

Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych
Politechnika Warszawska

Pracownia problemowa magisterska
(semestr letni 23/24L)

**Zastosowanie modeli statyki typu Takagi-Sugeno z
następnikami hiperbolicznymi w algorytmach
regulacji predykcyjnej**

Autor:
Wojciech Rogalski

Promotor:
dr hab. inż. Piotr Marusak

Spis treści

1. Wstęp	2
2. Identyfikacja	3
2.1. Charakterystyka statyczna	3
2.2. Wymuszenia	4
2.3. Podejście inżynierskie	6
3. Model Hammersteina	9
3.1. Nieliniowy blok statyczny	9
3.2. Następniki liniowe	9
3.3. Następniki hiperboliczne	17
4. Model Wienera	18
4.1. Następniki liniowe	18
4.2. Następniki hiperboliczne	28
5. Podsumowanie	29
Spis rysunków	30
Spis tabel	31

1. Wstęp

Praca zawiera porównanie modeli Hammersteina oraz Wienera w regulacji kaskadowej. Bazą porównania był obiekt opisany równaniami fizycznymi postaci:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} = F_1 + F_D - F_2(h_1) \\ \frac{dV_2}{dt} = F_2(h_1) - F_3(h_2) \\ F_2(h_1) = \alpha_1 \sqrt{h_1}, \quad F_3(h_2) = \alpha_2 \sqrt{h_2}, \quad V_1(h_1) = A_1 h_1, \quad V_2(h_2) = C_2 h_2^2, \quad F_1(t) = F_{1in}(t - \tau) \end{cases} \quad (1.1)$$

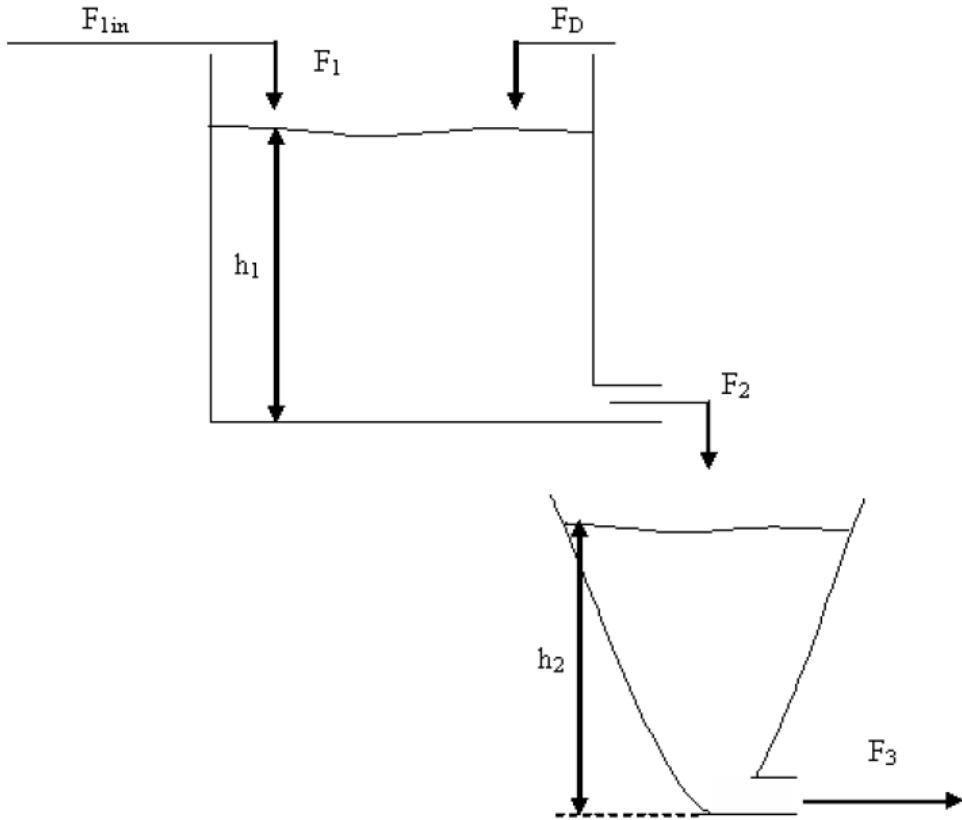
- Stałe:

$$A_1 = 540 \text{ cm}^2, \quad C_2 = 0,85, \quad \alpha_1 = 26, \quad \alpha_2 = 20 \quad (1.2)$$

- Punkt pracy:

$$F_1 = 90 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}, \quad F_D = 30 \frac{\text{cm}^3}{\text{s}}, \quad \tau = 100, \quad h_2 = 36 \text{ cm} \quad (1.3)$$

gdzie użyte oznaczenia odpowiadają tym zastosowanym na rys. 1.1.



Rys. 1.1: Obiekt regulacji automatycznej.

Wartością sterującą był dopływ \$F_{1in}\$ natomiast zakłóceniem - \$F_D\$. Z kolei wyjściem - wartością regulowaną - wysokość cieczy w drugim zbiorniku \$h_2\$. W pierwszej kolejności dokonano identyfikacji modelu, sprawdzono jego nieliniowość i dobrano odpowiedni rzad dynamiki modelu liniowego.

2. Identyfikacja

2.1. Charakterystyka statyczna

Poświęcono jej bardzo dużo uwagi, ze względu na kluczową rolę, jaką odgrywa we wspomnianych modelach Hammersteina i Wienera. Korzystając z modelu fizycznego, z równania 1.1 wyznaczono:

$$\frac{dV_1}{dt} = 0 \quad \wedge \quad \frac{dV_2}{dt} = 0 \quad (2.1)$$

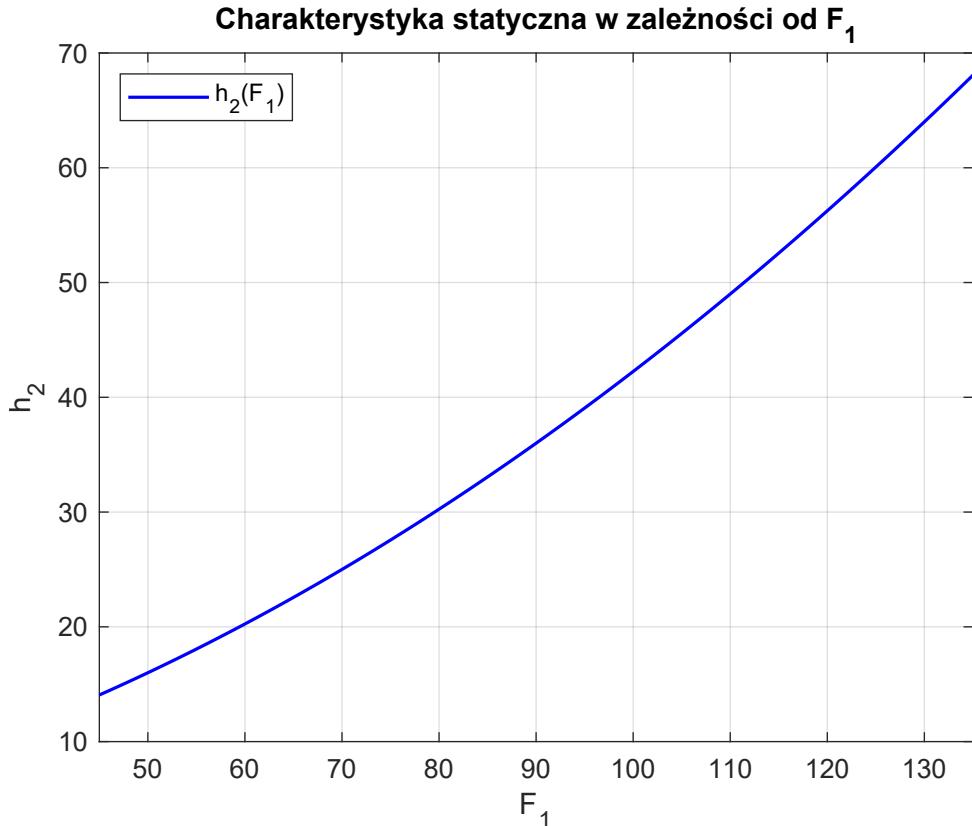
wobec tego:

$$\begin{cases} F_1 + F_D - \alpha_1 \sqrt{h_1} = 0 \\ \alpha_1 \sqrt{h_1} - \alpha_2 \sqrt{h_2} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Po prostych przekształceniach otrzymano wzór opisujący charakterystykę statyczną:

$$h_2 = \left(\frac{F_1 + F_D}{\alpha_2} \right)^2 \quad (2.3)$$

Wykres odpowiadający wyprowadzonemu wzorowi prezentuje się następująco:



Rys. 2.1: Charakterystyka statyczna $h_2(F_1)$.

Załóżono przedział zmienności sygnału sterującego w zakresie $F_1 \in [-45, 45]$.

2.2. Wymuszenia

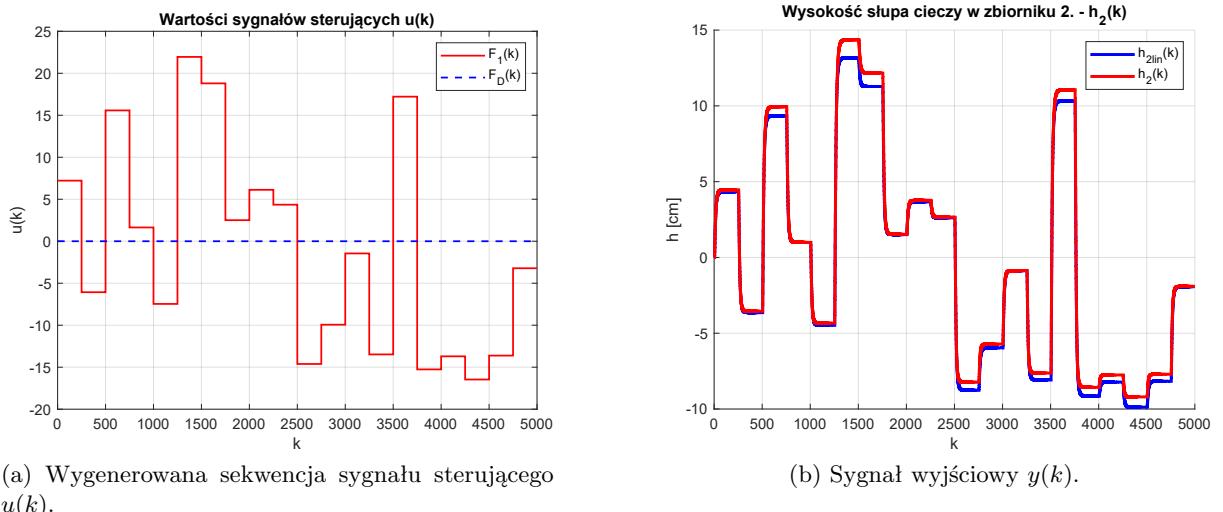
Po dokonaniu pierwszego kroku identyfikacji - wykreślenia charakterystyki statycznej - uzyskano wstępne informacje o obiekcie. Równania opisujące model (1.1) oraz charakterystyka statyczna przedstawiona na rys. 2.1 pokazuje, że obiekt jest nieliniowy, stąd dokonano jego linearyzacji w punkcie pracy, tj.:

$$\begin{cases} \frac{dV_1}{dt} \cong F_1 + F_D - \alpha_1 \sqrt{\frac{V_{10}}{A}} - \frac{\alpha_1}{2\sqrt{A \cdot V_{10}}} \cdot (V_1 - V_{10}) \\ \frac{dV_2}{dt} \cong \alpha_1 \sqrt{\frac{V_{10}}{A}} - \alpha_2 \sqrt[4]{\frac{V_{20}}{C}} + \frac{\alpha_1}{2\sqrt{A \cdot V_{10}}} \cdot (V_1 - V_{10}) - \frac{\alpha_2}{4\sqrt[4]{C \cdot V_{20}^3}} \cdot (V_2 - V_{20}) \end{cases} \quad (2.4)$$

Linearyzacji dokonano przyjmując jako zmienną stanu objętość cieczy w obu zbiornikach.

$$x = [V_1 \quad V_2]^T \quad (2.5)$$

Następnie, podając wygenerowaną sekwencję sygnału sterującego, zbadano rozbieżność modelu liniowego i nieliniowego.



Rys. 2.2: Porównanie modelu liniowego z nieliniowym.

Otrzymano dokładnie to czego się spodziewano. Wymuszenia nie większe niż $\pm 10 \frac{cm^3}{s}$ nie powodują znacznego wytrącenia układu z położenia równowagi, dzięki czemu model liniowy bardzo dobrze aproksymuje zachowanie układu. Niestety sytuacja pogarsza się wraz z oddalaniem się od punktu pracy - model liniowy zaczyna poważnie odbiegać od modelu nieliniowego, opisującego obiekt. W celach porównawczych policzono błędy, testując model w trybie bez rekurencji (ARX) oraz z rekurencją OE, przyjmując jako kryterium jakości błąd średni kwadratowy, tj.:

$$E = \sum_{k=0}^N (y(k) - y^{mod}(k))^2 \quad (2.6)$$

Wcześniej dokonano podziału wygenerowanych danych dynamicznych na dwa zbiory - uczący i weryfikujący - stosując zasadę podziału 0% – 50%/50% – 100%, potrzebne do późniejszego, ewentualnego dostrajania modelu. Otrzymano następujące wyniki:

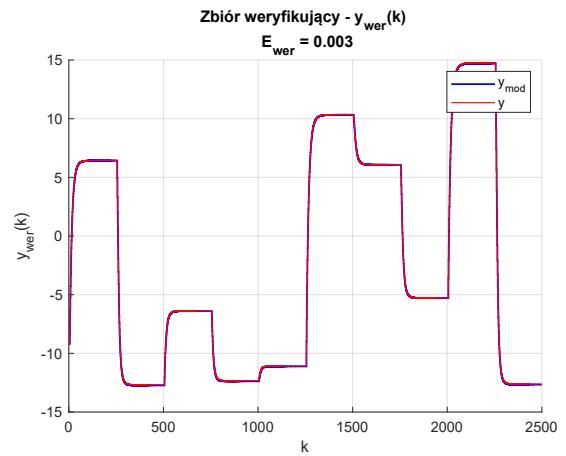
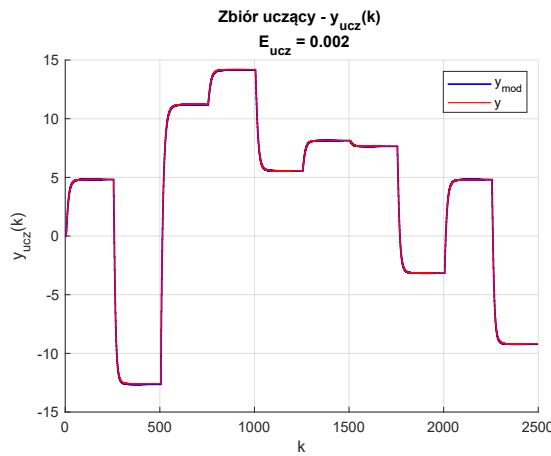
ARX

$$E_{ucz} = 0,002 \quad E_{wer} = 0,003 \quad (2.7)$$

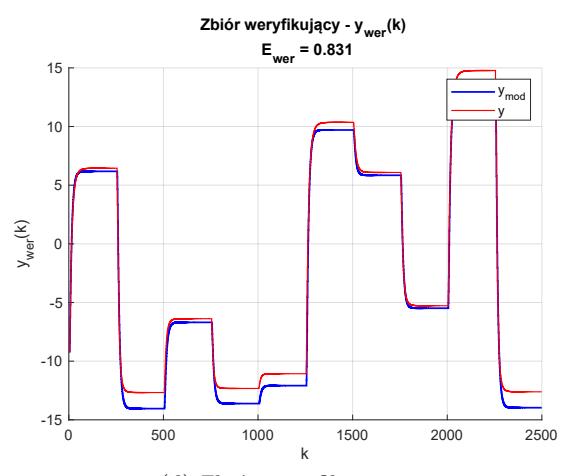
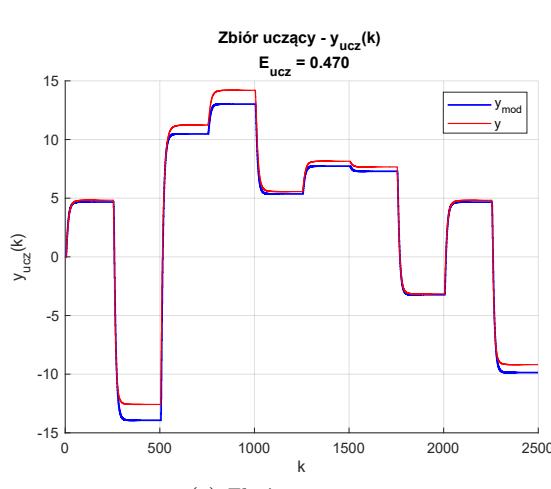
OE

$$E_{ucz} = 0,470 \quad E_{wer} = 0,831 \quad (2.8)$$

Model ARX



Model OE



Rys. 2.3: Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.

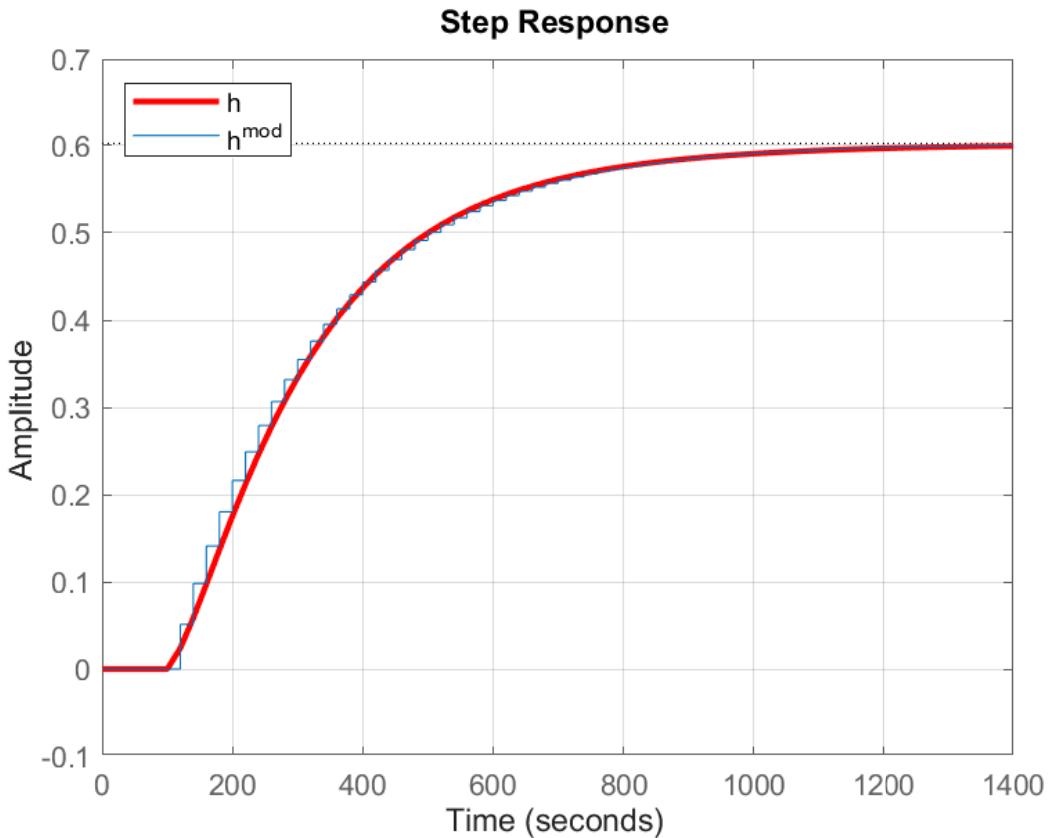
2.3. Podejście inżynierskie

Od tej pory do dalszej analizy postanowiono przyjąć model szarej skrzynki. Informacją o obiekcie był fakt, że układ był inercyjny. Zadano więc wymuszenie w postaci skoku jednostkowego i starano się aproksymować odpowiedź układu dobierając odpowiednie parametry dla modelu transmitancji *First Order Plus Dead Time* (FOPDT), który wyraża się wzorem:

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-sT_0}}{T_1 s + 1} \quad (2.9)$$

Dobrane parametry:

$$K_0 = 0,6025 \quad T_0 = 100 \quad T_1 = 225 \quad (2.10)$$



Rys. 2.4: Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem FOPDT.

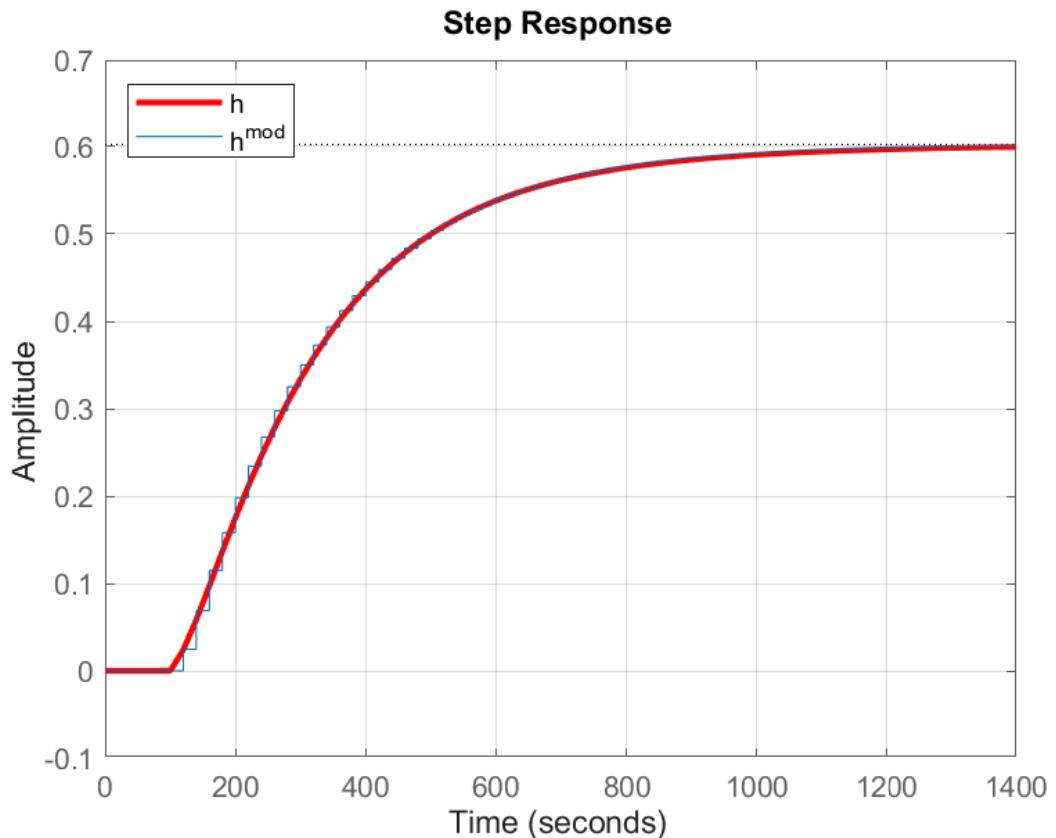
Uzyskany rezultat nie był satysfakcjonujący stąd przyjęto model *Second Order Plus Dead Time* (SOPDT), tj.

$$G(s) = \frac{K_0 e^{-sT_0}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (2.11)$$

Dobrane parametry:

$$K_0 = 0,6025 \quad T_0 = 100 \quad T_1 = 212 \quad T_2 = 15 \quad (2.12)$$

Wynik prezentował się następująco:



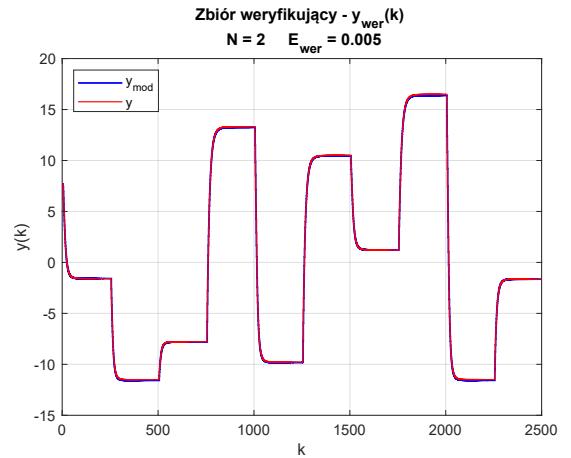
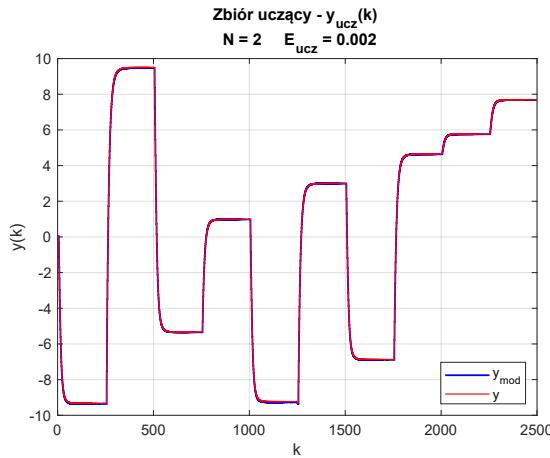
Rys. 2.5: Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem SOPDT.

Ponownie, chcąc sprawdzić skuteczność aproksymacji obiektu regulacji wygenerowanym modelem, którego równanie różnicowe jest postaci:

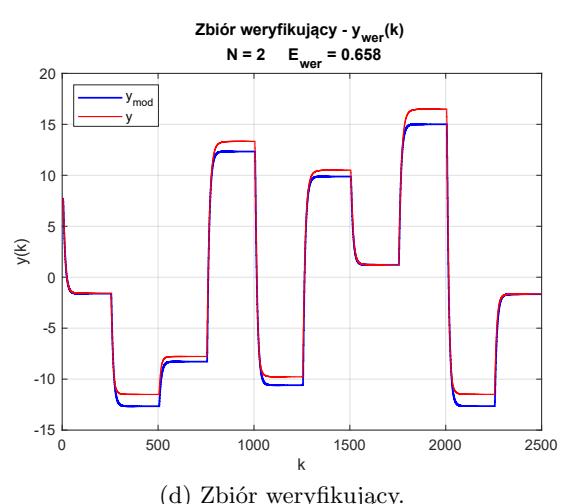
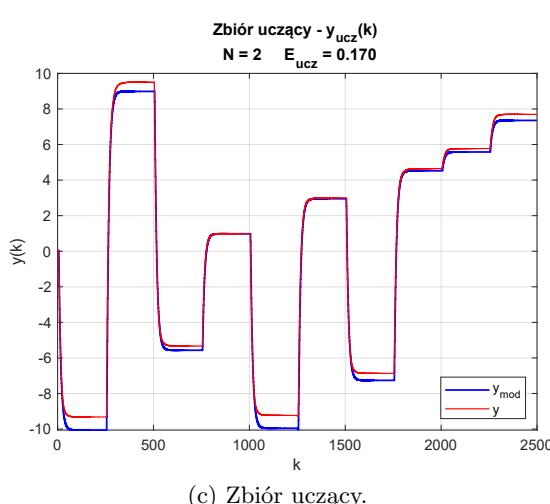
$$\begin{aligned} y(k) = & 1,174y(k-1) - 0,2399y(k-2) + 0,02459u_1(k-6) + 0,01536u_1(k-7) \\ & + 0,02459u_2(k-1) + 0,01536u_2(k-2) \end{aligned} \quad (2.13)$$

wygenerowano sekwencję sygnału sterującego $u_1(k)$ oraz $u_2(k)$, który są przyrostami wartości sterujących odpowiednio F_1 oraz F_D .

Model ARX



Model OE

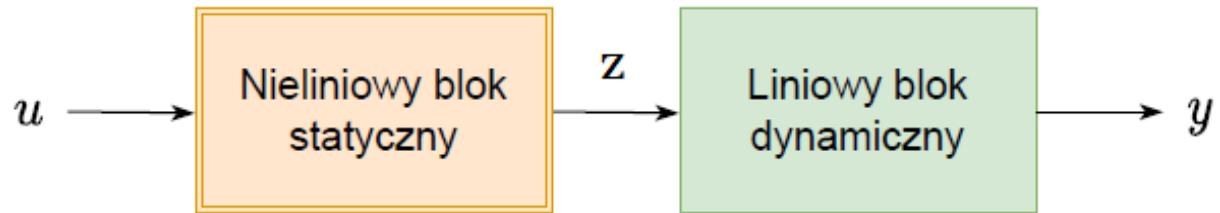


Rys. 2.6: Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.

Błędy uznano za akceptowalne na tym poziomie identyfikacji i przyjęto wyznaczony model do dalszej analizy.

3. Model Hammersteina

W przypadku modelu Hammersteina istota polega na rozdzieleniu dynamiki i statyki w sposób przedstawiony na rys. 3.2.



Rys. 3.1: Reprezentacja graficzna modelu Hammersteina.

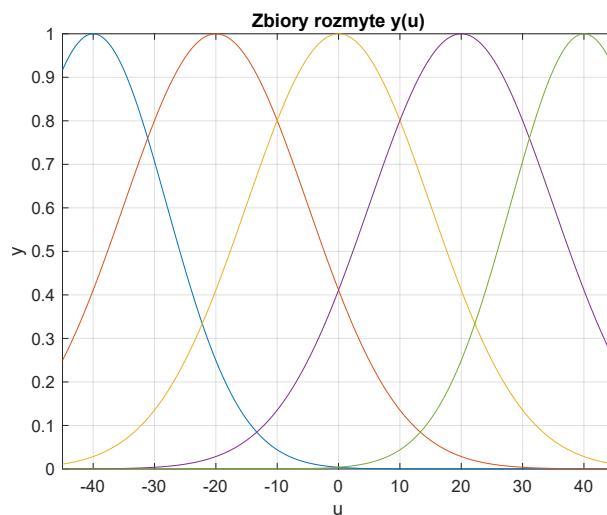
Zatem sygnał sterujący trafiał na blok nieliniowej statyki, gdzie był przekonwertowany na sygnał $z = f(u)$, który następnie trafiał na liniowy bloczek dynamiczny.

3.1. Nieliniowy blok statyczny

Nieliniowość w charakterystyce statycznej została wprowadzono za pomocą logiki rozmytej (ang. *fuzzy logic*), a konkretnie za pomocą modeli rozmytych Takagi-Sugeno. Zastosowano dwa podejścia, jedno standardowe z następnikami liniowymi, natomiast drugie z następnikami hiperbolicznymi.

3.2. Następniki liniowe

Zaczęto od rozmycia zmiennej wejściowej. Symulacyjnie wyznaczono odpowiednią liczbę zbiorów - w tym przypadku pięć.

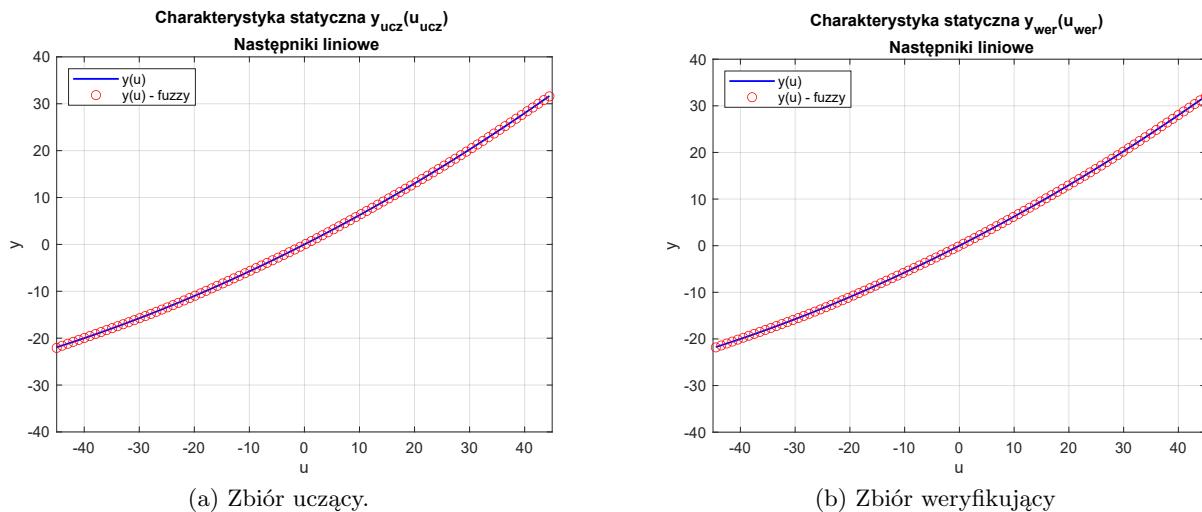


Rys. 3.2: Zbiory rozmyte.

Zastosowano następujące liniowe postaci:

$$\begin{aligned}
 \text{Reguła 1: } & \text{Jeśli } u^1(k) \text{ jest } U_1, \text{ to : } y^1(k) = a_1 + b_1 u^1(k) \\
 \text{Reguła 2: } & \text{Jeśli } u^2(k) \text{ jest } U_2, \text{ to : } y^2(k) = a_2 + b_2 u^2(k) \\
 & \vdots \\
 \text{Reguła 5: } & \text{Jeśli } u^5(k) \text{ jest } U_5, \text{ to : } y^2(k) = a_5 + b_5 u^5(k)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Współczynniki w pierwszej iteracji dobierane były poprzez rozwiązywanie nieliniowego zadania optymalizacji. W tym celu skorzystano z dostępnych funkcji programu MATLAB, tj. `fminsearch()`, gdzie minimalizowaną funkcją był kwadrat różnicy wyjść wyznaczonej analitycznie charakterystyki statycznej i wyznaczanej charakterystyki rozmytej. Dane statyczne podzielono na zbiory uczący i weryfikujący z tą różnicą, że wzięto co drugą próbkę do każdego ze zbiorów. Dokładność aproksymacji charakterystyki statycznej przedstawiono na rys. 3.3, natomiast uzyskane błędy były na poziomie 0,001.

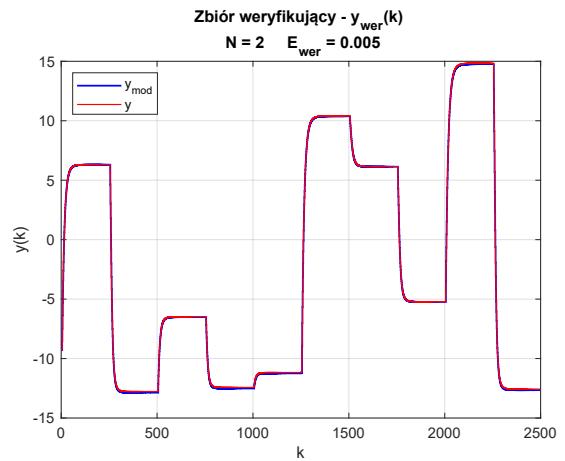
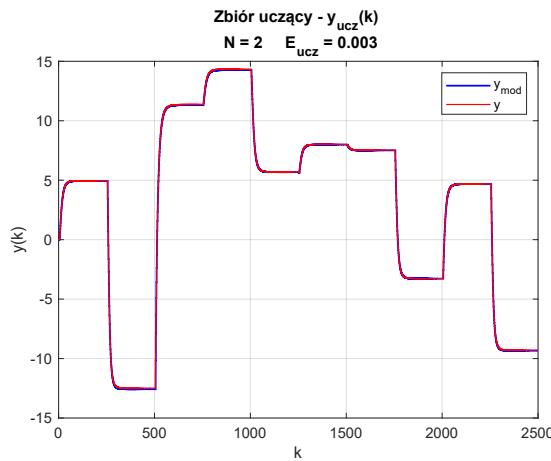


Rys. 3.3: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty.

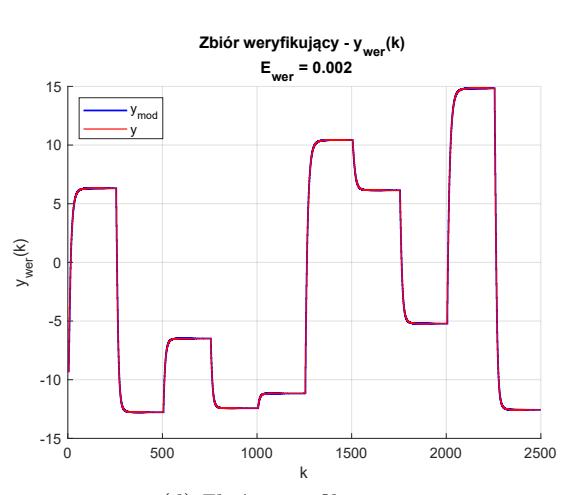
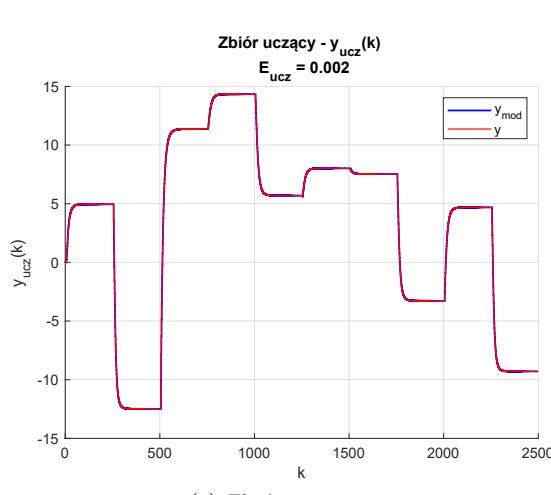
Następnie korzystając z wcześniej opracowanego modelu dynamicznego wykonano szereg symulacji, sprawdzając jak zachowuje się układ w zależności od losowo wygenerowanych sygnałów sterujących. Efekty symulacji przedstawiono poniżej.

I sekwencja

Model dynamiczny



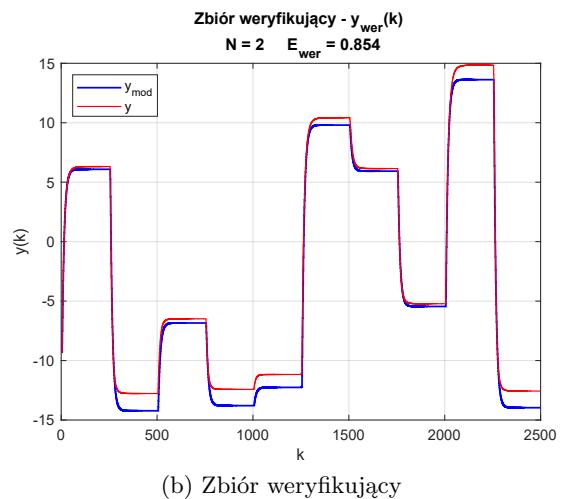
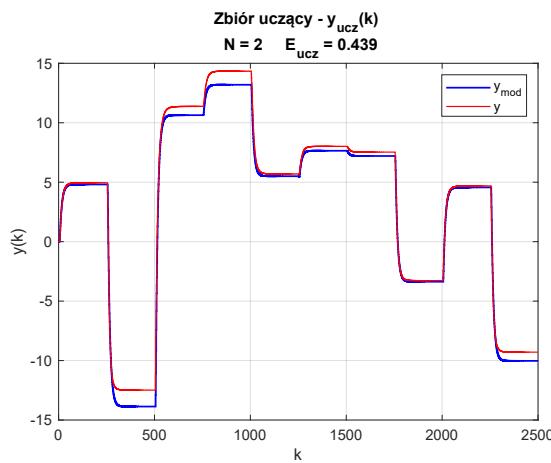
Model Hammersteina



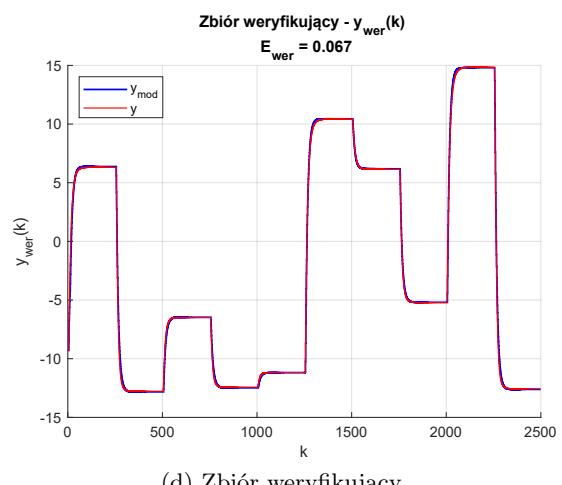
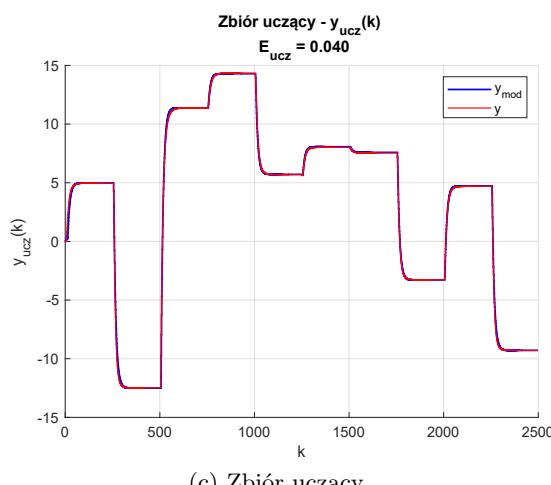
Rys. 3.4: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

I sekwencja

Model dynamiczny



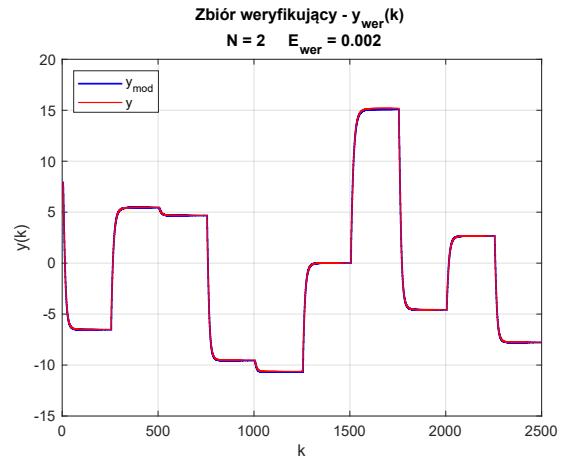
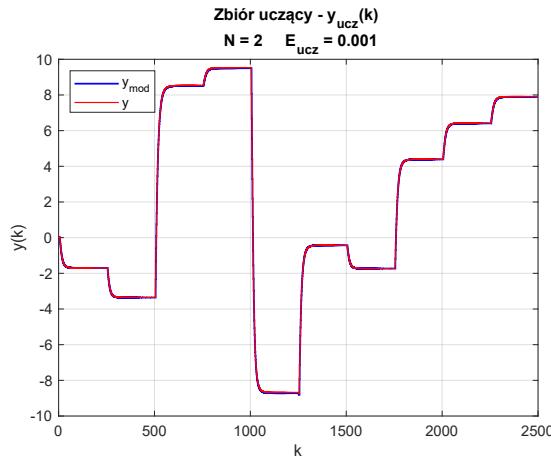
Model Hammersteina



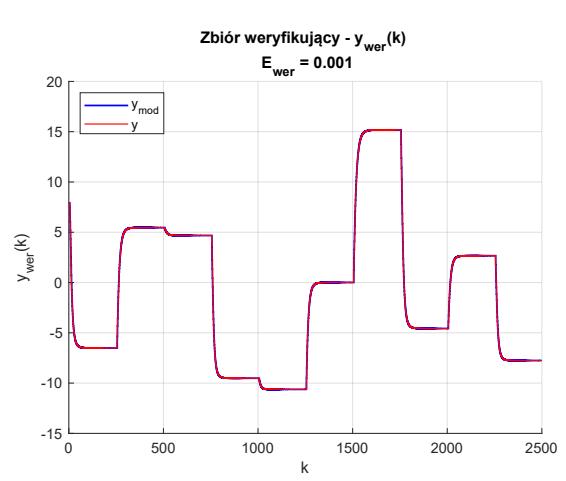
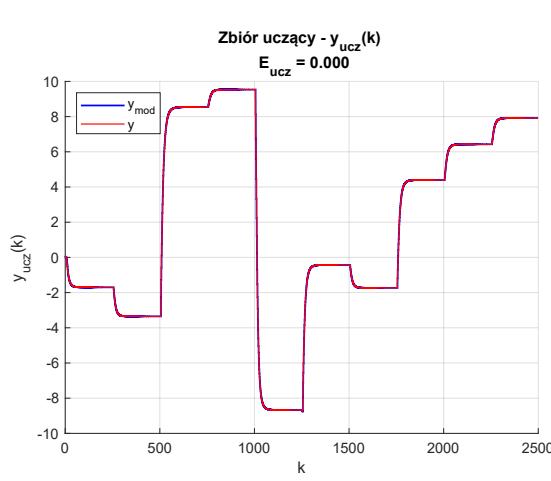
Rys. 3.5: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

II sekwencja

Model dynamiczny



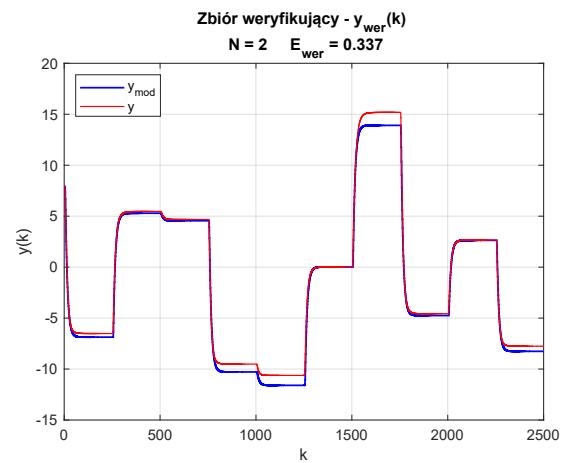
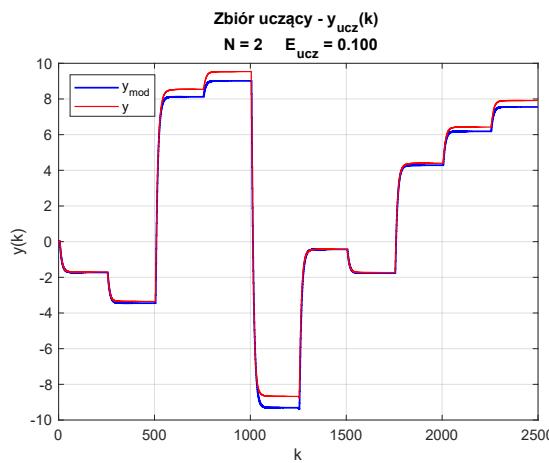
Model Hammersteina



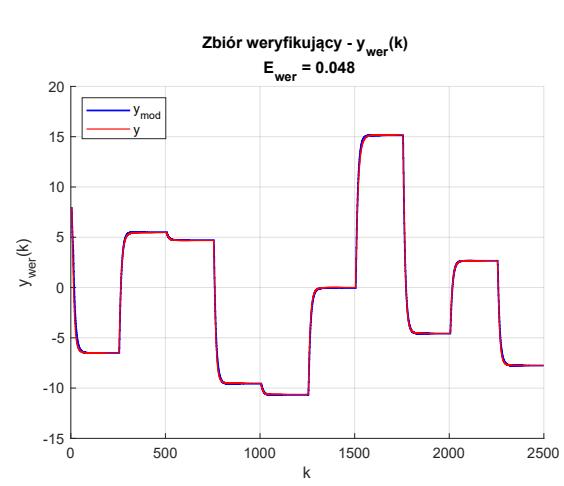
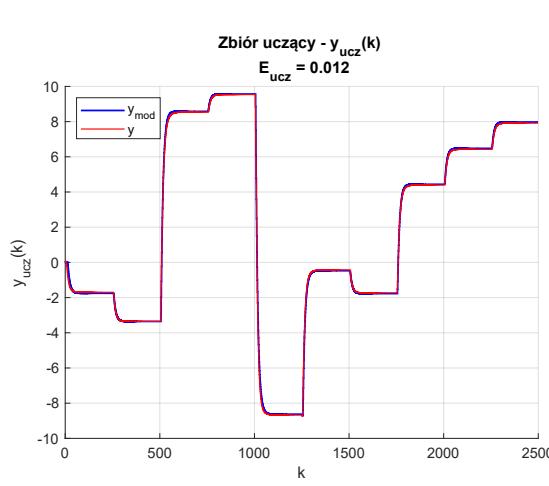
Rys. 3.6: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

II sekwencja

Model dynamiczny



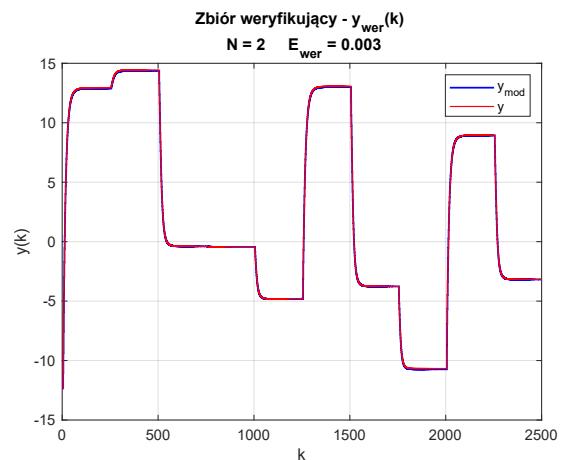
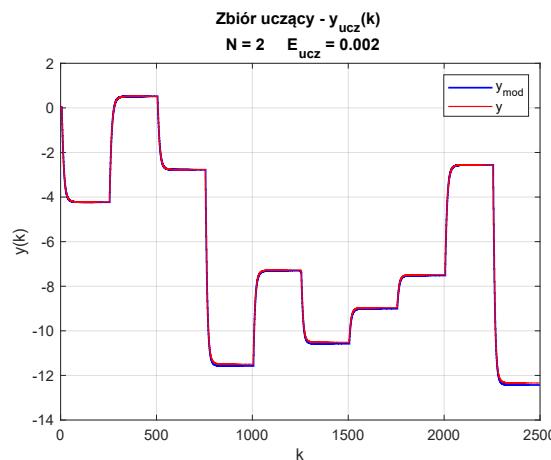
Model Hammersteina



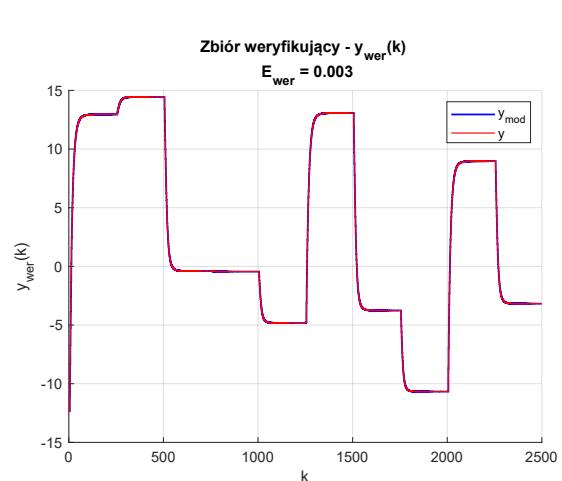
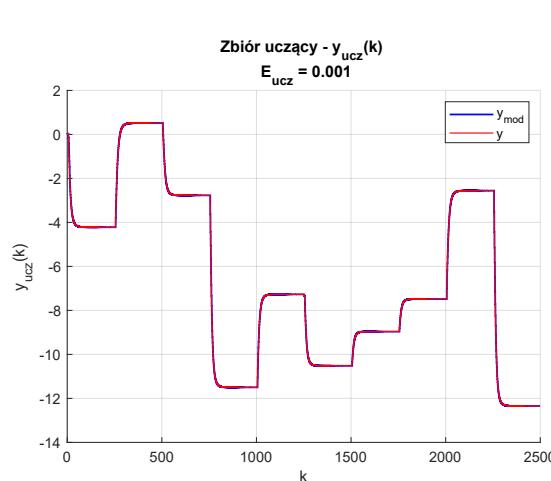
Rys. 3.7: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

III sekwencja

Model dynamiczny



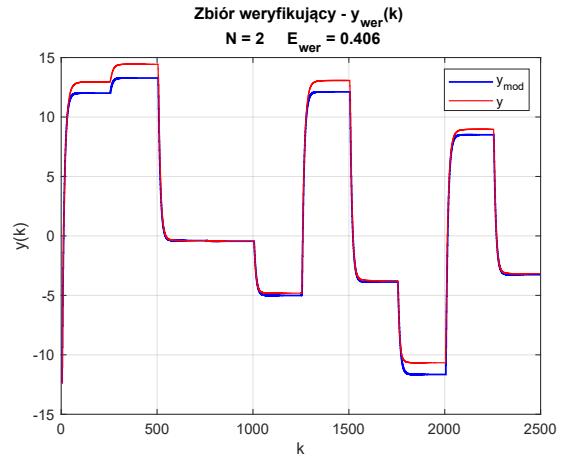
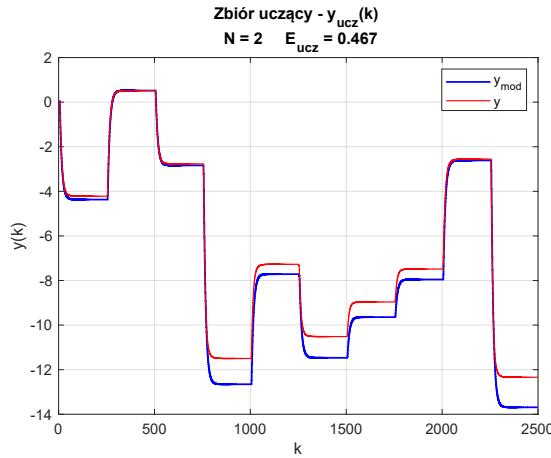
Model Hammersteina



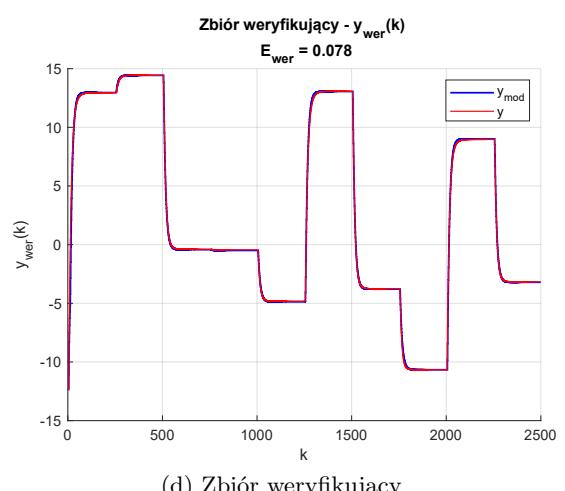
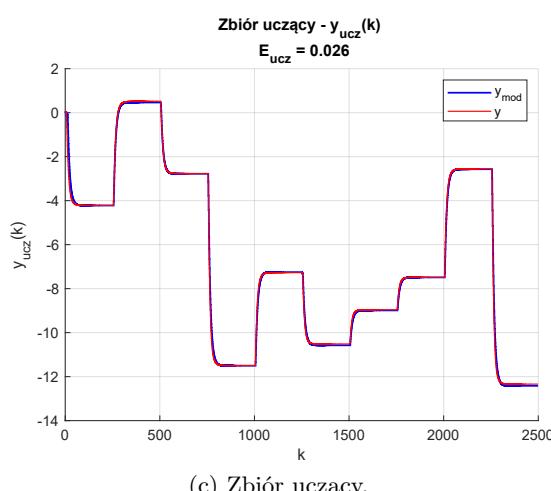
Rys. 3.8: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie bez rekurencji.

III sekwencja

Model dynamiczny



Model Hammersteina



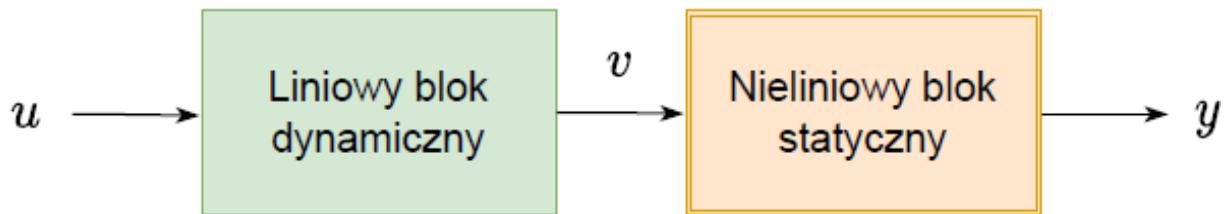
Rys. 3.9: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammersteina w trybie z rekurencją.

W każdym z otrzymanych przypadków model Hammersteina z rozmytą statyką i następującymi liniowymi okazywał się być lepszy niż standardowy model dynamiczny, zarówno ten testowany w trybie bez rekurencji, jak i z rekurencją. Istotnie, wprowadzenie nieliniowości do obiektu nieliniowego opisanego liniowym modelem dynamicznym powinno poprawić dokładność otrzymywanych wartości. Jako akceptowalną granicę przyjęto błąd na poziomie $E = 0,1$. Model Hammersteina w tej konfiguracji dawał na tyle satysfakcyjujące wyniki, że postanowiono dalej nie ingerować w dostrajanie współczynników modelu.

3.3. Następniki hiperboliczne

4. Model Wienera

Istota modelu Wienera jest dokładnie taka sama jak w przypadku modelu Hammersteina z tym, że nieliniową statykę poprzedzono liniową dynamiką - odwrotnie niż jak to było w przypadku modelu Hammersteina.

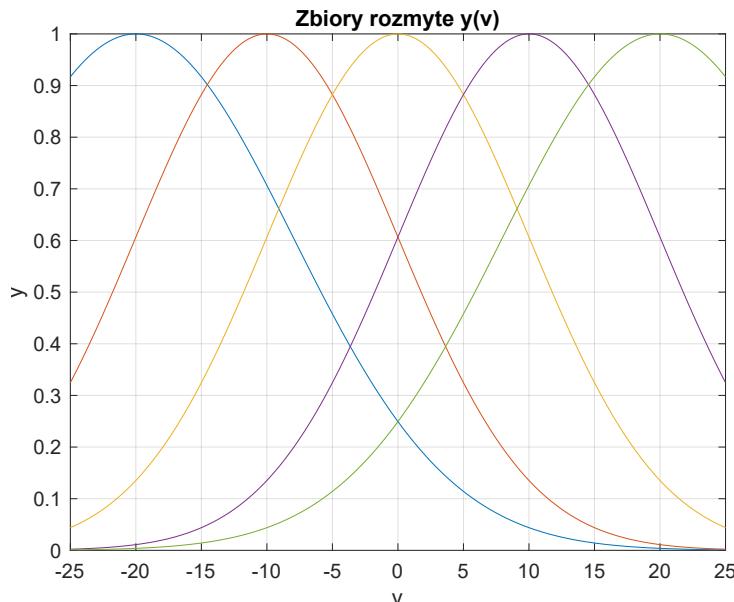


Rys. 4.1: Reprezentacja graficzna modelu Wienera.

Sygnal wejściowy trafia na liniowy blok dynamiczny, gdzie jest przekonwertowany na sygnał $v = f(u)$, który trafia na nieliniową statykę, której wyjściem jest sygnał y . W przypadku dynamiki skorzystano z wyznaczonego wcześniej modelu dynamicznego (2.13), natomiast zmianie uległa charakterystyka statyczna.

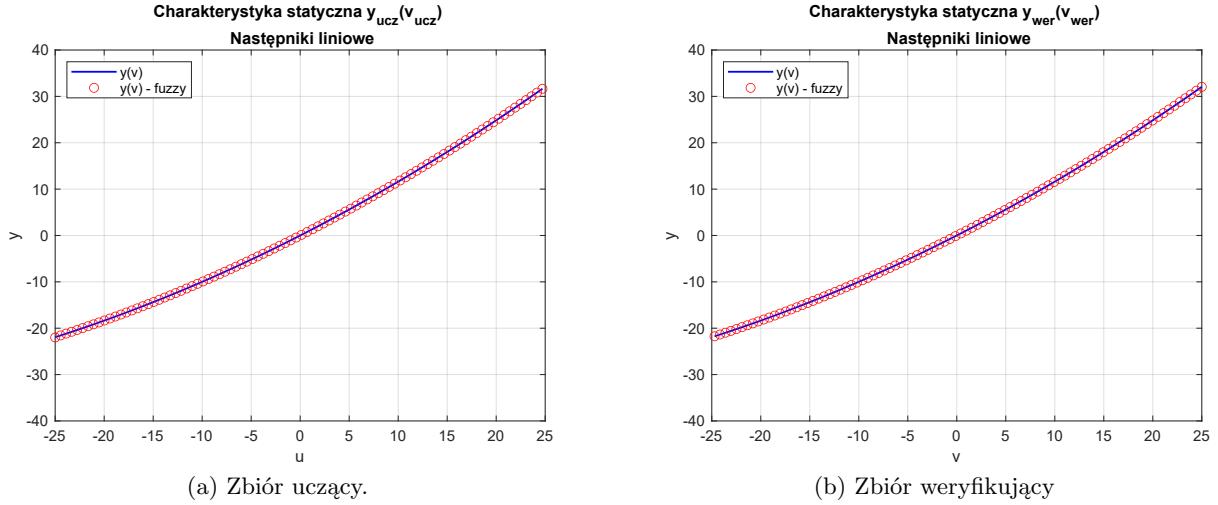
4.1. Następniaki liniowe

W przypadku modelu Wienera aproksymacja charakterystyki statycznej przysporzyła więcej problemów niżeli w przypadku modelu Hammersteina. Przyjęty przedział rozmywania zmiennej v - $[-25; 25]$ podzielono na pięć zbiorów.



Rys. 4.2: Zbiory rozmyte.

Dzięki zastosowanemu podziałowi udało się otrzymać następującą aproksymację charakterystyki statycznej.

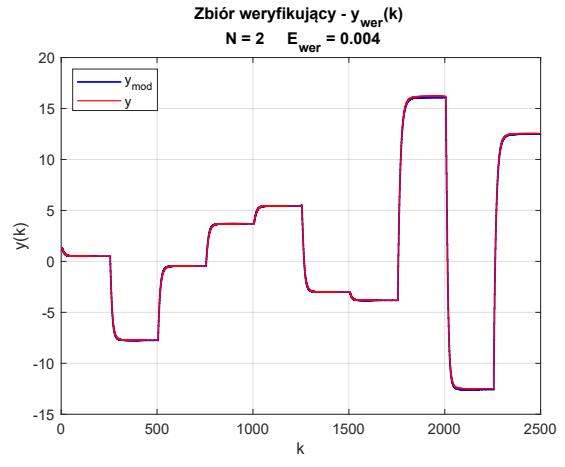
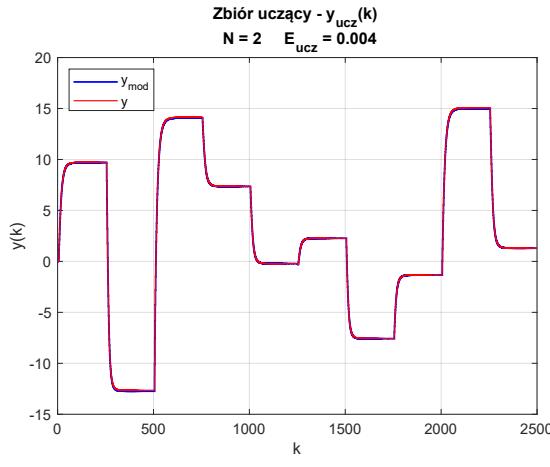


Rys. 4.3: Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty.

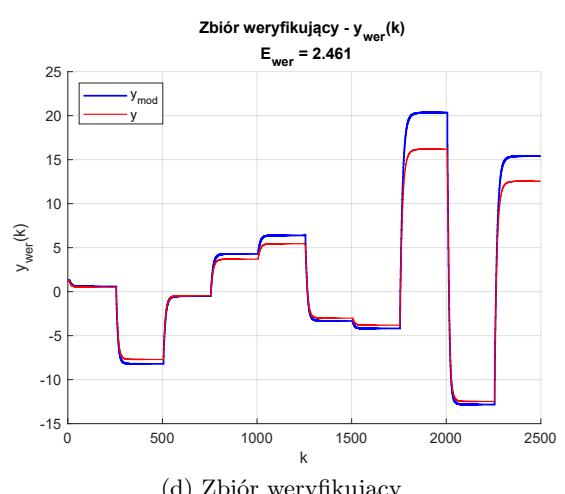
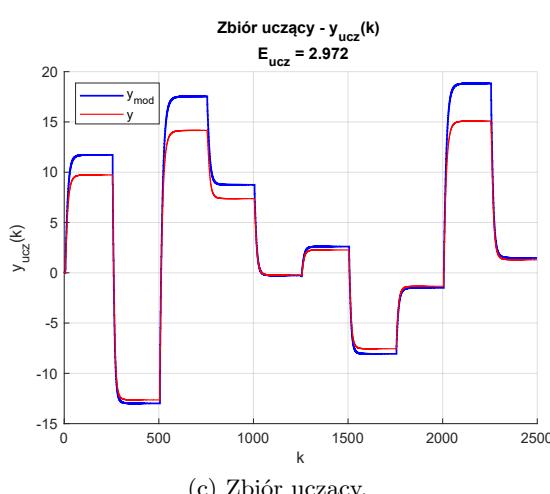
Następniki liniowe reguł przybrały postać zaprezentowaną w 3.1. Ponownie pierwsze przybliżenie zostało wyznaczone w za pomocą funkcji MATLAB, tym razem jednak niezbędne okazało się ręczne dostrajanie otrzymanych współczynników. Ponownie wygenerowano kilka sekwencji sygnału sterującego i porównano zachowanie modelu dynamicznego i modelu Wienera.

I sekwencja

Model dynamiczny

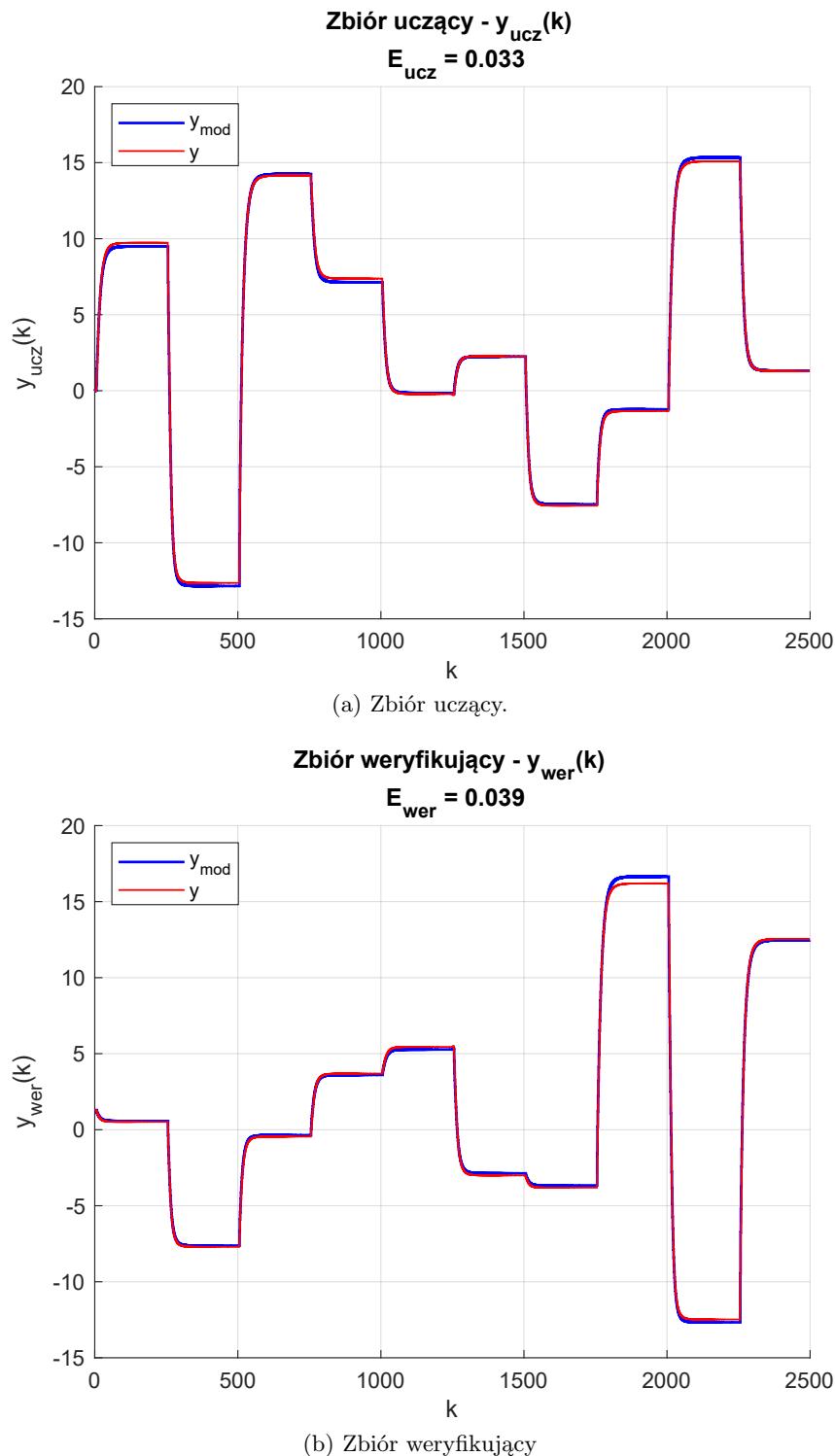


Model Wienera



Rys. 4.4: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

Jak widać na powyższych rysunkach dokładność osiągnięta przez model Wienera w trybie ARX jest nieakceptowalna - postanowiono ręcznie dostroić model. Dokonano tego tylko poprzez zmianę wartości współczynników lokalnych modeli systemu rozmytego. Uzyskane rezultaty zaprezentowano na rys. 4.5.

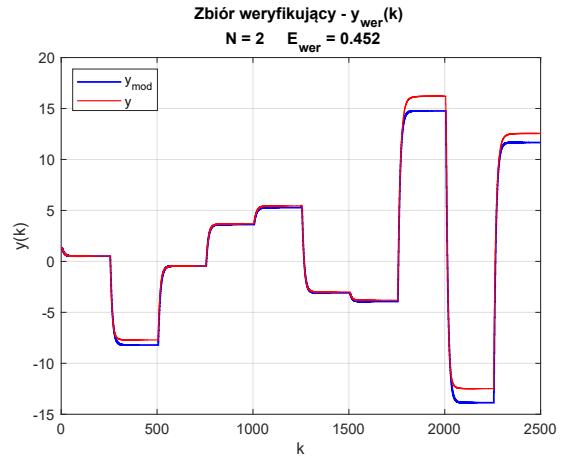
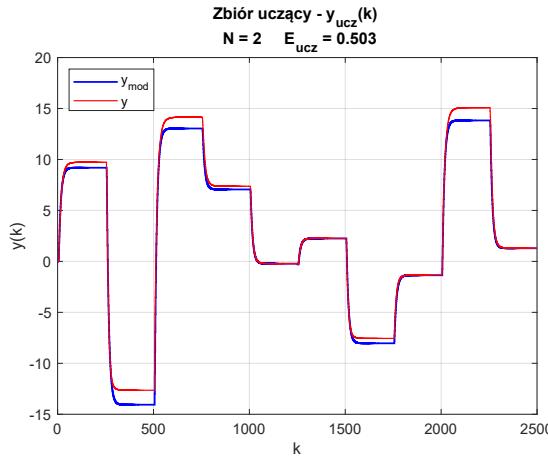


Rys. 4.5: Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następców.

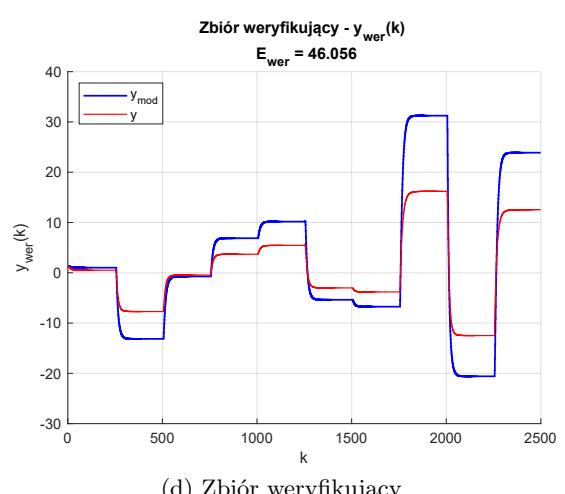
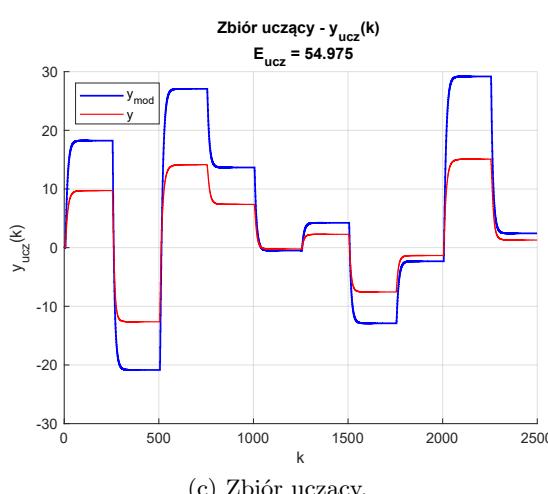
Model Wienera po strojeniu ręcznym osiągnął próg akceptowalności w kontekście kryterium jakości - $E = 0,1$. Analogiczne podejście zastosowano w przypadku testowania modelu w trybie rekurencyjnym.

I sekwencja

Model dynamiczny

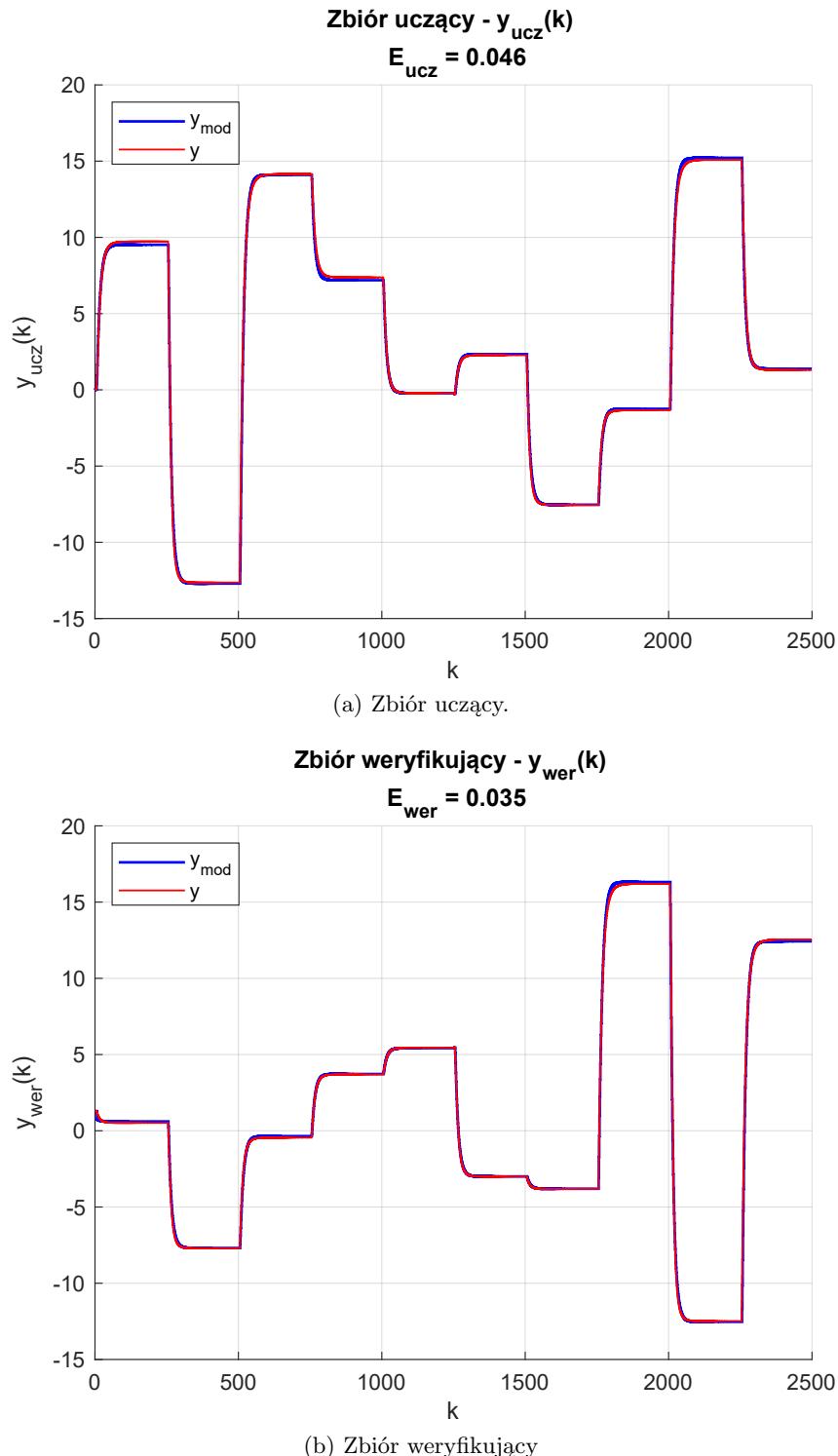


Model Wienera



Rys. 4.6: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Model Wienera w trybie rekurencyjnym osiągnął bardzo duże wartości błędów. Natomiast postanowiono przyjąć inną strategię dostrajania, widać bowiem, że przemnożenie wyjścia modelu przez pewną stałą dałoby już zadowalający rezultat. Konieczne okazało się również dostrojenie wartości poszczególnych współczynników modeli lokalnych systemu rozmytego, aby osiągnąć zakładaną dokładność. Efekt przedstawiono na rys. 4.7.

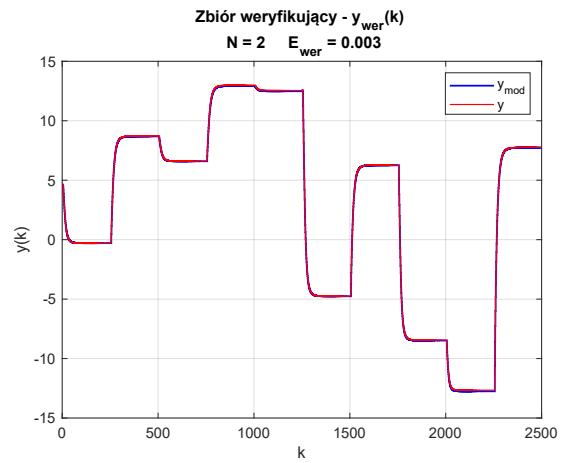
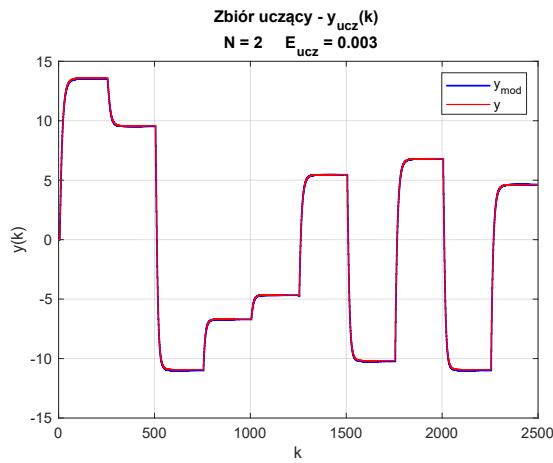


Rys. 4.7: Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następników.

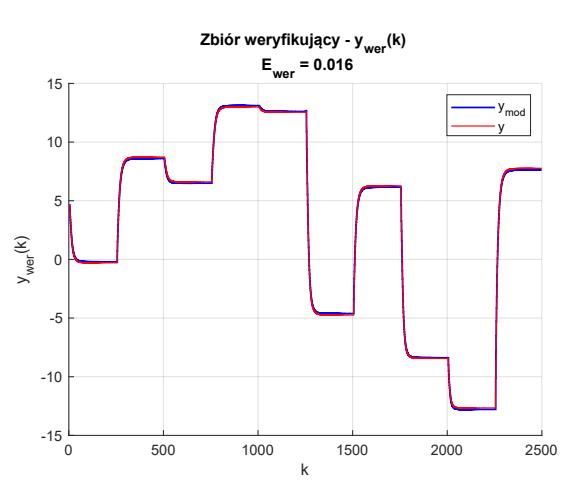
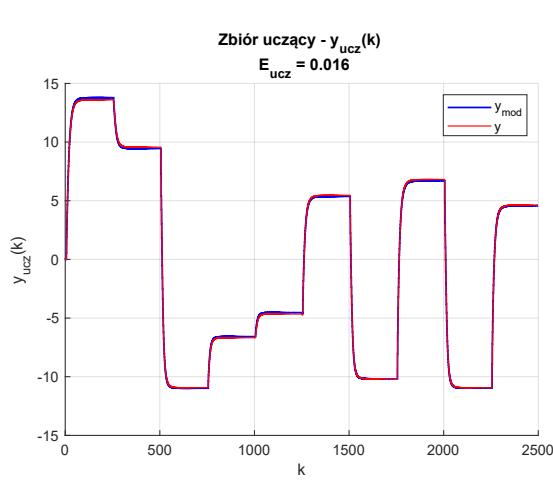
Jak pokazują powyższe ilustracje osiągnięto satysfakcjonującą dokładność, zbliżoną do tych uzyskanych podczas symulacji modelu Hammersteina (w niektórych przypadkach nawet lepszą). Dostrojony model poddano testom, generując kolejne dwie sekwencje sygnału sterującego.

II sekwencja

Model dynamiczny



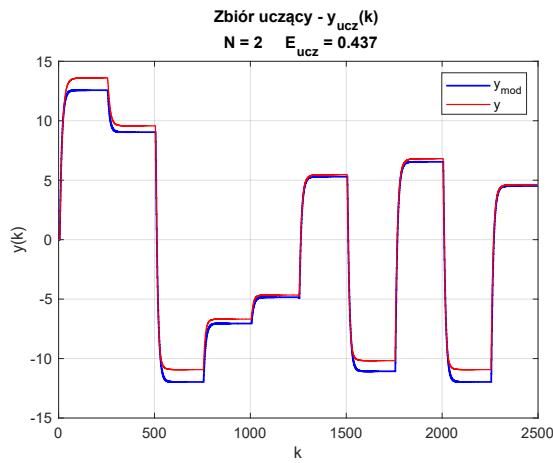
Model Wienera



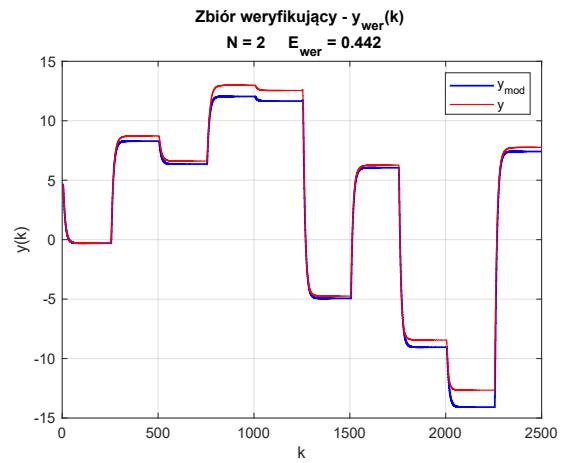
Rys. 4.8: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

II sekwencja

Model dynamiczny

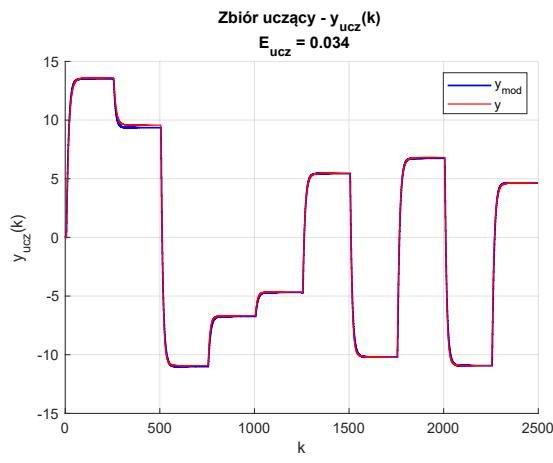


(a) Zbiór uczący.

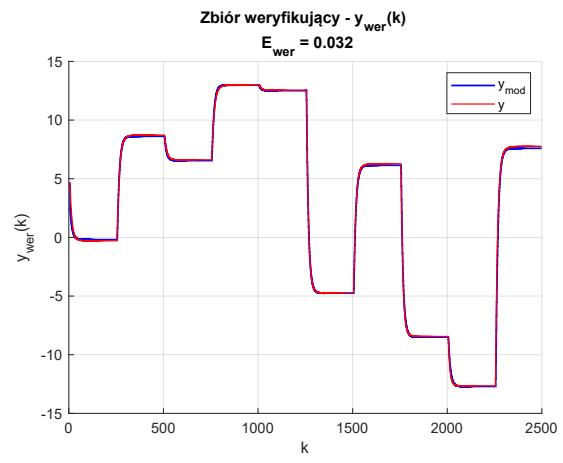


(b) Zbiór weryfikujący.

Model Wienera



(c) Zbiór uczący.

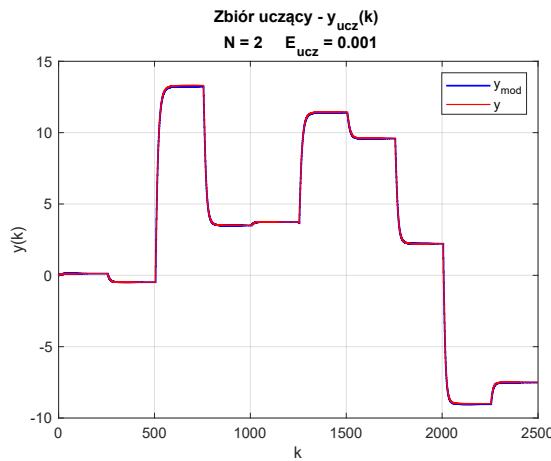


(d) Zbiór weryfikujący.

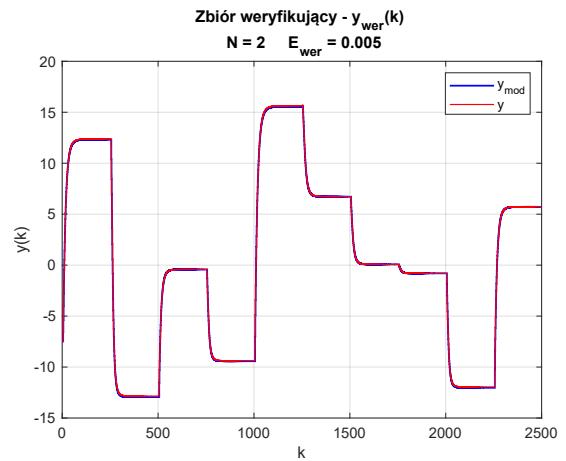
Rys. 4.9: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

III sekwencja

Model dynamiczny

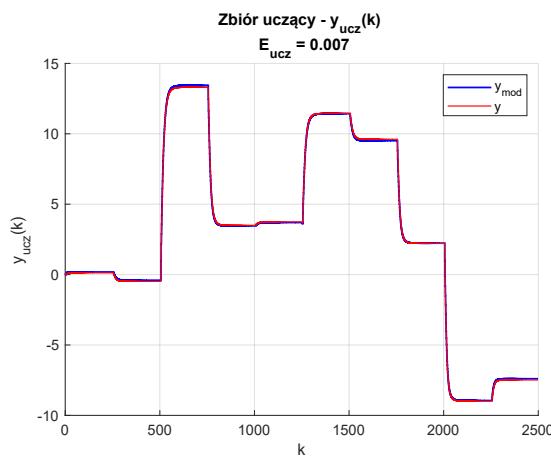


(a) Zbiór uczący.

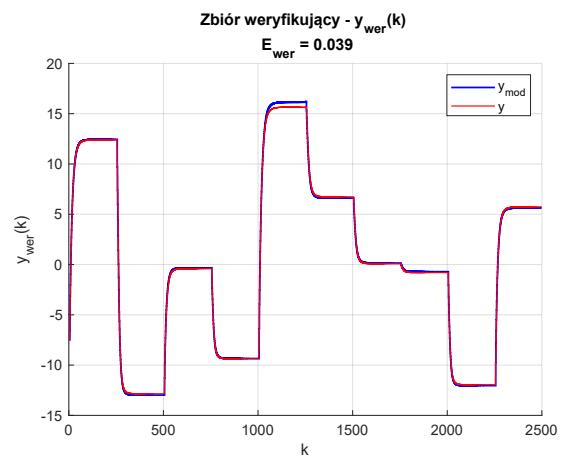


(b) Zbiór weryfikujący.

Model Wienera



(c) Zbiór uczący.

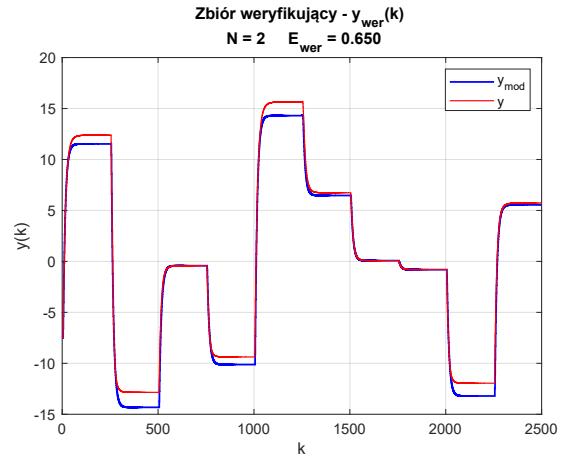
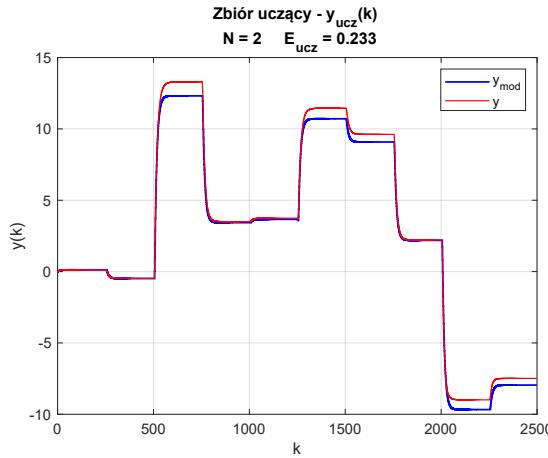


(d) Zbiór weryfikujący.

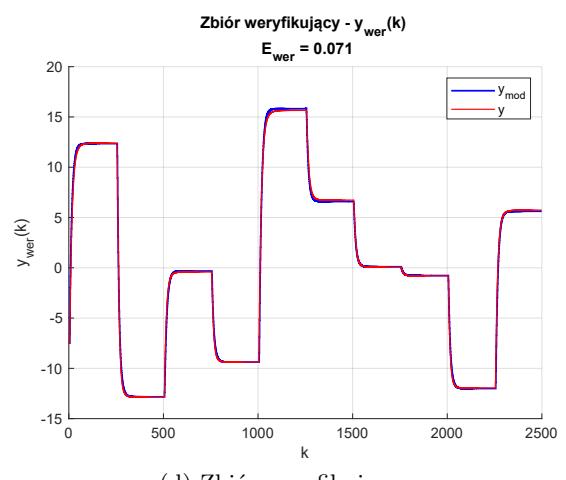
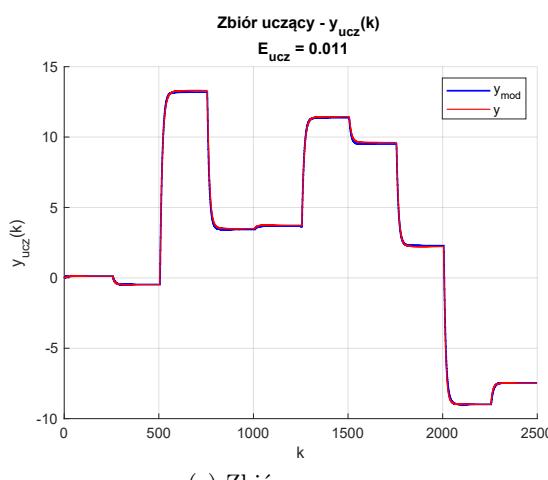
Rys. 4.10: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.

III sekwencja

Model dynamiczny



Model Wienera



Rys. 4.11: Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.

Na podstawie powyższych wykresów, można wysnuć wniosek, że model Wienera został dobrze dostrojony, ponieważ w każdym z testowanych przypadków uzyskano błąd mniejszy niż przyjęty za graniczny $E = 0,1$.

4.2. Następni hiperboliczne

5. Podsumowanie

Spis rysunków

1.1	Obiekt regulacji automatycznej.	2
2.1	Charakterystyka statyczna $h_2(F_1)$.	3
2.2	Porównanie modelu liniowego z nieliniowym.	4
2.3	Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.	5
2.4	Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem FOPDT.	6
2.5	Aproksymacja odpowiedzi skokowej układu modelem SOPDT.	7
2.6	Symulacja odpowiednich modeli z wykorzystaniem wygenerowanej sekwencji sygnału sterującego.	8
3.1	Reprezentacja graficzna modelu Hammersteina.	9
3.2	Zbiory rozmyte.	9
3.3	Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty.	10
3.4	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	11
3.5	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	12
3.6	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	13
3.7	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	14
3.8	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie bez rekurencji.	15
3.9	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Hammesteina w trybie z rekurencją.	16
4.1	Reprezentacja graficzna modelu Wienera.	18
4.2	Zbiory rozmyte.	18
4.3	Aproksymacja charakterystyki statycznej przez model rozmyty.	19
4.4	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.	20
4.5	Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie bez rekurencji po dostrojeniu współczynników następców.	21
4.6	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.	22
4.7	Przebiegu sygnału wyjściowego modelu Wienera w trybie rekurencyjnym po dostrojeniu współczynników następców.	23
4.8	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.	25
4.9	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.	26
4.10	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie bez rekurencji.	27
4.11	Porównanie przebiegu sygnału wyjściowego modelu dynamicznego i modelu Wienera w trybie rekurencyjnym.	28

Spis tabel