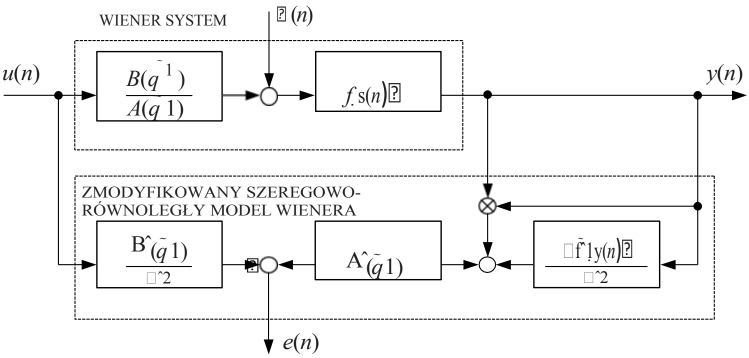
$$\hat{\theta} = \left[\hat{a}_1 \ldots \hat{a}_{na}\ \hat{\beta}_1 \ldots \hat{\beta}_{nb}\ \hat{\alpha}_{00}\ \hat{\alpha}_{30} \ldots \hat{\alpha}_{rna}\right]^T, \tag{4.27}$$

and the regression vector x(n),

$$\begin{aligned} x(n) = \big[-y^2(n-1) \ldots -y^2(n-na)\ u(n-1) \ldots u(n-nb) \\ 1\ -y^3(n) \ldots -y^r(n-na)\big]^T, \end{aligned} \tag{4.28}$$

gdzie

$$\beta_k = \frac{\hat{b}_k}{\hat{\gamma}_2},\ k = 1, \ldots, nb, \tag{4.29}$$



Rys. 4.4. Zmodyfikowany model szeregowo-równoległy. Definicja błędu identyfikacji dla systemów bez członu liniowego

$$\hat{\alpha}_{jk} = \begin{cases} \left(1+\sum_{m=1}^{na}\hat{a}_m\right)\dfrac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_2}, & k=0,\ j=0, \\ \dfrac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_2}, & k=0,\ j=3,4,\ldots, \\ \hat{a}_k\dfrac{\hat{\gamma}_j}{\hat{\gamma}_2}, & k=1,\ldots,na,\ j=3,4,\ldots, \end{cases} \tag{4.30}$$

Podobnie jak w poprzednim przypadku, wektor parametrów $\hat{\theta}$ można obliczyć za pomocą metody najmniejszych kwadratów (LS) lub rekurencyjnej metody najmniejszych kwadratów (RLS), minimalizując następujące kryterium:

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(y(n) - \hat{y}(n)\right)^2 \tag{4.31}$$

4.1.4 Asymptotyczny błąd systematyczny estymatora LS

Rozważmy wielomianowy system Wienera (4.1) - (4.4), który zawiera człon liniowy, tj. $\gamma_1 = 0$, oraz zmodyfikowany szeregowo-równoległy model Wienera (4.23). Pokażemy teraz, że oszacowania parametrów systemu Wienera uzyskane metodą LS są niespójne, tj. asymptotycznie nieobiektywne, nawet jeśli addytywne zaburzenie $\varepsilon(n)$ jest równe 0.

$$\varepsilon(n) = \frac{\epsilon(n)}{A(q^{-1})}, \tag{4.32}$$

gdzie $\epsilon(n)$ jest dyskretnym białym szumem.

Twierdzenie 4.1. Niech $\hat{\theta}$ oznacza wektor oszacowań parametrów, zdefiniowany przez (4.19), a ϑ - odpowiadający mu wektor prawdziwych parametrów systemu Wienera, zdefiniowany przez (4.1) - (4.4).

Wtedy oszacowanie LS ϑ jest asymptotycznie stronnicze, tj. $\hat{\theta}$ nie zbiega (z prawdopodobieństwem 1) do prawdziwego wektora parametrów ϑ.

Dowód: Wyjście $y(n)$ systemu Wienera, zdefiniowanego przez (4.1) i (4.32), wynosi

$$y(n) = \left[1 - A(q^{-1})\right] y(n) + \frac{1}{\gamma_1}\left[B(q^{-1})u(n) - A(q^{-1})\Delta f^{-1}\left(\hat{y}(n)\right)\right] + \epsilon(n). \quad (4.33)$$

Wprowadzenie prawdziwego wektora parametrów ϑ,

$$\vartheta = \left[a_1 \ \ldots \ a_{na} \ b_1 \ \ldots \ b_{nb} \ \alpha_{00} \ \alpha_{20} \ \ldots \ \alpha_{rna}\right]^T, \quad (4.34)$$

gdzie

$$b_k = \frac{b_k}{\gamma_1}, \ k = 1, \ldots, nb, \quad (4.35)$$

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} \left(1 + \sum_{m=1}^{na} a_m\right) \frac{\gamma_j}{\gamma_1}, & k = 0, \ j = 0, \\ \frac{\gamma_j}{\gamma_1}, & k = 0, \ j = 2, 3, \ldots, r, \\ a_k \frac{\gamma_j}{\gamma_1}, & k = 1, \ldots, na, \ j = 2, 3, \ldots, r, \end{cases} \quad (4.36)$$

Wyjście systemu można wyrazić jako

$$y(n) = \mathrm{x}^T(n)\vartheta + \frac{1}{\gamma_1}\epsilon(n). \quad (4.37)$$

Rozwiązanie problemu estymacji LS jest określone przez

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)\mathrm{x}^T(n)\right]^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)y(n)\right). \quad (4.38)$$

Z (4.37) i (4.38) wynika, że błąd estymacji parametru $\hat{\vartheta} - \vartheta$ wynosi

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} - \vartheta &= \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)\mathrm{x}^T(n)\right]^{-1} \left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)y(n) - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)\mathrm{x}^T(n)\vartheta\right] \\ &= \frac{1}{\gamma_1}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)\mathrm{x}^T(n)\right]^{-1} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}(n)\epsilon(n). \end{aligned} \quad (4.39)$$

W związku z tym, jeśli $N \to \infty$,

$$\hat{\vartheta} - \vartheta \to \frac{1}{\gamma_1}\left[\mathrm{E}\,\mathrm{x}(n)\mathrm{x}^T(n)\right]^{-1} \left[\mathrm{E}\,\mathrm{x}(n)\epsilon(n)\right] \neq 0, \quad (4.40)$$

ponieważ $\mathrm{E}\,y^2(n)\epsilon(n) \neq 0, \ldots, \mathrm{E}\,y^r(n)\epsilon(n) \neq 0$, a zatem $\mathrm{E}\,\mathrm{x}(n)\epsilon(n) \neq 0$.

Uwaga 4.1. W podobny sposób można również wykazać, że wektor parametrów $\hat{\theta}$ zmodyfikowanego szeregowo-równoległego modelu Wienera (4.24), obliczony metodą LS, jest asymptotycznie nieobiektywny.

Uwaga 4.2. Można również udowodnić, że asymptotycznie nieobiektywne oszacowania parametrów LS są uzyskiwane przy użyciu innych modeli liniowo-parametrowych, które zawierają odwrotny model wielomianowy elementu nieliniowego. Przykładami takich modeli są model próbkowania częstotliwości [95, 96], odwrotny model Wienera oraz model oparty na filtrach Laguerre'a [116].

4.1.5 Metoda zmiennych instrumentalnych

Aby uzyskać spójne oszacowania parametrów, wektor regresji $x(n)$ powinien być nieskorelowany z zakłóceniami systemu. Nie jest tak w przypadku, gdy używamy zmodyfikowanego modelu szeregowo-równoległego, ponieważ zasilane wyjścia systemu $y^2(n),\ldots, y^r(n)$ zależą od $\epsilon(n)$. Metoda zmiennych instrumentalnych jest dobrze znanym lekarstwem na taką sytuację. Stosując metodę zmiennych instrumentalnych, estymację parametrów można przeprowadzić zgodnie z następującym schematem:

1. Oszacowanie parametrów systemu za pomocą metody LS lub RLS.
2. Przeprowadź symulację modelu w celu określenia zmiennych instrumentalnych $z(n)$.
3. Oszacować parametry systemu za pomocą metody IV lub RIV ze zmiennymi instrumentalnymi $z(n)$.

Wybór zmiennych instrumentalnych jest istotnym problemem projektowym w każdym podejściu opartym na zmiennych mentalnych, więcej szczegółów można znaleźć w [149]. Oczywiście najlepszym wyborem byłyby niezakłócone zasilane wyjścia systemu, ale nie są one dostępne do pomiaru. Zamiast tego możemy wykorzystać zasilane wyjścia modelu lub zasilane wyjścia liniowego modelu dynamicznego, obliczone metodą LS, i zdefiniować zmienne instrumentalne jako

$$z(n) = \big[-\hat{y}(n-1) \ldots -\hat{y}(n-na)\; u(n-1) \ldots u(n-nb) \\ 1\; -\hat{y}^2(n) \ldots -\hat{y}^r(n-na)\big]^T \tag{4.41}$$

in the case of Wiener systems with the linear term, or

$$z(n) = \big[-\hat{y}^2(n-1) \ldots -\hat{y}^2(n-na)\; u(n-1) \ldots u(n-nb) \\ 1\; -\hat{y}^3(n) \ldots -\hat{y}^r(n-na)\big]^T \tag{4.42}$$

w przypadku systemów Wienera bez członu liniowego. Zmienne instrumentalne $z(n)$ są nieskorelowane z zakłóceniami systemu:

$$E[z(n)\varepsilon(n)] = 0. \tag{4.43}$$

4.1.6 Przykład symulacji. Charakterystyka nieliniowa z członem liniowym

Liniowy system dynamiczny określony przez ciągły wielomianowy tranzyt impulsów w czasie.
funkcja fer

$$G(s) = \frac{1}{6s^2 + 5s + 1} \qquad (4.44)$$

został przekonwertowany na czas dyskretny, przy założeniu zerowego rzędu wstrzymania na wejściu i interwału próbkowania 1s, co prowadzi do następującego równania różniczkowego:

$$s(n) = 1{,}3231s(n-1) - 0{,}4346s(n-2) + 0{,}0635u(n-1) + 0{,}0481u(n-2). \qquad (4.45)$$

Po liniowym układzie dynamicznym zastosowano element nieliniowy opisany funkcją

$$f\,s(n)\,! = 4\ ^{\%3}\ 0.75s(n) - 1\,!. \qquad (4.46)$$

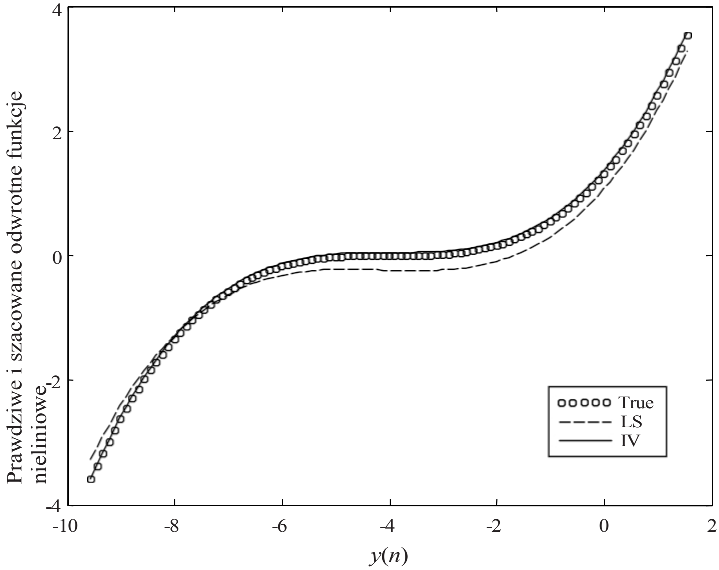
Dlatego odwrotna funkcja nieliniowa $f^{-1}\,y(n)\,!$ jest wielomianem:

$$f^{-1}\,y(n)\,! = \frac{4}{3} + y(n) + 0.25y^2(n) + \frac{1}{48}y^3(n). \qquad (4.47)$$

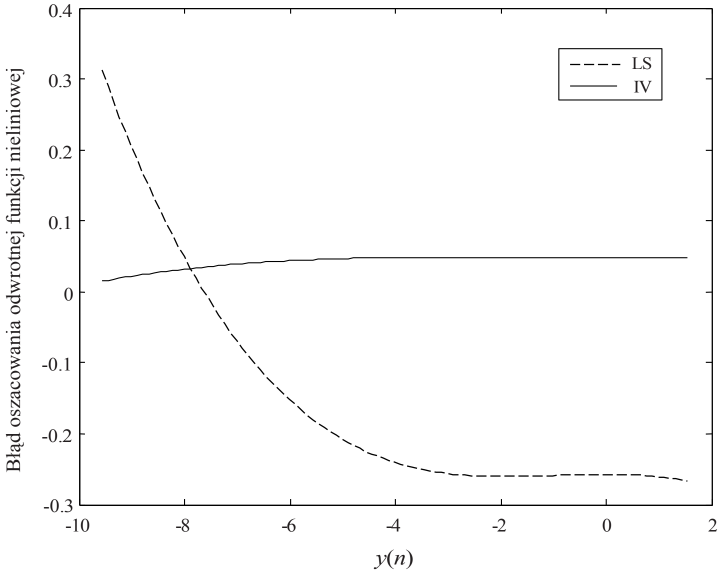
Sekwencja wejściowa $\{u(n)\}$ składała się z 40000 liczb pseudolosowych rozłożonych równomiernie w przedziale (5, 5). Estymację parametrów przeprowadzono zarówno metodą LS, jak i metodą IV, przy założeniu, że r = 3 i $\hat{\gamma}_1 = 1$. Dodatkowe zakłócenia systemu były określone przez $\varepsilon(n) = [1/A(q^{-1})]\,\epsilon(n)$ z $\{\epsilon(n)\}$ - normalnie rozłożoną pseudolosową nierównością N (0, 0.1). Odpowiada to przy stosunku sygnału do szumu $SNR =$ var$(y(n) - \varepsilon(n))/var(\varepsilon(n)) = 3{,}14$.
Wyniki identyfikacji, podane w tabelach 4.1 i 4.2 i zilustrowane na rysunkach 4.5 i 4.6 pokazują znaczną poprawę oszacowań parametrów IV w porównaniu z LS.

Tabela 4.1. Oszacowania parametrów, $SNR = 3{,}14$

Parametr	Prawda $\sigma_\varepsilon = 0$	LS $\sigma_\varepsilon = 0.1$	IV $\sigma_\varepsilon = 0.1$
a1	-1.3231	-1.2803	-1.3292
a2	0.4346	0.4158	0.4370
b1	0.0635	0.0558	0.0636
b2	0.0481	0.0423	0.0482
γ0	1.3333	1.0764	1.3813
γ1	1.0000	1.0000	1.0000
γ2	0.2500	0.2473	0.2503
γ3	0.0208	0.0199	0.0209



Rys. 4.5. System Wienera z członem liniowym. Prawdziwe $f^{-1}\, y(n)$ i oszacowane $\hat{f}^{-1}\, y(n)$ odwrotne funkcje nieliniowe



Rys. 4.6. System Wienera z członem liniowym. Błąd estymacji $\hat{f}^{-1}\, y(n) - f^{-1}\, y(n)$.

Tabela 4.2. Porównanie dokładności estymacji

Wskaźnik wydajności	LS ($\sigma_\varepsilon = 0$)	LS	IV
$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2}\left[(\hat{a}_j - a_j)^2 + (\hat{b}_j - b_j)^2\right]$	$4{,}62 \times 10^{-23}$	$5{,}70 \times 10^{-4}$	$1{,}08 \times 10^{-5}$
$\frac{1}{3}\left[(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0)^2 + \sum_{j=1}^{3}(\hat{\gamma}_j - \gamma_j)^2\right]$	$1{,}13 \times 10^{-21}$	$2{,}20 \times 10^{-2}$	$7{,}66 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{50}\sum_{i=1}^{50}\left(\hat{f}^{-1}(y(n)) - f^{-1}(y(n))\right)^2$	$3{,}78 \times 10^{-21}$	$4{,}74 \times 10^{-2}$	$1{,}91 \times 10^{-3}$

4.1.7 Przykład symulacji. Charakterystyka nieliniowa bez członu liniowego

Liniowy układ dynamiczny (4.45) i element nieliniowy zdefiniowany przez funkcję

$$f(s(n)) = \sqrt{s(n) + 0.5}, \quad s(n) \geq 0 \tag{4.48}$$

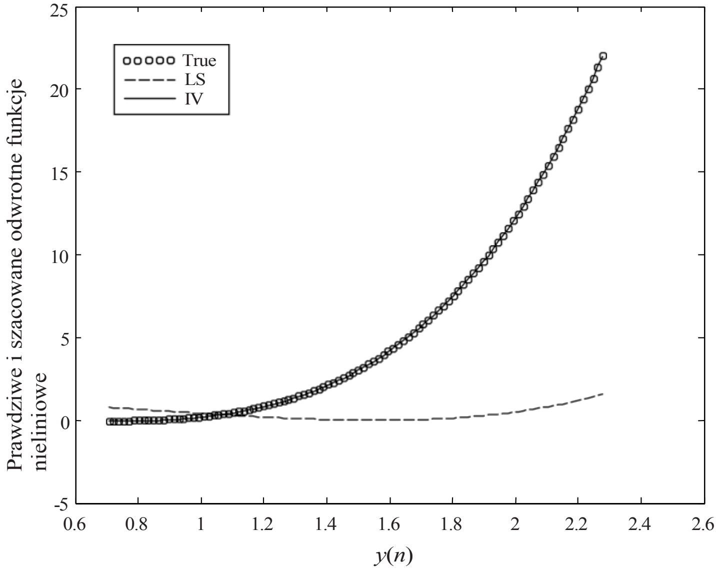
zostały użyte w przykładzie układu Wienera bez członu liniowego i niezerowego członu drugiego rzędu. Odwrotna funkcja nieliniowa jest wielomianem:

$$f^{-1}(y(n)) = 0.25 - y^2(n) + y^4(n), \quad y(n) \geq \sqrt{0.5}. \tag{4.49}$$

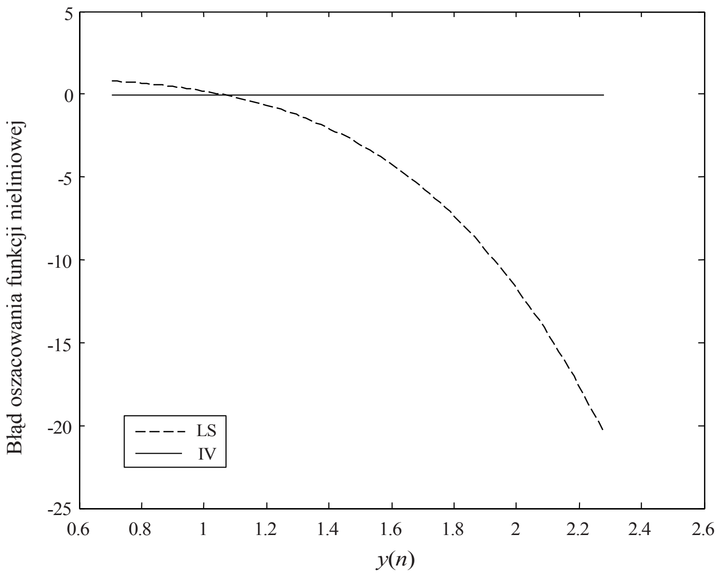
Sekwencja wejściowa $u(n)$ zawierała 50000 liczb pseudolosowych równomiernie rozłożonych w (1.5, 6). Dodatkowymi zakłóceniami systemu były $\varepsilon(n) = [1/A(q^{-1})]\,e(n)$ z $e(n)$ - sekwencją pseudolosową o rozkładzie normalnym $N(0, 0.025)$. Podobnie jak w poprzednim przykładzie, estymację parametrów przeprowadzono metodą LS oraz metodą IV przy założeniach: $r = 4$, $\hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_3 = 0$, $\hat{\gamma}_2 = 1$. Wyniki identyfikacji, podane w tabelach 4.3 i 4.4 oraz zilustrowane w poniższej tabeli na rysunkach 4.7 i 4.8, potwierdzają praktyczną wykonalność proponowanego podejścia.

Tabela 4.3. Oszacowania parametrów, $SNR = 19{,}37$

Parametr	Prawda	LS	IV
	$\sigma_\varepsilon = 0$	$\sigma_\varepsilon = 0.025$	$\sigma_\varepsilon = 0.025$
a_1	-1.3231	-1.4448	-1.2898
a_2	0.4346	0.6233	0.4107
b_1	0.0635	0.0014	0.0635
b_2	0.0481	0.0011	0.0481
γ_0	0.2500	1.2119	0.2187
γ_2	1.0000	1.0000	1.0000
γ_4	1.0000	0.2212	1.0005



Rys. 4.7. System Wienera bez członu liniowego. Prawdziwe $f^{-1}(y(n))$ i oszacowane $\hat{f}^{-1}(y(n))$ odwrotne funkcje nieliniowe



Rys. 4.8. System Wienera bez członu liniowego. Błąd estymacji $\hat{f}^{-1}(y(n)) - f^{-1}(y(n))$

Tabela 4.4. Porównanie dokładności estymacji

Wskaźnik wydajności	LS ($\sigma_\varepsilon = 0$)	LS	IV
$\frac{1}{4}\sum_{j=1} (\hat{a}_j - a_j)^2 + (\hat{b}_j - b_j)^2$	$3{,}85 \times 10^{-16}$	$1{,}41 \times 10^{-2}$	$4{,}20 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{2}(\hat{\gamma}_0 - \gamma_0)^2 + (\hat{\gamma}_4 - \gamma_4)^2$	$1{,}24 \times 10^{-13}$	$7{,}66 \times 10^{-1}$	$4{,}92 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{50}\sum_{i=1} \left(\hat{f}^{-1}\big(y(n)\big) - f^{-1}\big(y(n)\big)\right)^2$	$5{,}80 \times 10^{-12}$	$6{,}16 \times 10^{1}$	$7{,}58 \times 10^{-4}$

Chociaż omówiono i zilustrowano tutaj tylko jedną technikę generowania zmiennych instrumentalnych, można również rozważyć inne znane techniki. W przeciwieństwie do identyfikacji odwrotnego modelu Wienera, atrakcyjną cechą tego podejścia jest to, że podukład liniowy nie musi być w fazie minimalnej.

4.2 Identyfikacja systemów Wienera za pomocą metody błędu predykcji

W podejściu regresji liniowej, opisanym w sekcji 4.1, klasa identyfikowanych systemów jest ograniczona przez założenie odwracalności charakterystyki nieliniowej. Założenie to nie jest konieczne w rekurencyjnej metodzie błędu predykcji Wigrena [165], w której charakterystyka nieliniowa jest aproksymowana funkcją liniową.
W tej sekcji przedstawiono algorytm identyfikacji dla systemów Wienera, który wykorzystuje podejście rekurencyjnego błędu predykcji (RPE) z wielomianowym modelem elementu nieliniowego i modelem funkcji przenoszenia impulsów liniowego układu dynamicznego - rys. 4.9.

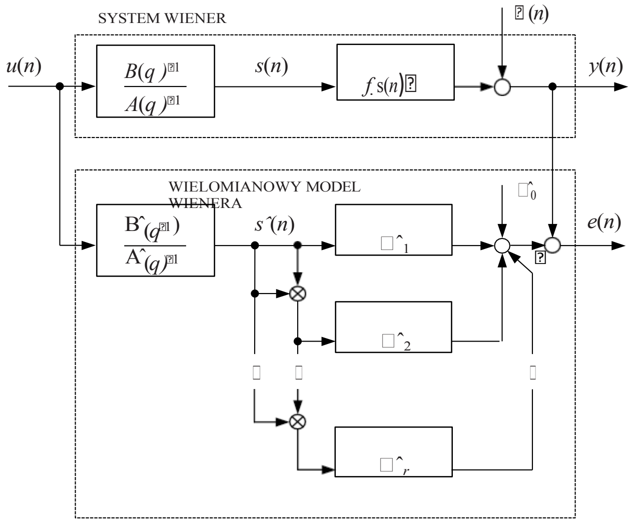
4.2.1 Wielomianowy model Wienera

Rozważmy dyskretny system Wienera (rys. 4.9) składający się z liniowego systemu dynamicznego SISO w kaskadzie z elementem nieliniowym SISO. Wyjście $y(n)$ systemu Wienera w czasie n wynosi

$$y(n) = f\big(s(n)\big) + \varepsilon(n), \tag{4.50}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest charakterystyką stanu ustalonego, $\varepsilon(n)$ jest addytywnym zaburzeniem wyjściowym, a $s(n)$ jest wyjściem liniowego układu dynamicznego:

$$s(n) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(n) \tag{4.51}$$



Rys. 4.9. System Wienera i jego model wielomianowy

z

$$A(q^{-1}) = 1 + a\, q_1^{-1} + \cdots + a\, q_{na}^{-na}, \tag{4.52}$$

$$B(q^{-1}) = b\, q_1^{-1} + \cdots + b\, q_{nb}^{-nb}, \tag{4.53}$$

gdzie $a_1, \ldots, a_{na}$, $b_1, \ldots, b_{nb}$ są parametrami liniowego układu dynamicznego. Załóżmy, że liniowy układ dynamiczny jest swobodny i asymptotycznie stabilny, a $f(\,)$ jest funkcją ciągłą. Załóżmy również, że wielomiany $A(q^{-1})$ i $A(q^{-1})$ są całkowite, a $u(n)$ ma skończone momenty i jest niezależne od $\varepsilon(k)$ dla wszystkich n i k. Charakterystykę stanu ustalonego układu można przybliżyć wielomianem $\hat{f}(\cdot)$ rzędu r:

$$\hat{f}\left(\hat{s}(n)\right) = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 \hat{s}(n) + \hat{\mu}_2 \hat{s}^2(n) + \cdots + \hat{\mu}_r \hat{s}^r(n), \tag{4.54}$$

gdzie $\hat{s}(n)$ jest wyjściem liniowego modelu układu dynamicznego

$$\hat{s}(n) = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u(n) \tag{4.55}$$

z

$$\hat{A}(q^{-1}) = 1 + \hat{a}\, q_1^{-1} + \cdots + \hat{a}\, q_{na}^{-na}, \tag{4.56}$$

$$\hat{B}(q^{-1}) = \hat{b}\, q_1^{-1} + \cdots + \hat{b}\, q_{nb}^{-nb}, \tag{4.57}$$

gdzie $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{na}$, $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{nb}$ są parametrami liniowego modelu dynamicznego. Zatem wektor parametrów $\hat{\theta}$ modelu zdefiniowanego przez (4.54) i (4.55) wynosi

$$\hat{\theta} = \left[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{na}\ \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{nb}\ \hat{\mu}_0\ \hat{\mu}_1 \dots \hat{\mu}_r\right]^T. \tag{4.58}$$

4.2.2 Rekursywna metoda błędu predykcji

Rozważany tutaj problem identyfikacji można sformułować następująco: Biorąc pod uwagę zbiór danych wejściowych i wyjściowych $Z^N = \{(u(n), y(n))\}$, $k = 1, \dots, N$ oszacować parametry systemu Wienera tak, aby predykcje $\hat{y}(n|n-1)$ wyjścia systemu były bliskie wyjściu systemu $y(n)$ w sensie następującego kryterium błędu średniokwadratowego:

$$J_N(\hat{\theta}, Z^N) = \frac{1}{2N}\sum_{k=1}^{N}\left(y(n) - \hat{y}(n|n-1)\right)^2. \tag{4.59}$$

Biorąc pod uwagę gradient danych wyjściowych modelu względem wektora parametrów

$$\psi(n) = \left[\frac{d\hat{y}(n|n-1)}{d\hat{\theta}}\right]^T, \tag{4.60}$$

Algorytm RPE może być wyrażony przez (2.97) - (2.99). W praktyce przydatna jest modyfikacja kryterium (4.59) za pomocą wykładniczego współczynnika zapominania λ. Współczynnik zapominania $\lambda \in [0, 1]$ i wartości bliskie 1 są powszechnie wybierane. Aby uchronić algorytm przed tak zwanym zjawiskiem rozdmuchiwania kowariancji, przydatne mogą być inne modyfikacje algorytmu, które nakładają górną granicę na wartości własne macierzy $P(n)$ i są znane jako algorytmy stałego śladu oraz wykładniczego zapominania i resetowania [127].

4.2.3 Obliczanie gradientu

Gradient $\psi(n)$ wyjścia modelu względem parametrów modelu jest zdefiniowany jako

$$\psi(n) = \left[\frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial a_1} \dots \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial a_{na}}\ \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial b_1} \dots \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial b_{nb}}\ \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{\mu}_0}\ \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{\mu}_1} \dots \frac{\partial\hat{y}(n)}{\partial\hat{\mu}_r}\right]^T. \tag{4.61}$$

Chociaż model określony przez (4.54) i (4.55) jest modelem rekurencyjnym ze względu na równanie różniczkowe (4.55), obliczenie gradientu nie wymaga znacznie więcej obliczeń niż w przypadku modelu czysto statycznego. Jedyna różnica polega na obliczeniu pochodnych cząstkowych wyjścia modelu względem parametrów liniowego modelu dynamicznego. Można to zrobić za pomocą metody czułości, rozwiązując symulacyjnie następujący zestaw liniowych równań różniczkowych [73, 74]:

$$\frac{\partial \hat{s}(n)}{\partial \hat{a}_k} = -\hat{s}(n-k) - \sum_{m=1}^{na} \hat{a}_m \frac{\partial \hat{s}(n-m)}{\partial \hat{a}_k}, \quad k = 1, \ldots, na, \tag{4.62}$$

$$\frac{\partial \hat{s}(n)}{\partial \hat{b}_k} = u(n-k) - \sum_{m=1}^{na} \hat{a}_m \frac{\partial \hat{s}(n-m)}{\partial \hat{b}_k}, \quad k = 1, \ldots, nb. \tag{4.63}$$

Stąd, częściowe pochodne wyjścia modelu względem parametrów $\hat{a}_k$ i $\hat{b}_k$ można obliczyć jako

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{a}_k} = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{s}(n)} \frac{\partial \hat{s}(n)}{\partial \hat{a}_k}, \tag{4.64}$$

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{b}_k} = \frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{s}(n)} \frac{\partial \hat{s}(n)}{\partial \hat{b}_k}, \tag{4.65}$$

gdzie

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{s}(n)} = \hat{\mu}_1 + 2\hat{\mu}_2 \hat{s}(n) + \ldots + r\hat{\mu}_r \hat{s}^{r-1}(n). \tag{4.66}$$

Pochodne cząstkowe wyjścia modelu względem parametrów nieliniowego modelu elementu są następujące

$$\frac{\partial \hat{y}(n)}{\partial \hat{\mu}_j} = \hat{s}^j(n), \quad j = 0, 1, \ldots, r. \tag{4.67}$$

Należy zauważyć, że wyprowadzenie pochodnych cząstkowych (4.62) i (4.63) odbywa się przy założeniu, że parametry liniowego modelu dynamicznego są niezmienne w czasie. Ponieważ założenie to nie jest prawdziwe ze względu na sekwencyjny charakter algorytmu RPE, otrzymywany jest przybliżony gradient. Dokładniejszą ocenę gradientu można obliczyć za pomocą skróconego algorytmu BPTT.

4.2.4 Przykład symulacji zaworu pneumatycznego

W przykładzie symulacyjnym wykorzystano model zaworu pneumatycznego (2.100) - (2.101). Założono, że wyjście systemu $y(n)$ jest addytywnie zakłócane przez dyskretny biały szum gaussowski $\varepsilon(n)$ o zerowej średniej z odchyleniem standardowym σ_ε = 0,005 i 0,05:

$$y(n) = f\big(s(n)\big) + \varepsilon(n). \tag{4.68}$$

Jako dane wejściowe systemu wykorzystano ciąg 20000 liczb pseudolosowych, równomiernie rozłożonych w zakresie (0, 1). Na podstawie symulowanych danych wejściowych i wyjściowych zidentyfikowano system Wienera przy użyciu algorytmu RPE. Aby porównać dokładność estymacji liniowych parametrów systemu i nieliniowej funkcji $f(\cdot)$, zastosowano indeksy (2.91) i (2.92) z $s(n)$ zdefiniowanym jako sekwencja 100 liniowo równomiernie rozmieszczonych wartości pomiędzy $\min\big(s(n)\big)$ i $\max\big(s(n)\big)$. Wyniki przedstawione w tabelach 4.5 i 4.6 zilustrowano na rysunkach 4.10 - 4.13.

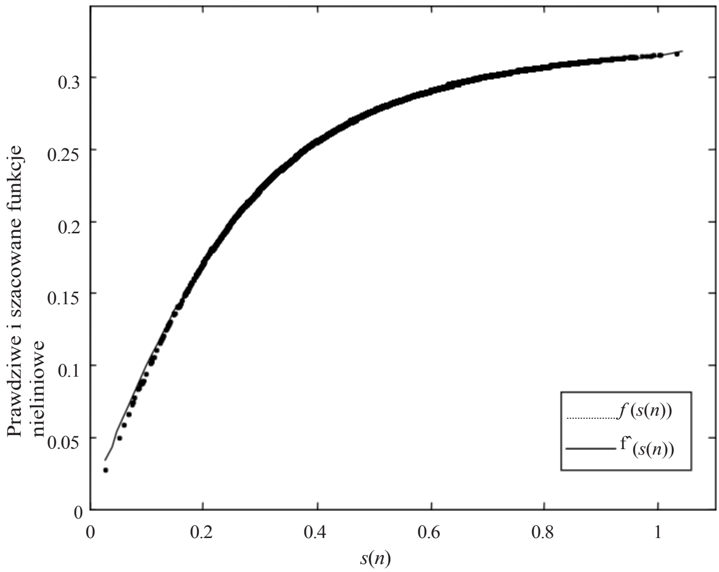
W przykładzie charakterystyka nieliniowa jest nieskończonego rzędu, podczas gdy estymowany jest model skończonego rzędu. Pomimo faktu, że estymowane parametry różnią się od parametrów wielomianu aproksymującego (2.101), charakterystyka nieliniowa jest aproksymowana dość dobrze, co pokazuje praktyczną przydatność tego podejścia.

Tabela 4.5. Oszacowania parametrów

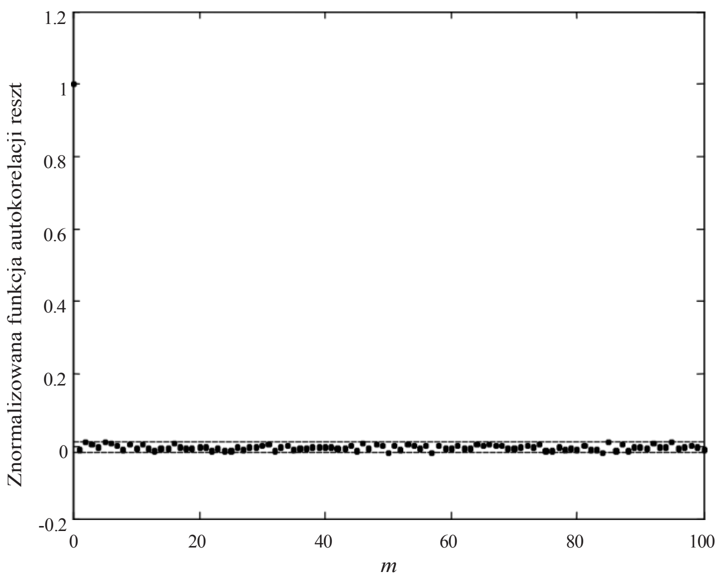
Parametr	Przybliżenie wielomian	Szacowany $\sigma_\varepsilon = 0{,}005$	Szacowany $\sigma_\varepsilon = 0{,}05$
a_1	-1.4138	-1.4167	-1.4159
a_2	0.6065	0.6088	0.6092
b_1	0.1044	0.1059	0.0984
b_2	0.0833	0.0812	0.0899
μ_0	0.0010	0.0054	0.0595
μ_1	0.9530	1.0581	0.6871
μ_2	0.8149	-1.1304	-0.5716
μ_3	-11.651	-0.2255	0.1347
μ_4	34.749	0.8751	-0.0036
μ_5	-57.593	0.2007	-0.0121
μ_6	59.242	-0.3143	-0.0045
μ_7	-37.639	-0.3218	-0.0011
μ_8	13.5602	-0.0583	-0.0002
μ_9	-2.1210	0.2263	-0.0000

Tabela 4.6. Porównanie dokładności estymacji, $s(j)$ - sekwencja pseudolosowa, równomiernie rozłożona w $(\min s(n), \max s(n))$

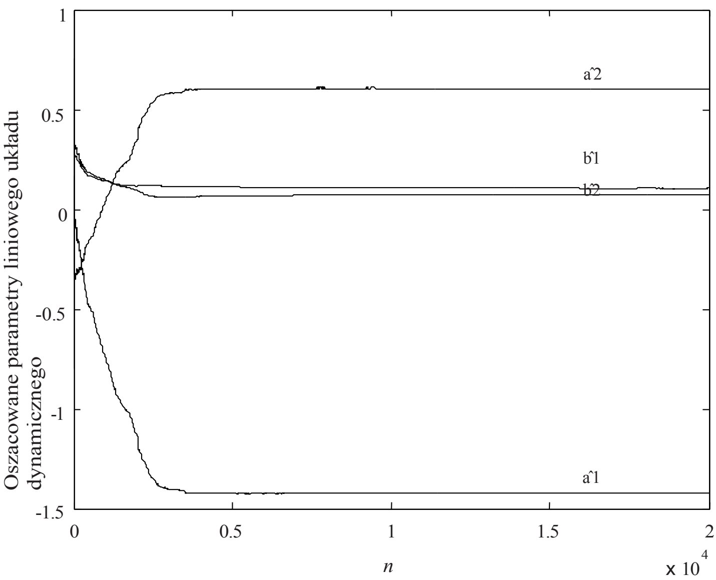
Wskaźnik wydajności	$\sigma_\varepsilon = 0{,}005$	$\sigma_\varepsilon = 0{,}05$
$\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{2}\left[(\hat{a}_j - a_j)^2 + (\hat{b}_j - b_j)^2\right]$	$2{,}95 \times 10^{-6}$	$2{,}44 \times 10^{-4}$
$\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}\left(\hat{f}(s(j)) - f(s(j))\right)^2$	$5{,}38 \times 10^{-5}$	$1{,}87 \times 10^{-3}$



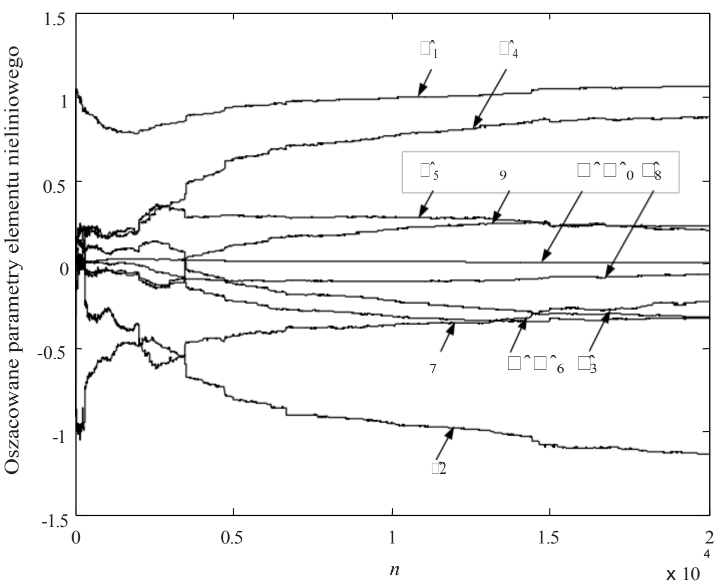
Rys. 4.10. Prawdziwe i szacowane funkcje nieliniowe ($\sigma\varepsilon = 0{,}005$)



Rys. 4.11. Funkcja autokorelacji reszt i 95% przedział ufności ($\sigma\varepsilon = 0{,}005$)



Rys. 4.12. Ewolucja oszacowań parametrów liniowego systemu dynamicznego ($\sigma\varepsilon$ = 0,005)



Rys. 4.13. Ewolucja oszacowań parametrów elementów nieliniowych ($\sigma\varepsilon$ = 0,005)

4.3 Metoda regresji pseudoliniowej

Podejście regresji pseudolinearnej do estymacji parametrów opiera się na założeniu, że nieliniowe komponenty modelu można zaniedbać, a model można traktować jako liniowy w parametrach. Dla wielomianowych systemów Wienera szacujemy parametry funkcji transformaty impulsowej i parametry charakterystyki nieliniowej. Zakłada się, że charakterystyka nieliniowa zawiera człon liniowy. Oczywistą zaletą podejścia regresji pseudolinearnej, w porównaniu z innymi metodami regresji, jest jego niska złożoność obliczeniowa i możliwość zastosowania do identyfikacji systemów Wienera z nieodwracalnymi charakterystykami nieliniowymi. Metodę regresji pseudolinearnej można uznać za uproszczoną metodę błędu predykcji, w której dokładny gradient zastępuje się przybliżonym. Takie uproszczenie zmniejsza złożoność obliczeniową metody, ale może pogorszyć jej szybkość zbieżności.

4.3.1 Pseudolinearny w parametrach wielomianowy model Wienera

Rozważmy układ Wienera (4.50) - (4.53) i jego model wielomianowy (4.54) - (4.57). Aby wyprowadzić metodę regresji pseudolinearnej, należy założyć, że model wielomianowy $\hat{f}$ $\hat{s}(n)$ ma niezerowy człon liniowy, tj. $\hat{\mu}_1 = 0$. Dla wygody możemy założyć, że $\hat{\mu}_1 = 1$. Należy zauważyć, że nie ma utraty ogólności, jeśli założymy, że $\hat{\mu}_1 = 1$, ponieważ wzmocnienie liniowego modelu dynamicznego w stanie ustalonym można pomnożyć przez $1/\hat{\mu}_1$. Wynik modelu wielomianowego można zapisać jako

$$\hat{y}(n) = -\hat{a}_1 \hat{s}(n-1) - \dots - \hat{a}_{na} \hat{s}(n-na) + \hat{b}_1 u(n-1) + \dots + \hat{b}_{nb} u(n-nb) + \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_2 \hat{s}^2(n) + \dots + \hat{\mu}_r \hat{s}^r(n) = \hat{\vartheta}^T \psi, \tag{4.69}$$

gdzie

$$\hat{\theta} = \left[\hat{\theta}_l^T \; \hat{\mu}_0 \; \hat{\mu}_2 \dots \hat{\mu}_r\right]^T, \tag{4.70}$$

$$\hat{\theta}_l = \left[\hat{a}_1 \dots \hat{a}_{na} \; \hat{b}_1 \dots \hat{b}_{nb}\right]^T, \tag{4.71}$$

$$\psi(n) = \left[\phi^T(n) \; 1 \; \hat{s}^2(n) \dots \hat{s}^r(n)\right]^T, \tag{4.72}$$

$$\phi(n) = \left[-\hat{s}(n-1) \dots -\hat{s}(n-na) \; u(n-1) \dots u(n-nb)\right]^T. \tag{4.73}$$

Model (4.69) jest liniową funkcją parametrów $\hat{\mu}_0$, $\hat{\mu}_2, \dots, \hat{\mu}_r$, ale jest nieliniową funkcją $\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_{na}$, $\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{nb}$. Wynika to z faktu, że zarówno $\hat{s}^2(n), \dots, \hat{s}^r(n)$, jak i $\hat{s}(n-1), \dots, \hat{s}(n-na)$ zależą od $\hat{\theta}_l$.

4.3.2 Metoda identyfikacji regresji pseudoliniowej

Minimalizacja względem parametrów modelu ważonej funkcji kosztu

$$J = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \lambda^{N-j} \left(y(n) - \hat{y}(n) \right)^2 \tag{4.74}$$

skutkuje następującym algorytmem identyfikacji:

$$\hat{\Theta}(n) = \hat{\Theta}(n-1) + K(n)\, e(n), \tag{4.75}$$

$$e(n) = y(n) - \psi^T(n)\hat{\Theta}(n-1), \tag{4.76}$$

$$K(n) = P(n)\psi(n) = \frac{P(n-1)\psi(n)}{\lambda + \psi^T(n)P(n-1)\psi(n)}, \tag{4.77}$$

$$P(n) = \frac{1}{\lambda}\left[P(n-1) - K(n)\psi^T(n)P(n-1)\right], \tag{4.78}$$

gdzie λ oznacza wykładniczy współczynnik zapominania.

4.3.3 Przykład symulacji

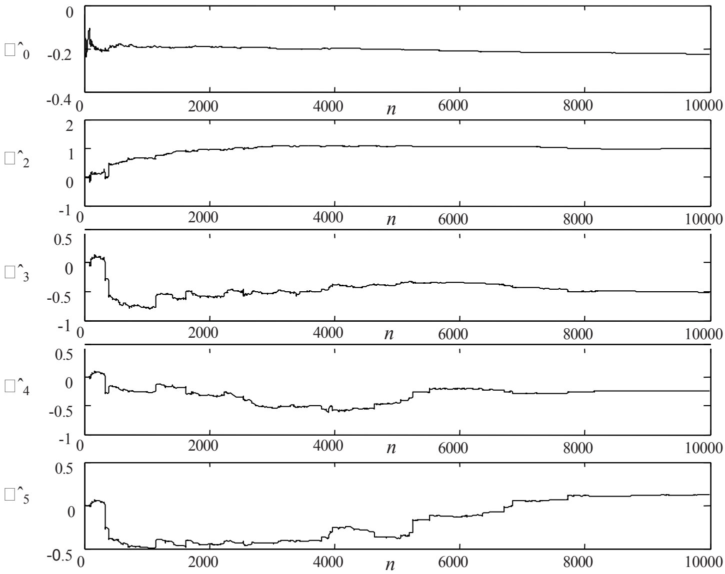
System Wienera opisany przez funkcję przenoszenia impulsu drugiego rzędu

$$\frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{0.125q^{-1} - 0.025q^{-2}}{1 - 1{,}75q^{-1} + 0{,}85q^{-2}} \tag{4.79}$$

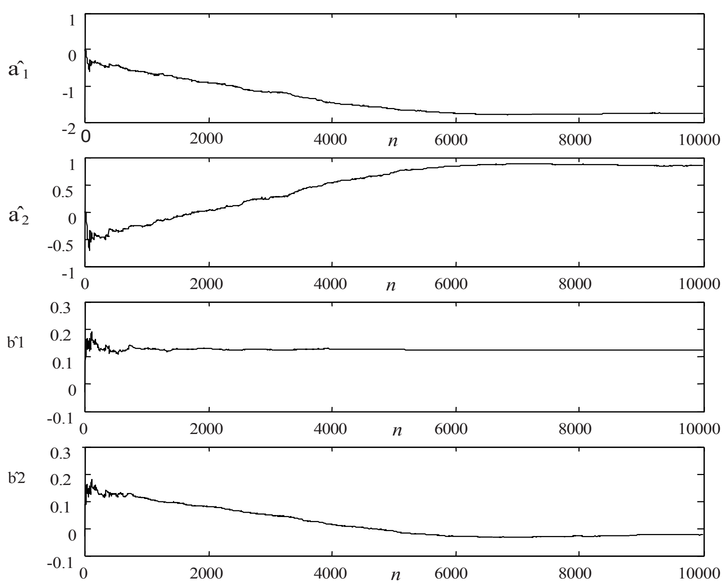
i charakterystykę nieliniową (rys. 4.16)

$$f\left(s(n)\right) = -0.25 + s(n) + s^2(n) - 0.5s^3(n) - 0.2s^4(n) + 0.2s^5(n) \tag{4.80}$$

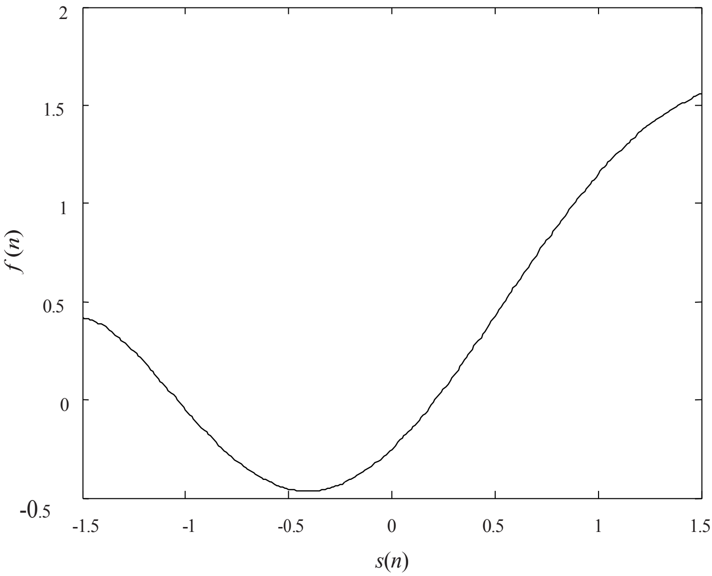
został użyty w przykładzie numerycznym. System został wzbudzony sekwencją 10000 liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(-1, 1)$. System
Wyjście to zostało dodatkowo zakłócone inną sekwencją pseudolosową o rozkładzie jednostajnym w $(-3\alpha, 3\alpha)$.
Wyniki identyfikacji, uzyskane przy $\alpha = 3.34 \times 10^{-5}$, 3.34×10^{-3}, 3.34×10^{-1} i współczynniku zapominania $\lambda = 0.9995$, podsumowano w tabelach 4.7 i 4.8 oraz zilustrowano na rysunkach 4.15 - 4.17.



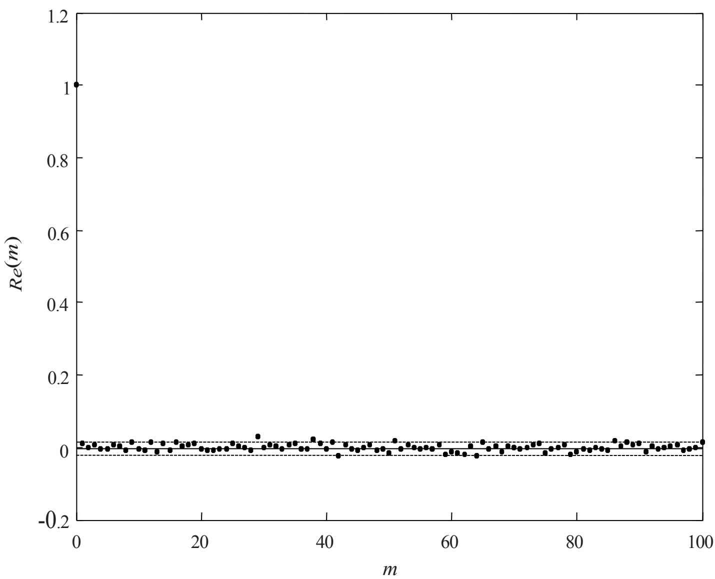
Rys. 4.14. Ewolucja oszacowań parametrów elementów nieliniowych ($\alpha = 3{,}34 \times 10^{-3}$)



Rys. 4.15. Ewolucja oszacowań parametrów liniowego układu dynamicznego ($\alpha = 3{,}34 \times 10^{-3}$)



Rys. 4.16. Charakterystyka elementu nieliniowego



Rys. 4.17. Funkcja autokorelacji reszt i 95% przedział ufności (α = 3,3403 × 10)$^{-3}$

Tabela 4.7. Oszacowania parametrów

Parametr	Wartość rzeczywista	Wartość szacunkowa	Wartość szacunkowa	Wartość szacunkowa
α		$3{,}34 \times 10^{-5}$	$3{,}34 \times 10^{-3}$	$3{,}34 \times 10^{-1}$
a1	-1.7500	-1.7504	-1.7500	-1.7327
a2	0.8500	0.8504	0.8501	0.8374
b1	0.1250	0.1249	0.1242	0.1199
b2	-0.0250	-0.0251	-0.0245	-0.0124
$\mu 0$	-0.2500	-0.2499	-0.2500	-0.2454
$\mu 2$	1.0000	1.0003	1.0053	1.0035
$\mu 3$	-0.5000	-0.4992	-0.4913	-0.5493
$\mu 4$	-0.2000	-0.2007	-0.2040	-0.2834
$\mu 5$	0.1000	0.0991	0.0912	0.1493

Tabela 4.8. Porównanie dokładności estymacji

Indeks	$\alpha = 3{,}34 \times 10^{-5}$	$\alpha = 3{,}34 \times 10^{-3}$	$\alpha = 3{,}34 \times 10^{-1}$
$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} e(n)^2$	$3{,}3656 \times 10^{-6}$	$3{,}3408 \times 10^{-3}$	$3{,}3441 \times 10^{-1}$
$\sum_{j=0} (\hat{\mu}_j - \mu_j)^2$	$2{,}3762 \times 10^{-6}$	$1{,}9759 \times 10^{-4}$	$1{,}2501 \times 10^{-2}$

4.4 Podsumowanie

W tym rozdziale pokazano, że liniowa w parametrach definicja zmodyfikowanego błędu równania umożliwia wykorzystanie podejścia regresji liniowej do estymacji parametrów układów Wienera z odwracalnym elementem nieliniowym. Ponieważ takie podejście prowadzi do niespójnych oszacowań parametrów, zaproponowano kombinowaną metodę najmniejszych kwadratów i zmiennych instrumentalnych, aby przezwyciężyć ten problem. W przeciwieństwie do metod regresji liniowej, metody błędu predykcji umożliwiają identyfikację systemów Wienera zarówno z odwracalnymi, jak i nieodwracalnymi charakterystykami nieliniowymi. Co więcej, nie ma problemu nadmiarowości parametrów, ponieważ liczba estymowanych parametrów jest równa całkowitej liczbie parametrów modelu $na + nb + r + 1$. W porównaniu z metodą błędu predykcji, podejście regresji pseudoliniowej ma niższe wymagania obliczeniowe, ponieważ wykorzystuje przybliżony gradient zamiast rzeczywistego.