

**Maciej Ławryńczuk**

**Sterowanie procesów ciągłych  
preskrypt**

Warszawa 2022



**KAPITAŁ LUDZKI**  
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

**UNIA EUROPEJSKA**  
EUROPEJSKI  
FUNDUSZ SPOŁECZNY



**Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego**

**Publikacja dystrybuowana jest bezpłatnie**

## Spis treści

<b>1. Wstęp .....</b>	<b>5</b>
1.1. Wprowadzenie .....	5
1.2. Historia automatyki .....	6
1.3. Sterowanie w strukturze warstwowej.....	15
1.4. Wielokryterialna ocena jakości regulacji .....	21
1.4.1. Konflikt między dokładnością i odpornością .....	24
<b>2. Ciągłe układy regulacji.....</b>	<b>27</b>
2.1. Metody przestrzeni stanu.....	27
2.1.1. Podział układów dynamicznych .....	28
2.1.2. Równania stanu liniowych, ciągłych układów dynamicznych .....	29
2.1.3. Sterowalność i obserwowalność liniowych układów dynamicznych.....	30
2.1.4. Wyznaczanie transmitancji na podstawie równań stanu .....	33
2.1.5. Wyznaczanie równań stanu na podstawie transmitancji .....	34
2.1.6. Projektowanie układów regulacji metodą sprzężenia od stanu .....	39
2.1.7. Dobór biegunów układu zamkniętego .....	44
2.1.8. Uwzględnianie niezerowej wartości zadanej.....	47
2.1.9. Obserwatory stanu pełnego rzędu.....	48
2.1.10. Obserwatory zredukowanego rzędu .....	56
2.1.11. Zasada separowalności .....	60
2.1.12. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego.....	61
2.2. Algorytm PID – realizacje praktyczne .....	67
2.2.1. Regulacja PID z ograniczeniem całkowania .....	68
2.2.2. Regulacja kaskadowa.....	70
2.2.3. Regulacja z pomiarem zakłócenia .....	74
<b>3. Dyskretny układy regulacji .....</b>	<b>78</b>
3.1. Transformata Z .....	79
3.2. Emulacja .....	81
3.2.1. Metoda Eulera.....	81
3.2.2. Całkowanie metodą prostokątów i trapezów .....	83
3.2.3. Metoda przekształcenia biegunów i zer.....	84
3.3. Bezpośrednie projektowanie dyskretnych układów regulacji.....	87
3.4. Cyfrowa realizacja algorytmu PID.....	90
3.5. Symulacja dyskretnych układów regulacji.....	91
3.6. Metody przestrzeni stanu.....	93
3.6.1. Równania stanu liniowych, dyskretnych układów dynamicznych .....	93
3.6.2. Sterowalność i obserwowalność dyskretnych liniowych układów dynamicznych.....	94
3.6.3. Wyznaczanie transmitancji dyskretny na podstawie dyskretnych równań stanu .....	95
3.6.4. Wyznaczanie równań stanu na podstawie transmitancji .....	96
3.6.5. Wyznaczanie dyskretnych równań stanu na podstawie ciągłych równań stanu.....	100
3.6.6. Projektowanie dyskretnych układów regulacji metodą sprzężenia od stanu.....	102
3.6.7. Dobór biegunów układu zamkniętego .....	104
3.6.8. Dyskretny obserwatory stanu pełnego rzędu .....	107
3.6.9. Dyskretny obserwatory zredukowanego rzędu .....	111
3.6.10. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego.....	114

<b>4. Algorytmy regulacji predykcyjnej .....</b>	<b>118</b>
4.1. Zasada regulacji predykcyjnej .....	118
4.2. Algorytm DMC.....	122
4.2.1. Zastosowanie modelu odpowiedzi skokowej do predykcji.....	122
4.2.2. Algorytm DMC w wersji analitycznej (bez ograniczeń) .....	125
4.2.3. Analityczna postać prawa regulacji DMC .....	131
4.2.4. Algorytm DMC w wersji analitycznej z rzutowaniem ograniczeń.....	134
4.2.5. Algorytm DMC w wersji numerycznej (z ograniczeniami).....	135
4.3. Algorytm GPC .....	139
4.3.1. Zastosowanie równania różnicowego do predykcji .....	139
4.3.2. Algorytm GPC w wersji analitycznej (bez ograniczeń).....	145
4.3.3. Analityczna postać prawa regulacji GPC.....	146
4.3.4. Algorytm GPC z ograniczeniami .....	148
<b>5. Nieliniowa regulacja rozmyta .....</b>	<b>150</b>
5.1. Systemy rozmyte typu Takagi-Sugeno.....	150
5.1.1. Zbiory rozmyte i zmienne lingwistyczne .....	150
5.1.2. Modele rozmyte typu Takagi-Sugeno .....	153
5.2. Dyskretnie rozmyte algorytmy regulacji typu Takagi-Sugeno .....	160
5.2.1. Regulator rozmyty typu Takagi-Sugeno ze sprzężeniem od stanu .....	160
5.2.2. Regulator rozmyty PID typu Takagi-Sugeno.....	163
5.2.3. Rozmyte algorytmy regulacji predykcyjnej .....	169
<b>6. Dodatki .....</b>	<b>174</b>
6.1. Projekt.....	174
<b>7. Literatura .....</b>	<b>176</b>

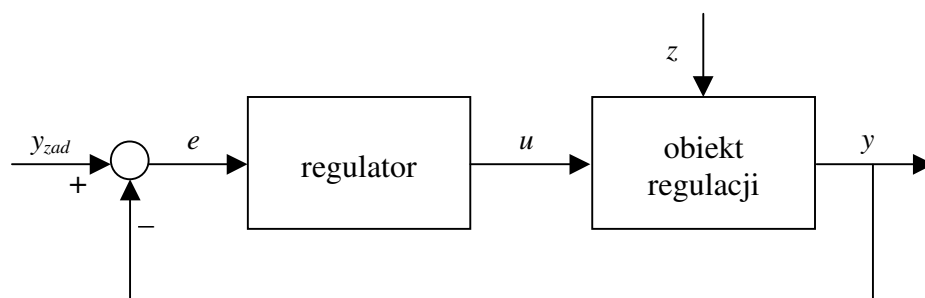
# 1. Wstęp

## 1.1. Wprowadzenie

Ze sterowaniem i regulacją spotykamy się właściwie na każdym kroku, zazwyczaj nawet nie przypuszczając, że większość codziennych czynności polega w istocie na realizacji konkretnych algorytmów. Podczas kąpieli dostosowuje się temperaturę wody do potrzeb, kolarz steruje rowerem, modyfikując prędkość i tor jazdy, piłkarze sterują położeniem piłki na boisku, chcąc wbić ją do bramki drużyny przeciwnej, nauczyciel steruje procesem kształcenia, fundusz inwestycyjny steruje procesem pomnażania kapitału, lekarz steruje przebiegiem kuracji chorego, pilot steruje przebiegiem lotu. Te bardzo różne przykłady mają istotne cechy wspólne. Za każdym razem mamy do czynienia ze świadomym oddziaływaniem na pewien obiekt (wanna, rower, piłka, uczeń, rynek kapitałowy, pacjent, samolot) wykonywanym po to, aby osiągnąć zamierzony cel. Sterowanie można ogólnie zdefiniować jako wpływanie na obiekt w taki sposób, aby spowodować jego działanie zgodnie z założonymi wymaganiami.

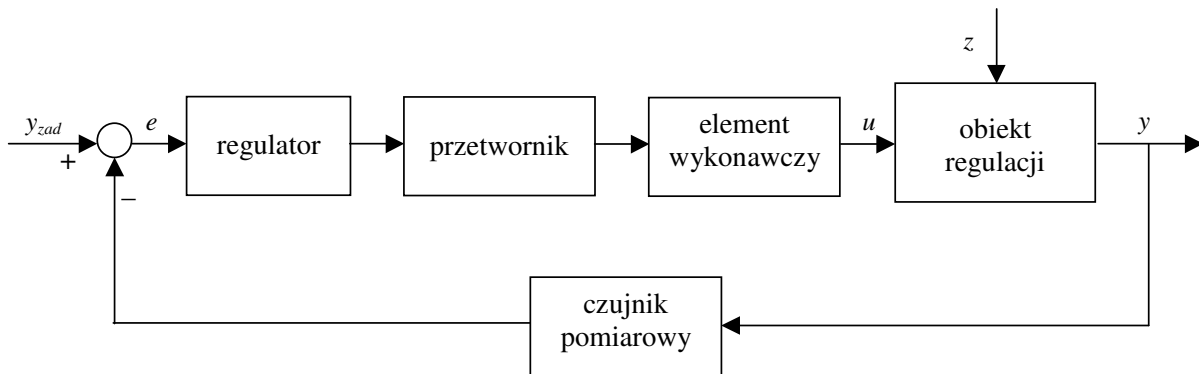
We wszystkich przytoczonych przykładach obserwacja wyników dotychczasowych oddziaływań i podejmowanie decyzji odnośnie przyszłego sposobu sterowania należy do człowieka. Można więc mówić o *sterowaniu ręcznym*. Oczywiście jest, że opisany sposób postępowania jest bardzo nieefektywny. Na przykład, niech celem sterowania będzie utrzymywanie stałej temperatury w lodówce. Najlepszym rozwiązaniem jest zastosowanie *sterowania automatycznego*, a więc generowanie sygnału sterującego przez *sterownik*, np. układ elektroniczny. Układ sterowania powinien zmieniać wartość *wielkości regulowanej* (temperatury) wówczas, gdy użytkownik zmieni *wartość zadaną* tej wielkości. Powinien on również kompensować wpływ *zakłóceń*, działaniu których poddany jest *obiekt regulacji*. W omawianym przypadku czynnikami takimi są zmiany zapełnienia lodówki oraz zaburzenia równowagi spowodowane otwieraniem chłodziarki, a także zmiany temperatury zewnętrznej.

Szczególnym przypadkiem sterowania jest *regulacja*, czyli sterowanie w układzie zamkniętym przy wykorzystaniu *ujemnego sprzężenia zwrotnego* [10, 11] (w ogólności sterowanie może być realizowane zarówno w pętli otwartej jak i zamkniętej). Na rys. 1.1 schematycznie przedstawiono układ regulacji. Załóżmy, że nastąpiła gwałtowna zmiana zakłócenia  $z$ , co spowodowało zmianę sygnału wyjściowego obiektu  $y$ , zwanego również *wielkością regulowaną*. Układ regulacji porównuje aktualną wartość zmiennej wyjściowej procesu  $y$  z *wartością zadaną*  $y_{zad}$  i oblicza *uchyby regulacji*  $e = y_{zad} - y$ . Sygnał uchybu reprezentuje informację, na podstawie której regulator oblicza wartość aktualnego sterowania. Znak uchybu wskazuje, czy aktualne sterowanie powinno być zmniejszone czy zwiększone. Inne cechy tego sygnału, jak na przykład wartość i prędkość zmian, mogą być pomocne przy określeniu wartości aktualnego sterowania oraz sposobu jego modyfikacji.



Rys. 1.1. Struktura układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym;  $u$ ,  $y$  – wejście i wyjście obiektu,  $z$  – zakłócenia,  $y_{zad}$  – wartość zadana,  $e$  – uchyb regulacji

Procedura obliczeniowa, której zadaniem jest obliczenie aktualnej wartości sygnału sterującego  $u$  nazywa się *algorytmem regulacji*. W wyniku interwencji regulatora początkowa różnica między sygnałem wyjściowym a zadaniem zostanie zlikwidowana, po pewnym czasie układ osiągnie stan równowagi ( $y=y_{zad}$ ). Zauważmy, że w podobny sposób działa układ regulacji przy zmianie wartości zadanej  $y_{zad}$ . Struktura układu regulacji z rys. 1.1 została celowo uproszczona. W rzeczywistości w skład układu regulacji wchodzi urządzenia dodatkowe, a mianowicie czujniki i przetworniki pomiarowe oraz urządzenia wykonawcze. Pełna struktura układu regulacji została przedstawiona na rys. 1.2.



Rys. 1.2. Pełna struktura układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym

## 1.2. Historia automatyki

Najwcześniejsze przykłady urządzeń automatycznych można znaleźć w średniowieczu, a nawet w starożytności (np. regulacja poziomu wody w zbiorniku). Początki współczesnej automatyki przypadają na okres pierwszej rewolucji przemysłowej (XVIII w.). Mechanizacja spowodowała powstanie procesów wymagających szybkiego i precyzyjnego dozoru. Przykładem może być kocioł maszyny parowej, w którym należy utrzymywać stały poziom wody pomimo zmieniającego się zapotrzebowania na parę lub też silnik, którego prędkość powinna być stała pomimo zmian obciążenia. Dlatego też pierwsze regulatory przemysłowe dotyczyły układów napędowych: pływakowy regulator poziomu wody w kotle – I. Połzunow 1765 r., odśrodkowy regulator prędkości maszyny parowej – J. Watt 1784 r.

Udane aplikacje pierwszych układów regulacji przyciągnęły uwagę teoretyków, głównie matematyków i fizyków. J. C. Maxwell był autorem pierwszej poważnej pracy dotyczącej stabilności (1863 r.). Maxwell pokazał, że stabilność zależy od położenia pierwiastków tzw. równania charakterystycznego. Próbował on także wyprowadzić warunki jakie powinny spełniać współczynniki równania charakterystycznego, lecz udało mu się to tylko w przypadku równań drugiego i trzeciego rzędu. Uniwersalne kryterium stabilności podał w 1877 r. E. J. Routh. A. M. Lapunow badał zagadnienia stabilności nieliniowych równań różniczkowych (1893 r.). Choć wyniki jego prac mają fundamentalne znaczenie dla nieliniowych układów regulacji, w literaturze zachodniej były one praktycznie nieznane do końca lat pięćdziesiątych XX w.

Przełom XIX i XX wieku przyniósł kilka wielkich wynalazków, które znacząco wpłynęły na rozwój automatyki. Rozwój elektroniki i opracowanie wzmacniaczy elektronicznych umożliwił upowszechnienie się łączności telefonicznej. Wraz ze wzrostem odległości między rozmówcami wzrastają jednak straty energii, pomimo stosowania przewodów o dużych średnicach. Zaczęto więc stosować wzmacniacze. Ponieważ lampy elektroniczne charakteryzują się nieliniowościami, przy zastosowaniu szeregu wzmacniaczy występowały duże zniekształcenia sygnału. W celu eliminacji zniekształceń zastosowano wzmacniacz ze sprzężeniem zwrotnym. Aby skutecznie eliminować zakłócenia stosowano duże wartości wzmocnień, co

wiązało się z ryzykiem utraty stabilności. W omawianym przypadku kryterium stabilności Routha nie mogło zostać efektywnie zastosowane, ponieważ równania różniczkowe opisujące system były bardzo skomplikowane, o wysokim rzędzie (np. 50). W 1932 r. H. Nyquist przedstawił częstotliwościową teorię stabilności stacjonarnych układów liniowych. Zapoczątkowała ona rozwój całego działu teorii sterowania dotyczącego metod częstotliwościowych analizy i syntezy układów. Jego prace były rozwijane przez A. Michajłowa (1938 r.) oraz H. Bodego i N. Nicholasa (1946 r.).

Równocześnie z rozwojem elektroniki, a szczególnie wzmacniaczy, standardem stała się regulacja w strukturze zamkniętej ze sprzężeniem zwrotnym. Regulator PID okazał się bardzo skuteczny w regulacji bardzo szerokiej klasy procesów dynamicznych, również z dużym opóźnieniem, a nawet nieliniowych. Opracowano proste, lecz bardzo skuteczne metody doboru nastaw regulatora PID, najbardziej znane z nich zostały podane przez Zieglera i Nicholasa.

Ogromny rozwój praktyki i teorii automatyki wiąże się z okresem II wojny światowej. Wynalazkiem, który zapoczątkował nową erę był komputer (ENIAC – 1946 r.). Wynalezienie tranzystora (1948 r.), a następnie układów scalonych (1964 r.) umożliwiło miniaturyzację sprzętu elektronicznego. Przyczyniło się to do upowszechnienia i spadku cen sterowników elektronicznych. Rozwój sprzętu automatyki bardzo dobrze widać na przykładzie regulatorów przemysłowych typu PID. Pierwsze konstrukcje tego typu były układami mechanicznymi, następnie stosowano regulatory pneumatyczne, elektroniczne lampowe, później tranzystorowe, obecnie są to wysoko specjalizowane urządzenia mikroprocesorowe.

Częstotliwościowe metody syntezy układów regulacji okazały się bardzo skuteczne w wielu gałęziach przemysłu, również w zastosowaniach wojskowych. W niektórych zastosowaniach, na przykład w lotnictwie, rozpatruje się procesy o złożonej, często niestabilnej dynamice. W takich przypadkach metody częstotliwościowe mogą okazać się nieskuteczne. W 1948 r. W. Evans zaproponował powrót do opisu obiektów za pomocą równań charakterystycznych stosowanych przez Maxwella i Routha prawie 70 lat wcześniej. Evans opracował metodę projektowania układów regulacji za pomocą lokowania biegunów układu zamkniętego.

W latach pięćdziesiątych XX w. R. Bellman i R. Kalman w USA oraz L. Pontriagin w ZSRR powtórnie zaczęli używać równań różniczkowych do opisu obiektów regulacji. Należy podkreślić, że na kierunki badań teoretycznych znacząco wpłynęły prace dotyczące sterowania satelitów, w przypadku których równania różniczkowe, a nie podejście częstotliwościowe, są naturalnym opisem procesu. Pomimo tego, że teoretyczne podwaliny tego podejścia opracowano w XIX w. (Maxwell, Routh, Lapunow), nazywa się ono *nowoczesną teorią regulacji*, podczas gdy termin *klasyczna teoria regulacji* nieodłącznie wiąże się z podejściem częstotliwościowym (Nyquist, Bode, kształtowanie charakterystyki częstotliwościowej układu zamkniętego). Począwszy od lat siedemdziesiątych XX w. do chwili obecnej można zauważyć wysiłki zmierzające do wykorzystania najlepszych cech obu podejść.

Rozwój elektroniki i techniki komputerowej doprowadził w ostatnich dekadach do powstania potężnych systemów zbierania, wizualizacji i przetwarzania danych (systemy SCADA – ang. Supervisory Control and Data Acquisition), które w połączeniu z potencjałem obliczeniowym współczesnych sterowników mikroprocesorowych umożliwiają bardzo efektywną regulację. Możliwa jest realizacja w czasie rzeczywistym tzw. zaawansowanych technik regulacji (ang. advanced control techniques), za które uważa się struktury bardziej złożone niż klasyczne algorytmy PID. Techniki te dotyczą zarówno obiektów liniowych jak i nieliniowych, zwykle wielowymiarowych, przy uwzględnieniu ograniczeń.

Obecnie w sterowaniu wykorzystuje się obecnie tzw. strukturę warstwową, w której warstwa optymalizacji ustala najlepsze z ekonomicznego punktu widzenia wartości zadane dla warstwy regulacji (optymalizacja punktu pracy). Dzięki dużej szybkości współczesnych komputerów możliwa jest bieżąca (ang. on-line), cykliczna optymalizacja, a więc dopasowywanie

punktu pracy do zmieniających się warunków zewnętrznych. Zmiana punktu pracy wymaga skutecznej pracy układów regulacji w szerokim zakresie zmian punktu pracy. Ponieważ rzeczywiste obiekty regulacji są zwykle nieliniowe, wprowadzenie optymalizacji postawiło nowe wymagania przed układami regulacji, wymuszając opracowanie rozwiązań znacznie bardziej uniwersalnych niż algorytm PID.

Metody projektowania układów regulacji omawiane w skrypcie są następujące

1. Metody przestrzeni stanu (przesuwanie biegunów sprzężeniem od stanu, dobór biegunów układu zamkniętego, obserwator stanu pełnego rzędu, obserwator stanu zredukowanego rzędu).
2. Regulacja PID – modyfikacje struktury klasycznej (uwzględnianie ograniczeń sygnału sterującego, regulacja kaskadowa, kompensacja zakłóceń).
3. Regulacja predykcyjna typu DMC i GPC (postać analityczna – uwzględnianie ograniczeń, postać numeryczna).
4. Nieliniowa regulacja rozmyta typu Takagi-Sugeno (regulator rozmyty ze sprzężeniem od stanu, regulator rozmyty PID, predykcyjny regulator rozmyty).

Dostępne obecnie sterowniki są urządzeniami cyfrowymi, dlatego też najwięcej miejsca poświęcono algorytmom dyskretnym. Wyjątkiem jest drugi rozdział, gdzie ze względów dydaktycznych omówiono modele i algorytmy w wersji ciągłej (z czasem ciągłym).

Rola modelu matematycznego procesu jest kluczowa. Po pierwsze, dysponując modelem można zaprojektować algorytm regulacji, a następnie zasymulować jego działanie (np. w środowisku Matlab/Simulink). Dopiero przetestowany symulacyjnie algorytm jest implementowany w praktyce. Po drugie, wiele algorytmów regulacji wykorzystuje bezpośrednio model. Sposoby wykorzystania modeli w regulacji są różne, istniejące algorytmy różnią się możliwościami (dokładność regulacji, możliwość uwzględnienia ograniczeń, wielowymiarowości i nieliniowości procesu), a tym samym złożonością obliczeniową. Aby zilustrować te zagadnienia w dalszej części rozdziału omawia się 4 przykłady procesów, ich modele (celowo bardzo uproszczone) oraz algorytmy regulacji.

### Przykład

Rozważanym obiektem regulacji jest satelita telekomunikacyjny pokazany schematycznie na rys. 1.3. Antena satelity musi być skierowana na określony punkt na ziemi, natomiast bateria słoneczna na słońce, w taki sposób, aby pozyskać jak najwięcej energii.

Satelita pracuje w przestrzeni trójwymiarowej, dla uproszczenia rozważa się ruch jedynie w jednym wymiarze. Proces jest opisany równaniem

$$F(t)d = I\ddot{\theta}(t) \quad (1.1)$$

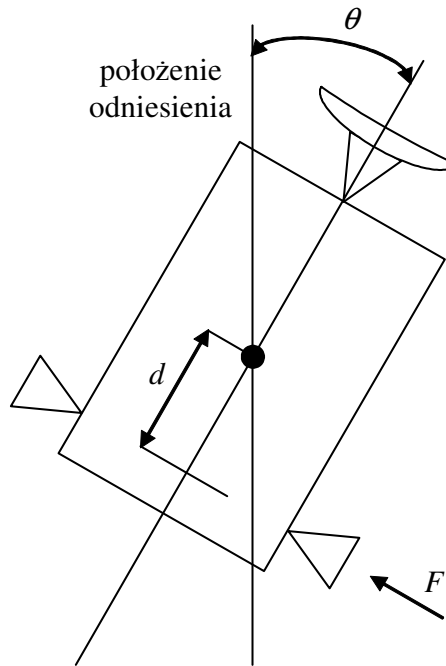
gdzie  $F$  [N] jest siłą ciągu,  $\theta$  [rad] jest kątem w stosunku do położenia odniesienia, odległość od środka masy wynosi  $d=2$  m, stała  $I=600000$  kg m<sup>2</sup>. Definiując zmienne stanu

$$x_1(t) = \theta(t), \quad x_2(t) = \dot{\theta}(t) \quad (1.2)$$

oraz przyjmując  $u=F$  i  $y=\theta$ , otrzymuje się model dynamiczny w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \frac{d}{I}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned} \quad (1.3)$$



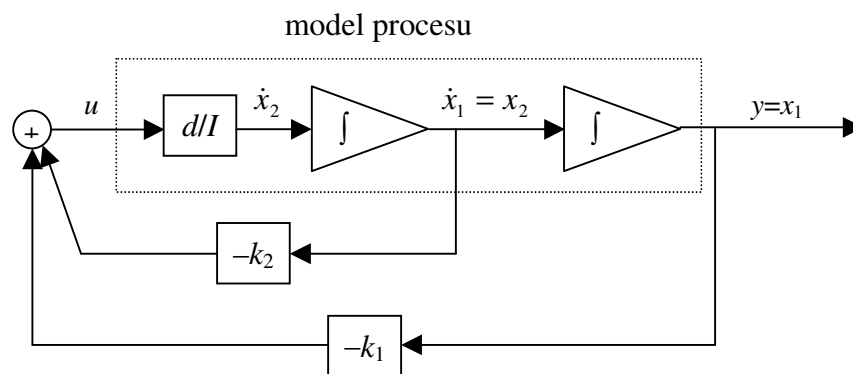


Rys. 1.3. Satelita telekomunikacyjny

Należy sprowadzić satelitę z położenia  $\theta = 5^\circ$  ( $\pi/36$  rad) do  $\theta = 0$ . Uwzględniając obie zmienne stanu, należy sprowadzić obiekt ze stanu początkowego  $x(0) = [\pi/36 \ 0]^T$  do pozycji odniesienia  $[0 \ 0]^T$ . Zaprojektowano układ regulacji ze sprzężeniem od stanu (drugi rozdział skryptu), w którym prawo regulacji ma postać

$$u(t) = -[k_1 \ k_2] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

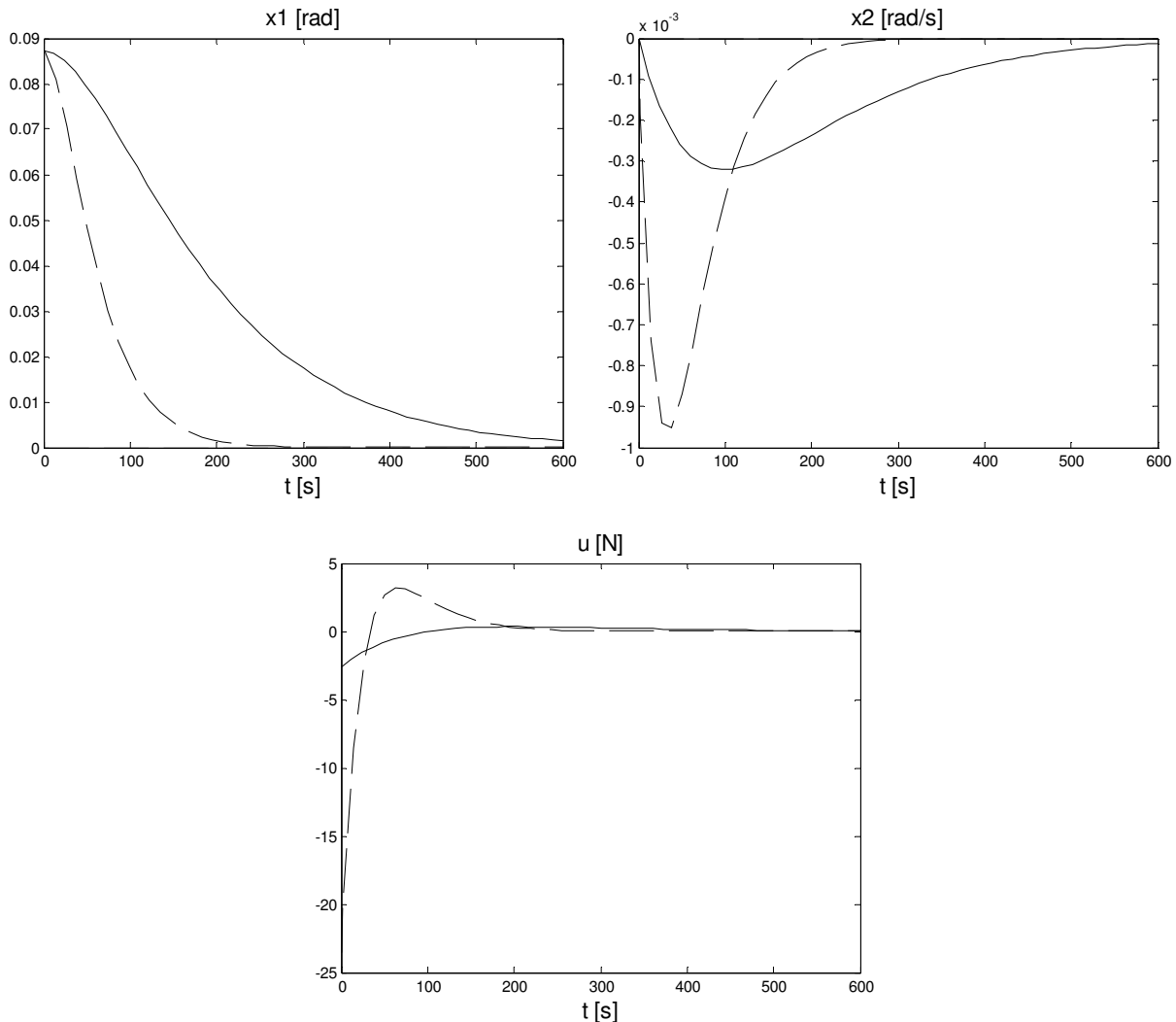
gdzie  $k_1 = (I/d)s_0^2$ ,  $k_2 = -2(I/d)s_0$ , przy czym  $s_0$  – podwójny biegun układu zamkniętego (parametr dostrajalny algorytmu). Strukturę układu regulacji wraz z modelem procesu (do symulacji) pokazano na rys. 1.4.



Rys. 1.4. Struktura układu regulacji satelity (Simulink)

Przyjęto położenie podwójnego bieguna układu zamkniętego  $s_0 = -0,01$  oraz  $s_0 = -0,03$ . Wyniki symulacji pokazano na rys. 1.5. Na początku warto przyjrzeć się trajektoriom stanu. Można zauważyć, że w drugim przypadku są one znacznie szybsze, satelita zostaje sprowadzony z punktu początkowego do spoczynkowego o wiele szybciej niż w pierwszym

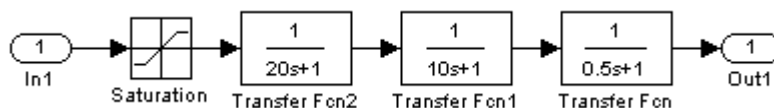
przypadku. Szybsza regulacja okupiona jest jednak bardzo agresywnym sygnałem sterującym, o dużej wartości i dużej szybkości zmian. W praktyce sygnał taki może doprowadzić do szybkiego zużycia elementu wykonawczego. Na tym prostym przykładzie można zauważyć, że projektant układu regulacji musi dążyć nie tylko do zapewnienia szybkiej i dokładnej regulacji, ale też zapewnić bezpieczeństwo całego systemu.



Rys. 1.5. Sprowadzenie satelity ze stanu początkowego  $x(0)=[\pi/36 \ 0]^T$  do pozycji odniesienia  $[0 \ 0]^T$ , podwójny biegun układu zamkniętego:  $s_0 = -0,01$  (linia ciągła) oraz  $s_0 = -0,03$  (linia przerywana)

### Przykład

Rozważanym obiektem regulacji jest samolot Bell-Boeing V-22 Osprey Tiltrotor. Jego cechą szczególną jest możliwość zmiany kąta położenia silników o 90 stopni. W trakcie startu i lądowania śmigła pracują w płaszczyźnie poziomej (jak helikopter), w trakcie lotu w płaszczyźnie pionowej (jak samolot).



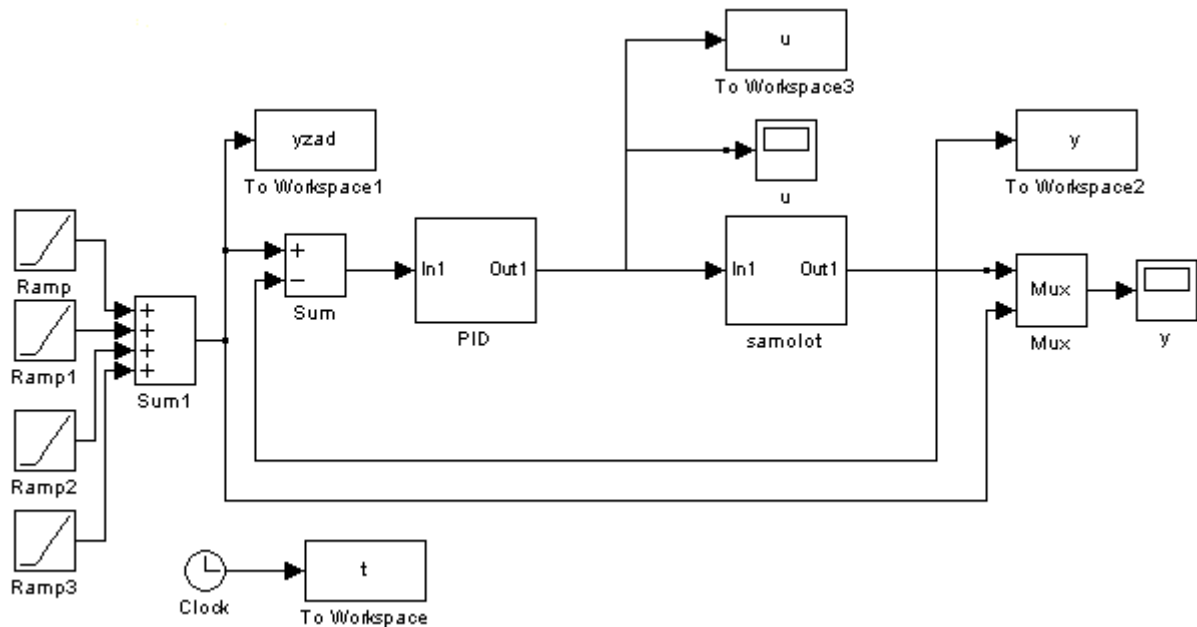
Rys. 1.6. Model samolotu (Simulink)

Samolot porusza się w przestrzeni trójwymiarowej, dla uproszczenia rozważa się wyłącznie zadanie regulacji wysokości. Uproszczony model samolotu można opisać następującą transmitancją [3]

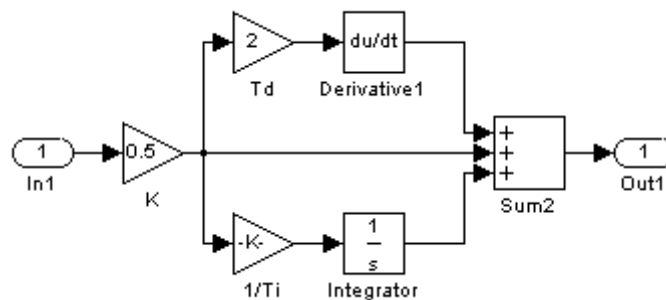
$$G(s) = \frac{1}{(20s + 1)(10s + 1)(0,5s + 1)} \quad (1.5)$$

gdzie wyjściem jest wysokość w metrach. Model ma postać pokazaną na rys. 1.6. Założono, że sygnał sterujący przyjmuje wartości od 0 do 1000, dlatego też w modelu występuje nasycenie.

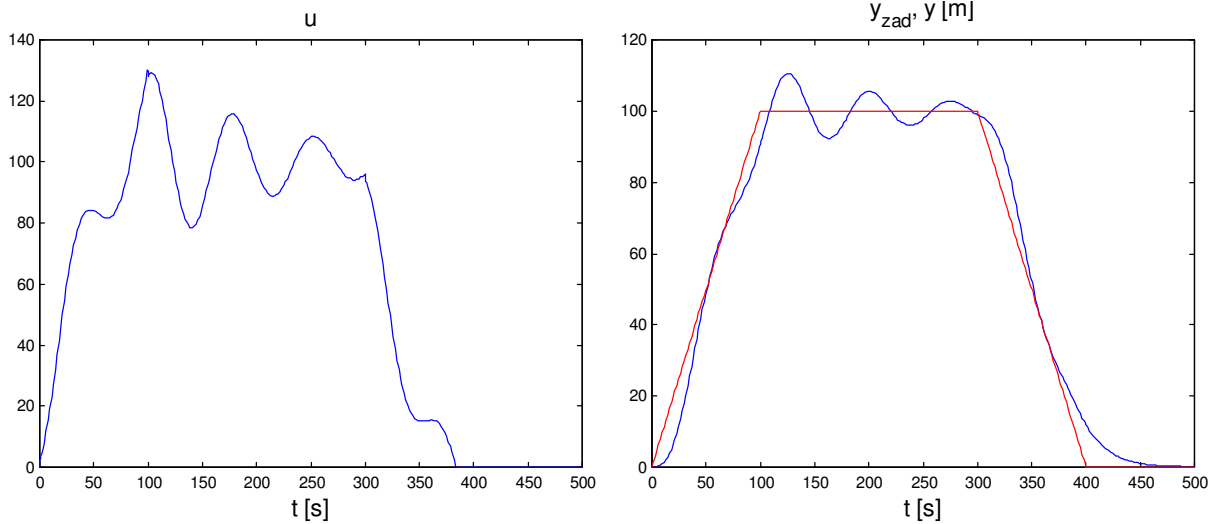
Samolot powinien w ciągu 100 sekund osiągnąć wysokość 100 metrów, przez kolejne 200 sekund utrzymywać stałą wysokość, w ciągu kolejnych 100 sekund wylądować. Do regulacji zastosowano klasyczny regulator PID. Struktura układu regulacji ma postać pokazaną na rys. 1.7, natomiast na rys. 1.8 pokazano szczegółową strukturę regulatora. Regulator PID ma trzy parametry, a mianowicie:  $K_p$  – współczynnik wzmocnienia,  $T_i$  – stała czasowa całkowania (tzw. czas zdwojenia),  $T_d$  – stała czasowa różniczkowania (tzw. czas wyprzedzenia).



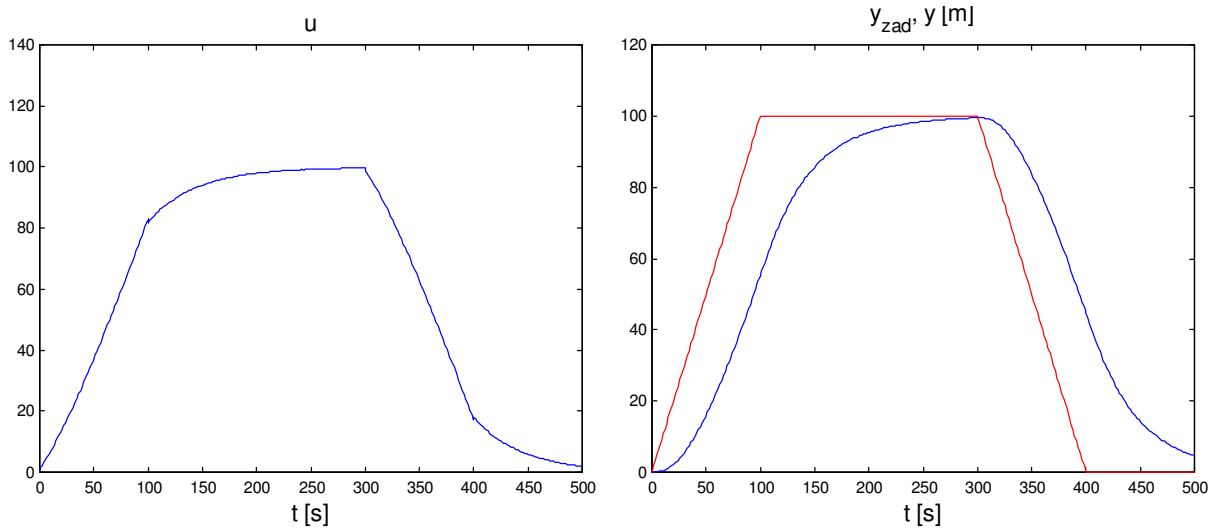
Rys. 1.7. Struktura układu regulacji samolotu (Simulink)



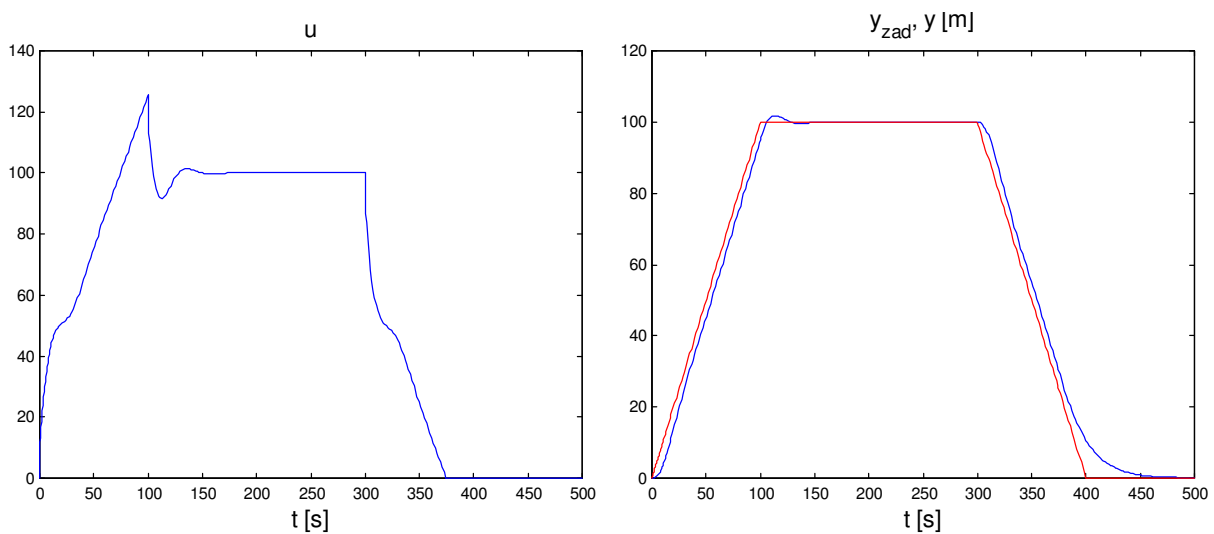
Rys. 1.8. Struktura regulatora PID



Rys. 1.9. Regulacja wysokości samolotu – regulator o działaniu oscylacyjnym



Rys. 1.10. Regulacja wysokości samolotu – regulator zbyt wolny



Rys. 1.11. Regulacja wysokości samolotu – regulator prawidłowo zaprojektowany

Dobrano kilka regulatorów PID. Na rys. 1.9 pokazano sposób działania regulatora o działaniu oscylacyjnym ( $K=1$ ,  $T_i=5$ ,  $T_d=2$ ). Regulator ten pozwala dość szybko osiągnąć założoną

wysokość, ale nie zapewnia precyzyjnej stabilizacji wysokości. Na rys. 1.10 pokazano działanie bardzo wolnego regulatora o nastawach  $K=0,5$ ,  $T_i=25$ ,  $T_d=2$ . Po kilku eksperymentach udało się otrzymać prawidłowo pracujący regulator. Wyniki symulacji dla nastaw  $K=5$ ,  $T_i=25$ ,  $T_d=2$  pokazano na rys. 1.11. Regulator zapewnia szybkie nadążanie za zmianami sygnału zadanego i dobrą stabilizację wysokości.

### Przykład

Rozważanym obiektem regulacji jest pojazd marsjański. Pojazd porusza się w przestrzeni trójwymiarowej, dla uproszczenia rozważa się zadanie regulacji prędkości. Uproszczony model można opisać następującą transmitancją ciągłą [3]

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \quad (1.6)$$

gdzie wyjściem jest prędkość.

Do regulacji prędkości zastosowano algorytm regulacji predykcyjnej typu DMC (ang. Dynamic Matrix Control), który opisano szczegółowo w czwartym rozdziale skryptu. W cyfrowym algorytmie PID bieżący sygnał sterujący obliczany jest na podstawie wartości uchybu regulacji w chwili bieżącej  $k$  oraz chwilach poprzednich  $k-1$ ,  $k-2$

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (1.7)$$

W algorytmie DMC wyznacza się natomiast wektor zmiennych decyzyjnych zawierający sygnały sterujące (lub ich przyrosty) w chwili bieżącej i przyszłości

$$\Delta U(k) = [\Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \Delta u(k+2|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k)]^T \quad (1.8)$$

Aby obliczyć zmienne decyzyjne, w każdej chwili próbkowania rozwiązuje się zadanie minimalizacji pewnego wskaźnika jakości (funkcji kryterialnej)

$$\min_{\Delta U(k)=[\Delta u(k|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k)]^T} \{J(k)\} \quad (1.9)$$

Funkcja celu składa się zazwyczaj z dwóch członów. Pierwszy z nich, zdefiniowany na tzw. horyzoncie predykcji  $N$ , uwzględnia różnice między prognozowaną trajektorią procesu a trajektorią zadaną. Drugi składnik funkcji kryterialnej, zwany członem kary, uwzględnia zmienność wyznaczanej w aktualnej iteracji sekwencji przyszłych wartości sygnałów sterujących. Najczęściej spotykana kwadratowa funkcja celu ma postać

$$J(k) = \sum_{p=1}^N (y^{zad}(k+p|k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \lambda \sum_{p=0}^{N_u} (\Delta u(k+p|k))^2 \quad (1.10)$$

przy czym  $\lambda$  jest współczynnikiem wagowym mającym na celu ograniczenie niekorzystnych skoków sygnału sterującego.

Pomimo tego, że w każdym kroku działania algorytmu wyznacza się  $N_u$  przyrostów sygnału sterującego, do sterowania stosuje się tylko pierwszy z nich

$$u(k) = u(k|k) = \Delta u(k|k) + u(k-1) \quad (1.11)$$

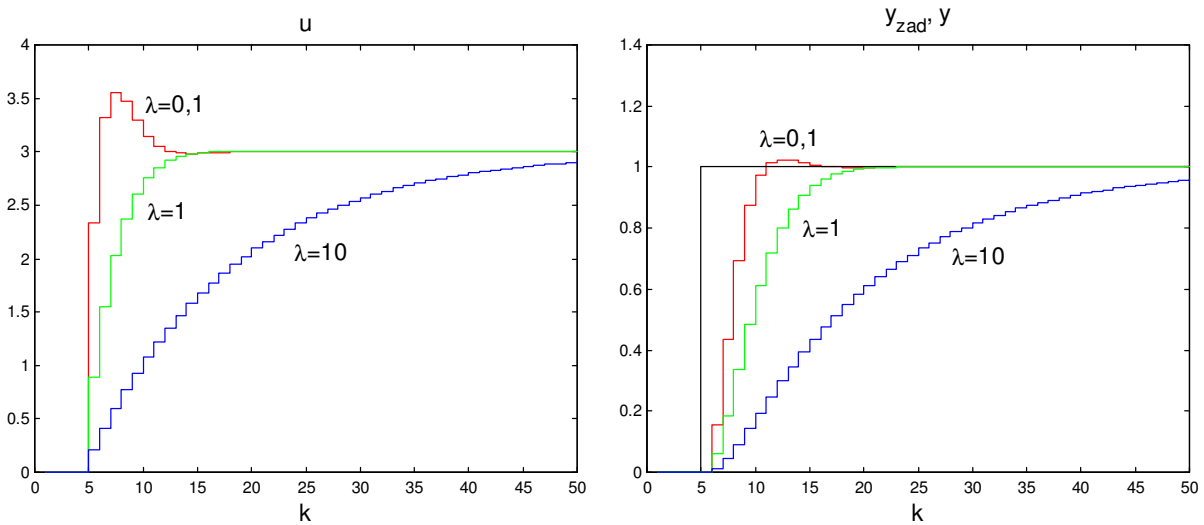
i cała procedura zostaje powtórzona.

Cechą szczególną algorytmów regulacji predykcyjnej jest możliwość uwzględnienia ograniczeń sygnałów wejściowych i wyjściowych. Istniejące ograniczenia są integralną częścią zadania optymalizacji rozwiązywanego w każdej iteracji algorytmu. Zadanie optymalizacji,

dzięki któremu wyznacza się wektor zmiennych decyzyjnych algorytmu (1.8), ma postać

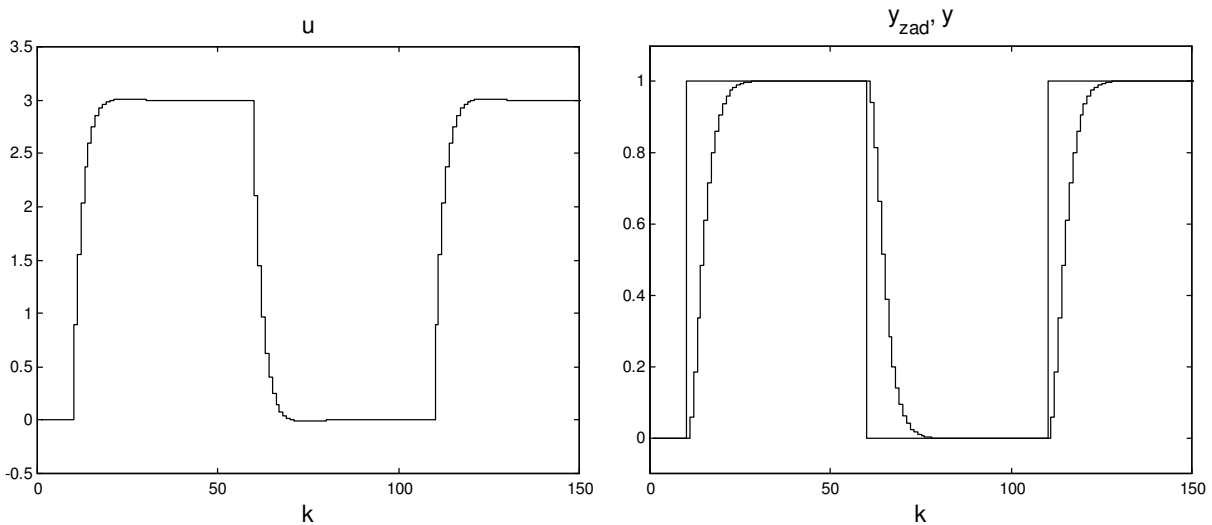
$$\begin{aligned}
 & \min_{\Delta U(k)=[\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+N_u-1|k)]^T} \{J(k)\} \\
 & \text{przy ograniczeniach} \\
 & u^{\min} \leq u(k+p|k) \leq u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \\
 & -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+p|k) \leq \Delta u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \\
 & y^{\min} \leq \hat{y}(k+p|k) \leq y^{\max} \quad \text{dla } p=1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Wyniki symulacji dla różnych wartości współczynnika kary  $\lambda$  przedstawiono na rys. 1.12. Zwiększaniu wartości tego współczynnika powoduje ograniczenie przyrostów sygnału sterującego, a tym samym zmniejszenie szybkości regulacji.



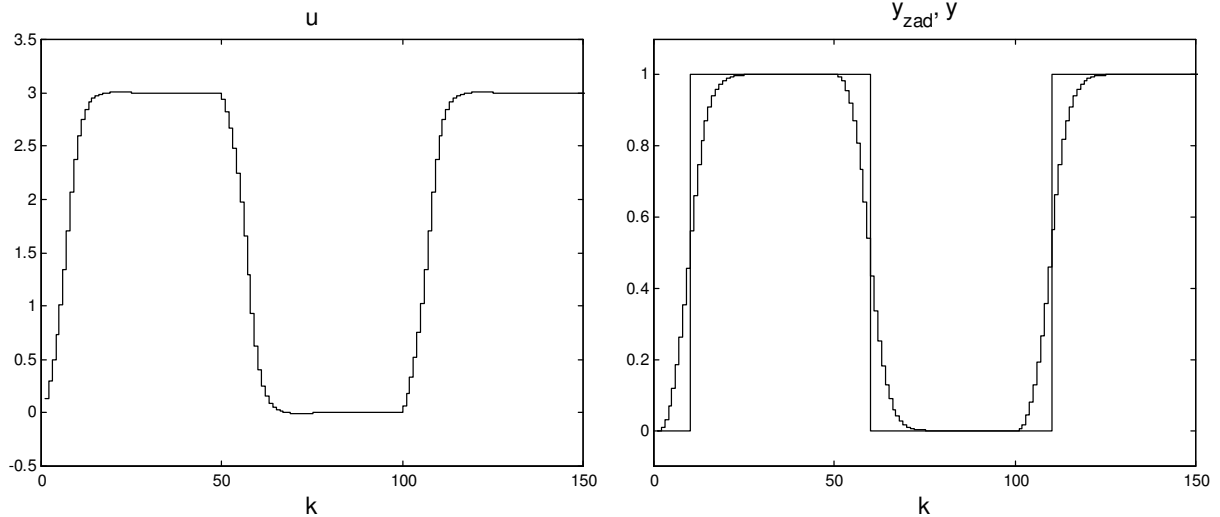
Rys. 1.12. Regulacja prędkości – regulator DMC

Algorytm DMC został przetestowany przy trajektorii zadanej w postaci fali prostokątnej, co pokazano na rys. 1.13. Jeżeli zmiany tej trajektorii występują często, w niektórych aplikacjach może okazać się korzystne uwzględnienie tych zmian na horyzoncie predykcji. Algorytm taki z wyprzedzeniem reaguje na zmiany trajektorii zadanej co pokazano na rys. 1.14.

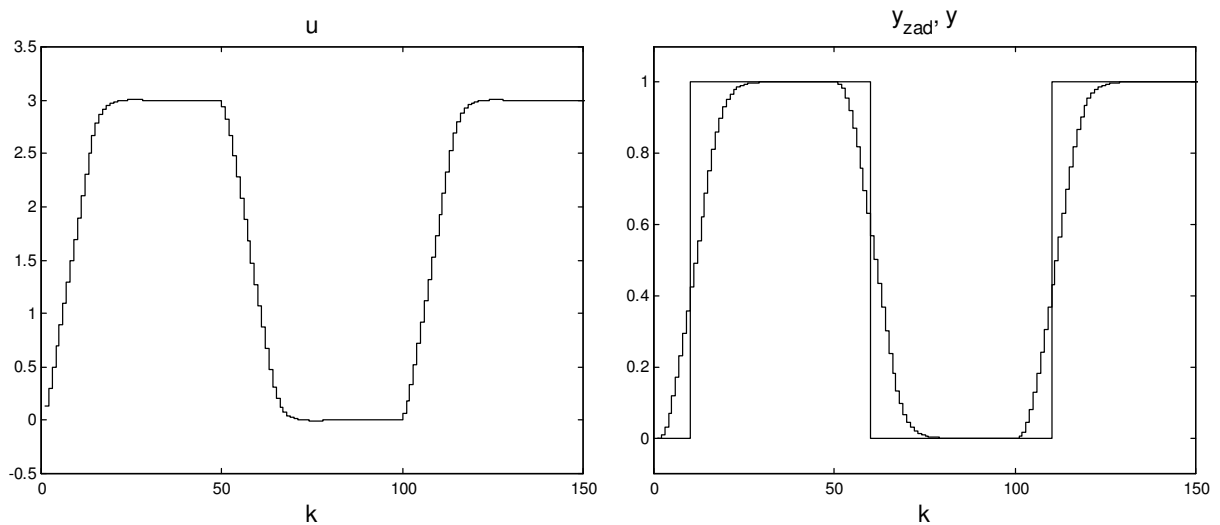


Rys. 1.13. Regulacja prędkości – regulator DMC, trajektoria zadana stała na horyzoncie predykcji

W niektórych sytuacjach bardzo istotne jest zachowanie ograniczeń, np. ze względów ekonomicznych lub bezpieczeństwa. Oczywiście, gwałtowne skoki sygnału sterującego można ograniczyć zwiększając wartość współczynnika  $\lambda$ , postępowanie takie nie gwarantuje jednak dokładnego spełnienia ograniczeń. Dlatego uwzględniono dodatkowe ograniczenie  $\Delta u^{max}=0,2$ , wyniki symulacji pokazano na rys. 1.15.



Rys. 1.14. Regulacja prędkości – regulator DMC, trajektoria zadana zmienna na horyzoncie predykcji



Rys. 1.15. Regulacja prędkości – regulator DMC z ograniczeniem  $\Delta u^{max}=0,2$ , trajektoria zadana zmienna na horyzoncie predykcji

### 1.3. Sterowanie w strukturze warstwowej

Pierwotnie postawione cele sterowania są zwykle natury ekonomicznej – osiągnięcie maksymalnego zysku przy uwzględnieniu istniejących ograniczeń (rozmiar produkcji, zużycie energii itp.) [14,15]. Na przykład, w rafinerii ropy naftowej znajduje się kilka kolumn destylacyjnych, które różnią się zdolnościami produkcyjnymi, jakością produktu, kosztami pracy. Rafineria działa w zmieniających się warunkach otoczenia rynkowego (zmienna jakość i cena surowca, wielkość zbytu, cena produktów). Można zadać szereg ważnych pytań:

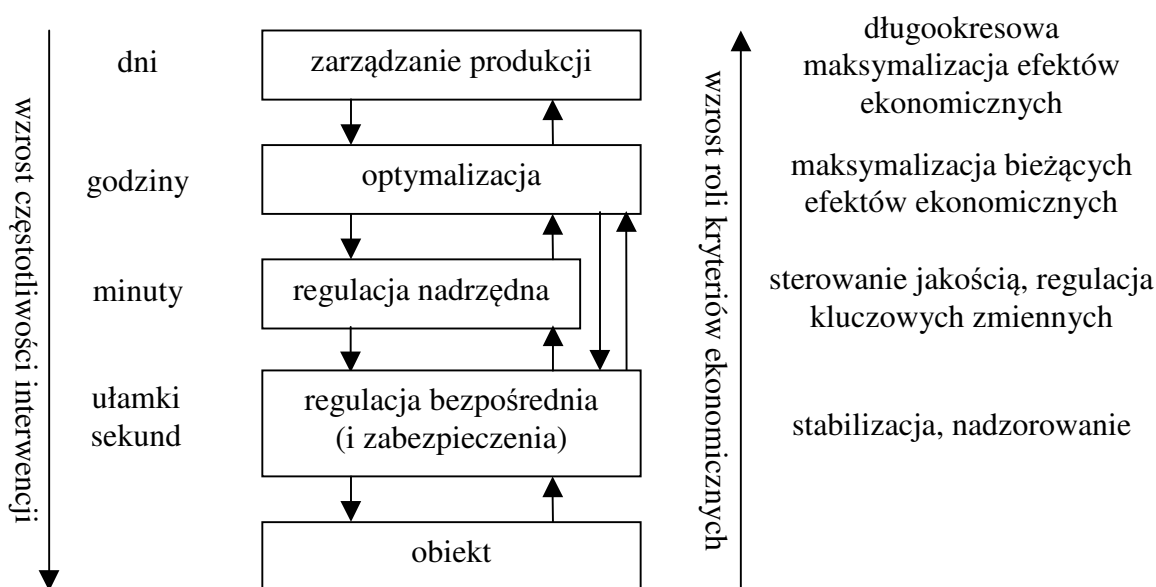
1. Jaki produkt w danej chwili ma produkować  $n$ -ta kolumna?

2. Jaka ma być intensywność produkcji każdej z kolumn?
3. Jakie powinny być wartości zadane układów regulacji poszczególnych kolumn?
4. Jakie zastosować algorytmy regulacji?

Typowe obiekty przemysłowe są bardzo złożone (wielowymiarowe o silnych oddziaływaniach skrośnych), zwykle rozpatruje się całe linie technologiczne, a nie poszczególne procesy. Sterowanie scentralizowane, choć teoretycznie możliwe, jest bardzo trudne, ma szereg wad:

1. Trudność zapewnienia odpowiedniego bezpieczeństwa procesu.
2. Trudność niezbędnego uwzględnienia człowieka w nadzorze i reakcji na awarie.
3. Konieczność jednoczesnego przetwarzania bardzo dużych ilości informacji.

Dlatego też w sterowaniu złożonymi obiektami, podobnie jak w zarządzaniu, stosuje się strukturę warstwową (hierarchiczną) pokazaną na rys. 1.16 [4,14,15]. Istotą podejścia warstwowego jest dekompozycja podstawowego celu sterowania na kilka znacznie mniej złożonych zadań cząstkowych, które są wzajemnie ze sobą powiązane. Każde z tych zadań związane jest z przetwarzaniem mniejszej ilości informacji i realizacją tylko jednego celu cząstkowego.



Rys. 1.16. Warstwowa struktura sterowania

W strukturze warstwowej realizacja podstawowego, ekonomicznego celu sterowania wiąże się nierozdzielnie z realizacją celów szczegółowych, z których najważniejsze są następujące:

1. Zapewnienie bezpiecznego przebiegu procesów technologicznych w sterowanym obiekcie, tzn. ograniczenie do akceptowalnego poziomu możliwości wystąpienia awarii i zjawisk niekontrolowanych.
2. Zapewnienie odpowiednich cech wyjść obiektu (np. jakości produktów), tzn. utrzymywanie zmiennych wyjściowych w obszarze wartości dopuszczalnych.
3. Optymalizacja bieżącej efektywności działania obiektu (maksymalizacja zysku przy ograniczeniach surowcowych i energetycznych lub minimalizacja kosztów przy założonym poziomie produkcji).

Dwa pierwsze z powyższych celów również mają podłoże natury ekonomicznej, ponieważ wystąpienie awarii prowadzi do bardzo dużych strat. Analogicznie, niedotrzymanie parametrów jakości produktów prowadzi do konieczności obniżenia ceny lub jego powtórnego prze-



robienia. Najważniejszym celem sterowania jest więc bezpieczeństwo obiektu, w drugiej kolejności trzeba dbać o jakość produktów, a dopiero po zapewnieniu realizacji tych dwóch celów można przystąpić do bieżącej optymalizacji ekonomicznej.

Zasadniczą przyczyną powszechnego stosowania warstwowych struktur sterowania jest fakt, że podział (dekompozycja) wyjściowego, całościowego problemu sterowania na prostsze, funkcjonalnie między sobą wzajemnie powiązane podzadania, upraszcza projektowanie, sterowanie i nadzorowanie procesu. Projektuje się mianowicie i nadzoruje układy sterowania dla poszczególnych warstw, realizujące wydzielone cele cząstkowe, a nie jeden centralny układ sterowania dla całego procesu

*Warstwa regulacji bezpośredniej (i zabezpieczeń)* ma na celu zapewnienie bezpiecznego przebiegu procesu. Tylko ona ma bezpośredni dostęp do obiektu – może ustawiać wartość sygnałów sterujących, jej okres interwencji jest najkrótszy. Dla procesów większej skali warstwa ta realizowana jest przez tzw. *rozproszone systemy sterowania* (ang. DCS – Distributed Control System), które są w istocie kompleksowymi komputerowymi systemami pomiarów, regulacji i zabezpieczeń, wyposażonymi z reguły we własne zintegrowane pakiety typu SCADA do wizualizacji, nadzoru i archiwizacji danych. Do realizacji zadania regulacji i zabezpieczeń dla obiektów mniejszej skali można zastosować *sterownik programowalny* (ang. PLC – Programmable Logic Controller), regulator wielofunkcyjny lub nawet komputer PC.

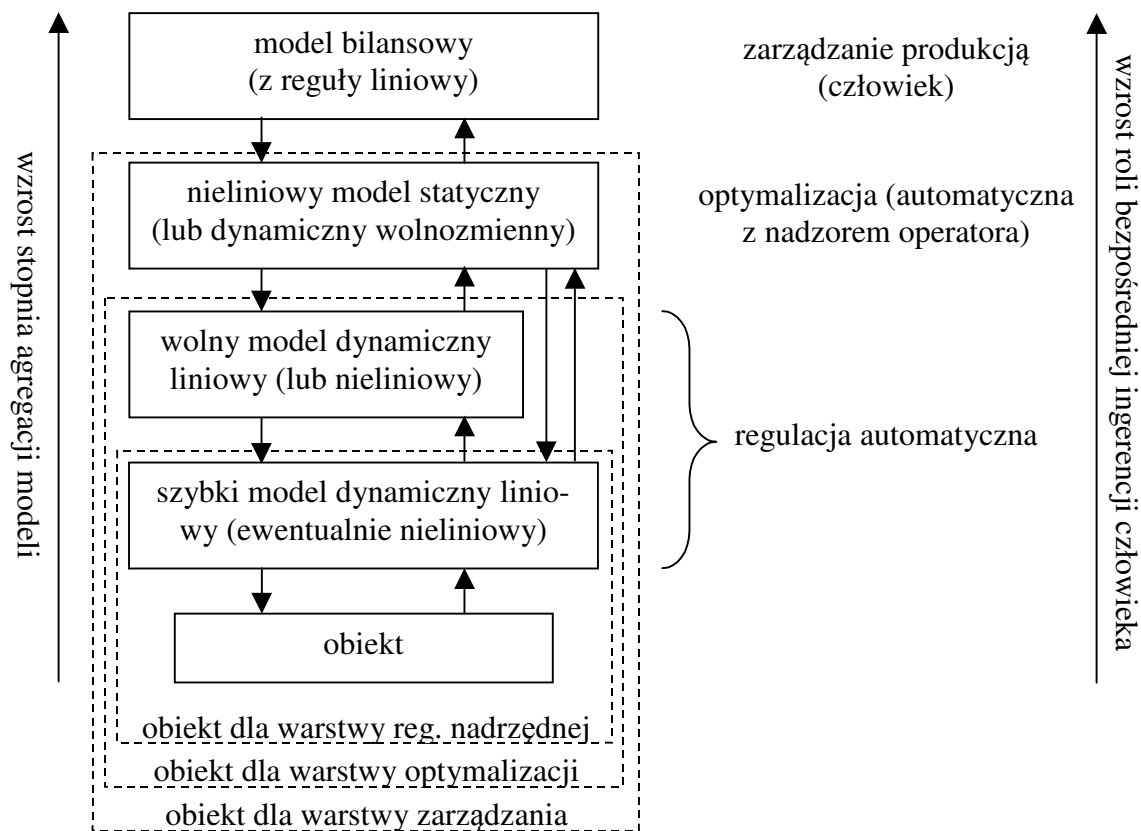
Algorytmy regulacji bezpośredniej powinny być niezawodne i stosunkowo proste, dlatego też wciąż dominują struktury PID. Jeżeli ich zastosowanie prowadzi do niespełnienia wymagań stosuje się algorytmy PID z korektą od mierzonego zakłócenia (ang. feedforward), nieliniowe algorytmy PID ze zmiennym wzmocnieniem, uzależnionym od punktu pracy (ang. gain scheduling), algorytmy PID o strukturze Smitha (dla obiektów z dużym opóźnieniem), nieliniowe rozmyte algorytmy PID (ang. Fuzzy Logic PID Controllers) oraz algorytmy regulacji predykcyjnej (przeważnie liniowe).

Celem *regulacji nadrzędnej* jest kontrolowanie wolniej zmiennych wielkości decydujących o jakości produkcji, warstwa ta wyznacza wartości zadane dla regulatorów warstwy regulacji bezpośredniej, a nie wartości sygnałów sterujących procesem. Częstotliwość interwencji tej warstwy jest mniejsza. Na przykład, dobra stabilizacja (mała wariancja uchybu regulacji) stężenia zanieczyszczeń w produkcie kolumny destylacyjnej pozwala prowadzić proces w punkcie pracy leżącym blisko maksymalnej dopuszczalnej wartości tego zanieczyszczenia. Wytwarza się wówczas produkt spełniający wymagania, ale nieco bardziej zanieczyszczony, co ogranicza koszty produkcji. Jako algorytmy regulacji nadrzędnej stosuje się zwykle liniowe lub nieliniowe algorytmy regulacji predykcyjnej.

W przeszłości nie wyróżniano warstwy regulacji nadrzędnej. Dopiero rozwój techniki komputerowej, umożliwiając realizację złożonych obliczeniowo zaawansowanych algorytmów regulacji wykorzystujących na bieżąco model procesu (np. algorytmy regulacji predykcyjnej) spowodował wyodrębnienie tej warstwy. Należy jednak podkreślić, że nie zawsze ona występuje. Nie trzeba jej stosować, gdy nie ma potrzeby regulacji nadrzędnej. Po drugie, nie musi ona rozdzielać w pełni warstwy regulacji bezpośredniej od warstwy optymalizacji, ponieważ część wartości zadanych dla regulatorów warstwy niższej może być wyznaczana i bezpośrednio przekazywana z warstwy optymalizacji. Nie zalicza się też do wyróżnionej warstwy regulacji nadrzędnej regulatorów głównych standardowych kaskadowych układów regulacji.

Celem *warstwy optymalizacji* jest wyznaczenie optymalnych wartości zadanych dla obu warstw regulacji. Wartości te wynikają zwykle z optymalizacji pewnej funkcji celu natury ekonomicznej. Rozwiązywane jest zwykle zadanie optymalizacji statycznej. Warstwa optymalizacji może działać w trybie synchronicznym lub asynchronicznym. W tym drugim przypadku powtórne rozwiązywanie zadania optymalizacji punktu pracy jest uzależnione od obser-

wowanych lub estymowanych na bieżąco zmian zakłóceń lub jest wywoływane zmianami parametrów produkcji przekazywanymi z warstwy planowania.



Rys. 1.17. Modelowanie obiektu sterowanego w strukturze warstwowej

W ostatnich latach obserwuje się integrację oprogramowania do predykcyjnej regulacji nadrzędnej i optymalizacji punktu pracy. Algorytmy regulacji nadrzędnej działają w oparciu o rozwiązywane w każdej chwili próbkowania zadanie optymalizacji sterowań. Algorytmy takie wymagają dużych mocy obliczeniowych i dobrego modelu. Zbierane na bieżąco z systemu DCS dane mogą posłużyć do dostrajania lub adaptacji modelu.

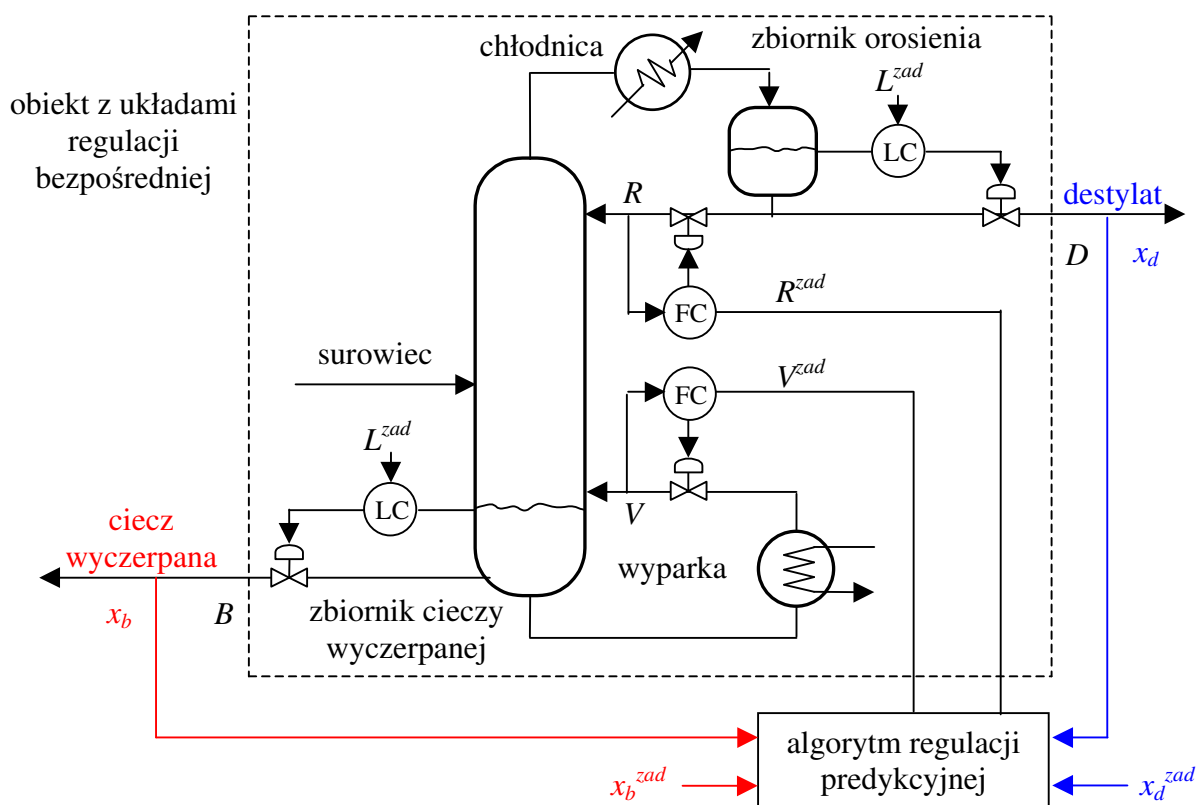
Zadaniem *warstwy planowania produkcji* jest ustalenie warunków pracy warstwy optymalizacji, tzn. celów i parametrów produkcji oraz istniejących ograniczeń. Warstwa ta uwzględnia ekonomiczne otoczenie procesu, reagując odpowiednio na zamówienia dotyczące asortymentu, jakości i wielkości produkcji, ceny zbytu oraz inne wielkości przychodzące z otoczenia rynkowego lub środowiska dużego zakładu.

Projektowanie algorytmu sterowania danej warstwy wiąże się z odpowiednim modelowaniem obiektu dla potrzeb tej warstwy. W strukturze warstwowej każda z warstw steruje w istocie tym samym obiektem, ale inaczej (rys. 1.17). Warstwa regulacji bezpośredniej ma dostęp do zmiennych manipulowanych obiektem, otrzymuje pomiary wszystkich dostępnych sygnałów istotnych z punktu widzenia stabilizacji i bezpiecznego prowadzenia procesu. Warstwa regulacji nadrzędnej „widzi” obiekt łącznie z układami regulacji bezpośredniego działania, dla których wyznacza decyzje w postaci wartości zadanych. Jest to już nieco inny obiekt, o wolniejszej dynamice. Analogicznie, warstwa optymalizacji „postrzega” obiekt łącznie ze wszystkimi warstwami regulacji. Dlatego też modelowanie obiektu musi być w każdej warstwie inne. Im wyższa warstwa, tym model mniej szczegółowy, z coraz wolniejszą dynamiką lub statyczny.

### Przykład

Rozważanym obiektem regulacji jest pokazana na rys. 1.18 kolumna destylacyjna służąca do rozdzielania surowca będącego mieszaniną metanolu (ok. 50 %) i wody [8]. Celem destylacji jest oczyszczenie metanolu, produkt destylacji (destylat) powinien być praktycznie czystym metanolem (90-95 %), podczas gdy produkt uboczny (ciecz wyczerpana) powinien zawierać niewielkie ilości alkoholu (5-10 %).

W kolumnie następuje jednocześnie przemieszczanie się fazy gazowej (ku górze) i ciekłej (ku dołowi). Podczas przepływu pary przez ciecz znajdującą się na półkach kolumny następuje zmiana składu substancji. W dolnej części instalacji znajduje się zbiornik, spływający do niego strumień zawiera niewielkie ilości metanolu. Ciecz ta jest następnie wykorzystywana do wytworzenia w wyparce strumienia oparów  $V$ . Jej nadmiar jest odprowadzany ze zbiornika w postaci strumienia cieczy wyczerpanej  $B$ . Zawierająca niewielkie ilości wody faza gazowa dociera do szczytu kolumny. Zostaje ona skroplona i odprowadzona w postaci strumienia produktu  $D$ . Część powstałej cieczy jest zwracana do kolumny w postaci strumienia orosienia  $R$ .



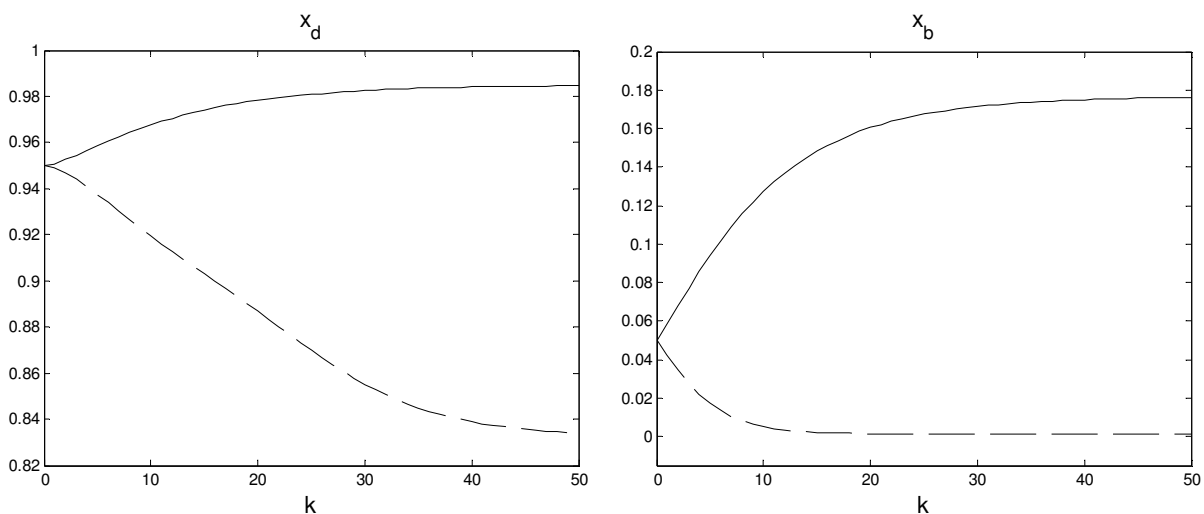
Rys. 1.18. Schemat kolumny destylacyjnej

Do sterowania kolumny destylacyjnej zastosowano strukturę warstwową. W celu *stabilizacji poziomów* w zbiorniku cieczy wyczerpanej oraz zbiorniku orosienia stosuje się konwencjonalne szybkie jednowymiarowe regulatory PID, sterujące strumieniami  $B$  oraz  $D$ . Wartości zadane tych regulatorów wynikają ze względów technologicznych i wymogów bezpieczeństwa (np. nie można dopuścić do osuszenia kolumny). Kolejne dwa szybkie regulatory PID służą do ustalania wartości strumieni  $R$  oraz  $V$ . Cztery algorytmy PID tworzą warstwę regulacji bezpośredniej, częstotliwość interwencji tych regulatorów mierzona jest w sekundach.

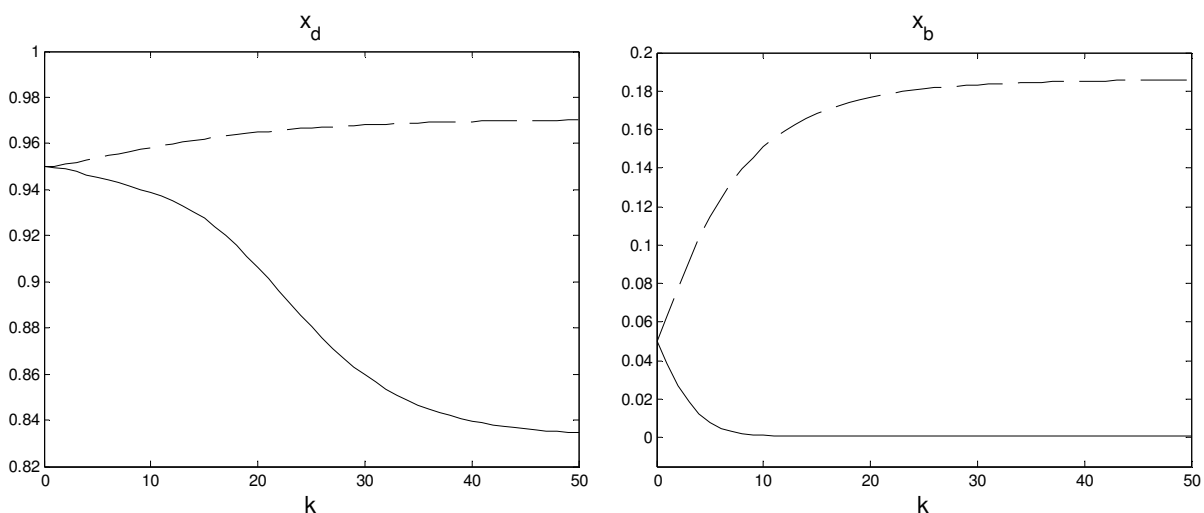
Do *stabilizacji wartości kluczowych wielkości* stężenia produktu destylacji ( $x_d$ ) oraz produktu ubocznego ( $x_b$ ), a więc zmiennych decydujących o jakości produkcji, stosuje się dwuwymiarowy algorytm regulacji predykcyjnej, obliczający wartości sygnałów zadanych stru-

mieni oroszenia  $R$  oraz pary  $V$ . Algorytm ten bezpośrednio nie steruje zmiennymi procesowymi ( $R$ ,  $V$ ), lecz odpowiadającymi im wartościami zadanym ( $R^{zad}$ ,  $V^{zad}$ ). Jego okres interwencji (1 min.) jest znacznie dłuższy od okresu interwencji zastosowanych algorytmów PID, podczas projektowania algorytmu predykcyjnego modeluje się kolumnę destylacyjną łącznie z regulatorami warstwy najniższej. Aktualne wartości zadane składów obliczane są w warstwie optymalizacji w wyniku maksymalizacji statycznej funkcji zysku.

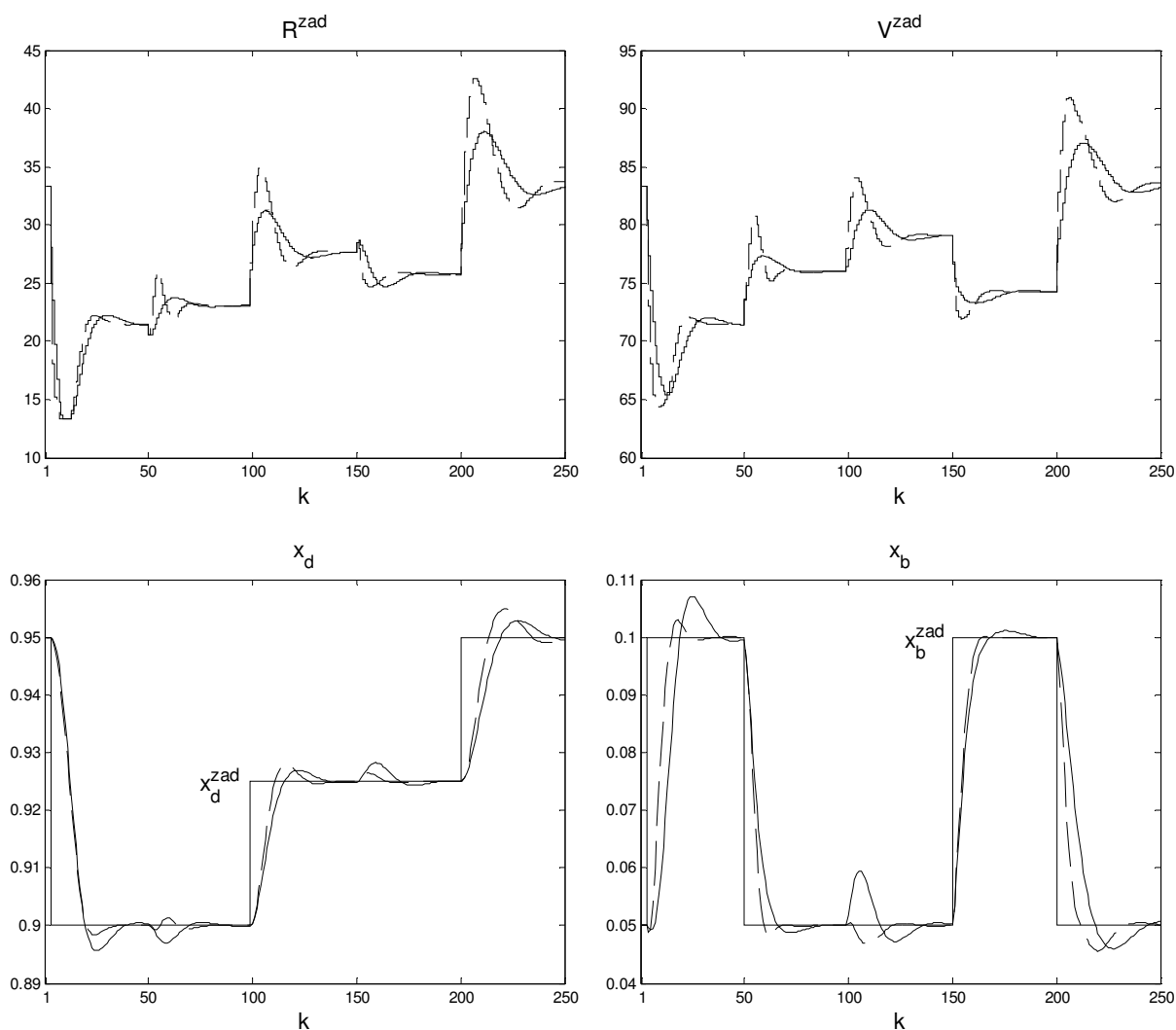
Odpowiedzi kolumny destylacyjnej wraz z układami regulacji bezpośredniej (czyli obiekt „widziany” przez algorytm regulacji predykcyjnej) spowodowane skokowymi zmianami sygnałów sterujących ( $R^{zad}$ ,  $V^{zad}$ ) o  $\pm 10$  kmol/h w chwili  $k=0$  pokazano na rys. 1.19 i rys. 1.20. Charakter uzyskanych przebiegów świadczy o występowaniu w obiekcie bardzo silnych sprzężeń skrośnych. Uzyskane odpowiedzi skokowe są niesymetryczne. Świadczy to o występowaniu zarówno nieliniowości statycznych jak i nieliniowości o charakterze dynamicznym (charakter przebiegów przejściowych jest zależny od punktu pracy).



Rys. 1.19. Reakcja kolumny destylacyjnej na skokowe zwiększenie (linia ciągła) i zmniejszenie (linia przerywana) wartości zadanej strumienia oroszenia  $R^{zad}$  o 10 kmol/h



Rys. 1.20. Reakcja kolumny destylacyjnej na skokowe zwiększenie (linia ciągła) i zmniejszenie (linia przerywana) wartości zadanej strumienia pary  $V^{zad}$  o 10 kmol/h



Rys. 1.21. Wyniki symulacji kolumny destylacyjnej: algorytm liniowy (linia ciągła) oraz algorytm nieliniowy (linia przerywana)

Zbadano efektywność dwóch algorytmów predykcyjnych, a mianowicie liniowego (bazującego na modelu liniowym) i nieliniowego (z modelem nieliniowym w postaci sieci neuronowej) [8]. Oba algorytmy działają poprawnie przy dużych zmianach punktu pracy (rys. 1.21), choć można zauważyć, że algorytm liniowy znacznie gorzej stabilizuje składy niż algorytm nieliniowy. Jest rzeczą charakterystyczną, że przy zmianach punktu pracy (wartości zadanych składów produktów destylacji) dynamika zmian sygnałów sterujących w algorytmie nieliniowym jest znacznie większa niż w algorytmie liniowym. Jest to spowodowane tym, że algorytm nieliniowy dysponuje bardziej dokładnym modelem, a więc może wykorzystać więcej informacji o naturze procesu. Z kolei algorytm liniowy dysponuje modelem uproszczonym, generowane sterowania są dość zachowawcze, natomiast przebiegi wyjściowe nieco wolniejsze, charakteryzują się większym przeregulowaniem.

#### 1.4. Wielokryterialna ocena jakości regulacji

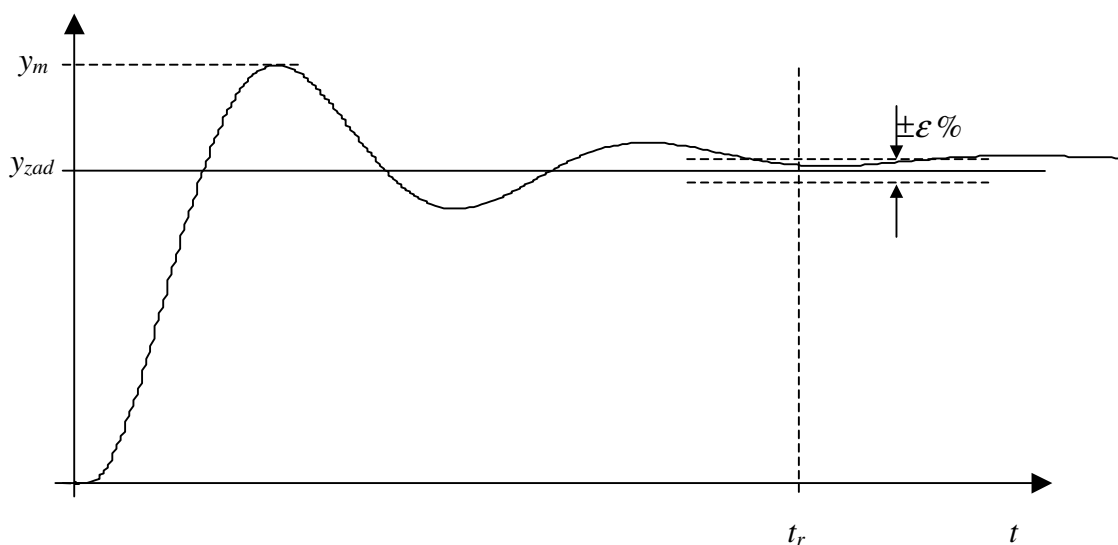
Projektowanie układów regulacji jest w rzeczywistości zadaniem optymalizacji wielokryterialnej z ograniczeniami. Istnieje kilka kryteriów cząstkowych, jakość regulacji algorytmu jest wypadkową tych kryteriów uwzględnionych w kontekście wymagań dotyczących konkretnej aplikacji. Co więcej, projektant algorytmu musi zdawać sobie sprawę z istnienia dodatkowych kryteriów, takich jak niezawodność, koszt oraz odporność na czynniki zewnętrzne. W ogólnie-

ści, głównymi celami prawidłowo zaprojektowanego układu regulacji są: dokładność regulacji i odporność układu regulacji.

Istnieje kilka kryteriów dotyczących dokładności regulacji. Projektowany algorytm powinien zapewniać regulację o wystarczająco krótkim czasie, odpowiednio mały uchyb w stanie nieustalonym przy typowym wymuszeniu (np. skok sygnału zadanego), dopuszczalne przeregulowanie, natomiast w stanie ustalonym regulator powinien zapewnić zerowy (lub dopuszczalnie mały) uchyb ustalony.

W zastosowaniach praktycznych szczególnie przydatne są tzw. bezpośrednie oceny dokładności (jakości) regulacji. Dotyczą one odpowiedzi układu regulacji na określoną (najczęściej skokową) zmianę wartości zadanej lub zakłócenia. Najważniejszymi kryteriami, pozwalającymi ocenić jakość regulacji, są: czas regulacji (ozn.  $t_r$ ) oraz przeregulowanie (ozn.  $\kappa$ ). Zwykle wymaga się przeregulowania  $\kappa=5\ldots 10\%$  przy minimalnym czasie regulacji  $t_r$ . Przyjmuje się, że czas regulacji liczony jest od wystąpienia zmiany sygnału zadanego (lub zakłócenia) do chwili, aż różnica między wielkością wyjściową  $y$  a wartością zadaną zmaleje poniżej pewnej granicy, na przykład przyjmuje się  $\varepsilon=5\%$ . Na rys. 1.22 przedstawiono definicję czasu regulacji, natomiast przeregulowanie określa się ze wzoru

$$\kappa = \frac{y_m - y_{zad}}{y_{zad}} 100\% \quad (1.13)$$



Rys. 1.22. Sposób wyznaczania parametrów przebiegu przejściowego

Porównując różne algorytmy regulacji (np. liniowy z nieliniowym), bardzo przydatne są całkowe wskaźniki jakości regulacji. Najczęściej wykorzystuje się kryterium jakości uwzględniający kwadrat uchybu regulacji

$$J_1 = \int_0^{t_r} (e(t))^2 dt = \int_0^{t_r} (y^{zad}(t) - y(t))^2 dt \quad (1.14)$$

W przypadku układów dyskretnych wskaźnik jakości regulacji zdefiniowany jest jako

$$J_1 = \sum_{k=1}^{k_r} (e(k))^2 = \sum_{k=1}^{k_r} (y^{zad}(k) - y(k))^2 \quad (1.15)$$

gdzie  $k_r$  jest dyskretnym czasem regulacji.

Jeżeli na układ regulacji nałożone są dodatkowe ograniczenia dotyczące wartości i szybkości zmian sygnału sterującego, rozpatruje się wskaźnik jakości

$$J_2 = \int_0^{t_r} ((y^{zad}(t) - y(t))^2 + \lambda(u_u - u(t)))dt \quad (1.16)$$

gdzie  $u_u$  jest ustaloną wartością sygnału sterującego odpowiadającą stanowi ustalonemu, natomiast  $\lambda$  jest współczynnikiem kary.

Istnieją specjalne metody doboru nastaw algorytmu PID, które prowadzą do minimalizacji całkowych kryteriów jakości regulacji. Metody te wymagają znajomości modelu obiektu (np. w postaci jedno lub dwuinercyjnej z opóźnieniem) [5,10,11].

Zarówno zmiany sygnału wartości zadanej, wpływy otoczenia, a także zjawiska zachodzące w samych obiektach powodują, że zmieniają one swoje parametry, a niekiedy nawet strukturę. Dobry algorytm regulacji należy projektować w taki sposób, aby układ regulacji pozostał stabilny dla pewnego, przyjętego z góry, zbioru parametrów obiektu oraz ewentualnie zbioru struktur. Choć w ogólności przyjęcie właściwego zbioru parametrów nie jest zadaniem łatwym, w niektórych przypadkach można określić zmiany wzmocnienia statycznego obiektu, niekiedy również dominującej stałej czasowej inercji lub opóźnienia. Zaprojektowany układ regulacji należy więc sprawdzić nie tylko dla nominalnych wartości parametrów obiektu, sprawą kluczową jest stabilność przy zmianach właściwości obiektu. Należy podkreślić, że niektóre kombinacje zmian parametrów mogą występować szczególnie często. Na przykład, zmniejszenie drożności rur powoduje wzrost opóźnienia i zmniejszenie współczynnika wzmocnienia. Znaczne zmniejszenie opóźnienia względem wartości nominalnej jest z kolei stosunkowo mało prawdopodobne.

Układ regulacji powinien być zaprojektowany w taki sposób, aby pracował stabilnie pomimo zmian właściwości obiektu. Prosty i przejrzysty sposób określania odporności układu regulacji polega na wyznaczeniu obszarów stabilności w przestrzeni parametrów obiektu. Rozpatrywanymi parametrami są najczęściej: współczynnik wzmocnienia  $K$  i opóźnienia  $T_0$ . Zmiany stałych czasowych uwzględniane są znacznie rzadziej. Porównanie kilku różnych algorytmów regulacji ze względu na odporność polega na porównaniu wielkości i kształtu obszarów stabilności dla tego samego obiektu. Projektowany algorytm rozpatruje się zawsze w kontekście konkretnej aplikacji. Na przykład, zupełnie inne cechy ma algorytm dopuszczający duże zmiany współczynnika wzmocnienia niż algorytm odporny na zmiany opóźnienia.

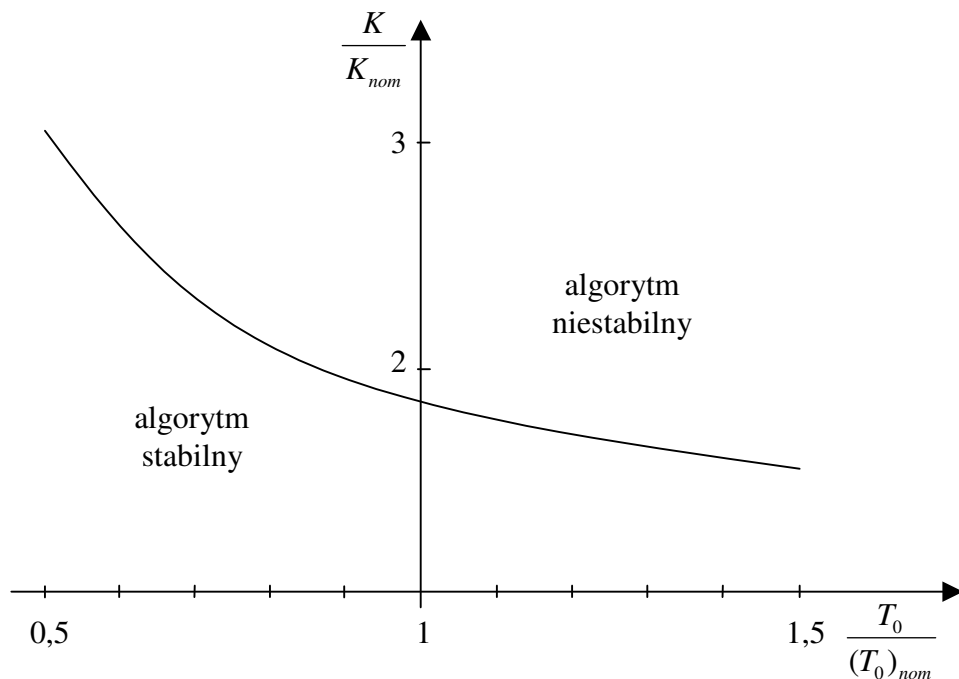
## Przykład

Dysponując modelem obiektu regulacji

$$G(s) = \frac{Ke^{-sT_0}}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \quad (1.17)$$

gdzie nominalne wartości parametrów wynoszą  $K=2$ ,  $T_0=8$ ,  $T_1=10$ ,  $T_2=5$ , dobrano nastawy algorytmu PID korzystając ze wzorów Zieglera i Nicholasa [5].

Na rys. 1.23 przedstawiono obszar stabilności układu regulacji. Na osiach wykresu umieszczono zmiany odchylenia parametrów obiektu od ich wartości nominalnych. Nominalne wartości parametrów (modelowe) oznaczono przez  $K_{nom}$  oraz  $(T_0)_{nom}$ , natomiast wartości rzeczywiste (proces) oznaczone są przez  $K$  oraz  $T_0$ . Zgodnie z oczekiwaniem, zmniejszenie opóźnienia  $T_0$  zwiększa dopuszczalny zakres zmian współczynnika wzmocnienia  $K$ . Możliwe jest wówczas zwiększenie współczynnika wzmocnienia regulatora PID, co prowadzi do przyspieszenia przebiegów przejściowych.



Rys. 1.23. Obszary stabilności algorytmu regulacji przy zmianach współczynnika wzmocnienia i opóźnienia obiektu

#### 1.4.1. Konflikt między dokładnością i odpornością

Typowe zadanie, które rozwiązuje projektant układu regulacji są następujące:

1. Określona jest wymagana jakość regulacji (wyrażona za pomocą czasu regulacji i prze-regulowania lub całkowitego kryterium regulacji).
2. Dane są minimalne zapasy stabilności lub inna charakterystyka odporności układu na zmiany parametrów i struktury obiektu.

Należy zaprojektować algorytm regulacji, który będzie w stanie sprostać postawionym wymaganiom.

Postawione powyżej zadanie projektowania wymaga uzyskania odpowiedniego kompromisu między dokładnością a odpornością układu regulacji. Najprostszy sposób zwiększenia odporności układu polega na takiej zmianie parametrów algorytmu regulacji, aby wykluczyć lub minimalizować możliwość destabilizacji układu. Niestety, zwiększenie zapasów stabilności prowadzi do spowolnienia regulacji.

W zastosowaniach praktycznych istotne są również następujące zagadnienia: przebieg sygnału sterującego (wartość, szybkość zmian), wpływ szumu pomiarowego, wpływ nieliniowości oraz opóźnienie wnoszone przez regulator.

Szybkie zmiany sygnału sterującego są w praktyce niedopuszczalne ze względu na skończoną szybkość ruchu elementów wykonawczych oraz możliwość uszkodzenia obiektu. Analogicznie, ze względu na ograniczony zakres ruchu, niedopuszczalne są duże wartości sygnału sterującego. W niektórych algorytmach regulacji (np. predykcyjnych) istnieje możliwość bezpośredniego uwzględnienia ograniczeń, zarówno sygnałów wejściowych jak i wyjściowych obiektu.

Pomiarom zwykle towarzyszą zakłócenia, które w niekorzystnym przypadku mają postać zbliżoną do białego szumu. Szum ten, oddziałując na wejście regulatora, może być nadmiernie wzmacniany przez bloki różniczkujące zawarte w algorytmie regulacji. W najmniej korzystnym przypadku może więc zdarzyć się, że stosunkowo niewielki, szeroko-pasmowy



szum pomiarowy spowoduje chaotyczne, gwałtowne zmiany sygnału sterującego. Jest to oczywiście sytuacja niepożądana.

Biały szum działający na wejście układu dynamicznego jakim jest regulator powoduje przypadkowe wahania sygnału sterującego. Wahania te są z reguły niekorzystne, bowiem mogą, między innymi, prowadzić do szybkiego zużywania się elementów wykonawczych. Algorytmy regulacji przydatne do celów praktycznych powinny charakteryzować się nie tylko odpowiednio dużą dokładnością regulacji, lecz także powinny być możliwie odporne na występowanie wejściowego szumu pomiarowego. Oznacza to, na przykład, że szum pomiarowy nie powinien powodować zbyt dużych, przypadkowych ruchów elementów wykonawczych. Powyższe wymagania prowadzą do konfliktu, ponieważ dokładna (szybka) regulacja wymaga stosowania układów różniczkujących, które wzmacniają szum pomiarowy.

Nasycenia należą do nieliniowości najczęściej występujących w układach regulacji. Mogą one powodować znaczne pogorszenie procesów przejściowych, a nawet destabilizować układ regulacji. Należy zawsze pamiętać, że liniowe modele procesów i elementów wykonawczych, które bardzo często wykorzystuje się podczas projektowania układu regulacji, są jedynie przybliżeniem znacznie bardziej złożonej rzeczywistości, do opisanie której należy zastosować model nieliniowy.

Jeżeli algorytm regulacji jest zbyt złożony lub sprzęt obliczeniowy niewłaściwie dobrany, czas obliczeń sygnału sterującego może być niedopuszczalnie długi. Należy więc projektować algorytm regulacji w taki sposób, aby zapewniając wymaganą jakość regulacji mógł być efektywnie zaimplementowany przy wykorzystaniu dostępnego sprzętu (np. sterownika PLC).

W przeważającej liczbie przypadków, jedynym sposobem oceny projektowanego układu regulacji jest przeprowadzenie właściwie zaplanowanych i wykonanych symulacji komputerowych. Bardzo często w celu oceny działania konkretnego algorytmu przyjmuje się, jako wzorce odniesienia, różne algorytmy standardowe. W przypadku algorytmów liniowych lub rozmytych bardzo często porównuje się wyniki z rezultatami uzyskanymi dla regulatora PID z nastawami określonymi metodą Zieglera i Nicholasa. Pracę nieliniowych algorytmów predykcyjnych porównuje się najczęściej z algorytmami liniowymi typu DMC lub GPC.

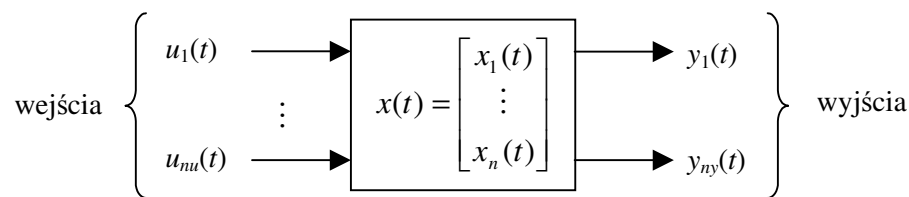
Wymagania stawiane algorytmom regulacji mogą być wzajemnie sprzeczne. Na przykład, duża dokładność dynamiczna nie pozwala uzyskać dużej odporności układu na zmiany parametrów obiektu. Wymaganie szybkiej reakcji układu na zmiany wartości zadanej wiąże się ze wzrostem amplitudy i szybkości zmian sygnału sterującego. Rolą projektanta jest przyjęcie właściwego kompromisu. Najwygodniej jest, gdy algorytm regulacji ma jeden lub dwa parametry dostrajalne. Po wstępnym ustawieniu ich wartości, są one zazwyczaj modyfikowane w czasie pracy rzeczywistego układu regulacji. Szczególnie korzystne jest, gdy parametry takie pozwalają ustawiać pożądaną kompromis między odpornością i dokładnością dynamiczną układu regulacji.



## 2. Ciągłe układy regulacji

### 2.1. Metody przestrzeni stanu

Większość obiektów (procesów) fizycznych ma naturę dynamiczną, a więc ich działanie można opisać równaniami różniczkowymi. Czynniki zewnętrzne działające na układ dynamiczny nazywa się sygnałami wejściowymi, natomiast wielkości określające efekty działania układu nazywa się sygnałami wyjściowymi. Należy podkreślić, że do sygnałów wejściowych zalicza się zarówno te sygnały sterujące, które mogą być zmieniane przez człowieka lub układ regulacji oraz sygnały zakłócające, zmieniające się przypadkowo. Wewnątrz układu dynamicznego można wyróżnić zmienne charakteryzujące przebieg zachodzących procesów. Nazywane są one zmiennymi stanu.



Rys. 2.1. Ogólny schemat układu dynamicznego

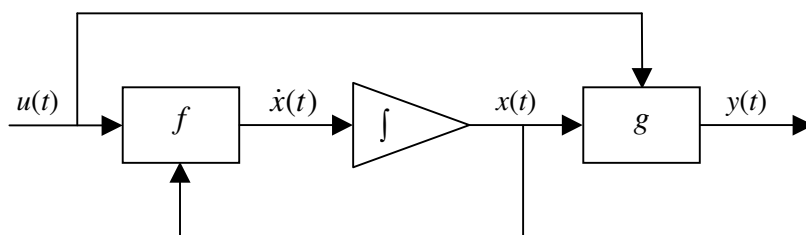
Wektor  $x(t)$  nazywa się wektorem stanu układu dynamicznego (lub po prostu stanem) w chwili  $t$ . Znajomość stanu w chwili  $t_0$  rozpoczynającej przedział obserwacji układu zastępuje obserwację tego układu w przeszłości, a więc dla  $[-\infty, t_0]$ . Stan układu dynamicznego w dowolnej chwili  $t$  reprezentuje zbiór wszystkich informacji dotyczących zachowania się układu w przeszłości (dla  $t < t_0$ ), wystarczających do określenia wyjść oraz stanu w przyszłości (dla  $t > t_0$ ). Reasumując, stan układu dynamicznego jest zbiorem najmniejszej liczby wielkości wystarczających do opisu układu w każdej chwili  $t$ .

Liczba współrzędnych wektora stanu jest równa liczbie niezależnych warunków początkowych koniecznych do wyznaczenia jednoznacznego rozwiązania równań różniczkowych opisujących układ, a tym samym liczbie niezależnych zasobników energii w układzie. Nie wszystkie współrzędne wektora stanu muszą być wielkościami fizycznie mierzalnymi.

Równania układu dynamicznego w przestrzeni stanu mają postać

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \\ y(t) &= g(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

czemu odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 2.2. Pierwsze z równań (lub równania) nazywa się równaniem stanu, drugie – równaniem wyjścia.



Rys. 2.2. Schemat blokowy układu nieliniowego

### 2.1.1. Podział układów dynamicznych

W ogólności, można wprowadzić następującą klasyfikację układów dynamicznych:

- a) Układy zdeterminowane (deterministyczne) – każdemu wektorowi stanu i sygnałów wejściowych jest jednoznacznie przyporządkowany wektor sygnałów wyjściowych, układy stochastyczne – dla każdego stanu i wejścia może być przyporządkowanych w sposób przypadkowy szereg różnych wektorów wyjściowych, można przy tym określić prawdopodobieństwo wystąpienia każdego z nich.
- b) Układy stacjonarne (funkcje  $f$  oraz  $g$  nie zależą od czasu) oraz niestacjonarne,
- c) Układy liniowe i nieliniowe. Dla układu liniowego można zastosować zasadę superpozycji, a więc dla dowolnej stałej  $\alpha$  zachodzi

$$\begin{aligned} f(x_1(t) + x_2(t), u_1(t) + u_2(t), t) &= f(x_1(t), u_1(t), t) + f(x_2(t), u_2(t), t) \\ f(\alpha x(t), \alpha u(t), t) &= \alpha f(x(t), u(t), t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

- d) Układy *ciągłe* (opisane równaniami różniczkowymi) oraz *dyskretne* (opisane równaniami różnicowymi)

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Układami ciągłymi nazywa się te układy, w których sygnały przesyłane są w sposób ciągły, natomiast w układach dyskretnych wszystkie sygnały przesyłane są w określonych chwilach, zwanymi chwilami próbkowania.

- e) Układy o *stałych skupionych* (pomija się efekty elastyczności masy lub bezwładności sprężyny) i *rozłożonych* (uwzględnia się zmiany zachodzące zarówno w czasie jak i w przestrzeni). Do opisu układów o stałych skupionych stosuje się zwykłe równania różniczkowe, o stałych rozłożonych – równania cząstkowe.

Aby przybliżyć wymienione klasy układów dynamicznych warto podać kilka przykładów. Rozpatruje się prosty obiekt o jednej zmiennej stanu, jednym wejściu i jednym wyjściu. Przykładowy liniowy ciągły model stacjonarny ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x(t) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Odpowiadający mu model dyskretny (który oczywiście jest liniowy i stacjonarny) ma postać

$$\begin{aligned} x(k+1) &= e^{-T} x(k) + u(k) \\ y(k) &= (1 - e^{-T}) x(k) \end{aligned} \quad (2.5)$$

gdzie  $T$  jest okresem próbkowania. Przykładowy nieliniowy ciągły model stacjonarny ma postać

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -x(t) + u^2(t) \\ y(t) &= 2 \tanh(x(t)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Przykładowy nieliniowy model stacjonarny dyskretny

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \frac{x(k)}{|u(k)| + 1} \\ y(k) &= x^2(k) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Przykładowy liniowy model niestacjonarny ciągły ma postać

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (t-1)x(t) + u(t) \\ y(t) &= \sqrt{t}x(t)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Przykładowy nieliniowy model niestacjonarny ciągły ma postać

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (t-1)x(t) + u^3(t) \\ y(t) &= \sqrt{t} \tanh(x(t))\end{aligned}\quad (2.9)$$

Niech podanie przykładów liniowych i nieliniowych modeli niestacjonarnych dyskretnych będzie zadaniem Czytelnika.

W trakcie wykładu omawia się wyłącznie deterministyczne układy stacjonarne liniowe o stałych skupionych, zarówno w wersji ciągłej i dyskretniej.

Zalety opisu układów dynamicznych w przestrzeni stanu są następujące:

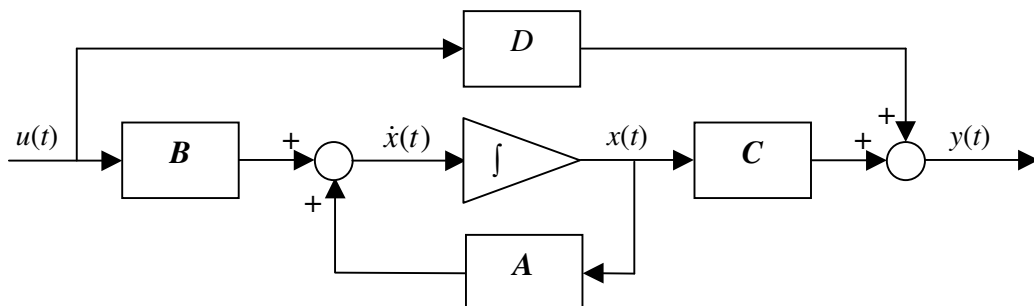
- równania różniczkowe opisujące proces mogą być bardzo złożone (nieliniowe, niestacjonarne), natomiast metody przestrzeni stanu są bardzo ogólne i uniwersalne,
- opracowano uniwersalne metody syntezy układów regulacji w przestrzeni stanu oraz badania stabilności,
- przy stosowaniu opisu procesu za pomocą transmitancji (model typu wejście-wyjście) uwzględnia się wyłącznie część sterowalną i obserwowalną,
- zmienne stanu są często najważniejszymi mierzonymi wielkościami procesowymi (np. pozycja, prędkość, temperatura).

### 2.1.2. Równania stanu liniowych, ciągłych układów dynamicznych

Rozważa się deterministyczny, stacjonarny układ ciągły o jednym wejściu i jednym wyjściu. Jest on opisany równaniami

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)\end{aligned}\quad (2.10)$$

przy czym  $\dim u(t)=1$ ,  $\dim y(t)=1$ ,  $\dim x(t)=n$ , wymiar macierzy jest następujący:  $\mathbf{A}$ :  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}$ :  $n \times 1$ ,  $\mathbf{C}$ :  $1 \times n$ ,  $\mathbf{D}$ :  $1 \times 1$ . Powyższym równaniom odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 2.3. Ponieważ w układzie jest  $n$  zmiennych stanu, równanie wektorowo-macierzowe  $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$  jest w rzeczywistości układem  $n$  liniowych zwyczajnych równań różniczkowych. Układ ma tylko jedno wyjście, a więc istnieje tylko jedno równanie wyjścia  $y(t) = \mathbf{C}x(t) + \mathbf{D}u(t)$ .

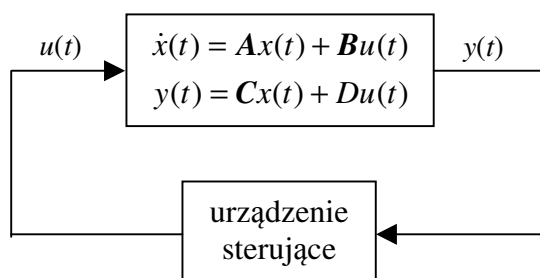


Rys. 2.3. Schemat blokowy układu liniowego

### 2.1.3. Sterowalność i obserwowalność liniowych układów dynamicznych

Rozpatruje się układ sterowania przedstawiony na rys. 2.4 obiektem liniowym. Urządzenie sterujące obserwuje wektor sygnałów wyjściowych  $y(t)$  (sygnał wyjściowy w przypadku jednowymiarowym) i na podstawie tych obserwacji określa, zgodnie z zadaniem sterowania, wektor (sygnał)  $u(t)$ . Zagadnienie sterowania układu dynamicznego stawia następujące dwa pytania:

- Czy jest możliwe przejście dowolnego stanu początkowego  $x(t_0)$  w dowolny żądany stan  $x(t_1)$  w skończonym czasie  $(t_1 - t_0)$  za pomocą oddziaływania na układ odpowiedniego sterowania  $u(t)$  ?
- Czy jest możliwe określenie stanu początkowego  $x(t_0)$  za pomocą obserwacji sygnałów wyjściowych  $y(t)$  w skończonym przedziale czasu ?



Rys. 2.4. Schemat blokowy układu sterowania

W celu znalezienia odpowiedzi na powyższe pytania należy zbadać właściwości układu określane mianem sterowalności i obserwowalności układu dynamicznego.

Układ jest *sterowalny* w chwili  $t_0$ , jeżeli istnieje takie sterowanie  $u(t)$ , które spowoduje w skończonym przedziale czasu  $(t_1 - t_0)$  zmianę dowolnego stanu początkowego  $x(t_0)$  w dowolny inny stan końcowy  $x(t_1)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $t_0$ , to układ jest *całkowicie sterowalny* (w skrócie po prostu sterowalny).

Układ jest *obserwowalny* w przedziale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$ , jeżeli na podstawie sygnałów sterowania  $u(t)$  i wyjścia  $y(t)$  w przedziale  $t \in \langle t_0, t_1 \rangle$  można określić początkowy stan układu  $x(t_0)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $t_0$ , to układ jest *całkowicie obserwowalny* (w skrócie po prostu obserwowalny).

Można wykazać [7], że liniowy układ dynamiczny jest *sterowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n \quad (2.11)$$

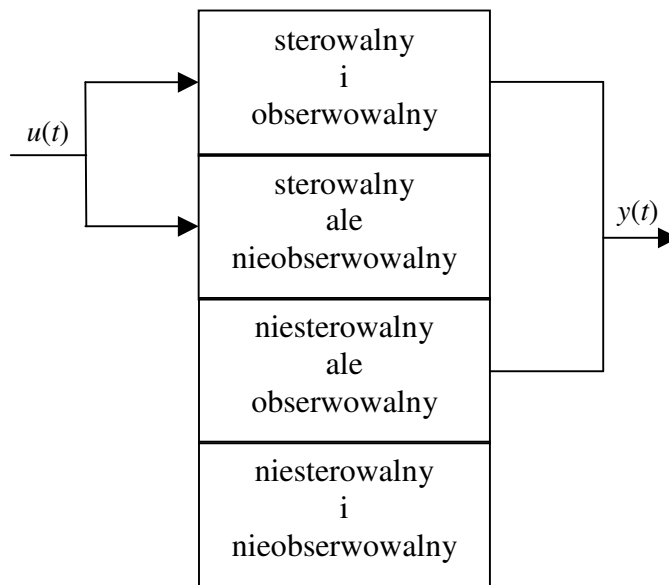
gdzie  $r$  oznacza rząd macierzy. Jeżeli sterowanie jest skalarne, to powyższa macierz jest kwadratowa i warunkiem sterowalności jest jej nieosobliwość.

Można wykazać [7], że liniowy układ dynamiczny jest *obserwowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (2.12)$$

Jeżeli wyjście jest skalarne, to powyższa macierz jest kwadratowa i warunkiem obserwowalności jest jej nieosobliwość.

W ogólności, niektóre współrzędne wektora stanu mogą być sterowalne, a inne niesterowalne. Analogicznie, niektóre z nich mogą być obserwowalne, a inne nieobserwowalne. Dowlany układ dynamiczny może zostać podzielony na cztery części pokazane na rys. 2.5. Jedynie w pierwszej części występuje powiązanie między wejściem a wyjściem. Wyznaczając transmitancję (opis typu wejście-wyjście) uwzględnia się więc jedynie sterowalną i obserwowalną część układu. Transmitancja nie mówi natomiast nic o właściwościach dynamicznych pozostałych części układu. Posługując się opisem transmitancyjnym należy więc pamiętać, że pewne właściwości układu mogą być pominięte. Warto również pamiętać, że wyłącznie przy opisie w przestrzeni stanu występuje warunek początkowy (dotyczący stanu).



Rys. 2.5. Podział układu dynamicznego ze względu na sterowalność i obserwowalność

### Zadanie

Zbadać sterowalność układu w zależności od parametru  $p$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} u(t) \quad (2.13)$$

### Rozwiązanie

Układ ma dwie zmienne stanu, należy więc zbadać rząd macierzy

$$[B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & p+1 \\ p & 2p \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Wyznacznik powyższej macierzy

$$|B \quad AB| = p - p^2 = p(1 - p) \quad (2.15)$$

jest równy zero dla  $p=0$  lub  $p=1$ , dla tych wartości  $p$  układ jest niesterowalny.

**Zadanie [7]**

Na ciało o masie  $m$  poruszające się bez tarcia działa zmienna w czasie siła  $u(t)$ . Zbadać obserwowalność układu, jeżeli wielkością wyjściową jest: a) przebyta przez ciało droga, b) prędkość ciała.

**Rozwiązanie**

Niech  $x_1$  – przebyta droga,  $x_2$  – prędkość. Równania stanu są następujące

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ m\dot{x}_2(t) &= u(t)\end{aligned}\tag{2.16}$$

czyli

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)\tag{2.17}$$

a) Równanie wyjścia ma postać

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\tag{2.18}$$

Należy więc zbadać rząd macierzy

$$r \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 2\tag{2.19}$$

czyli układ jest obserwowalny.

b) Równanie wyjścia ma postać

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\tag{2.20}$$

Należy więc zbadać rząd macierzy

$$r \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 2\tag{2.21}$$

czyli układ nie jest obserwowalny.

**Zadanie**

Zbadać obserwowalność i sterowalność układu

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{2.22}$$



**Rozwiązanie**

Wyznacznik macierzy sterowalności

$$| [B \quad AB] | = \left| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (2.23)$$

a więc układ nie jest sterowalny. Można zauważyć, że obie zmienne stanu zachowują się tak samo (tzn.  $\dot{x}_1(t) = x_1(t) + u(t)$ ,  $\dot{x}_2(t) = x_2(t) + u(t)$ ), nie jest możliwe ich niezależne sterowanie za pomocą tylko jednego sygnału sterującego.

Wyznacznik macierzy obserwowalności

$$| \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} | = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (2.24)$$

a więc układ nie jest obserwowalny.

**2.1.4. Wyznaczanie transmitancji na podstawie równań stanu**

Równanie stanu i równanie wyjścia w postaci operatorowej (po zastosowaniu przekształcenia Laplace'a), dla zerowych warunków początkowych  $x(0)=0$ , przyjmują postać

$$\begin{aligned} sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dla  $|sI - A| \neq 0$  z równania stanu otrzymuje się

$$X(s) = (sI - A)^{-1} BU(s) \quad (2.26)$$

po wstawieniu do równania wyjścia

$$Y(s) = (C(sI - A)^{-1} B + D)U(s) \quad (2.27)$$

Transmitancja jest ilorazem transformaty sygnału wyjściowego i wejściowego

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (2.28)$$

**Zadanie**

Znaleźć transmitancję układu o macierzach równania stanu i wyjścia

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [3 \quad 5], \quad D = 0 \quad (2.29)$$

**Rozwiązanie**

Macierz odwrotna ma postać

$$(sI - A)^{-1} = \frac{[(sI - A)^D]^T}{|sI - A|} = \frac{1}{s(s+1)+2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Natomiast szukana transmitancja

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \\
 &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix} \frac{1}{s(s+1)+2} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{1}{s(s+1)+2} \begin{bmatrix} 3s-7 & 5s+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{5s+3}{s(s+1)+2} = \frac{5s+3}{s^2+s+2}
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

W programie Matlab do wyznaczenia transmitancji na podstawie macierzy równań stanu służy polecenie `ss2tf` o składni:

`[1, m] = ss2tf(A, B, C, D)`

gdzie `1` oraz `m` są wektorami zawierającymi współczynniki wielomianów licznika i mianownika transmitancji układu (poczynając od współczynnika przy najwyższej potędze). Na przykład, dla macierzy z przykładu otrzymuje się `1=[0 5 3]` oraz `m=[1 1 2]`, co odpowiada transmitancji (2.31).

### 2.1.5. Wyznaczanie równań stanu na podstawie transmitancji

Niech transmitancja ma postać

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \tag{2.32}$$

gdzie  $n$  jest rzędem układu, równym liczbie zmiennych stanu. Jeżeli stopień licznika jest większy niż stopień mianownika układ nie jest fizycznie realizowalny. Istnieje kilka metod wyboru zmiennych stanu i wyznaczania macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  odpowiadających danej transmitancji. Zostanie omówiona tzw. metoda bezpośrednia w dwóch wariantach [7]. Mnożąc licznik i mianownik transmitancji przez  $s^{-n}$  otrzymuje się

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{1-n} + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{1-n} + a_0s^{-n}} \tag{2.33}$$

Definiuje się następujący sygnał pomocniczy

$$E(s) = \frac{U(s)}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{1-n} + a_0s^{-n}} \tag{2.34}$$

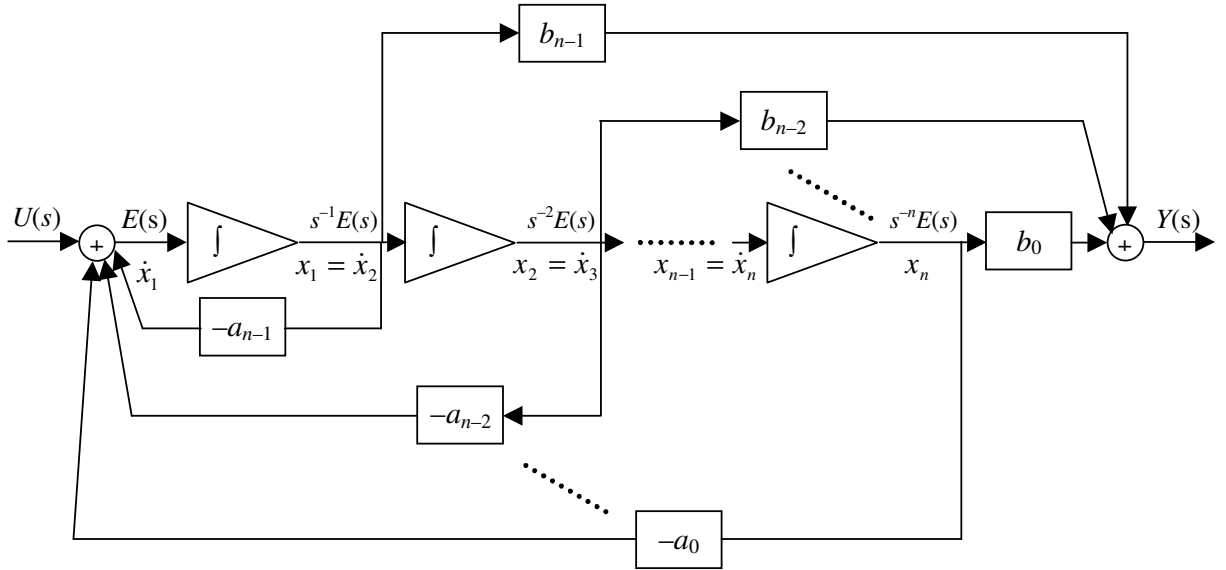
czyli

$$E(s) = U(s) - (a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{1-n} + a_0s^{-n})E(s) \tag{2.35}$$

Wielkość  $Y(s)$  można zapisać następująco

$$Y(s) = (b_{n-1}s^{-1} + b_{n-2}s^{-2} + \dots + b_1s^{1-n} + b_0s^{-n})E(s) \tag{2.36}$$

Z ostatnich dwóch wzorów wynika model przedstawiony na rys. 2.6.



Rys. 2.6. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

Przyjmując jako zmienne stanu wielkości wyjściowe członów całkujących (integratorów), otrzymuje się model w przestrzeni stanu

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -a_{n-1}x_1(t) - a_{n-2}x_2(t) - \dots - a_1x_{n-1}(t) - a_0x_n(t) + u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= x_1(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_n(t) &= x_{n-1}(t) \\
 y(t) &= b_{n-1}x_1(t) + b_{n-2}x_2(t) + \dots + b_0x_n(t)
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Macierze równania stanu i wyjścia mają postać

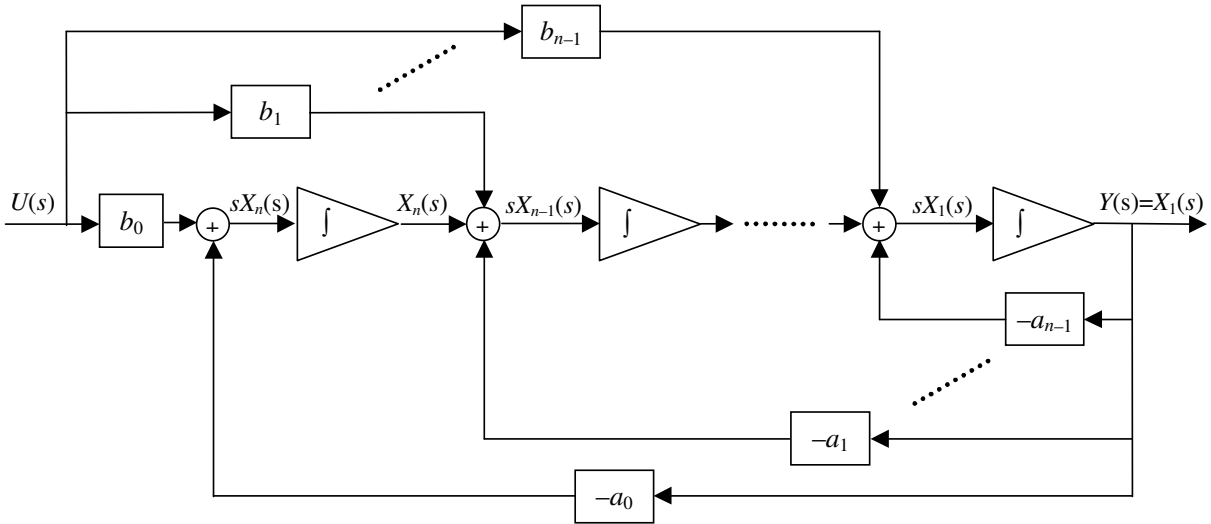
$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.38}$$

$$C = [b_{n-1} \quad b_{n-2} \quad \dots \quad b_0], \quad D = 0$$

Opracowano wiele różnych metod reprezentacji w przestrzeni stanu. Warto wspomnieć o drugiej metodzie bezpośredniej [7]. Niech macierze  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  odpowiadają wariantowi pierwszemu, macierze  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  – wariantowi drugiemu. Można wykazać [7], że zachodzi

$$\begin{aligned}
 A_2 &= A_1^T, \quad B_2 = C_1^T \\
 C_2 &= B_1^T, \quad D = 0
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Model układu dynamicznego uzyskany w drugim wariantcie metody bezpośredniej pokazano na rys. 2.7.



Rys. 2.7. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

Równania stanu oraz równanie wyjścia mają postać

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1(t) &= -a_{n-1}x_1(t) + x_2(t) + b_{n-1}u(t) \\
 \dot{x}_2(t) &= -a_{n-2}x_1(t) + x_3(t) + b_{n-2}u(t) \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1}(t) &= -a_1x_1(t) + x_n(t) + b_1u(t) \\
 \dot{x}_n(t) &= -a_0x_1(t) + b_0u(t) \\
 y(t) &= x_1(t)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Macierze równania stanu i wyjścia mają postać

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = 0$$

Zaletą wariantu drugiego jest przyjęcie wyjścia jako pierwszej zmiennej stanu, taka reprezentacja może niekiedy ułatwić projektowanie obserwatora, co opisano w dalszej części rozdziału.

### Zadanie

Dla układu o transmitancji

$$G(s) = \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s^2 - 1} \tag{2.42}$$

znaleźć równanie stanu i wyjścia metodą bezpośrednią.

**Rozwiązanie**

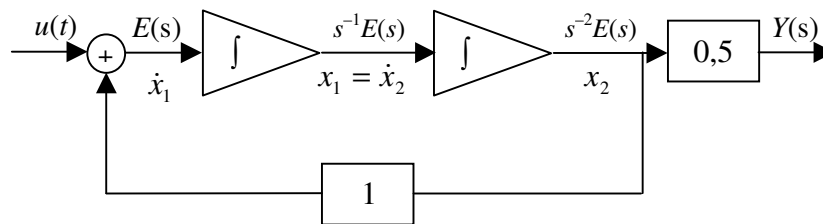
Mnożąc licznik i mianownik przez  $s^{-n}=s^{-2}$

$$G(s) = \frac{0,5s^{-2}}{1-s^{-2}} \quad (2.43)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) + s^{-2}E(s) \\ Y(s) &= 0,5s^{-2}E(s) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Model zamieszczony na rys. 2.8 odpowiada pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej.



Rys. 2.8. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

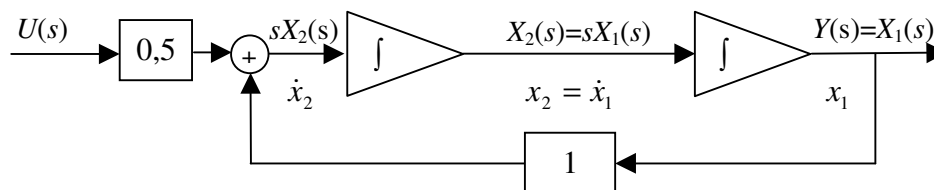
Równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.45)$$

W drugim wariantcie metody bezpośredniej równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.46)$$

czemu odpowiada model zamieszczony na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

**Zadanie**

Dla układu o transmitancji

$$G(s) = \frac{2s + 3}{s^2 + 5s + 6} \quad (2.47)$$

znaleźć równanie stanu i wyjścia metodą bezpośrednią.

**Rozwiązanie**

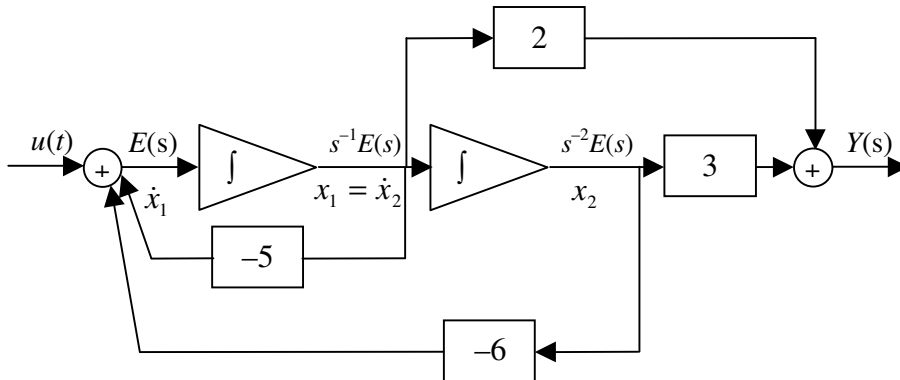
Mnożąc licznik i mianownik przez  $s^{-n}=s^{-2}$

$$G(s) = \frac{2s^{-1} + 3s^{-2}}{1 + 5s^{-1} + 6s^{-2}} \quad (2.48)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} E(s) &= U(s) - (5s^{-1} + 6s^{-2})E(s) \\ Y(s) &= (2s^{-1} + 3s^{-2})E(s) \end{aligned} \quad (2.49)$$

Model zamieszczony na rys. 2.10 odpowiada pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej.



Rys. 2.10. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

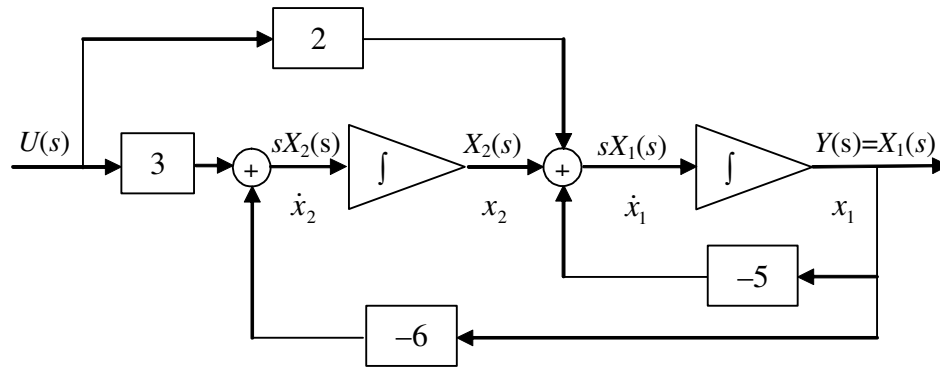
Równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.50)$$

W drugim wariantie metody bezpośredniej równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.51)$$

czemu odpowiada model zamieszczony na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Model układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

W programie Matlab do wyznaczenia macierzy równań stanu na podstawie transmitancji służy polecenie `tf2ss` o składni:

```
[A, B, C, D]=tf2ss(1, m)
```

gdzie  $1$  oraz  $m$  są wektorami zawierającymi współczynniki wielomianów licznika i mianownika transmitancji układu (od współczynnika przy najwyższej potęgze). Dla omawianego przykładu  $1=[2 \ 3]$ ,  $m=[1 \ 5 \ 6]$ . Schemat zmiennych stanu odpowiada pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej.

### 2.1.6. Projektowanie układów regulacji metodą sprzężenia od stanu

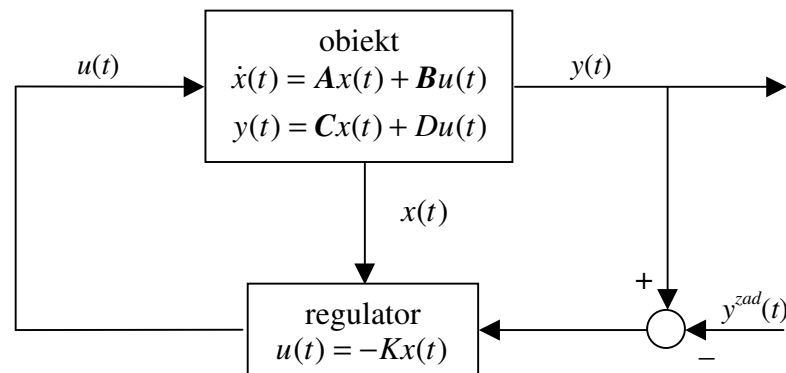
Projektowanie układu regulacji metodą sprzężenia od stanu składa się z dwóch etapów:

- przesuwanie biegunów układu zamkniętego za pomocą sprzężenia od stanu (uzyskanie pożądanej dynamiki układu zamkniętego),
- dobranie obserwatora pełnego rzędu (gdy zmienne stanu nie są mierzone) lub obserwatora zredukowanego (gdy tylko niektóre ze zmiennych stanu są mierzone).

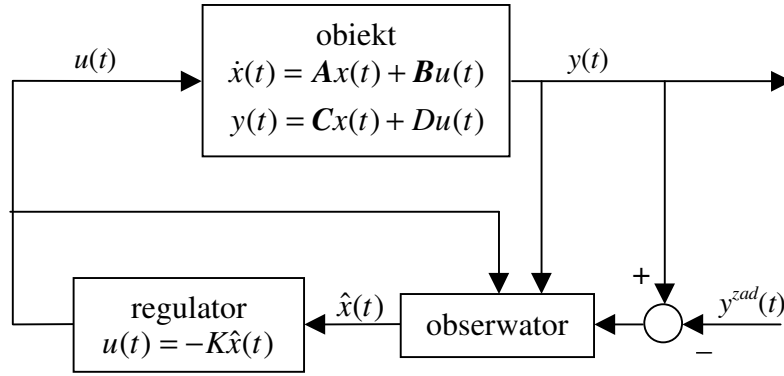
Ogólna struktura układu regulacji z bezpośrednim pomiarem stanu została przedstawiona na 2.12, natomiast na rys. 2.13 przedstawiono strukturę układu regulacji z obserwatorem.

Pierwszym etapem projektowania układu regulacji metodą przestrzeni stanu jest wyznaczenie prawa regulacji. Zakłada się, że jest ono liniową funkcją stanu [3, 6, 7]

$$u(t) = -Kx(t) = -[k_1 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$



Rys. 2.12. Struktura układu regulacji z bezpośrednim pomiarem zmiennych stanu



Rys. 2.13. Struktura układu regulacji z obserwatorem

Położenie biegunów układu zamkniętego (z regulatorem proporcjonalnym  $K$  w pętli sprzężenia zwrotnego) kształtuje się odpowiednio dobierając wartości współczynników  $k_1, \dots, k_n$ . Można wykazać, że wektor  $K$  (w przypadku układu o wielu wejściach będzie to macierz) nie zmienia położenia zer układu, a jedynie jego bieguny. Wstawiając liniowe prawo regulacji do równania stanu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.53)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$|sI - (A - BK)| = 0 \quad (2.54)$$

Jest ono wielomianem  $n$ -tego rzędu. Wektor  $K$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego miały zadane z góry wartości  $s_1, \dots, s_n$

$$(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) = 0 \quad (2.55)$$

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.56)$$

w taki sposób dobrać wektor sprzężenia zwrotnego  $K$ , aby bieguny układu zamkniętego miały wartości  $s_1, s_2$ . Przyjąć stan początkowy  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , przeprowadzić symulacje dla a)  $s_1 = s_2 = -0,3$ , b)  $s_1 = s_2 = -3$ .

### Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned} |sI - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2] \right| \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0,5k_1 - 1 & s + 0,5k_2 \end{vmatrix} = s^2 + 0,5k_2s + 0,5k_1 - 1 \end{aligned} \quad (2.57)$$



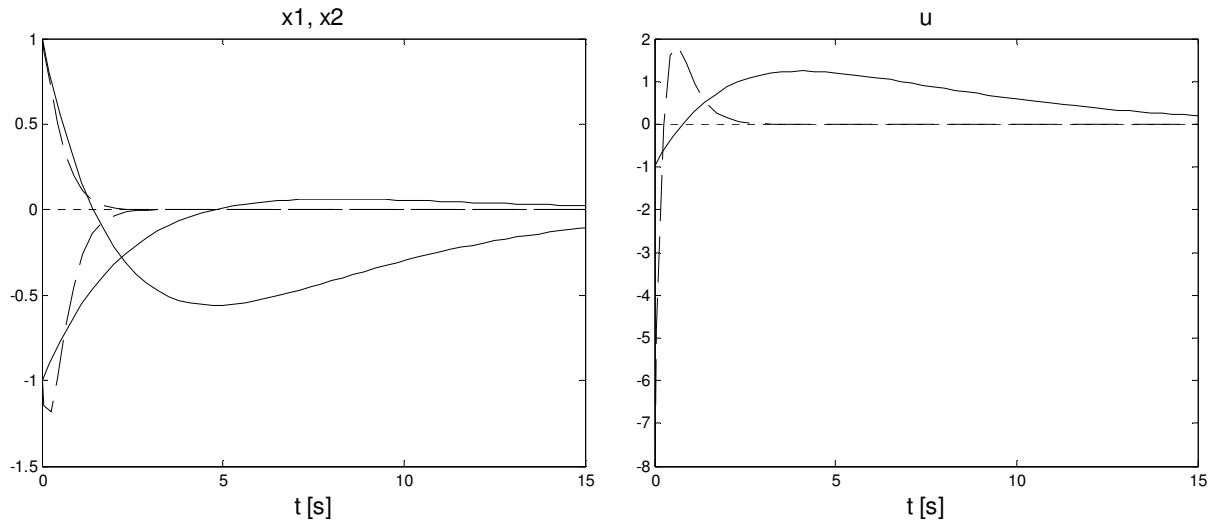
Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $s_1, s_2$

$$(s - s_1)(s - s_2) = s^2 - (s_1 + s_2)s + s_1s_2 \quad (2.58)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} 0,5k_1 - 1 = s_1s_2 \\ 0,5k_2 = -(s_1 + s_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2(s_1s_2 + 1) \\ k_2 = -2(s_1 + s_2) \end{cases} \quad (2.59)$$

Dla biegunów  $s_1 = s_2 = -0,3$  wektor  $K=[2,8 \ 1,2]$ , dla biegunów  $s_1 = s_2 = -3$  otrzymuje się wektor  $K=[20 \ 12]$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 2.14.



Rys. 2.14. Trajektorie stanu układu zamkniętego i sygnał sterujący przy biegunach  $s_1 = s_2 = -0,3$ , (linia ciągła) oraz  $s_1 = s_2 = -3$  (linia przerywana)

Rozważany obiekt jest niestabilny (biegun  $s=1$  układu otwartego leży w prawej półpłaszczyźnie). Projektowany układ regulacji, przesuwając odpowiednio bieguny, stabilizuje proces. Można zauważyć, że im dalej w lewej półpłaszczyźnie położony biegun układu zamkniętego, tym szybciej następuje wyzerowanie stanu układu. Z drugiej jednak strony, elementy wektora  $K$  są większe, a więc sygnał sterujący osiąga duże wartości.

Jeżeli macierze  $A$  oraz  $B$  równania stanu mają strukturę odpowiadającą pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

równanie charakterystyczne ma postać

$$|sI - A| = s^2 + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0 \quad (2.61)$$

Dla układu zamkniętego otrzymuje się

$$A - BK = \begin{bmatrix} -a_{n-1} - k_1 & -a_{n-2} - k_2 & -a_{n-3} - k_3 & \dots & -a_1 - k_{n-1} & -a_0 - k_n \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

Przez analogię do układu otwartego, równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$|sI - (A - BK)| = s^n + (a_{n-1} + k_1)s^{n-1} + \dots + (a_1 + k_{n-1})s + a_0 + k_n = 0 \quad (2.63)$$

Z drugiej strony, równanie charakterystyczne musi mieć zadane z góry bieguny  $s_1, \dots, s_n$

$$\begin{aligned} |sI - (A - BK)| &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n) \\ &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.64)$$

Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$k_1 = \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad k_{n-1} = \alpha_1 - a_1 \quad k_n = \alpha_0 - a_0 \quad (2.65)$$

czyli

$$k_i = \alpha_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.66)$$

Współrzędne wektora  $K$  można również policzyć ze wzoru Ackermana, w którym wykorzystuje się odwrotność macierzy sterowalności układu

$$K = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]^{-1} [A^n \quad \alpha_{n-1}A^{n-1} \quad \dots \quad \alpha_1A \quad \alpha_0I] \quad (2.67)$$

Należy podkreślić, że przesuwanie biegunów układu zamkniętego jest możliwe tylko w przypadku obiektów sterowalnych. Systemy niesterowalne mają tzw. mody niesterowalne, na które sygnał sterujący nie ma wpływu. Na przykład, sytuacja taka zachodzi wówczas, gdy część systemu jest fizycznie odłączona od wejścia. W praktyce, oprócz systemów całkowicie niesterowalnych, występują czasami tzw. systemy słabo sterowalne, dla których macierz obserwowalności jest źle uwarunkowana. Teoretycznie również i w takich przypadkach można obliczyć wektor  $K$ , lecz jego wartości będą bardzo duże, co prowadzi do dużych wartości sygnału sterującego, a więc praktyczna użyteczność takiego rozwiązania może być wątpliwa.

W programie Matlab do przesuwania biegunów układu zamkniętego o jednym wejściu i jednym wyjściu można wykorzystać polecenie

`K=acker(A,B,[s1 ... sn])`

Zastosowany algorytm nie jest numerycznie pewny dla obiektów o rzędzie przekraczających 10 lub też dla systemów słabo sterowalnych. W przypadku obiektów wielowymiarowych stosuje się polecenie

`K=place(A,B,[s1 ... sn])`

Wielokrotność biegunów układu zamkniętego nie może przekraczać liczby wejść.

**Zadanie**

Dla obiektu w przestrzeni stanu odpowiadającemu transmitancji

$$G(s) = \frac{s+p}{s^2+5s+6} = \frac{s+p}{(s+2)(s+3)} \quad (2.68)$$

gdzie parametr  $p \in \mathfrak{R}$ , w taki sposób dobrać wektor sprzężenia zwrotnego  $K$ , aby bieguny układu zamkniętego miały wartości  $s_1 = s_2 = -10$ .

**Rozwiązanie**

Postępując zgodnie z drugim wariantem metody bezpośredniej, znaleziono równanie stanu odpowiadając danej transmitancji

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} u(t) \quad (2.69)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned} |sI - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} s+5+k_1 & k_2-1 \\ 6+pk_1 & s+pk_2 \end{bmatrix} \right| = s^2 + (5+k_1+pk_2)s + 5pk_2 - 6k_2 + pk_1 + 6 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $s_1, s_2$

$$(s+10)^2 = s^2 + 20s + 100 \quad (2.71)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} 5+k_1+pk_2 = 20 \\ 5pk_2 - 6k_2 + pk_1 + 6 = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{19p+90}{(p-2)(p-3)} \\ k_2 = \frac{15p-94}{(p-2)(p-3)} \end{cases} \quad (2.72)$$

Można zauważyć pewną interesującą cechę uzyskanego rozwiązania. Po pierwsze, elementy wektora  $K$  rosną do nieskończoności jeżeli parametr  $p$ , przyjmie wartość 2 lub 3. Innymi słowy, zjawisko takie będzie miało miejsce wówczas, gdy zero transmitancji będzie równe biegunowi. Wyznacznik macierzy sterowalności ma postać

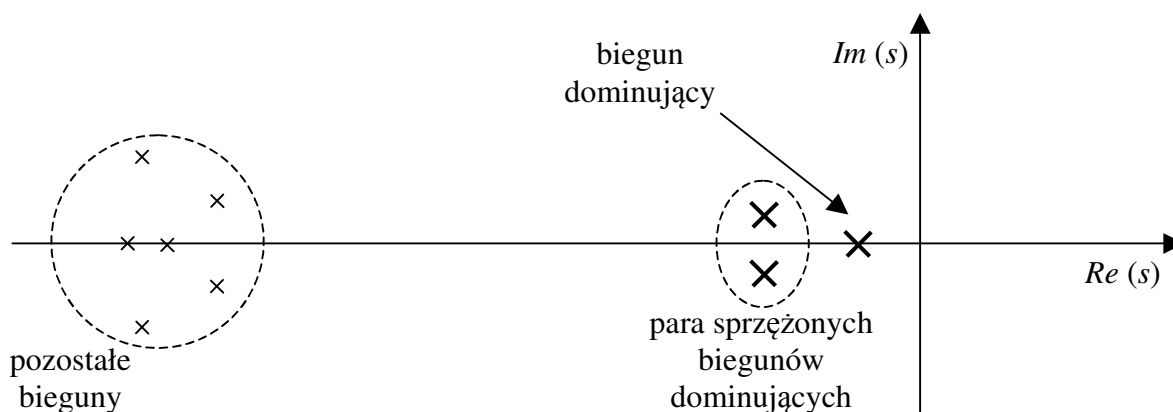
$$\begin{aligned} | \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} | &= \left| \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} 1 & p-5 \\ p & -6 \end{bmatrix} \right| \\ &= -(p-2)(p-3) \end{aligned} \quad (2.73)$$

a więc system nie jest sterowalny, gdy  $p=2$  lub  $p=3$ .

Uzyskany wynik można również tłumaczyć w nieco inny sposób. Jeżeli  $p=2$  lub  $p=3$  rząd rozważanego obiektu zmienia się z  $n=2$  do  $n=1$  (skrócenie licznika z mianownikiem transmitancji), nie jest możliwe sterowanie obiektu pierwszego rzędu za pomocą sprzężenia od dwuwymiarowego wektora stanu.

### 2.1.7. Dobór biegunów układu zamkniętego

Przy wyborze biegunów układu zamkniętego uwzględnia się cechy przebiegu przejściowego układu (przeregulowanie, czas regulacji) oraz kształt sygnału sterującego. Niestety, należy podkreślić, że nie ma uniwersalnego algorytmu pozwalającego jednoznacznie rozmieścić bieguny układu zamkniętego. Z drugiej jednak strony, można sformułować pewne zalecenia projektowe [16]. Po pierwsze, w ogólności uważa się, że należy unikać biegunów wielokrotnych, ponieważ w takiej sytuacji występuje niekorzystne narastanie odpowiedzi układu w początkowym okresie regulacji. W niektórych przypadkach wybór biegunów wielokrotnych jest jednak najkorzystniejszy. Po drugie, wygodnie jest zastosować koncepcję tzw. bieguna dominującego, co przedstawiono na rys. 2.15. Biegunem dominujący nazywa się ten, który ma największy wpływ na działanie zamkniętego układu regulacji. Jest to biegun położony najbliżej osi urojonej (biegun o najmniejszym module części rzeczywistej). Analogicznie, gdy zamiast pojedynczego bieguna dominującego występuje para biegunów sprzężonych, bieguny dominujące są położone najbliżej osi urojonej. Zakłada się, że wszystkie pozostałe bieguny mają znacznie mniejszy (pomijalny) wpływ na działanie układu regulacji, ich moduły są znacznie większe od modułu bieguna dominującego



Rys. 2.15. Koncepcja bieguna dominującego

Jeżeli zamknięty układ regulacji ma pojedynczy rzeczywisty biegun dominujący  $s_0 = -\sigma$  ( $\sigma > 0$ ), to związany z nim przebieg czasowy  $d(t)$  jest malejącą funkcją wykładniczą  $d(t) = a \exp(-\sigma t)$ . Jeżeli chwilę praktycznego zaniknięcia przebiegu ( $t_p$ ) określi się jako chwilę, dla której  $d(t_p) = \Delta a$ , gdzie  $\Delta$  jest pewną małą liczbą (zwykle przyjmuje się 0,05), to

$$t_p = \frac{1}{\sigma} \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) \quad (2.74)$$

Jeżeli żąda się, aby chwila zaniknięcia wypadła nie później niż wartość  $t_p^0$ , to odległość dominującego bieguna rzeczywistego od osi urojonej (moduł) musi być co najmniej równa

$$\sigma^0 = \frac{1}{t_p^0} \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) \quad (2.75)$$

Dla  $\Delta = 0,05$  powyższy wzór można przybliżyć zależnością

$$\sigma^0 = \frac{3}{t_p^0} \quad (2.76)$$

Jeżeli zamknięty układ regulacji ma parę sprzężonych biegunów dominujących  $s_0 = -\sigma \pm j\omega$  ( $\sigma > 0, \omega > 0$ ), to związany z nimi przebieg czasowy  $d(t)$  jest następującą funkcją

$$d(t) = a \exp(-\sigma t) \cos(\omega t + \psi) = A(t) \cos(\omega t + \psi) \quad (2.77)$$

Dla tego przebiegu można określić współczynnik tłumienia amplitudy  $A(t) = \exp(-\sigma t)$  za okres  $2\pi/\omega$  jako

$$\xi = \frac{A(t) - A\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}{A(t)} = 1 - \exp\left(-2\pi \frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (2.78)$$

Przyjmując pewną wartość żadanego tłumienia  $\xi^0$  można wyznaczyć gwarantujący to tłumienie iloraz części rzeczywistej i urojonej bieguna dominującego. Jeżeli tłumienie ma być większe od wartości  $\xi^0$  (zwykle przyjmuje się 0,98), to część rzeczywista i urojona bieguna dominującego muszą spełniać warunek

$$\frac{\sigma}{\omega} \leq \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{1-\xi^0}\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln(1-\xi^0) \quad (2.79)$$

Powyższy warunek ma prostą interpretację geometryczną. Bieguny sprzężone powinny leżeć wewnątrz sektora o kącie rozwarcia

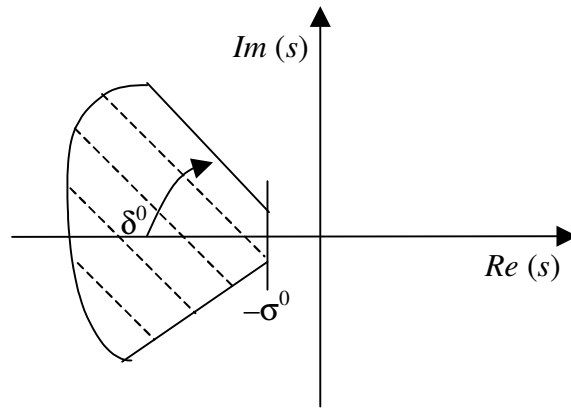
$$2\delta^0 = 2\arccos\left(\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{1-\xi^0}\right)\right) \quad (2.80)$$

Przyjmując tłumienie graniczne  $\xi^0 = 0,98$ , otrzymuje się  $\delta^0 = 57,5^\circ$ . Równania prostych ograniczających położenie biegunów sprzężonych mają postać

$$\omega = \frac{2\pi}{\ln(1-\xi^0)} \sigma, \quad \omega = -\frac{2\pi}{\ln(1-\xi^0)} \sigma \quad (2.81)$$

Reasumując powyższe rozważania, można sformułować następujące zalecenia projektowe:

- Bieguny powinny być położone w lewej półpłaszczyźnie (bieguny mają ujemne części rzeczywiste).
- Dobrze jest, gdy biegun leżący najbliżej osi urojonej jest rzeczywisty.
- Jeżeli zadany jest czas praktycznego zaniknięcia przebiegu  $t_p^0$  oraz tłumienie ma być większe niż  $\xi^0$ , to para sprzężonych biegunów dominujących powinna leżeć w obszarze ograniczonym prostymi (2.75) i (2.81), który został przedstawiony na rys. 2.16 (obszar zakreskowany).



Rys. 2.16. Położenie pary sprzężonych biegunów dominujących

W regulacji liniowo-kwadratowej (ang. LQR – ang. Linear Quadratic Regulator) wektor sprzężeń zwrotnych  $K$  dobiera się w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości (w ogólności dla układu o wielu wejściach i wielu wyjściach)

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.82)$$

gdzie  $Q$  oraz  $R$  są macierzami wagowymi. Macierz sprzężeń zwrotnych obliczana jest ze wzoru

$$K = R^{-1}B^T S \quad (2.83)$$

gdzie  $S$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego

$$A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q = 0 \quad (2.84)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (2.82) służy polecenie:

$$[K, S] = \text{lqr2}(A, B, Q, R)$$

przy czym  $S$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego.

Istnieje możliwość różnych modyfikacji minimalizowanego wskaźnika jakości. Na przykład, można przyjąć

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + 2x^T(t)Nu(t))dt \quad (2.85)$$

gdzie  $Q$ ,  $R$  oraz  $N$  są macierzami wagowymi. Macierz sprzężeń zwrotnych obliczana jest ze wzoru

$$K = R^{-1}(B^T S + N^T) \quad (2.86)$$

gdzie  $S$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego

$$A^T S + SA - (SB + N)R^{-1}(B^T S + N^T) + Q = 0 \quad (2.87)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (2.85) służy polecenie:

$$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$$

przy czym wektor  $E$  zawiera wartości własne macierzy układu zamkniętego  $(A - BK)$ .

Alternatywnie, można przyjąć wskaźnik jakości

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + 2y^T(t)Nu(t))dt \quad (2.88)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (2.88) służy polecenie:

$$[K, S, E] = \text{lqr}(A, B, Q, R, N)$$

### 2.1.8. Uwzględnianie niezerowej wartości zadanej

Prawo sterowania  $u(t) = -Kx(t)$  pozwala przesunąć bieguny układu zamkniętego w taki sposób, aby ustabilizować układ i otrzymać żądane przebiegi przejściowe. W praktyce konieczne jest uwzględnienie niezerowego punktu pracy. Układ regulacji, używając do tego celu sprzężenia od stanu, musi wymusić taką wartość sygnału sterującego, dla którego sygnał wyjściowy osiągnie w stanie ustalonym żadaną wartość  $y_{su}^{zad}$ . Stan odpowiadający żądanej wartości wyjścia ma wartość  $x_{su}$ , sygnał wejściowy ma wartość  $u_{su}$ . W stanie ustalonym zachodzi

$$u = u_{su} - K(x - x_{su}) \quad (2.89)$$

W stanie ustalonym równania stanu oraz wyjścia przyjmują postać

$$\begin{aligned} 0_{n \times 1} &= Ax_{su} + Bu_{su} \\ y_{su} &= Cx_{su} + Du_{su} \end{aligned} \quad (2.90)$$

Należy rozwiązać powyższe równania dla  $y_{su} = y_{su}^{zad}$  dla dowolnej wartości  $y_{su}^{zad}$ . Niech  $x_{su} = N_x y_{su}^{zad}$ ,  $u_{su} = N_u y_{su}^{zad}$ . Powyższe równania można zapisać

$$\begin{aligned} 0_{n \times 1} &= AN_x y_{su}^{zad} + BN_u y_{su}^{zad} \\ y_{su} &= CN_x y_{su}^{zad} + DN_u y_{su}^{zad} \end{aligned} \quad (2.91)$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

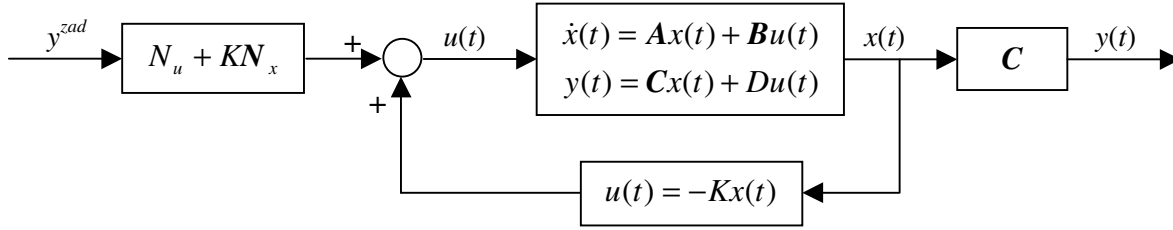
Rozwiązując powyższe równanie dla  $N_x$  i  $N_u$  otrzymuje się

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.93)$$

Prawo regulacji ma postać

$$\begin{aligned} u(t) &= N_u y^{zad} - K(x(t) - N_x y^{zad}) \\ &= -Kx(t) + (N_u + KN_x)y^{zad} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Strukturę uzyskanego układu regulacji pokazano na rys. 2.17.

Rys. 2.17. Struktura układu regulacji uwzględniającego wartość zadaną  $y^{zad}$ **Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.95)$$

wyznaczyć prawo regulacji postaci  $u(t) = -Kx(t) + (N_u + KN_x)y^{zad}$ . Przyjąć bieguny układu zamkniętego  $s_1 = s_2 = -3$ .

**Rozwiązanie**

Zadany biegunom odpowiada wektor wzmocnień  $K=[20 \ 12]$ . Wielkości  $N_x$  i  $N_u$  wyznacza się z równania macierzowego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.96)$$

Poszukiwane prawo regulacji ma więc postać

$$\begin{aligned} u(t) &= -Kx(t) + (N_u + KN_x)y^{zad} \\ &= -[20 \ 12]x(t) + \left( -2 + [20 \ 12] \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) y^{zad} \\ &= -[20 \ 12]x(t) + 18y^{zad} \end{aligned} \quad (2.97)$$

**2.1.9. Obserwatory stanu pełnego rzędu**

Dotychczas założono, że wszystkie zmienne stanu są pomiarowo dostępne. W praktyce jednak sytuacja taka nie jest powszechna. Koszt pomiaru niektórych wielkości może być duży, niektóre pomiary mogą być długotrwałe (np. pomiar składu śladowych ilości substancji) lub też niedokładne. W skrajnie niekorzystnym przypadku niektóre lub wszystkie zmienne stanu mogą nie być mierzalne fizycznie. Dlatego też naturalnym rozwiązaniem jest zastoso-

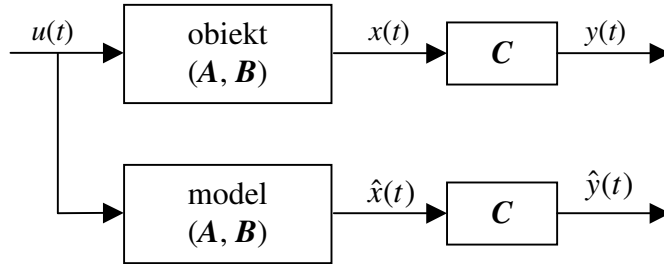


wanie obserwatora, którego zadaniem jest odtworzenie wszystkich lub tylko wybranych zmiennych stanu na podstawie dostępnych pomiarów.

Niech  $\hat{x}(t)$  będzie estymacją niemierzalnego stanu procesu. Z równania stanu

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad (2.98)$$

Strukturę obserwatora, zwanego również obserwatorem (estymatorem) pracującym w pętli otwartej, pokazano na rys. 2.18.



Rys. 2.18. Struktura obserwatora pracującego w układzie otwartym

Zakładając, że parametry modelu (macierze  $A$ ,  $B$ ) oraz sygnał  $u(t)$  są znane, jakość estymacji stanu będzie dobra, jeżeli będzie znany stan początkowy procesu

$$\hat{x}(0) = x(0) \quad (2.99)$$

W praktyce stan początkowy nie jest znany, estymacja stanu na podstawie błędnego warunku początkowego, a niekiedy również niedokładnego modelu, prowadzi z reguły do bardzo dużych błędów. Błąd odtworzenia stanu jest równy

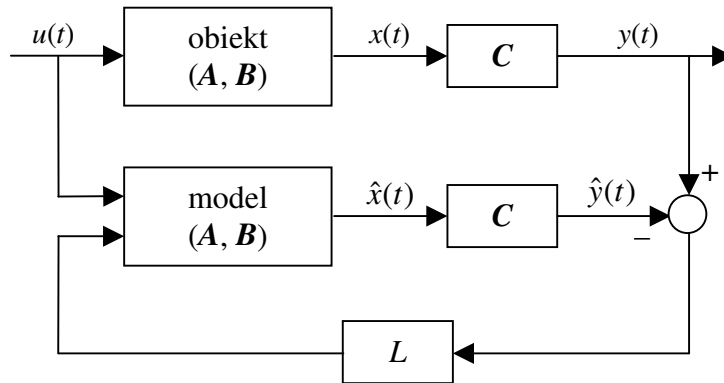
$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (2.100)$$

Zachodzi więc

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) \\ &= A(x(t) - \hat{x}(t)) = Ae(t) \end{aligned} \quad (2.101)$$

oraz

$$e(0) = x(0) - \hat{x}(0) \quad (2.102)$$



Rys. 2.19. Struktura obserwatora pełnego rzędu

Jeżeli układ jest stabilny (stabilna macierz  $A$ ), błąd estymacji stanu zbiega do zera. Nie ma niestety możliwości wpływania na szybkość tej zbieżności, zależy ona wyłącznie od dynamiki systemu. Dlatego też w praktyce do estymacji wektora stanu stosuje się sprzężenie zwrotne, dzięki któremu można dowolnie przesuwać bieguny obserwatora, czyli decydować o jakości estymacji stanu. Strukturę obserwatora pełnego rzędu pracującego w pętli zamkniętej pokazuje na rys. 2.19.

Obserwator stanu pełnego rzędu opisany jest równaniem

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t))\end{aligned}\quad (2.103)$$

gdzie

$$L = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Dla błędu estymacji stanu zachodzi więc

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = \\ &= Ax(t) + Bu(t) - A\hat{x}(t) - Bu(t) - L(Cx(t) - C\hat{x}(t)) \\ &= (A - LC)e(t)\end{aligned}\quad (2.105)$$

Równanie charakterystyczne obserwatora ma postać

$$|sI - (A - LC)| = 0 \quad (2.106)$$

Jeżeli można dobrać wektor  $L$  tak, aby macierz  $A - LC$  była stabilna, wówczas wektor błędu  $e(t)$  będzie dążył do zera, szybkość zbieżności będzie natomiast zależała od wartości własnych macierzy  $A - LC$ . Estymacja stanu  $\hat{x}(t)$  będzie dążyła do  $x(t)$ , niezależnie od sygnału sterującego i warunków początkowych obserwatora.

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego obserwatora miały zadane z góry wartości  $s_{o1}, \dots, s_{on}$

$$(s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{on}) = 0 \quad (2.107)$$

W praktyce bieguny obserwatora dobiera się tak, by ich moduły były kilkukrotnie większe od modułów biegunów regulatora. Zapewnia to szybkie nadążanie stanu estymowanego za niedostępnym pomiarowo stanem rzeczywistym. Nadążanie  $\hat{x}(t)$  za  $x(t)$  powinno być znacznie szybsze niż dynamika układu. Trzeba również wspomnieć o sytuacji, w której szum pomiarowy jest duży. Należy wówczas wybrać bieguny obserwatora o biegunach np. 2 razy większych niż bieguny regulatora. Wadą takiego rozwiązania jest znaczący wpływ obserwatora na jakość regulacji. Dzieje się tak, ponieważ regulator korzysta z informacji o stanie wyznaczonej przez obserwator, stan obserwowany jedynie z pewnym przybliżeniem odpowiada stanowi rzeczywistemu. Na charakter przebiegów przejściowych będzie miał wpływ nie tylko regulator lecz także obserwator.

Przyjęcie biegunów regulatora o dużych modułach prowadzi do dużych wartości wektora  $K$ , co z kolei jest przyczyną dużych, niekorzystnych, a czasami fizycznie nierealizowalnych, trajektorii sygnału sterującego. W przeciwieństwie do tego, bieguny obserwatora mogą być położone daleko w lewej półpłaszczyźnie, prowadzi to do szybkiego odtwarzania stanu systemu.

Z drugiej jednak strony, warto pamiętać, że pasmo przenoszenia staje się coraz szersze, obserwator staje się coraz bardziej wrażliwy na szum.

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Wyznaczyć obserwator pełnego rzędu o biegunach  $s_{o1}, s_{o2}$ . Do symulacji przyjąć a)  $s_{o1} = s_{o2} = -10$ , b)  $s_{o1} = s_{o2} = -20$ , c)  $s_{o1} = s_{o2} = -30$ , stan początkowy procesu  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , przyjąć stan początkowy obserwatora  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$ , przyjęto bieguny regulatora  $s_1 = s_2 = -3$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K = [20 \ 12]$ .

### Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne obserwatora ma postać

$$\begin{aligned} |sI - (A - LC)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} s + l_1 & -1 \\ l_2 - 1 & s \end{bmatrix} \right| = s^2 + l_1 s + l_2 - 1 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $s_1, s_2$

$$(s - s_{o1})(s - s_{o2}) = s^2 - (s_{o1} + s_{o2})s + s_{o1}s_{o2} \quad (2.110)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} l_1 = -(s_{o1} + s_{o2}) \\ l_2 - 1 = s_{o1}s_{o2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -(s_{o1} + s_{o2}) \\ l_2 = s_{o1}s_{o2} + 1 \end{cases} \quad (2.111)$$

Dla biegunów obserwatora  $s_{o1} = s_{o2} = -10$  wektor  $L = [20 \ 101]$ , dla  $s_{o1} = s_{o2} = -20$  wektor  $L = [40 \ 301]$ , dla  $s_{o1} = s_{o2} = -30$  wektor  $L = [60 \ 901]$ .

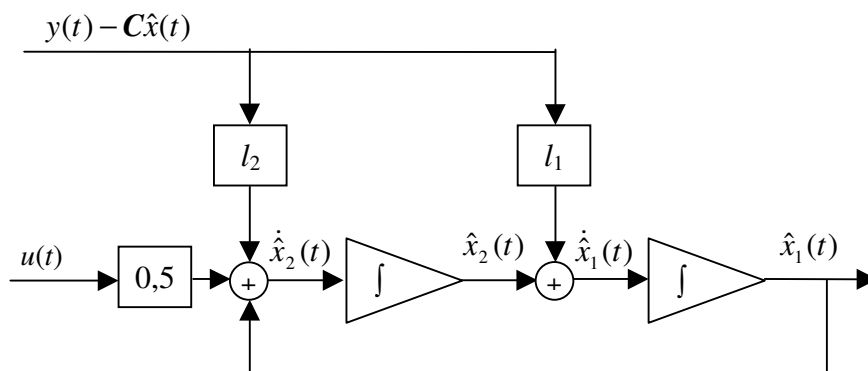
Równanie stanu obserwatora jest następujące

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad (2.112)$$

czyli dla rozważanego procesu

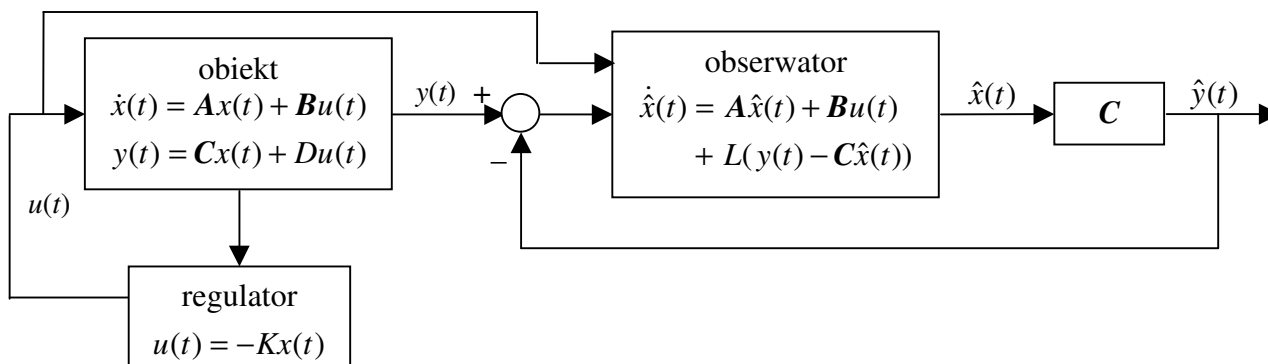
$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_1(t) &= \hat{x}_2(t) + l_1(y(t) - C\hat{x}(t)) \\ \dot{\hat{x}}_2(t) &= \hat{x}_1(t) + 0,5u(t) + l_2(y(t) - C\hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Struktura obserwatora została pokazana na rys 2.20.



Rys. 2.20. Struktura obserwatora stanu pełnego rzędu (przykład)

W celu przetestowania zaprojektowanego obserwatora zbudowano układ regulacji przedstawiony na rys. 2.21. Regulator w pętli sprzężenia zwrotnego korzysta z rzeczywistego stanu, obserwator zastosowano wyłącznie w celu zbadania dokładności estymacji stanu.



Rys. 2.21. Struktura układu regulacji stosowanego przy testowaniu obserwatora stanu pełnego rzędu

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 2.22. Ponieważ stan początkowy obserwatora jest różny od stanu początkowego obiektu w początkowym okresie symulacji występują duże różnice między stanem rzeczywistym a estymowanym. Przyjęcie biegunów obserwatora o większym module pozwala zwiększyć szybkość zbieżności estymat do stanu rzeczywistego procesu.

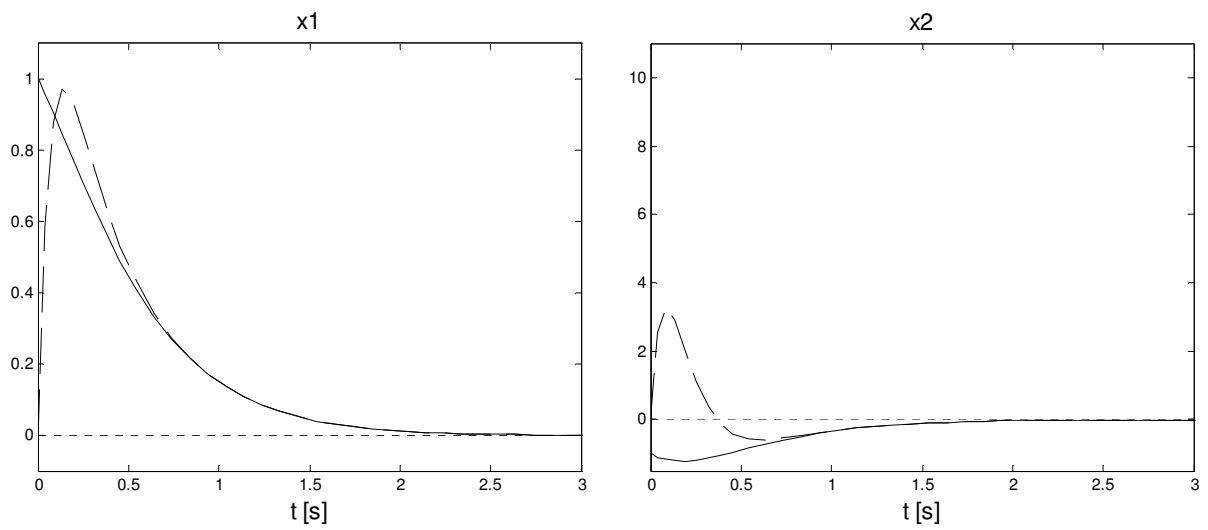
### Zadanie

Dla obiektu

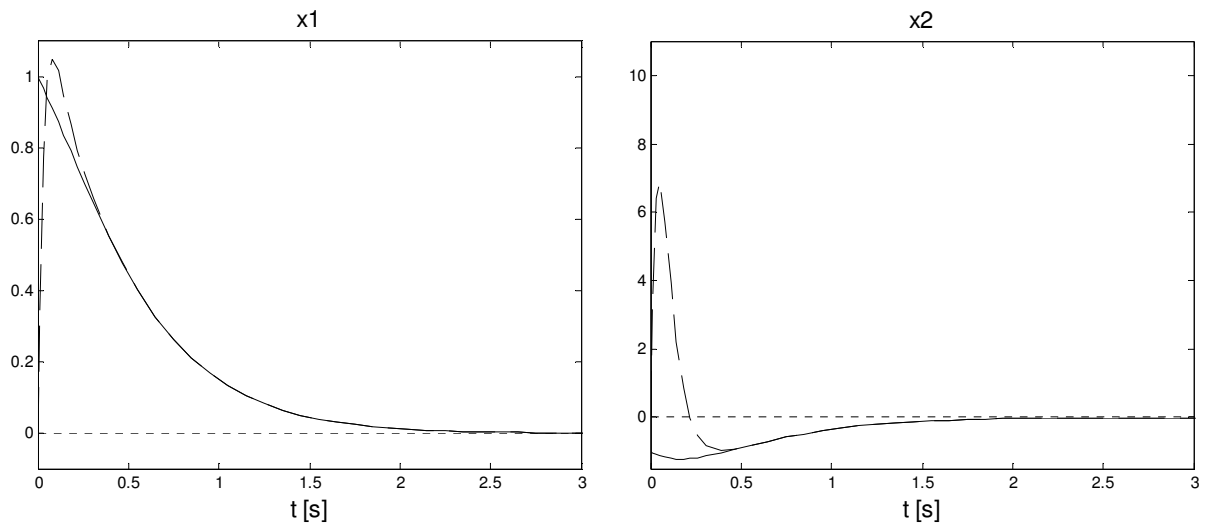
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.114)$$

Przeprowadzić symulacje układu regulacji z obserwatorem pełnego rzędu o biegunach  $s_{o1}, s_{o2}$ , przy czym a)  $s_{o1} = s_{o2} = -10$ , b)  $s_{o1} = s_{o2} = -30$ , stan estymowany wykorzystać w regulacji, stan początkowy procesu  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , stan początkowy obserwatora  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$ , przyjąć bieguny regulatora  $s_1 = s_2 = -3$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K = [20 \ 12]$ .

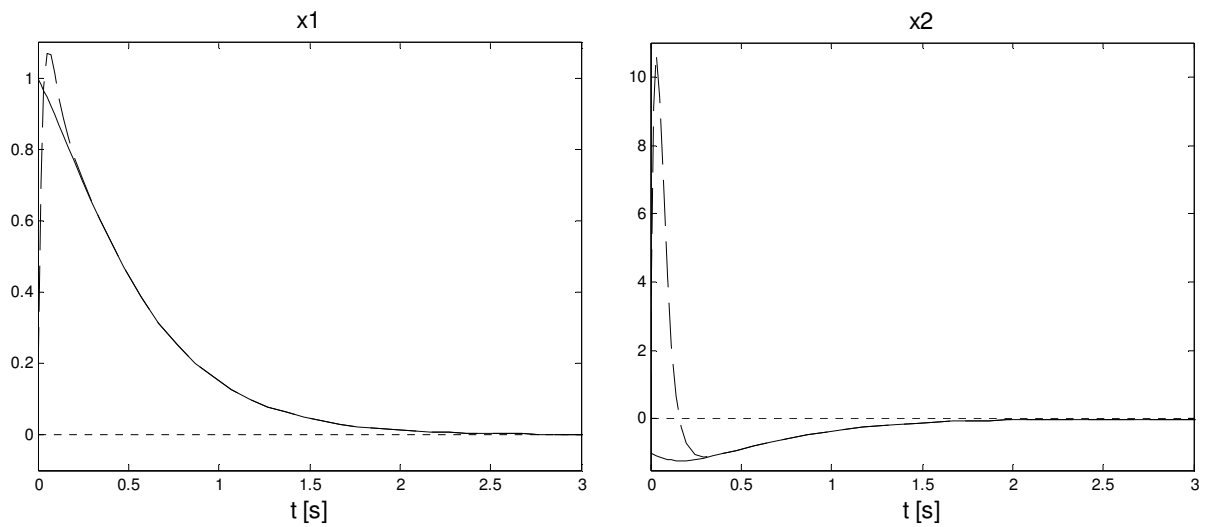
a)



b)



c)



Rys. 2.22. Trajektorie stanu rzeczywistego (linia ciągła) i estymowanego (linia przerywana) w układzie regulacji: a)  $s_{o1} = s_{o2} = -10$ , b)  $s_{o1} = s_{o2} = -20$ , c)  $s_{o1} = s_{o2} = -30$

## Rozwiązanie

Na rys. 2.23 przedstawiono trajektorie stanu procesu w dwóch przypadkach: gdy regulator korzysta z rzeczywistego (mierzonego) stanu procesu i gdy pomiar stanu zastąpiony jest jego estymacją za pomocą obserwatora pełnego rzędu. Na skutek zerowych warunków początkowych obserwatora w drugiej konfiguracji układu regulacji przebiegi przejściowe mają znacznie większą amplitudę. Zgodnie z oczekiwaniami, zwiększenie modułu biegunów obserwatora poprawia dokładność obserwacji stanu (co pokazano na rys. 2.22), a tym samym dokładność regulacji. Warto jednak podkreślić, że charakter przebiegów uzyskanych w układzie regulacji z idealnym pomiarem stanu oraz w układzie z obserwatorem jest inny. Jest to szczególnie widoczne w początkowym okresie symulacji. Przyczyną jest przyjęcie zerowych warunków początkowych obserwatora, podczas gdy rzeczywisty warunek początkowy wynosi  $x(0) = [1 \ -1]^T$ . W rezultacie, korzystający z obserwatora regulator na początku eksperymentu otrzymuje znacząco odbiegającą od rzeczywistości estymację stanu.

Jeżeli macierze  $A$  oraz  $C$  modelu w przestrzeni stanu mają strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (2.115)$$

dla układu zamkniętego otrzymuje się

$$A - LC = \begin{bmatrix} -a_{n-1} - l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} - l_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_{n-3} - l_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 - l_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 - l_n & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.116)$$

Równanie charakterystyczne obserwatora ma postać

$$|sI - (A - LC)| = s^n + (a_{n-1} + l_1)s^{n-1} + \dots + (a_1 + l_{n-1})s + a_0 + l_n = 0 \quad (2.117)$$

Z drugiej strony, równanie charakterystyczne obserwatora musi mieć zadane z góry bieguny  $s_{o1}, \dots, s_{on}$

$$\begin{aligned} |sI - (A - LC)| &= (s - s_{o1})(s - s_{o2}) \dots (s - s_{on}) \\ &= s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \dots + \beta_1s + \beta_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.118)$$

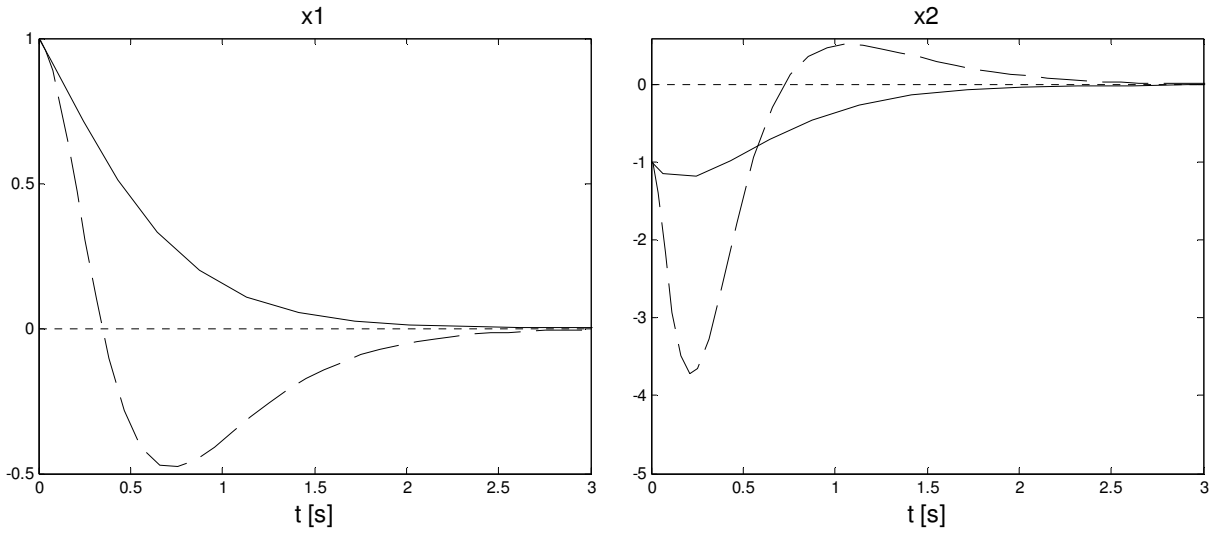
Porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$l_1 = \beta_{n-1} - a_{n-1} \quad \dots \quad l_{n-1} = \beta_1 - a_1 \quad l_n = \beta_0 - a_0 \quad (2.119)$$

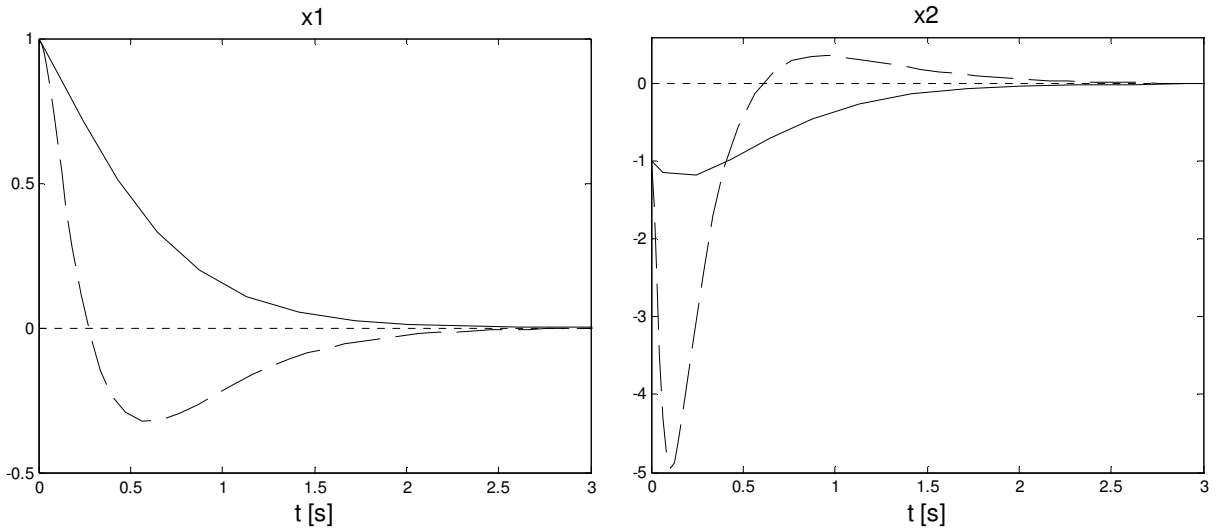
czyli

$$l_i = \beta_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.120)$$

a)



b)



Rys. 2.23. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła) i estymowanego  $\hat{x}_1(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$  (linia przerywana), bieguny obserwatora: a)  $s_{o1} = s_{o2} = -10$ , b)  $s_{o1} = s_{o2} = -30$

Współrzędne wektora  $L$  można również policzyć ze wzoru Ackermana, w którym wykorzystuje się odwrotność macierzy obserwowalności układu

$$L = \begin{bmatrix} A^n & \beta_{n-1}A^{n-1} & \dots & \beta_1A & \beta_0I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

Reasumując, wektor sprzężeń zwrotnych  $K$  dobiera się tak, aby pierwiastki równania charakterystycznego  $|sI - (A - BK)|$  miały z góry zadane wartości, wektor obserwatora  $L$  dobiera się natomiast tak, aby pierwiastki równania  $|sI - (A - LC)|$  miały zadane wartości. Projekto-

wanie obserwatora jest podobne do projektowania regulatora. W programie Matlab stosuje się

```
L=acker(A',C',[so1 ... son])
L=place(A',C',[so1 ... son])
```

### 2.1.10. Obserwatory zredukowanego rzędu

W praktyce zwykle tylko niektóre ze zmiennych stanu nie mogą być mierzone. Pomiary takich wielkości jak np. temperatura są szybkie, tanie i pewne, nie ma więc celu ich odtwarzanie. Zamiast obserwatora pełnego rzędu stosuje się obserwator zredukowanego rzędu.

Zakłada się, że macierz wyjścia ma strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (2.122)$$

Jeżeli macierz  $C$  nie ma żądanej postaci, stosuje się liniowe przekształcenie zmiennych stanu

$$x' = Mx \quad (2.123)$$

gdzie

$$M = \begin{bmatrix} C \\ D_0 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

przy czym macierz  $D_0$  o wymiarowości  $(n-1) \times n$  dobiera się tak, aby kwadratowa macierz  $M$  była nieosobliwa. Wówczas

$$A := M^{-1}AM, \quad B := M^{-1}B, \quad C := CM \quad (2.125)$$

Korzystając ze struktury macierzy  $C$ , wektor stanu można przedstawić w postaci

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ w(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.126)$$

przy czym  $w(t)$  jest  $n-1$  wektorem bezpośrednio niedostępnych zmiennych stanu. Zadaniem obserwatora zredukowanego jest odtworzenie składowych tego wektora.

Równanie stanu układu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (2.127)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t) \\ \dot{w}(t) &= A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) \end{aligned} \quad (2.128)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Wymiar macierzy jest następujący:  $A_{11}$ :  $1 \times 1$ ,  $A_{12}$ :  $1 \times (n-1)$ ,  $A_{21}$ :  $(n-1) \times 1$ ,  $A_{22}$ :  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $B_1$ :  $1 \times 1$ ,  $B_2$ :  $(n-1) \times 1$ . Mnożąc lewostronnie pierwsze z równań stanu przez wektor  $L$  o długości  $n-1$  i odejmując od drugiego równania otrzymuje się

$$\dot{w}(t) = (A_{22} - LA_{12})w(t) + (A_{21} - LA_{11})y(t) + (B_2 - LB_1)u(t) + L\dot{y}(t) \quad (2.130)$$



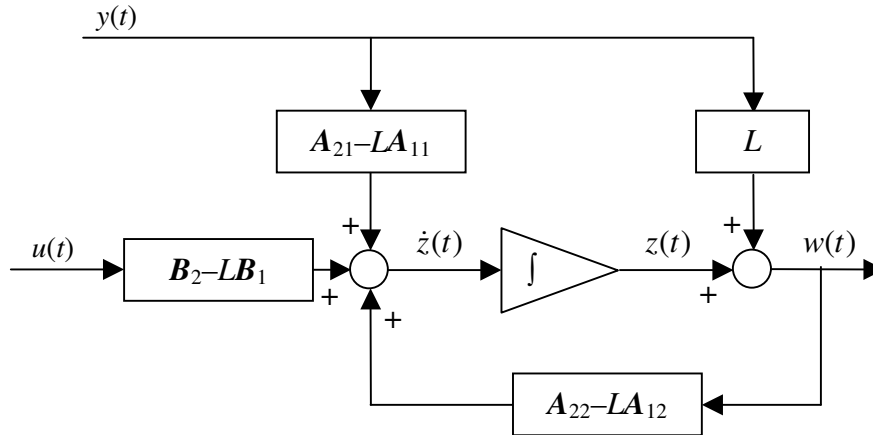
Różniczkowanie sygnału  $y(t)$  może doprowadzić do powstania w układzie dużych szumów. Aby tego uniknąć definiuje się stan

$$z(t) = w(t) - Ly(t) \quad (2.131)$$

Obserwator zredukowany dla stanu  $z(t)$  opisany jest więc równaniem

$$\dot{z}(t) = (A_{22} - LA_{12})(z(t) + Ly(t)) + (A_{21} - LA_{11})y(t) + (B_2 - LB_1)u(t) \quad (2.132)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 2.24.



Rys. 2.24. Struktura obserwatora zredukowanego rzędu

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|sI - (A_{22} - LA_{12})| = 0 \quad (2.133)$$

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby macierz  $A_{22} - LA_{12}$  miała z góry zadane wartości własne, rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone. Praktycznie wybiera się wartości o dostatecznie dużych modułach ujemnych części rzeczywistych. Dzięki temu wartości estymowanych zmiennych stanu szybko dążą do odpowiadających im rzeczywistych wartości zmiennych stanu.

Wektor  $L$  można wyznaczyć w wyniku porównania współczynników wyrazów stojących przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  równania charakterystycznego. Można również, analogicznie jak w przypadku obserwatora pełnego rzędu, zastosować wzór Ackermana

$$L = [A_{22}^n \quad \beta_{n-1}A_{22}^{n-1} \quad \dots \quad \beta_1A_{22} \quad \beta_0I] \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ A_{12}A_{22}^2 \\ \vdots \\ A_{12}A_{22}^{n-2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

Wektor  $L$  oblicza się porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  wielomianu charakterystycznego. Dla układów o wyższych rzędach warto skorzystać z programu Matlab. Szukany wektor znajduje się następująco

$$L = \text{acker}(A_{22}', A_{12}', [s_{o2} \dots s_{on}])$$

**Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.135)$$

zaprojektować obserwator zredukowany o biegunie  $s_o$ .

**Rozwiązanie**

Macierz wyjścia ma postać  $[1 \ 0]$ , a więc nie jest konieczne dodatkowe przekształcenie zmiennych stanu. Mierzona jest pierwsza zmienna stanu (wyjście), zadaniem obserwatora jest odtworzenie wielkości  $x_2(t)$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

Niech

$$\begin{aligned} z(t) &= w(t) - Ly(t) \\ &= x_2(t) - Lx_1(t) \end{aligned} \quad (2.137)$$

Podstawiając  $A_{11}=0$ ,  $A_{12}=1$ ,  $A_{21}=1$ ,  $A_{22}=0$ ,  $B_1=0$ ,  $B_2=0,5$  otrzymuje się

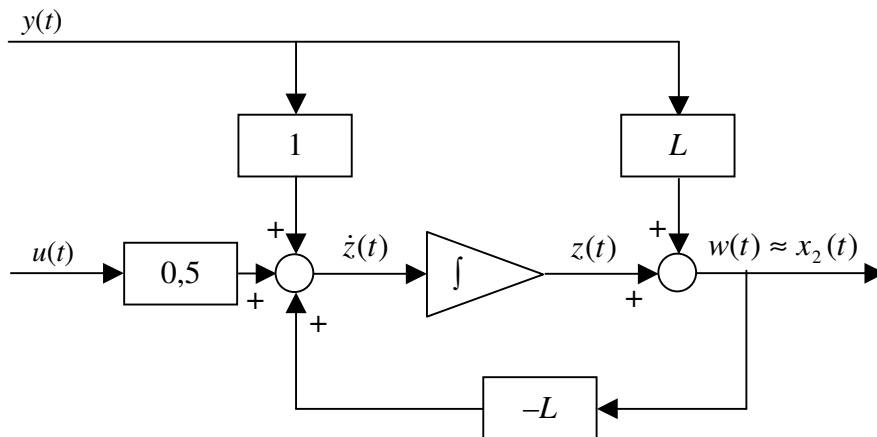
$$\dot{z}(t) = -L(z(t) + Ly(t)) + y(t) + 0,5u(t) \quad (2.138)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 2.25.

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|s\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{22} - L\mathbf{A}_{12})| = |s + L| = 0 \quad (2.139)$$

Ponieważ projektowany obserwator ma mieć biegun równy  $s_o$ ,  $L = -s_o$ .



Rys. 2.25. Struktura obserwatora zredukowanego rzędu odtwarzającego wartość  $x_2(t)$

**Zadanie**

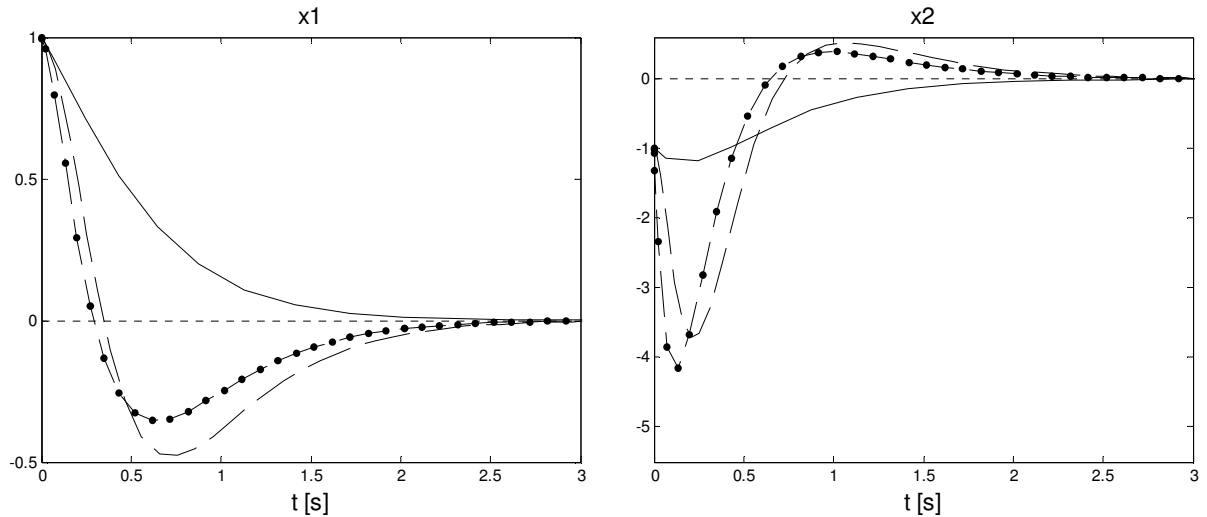
Dla obiektu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t)$$

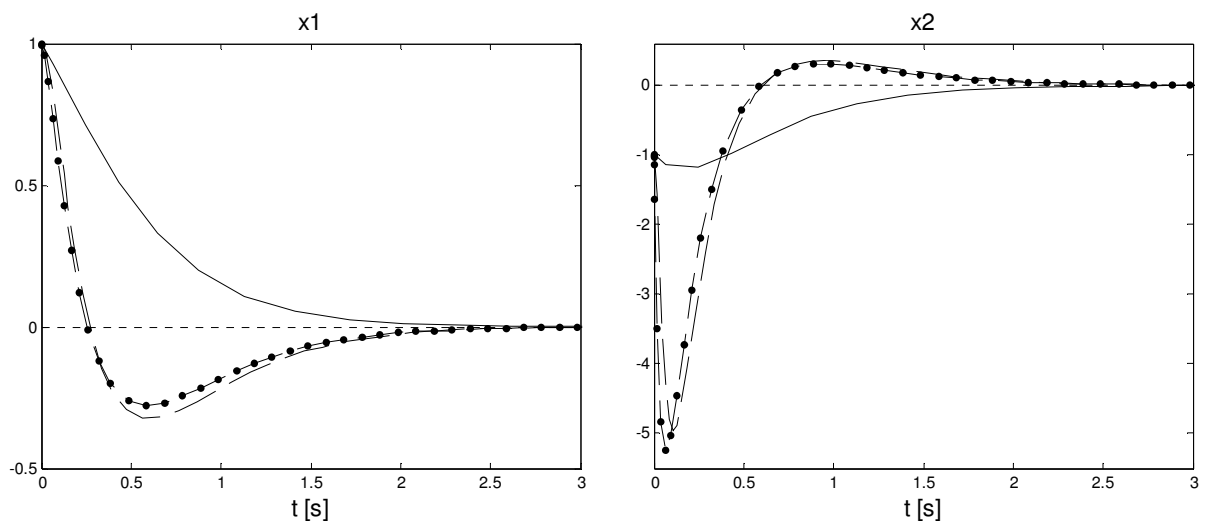
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$
(2.140)

Przeprowadzić symulacje układu regulacji z obserwatorem zredukowanego rzędu o biegunie  $s_o$ , przy czym a)  $s_o = -10$ , b)  $s_o = -30$ , stan estymowany wykorzystać w regulacji, stan początkowy procesu  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , stan początkowy obserwatora  $\hat{x}_2(0) = 0$ , przyjąć bieguny regulatora  $s_1 = s_2 = -3$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K = [20 \ 12]$ .

a)



b)



Rys. 2.26. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła), estymowanego  $\hat{x}_1(t)$ ,  $\hat{x}_2(t)$  (linia przerywana), rzeczywistego  $x_1(t)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(t)$  (linia przerywana kropkowana), biegun(y) obserwatora: a)  $-10$ , b)  $-30$

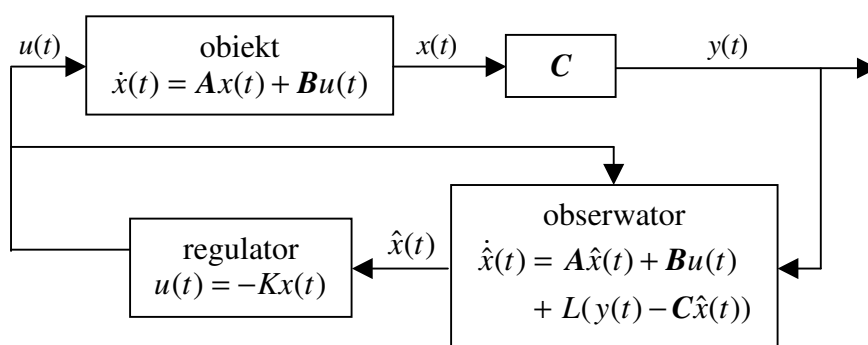
## Rozwiązanie

Na rys. 2.26 porównano trajektorie stanu uzyskane w trzech strukturach układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. W pierwszym przypadku regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła). W drugim przypadku zastosowano obserwator pełnego rzędu – regulator korzysta ze stanu estymowanego  $\hat{x}_1(t)$  oraz  $\hat{x}_2(t)$  (linia przerywana). W trzecim przypadku zastosowano obserwator zredukowany – regulator korzysta ze stanu rzeczywistego  $x_1(t)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(t)$  (linia przerywana kropkowana). Biegun(y) obserwatora przyjęto jako a)  $-10$ , b)  $-30$ . Zgodnie z oczekiwaniami, zwiększenie modułu biegunów obserwatora przyspiesza zbieżność stanu procesu. Analogicznie jak w przypadku obserwatora pełnego rzędu, charakter przebiegów uzyskanych w układzie regulacji z idealnym pomiarem stanu i w układzie z obserwatorem jest inny. Jest to spowodowane zerowym, a więc nieprawdziwym, warunkiem początkowym obserwatora.

Można zauważyć, że przebiegi w układzie regulacji współpracującym z obserwatorem zredukowanym są nieco lepsze niż w przypadku obserwatora pełnego rzędu. Wy tłumaczenie tego zjawiska jest intuicyjne. W pierwszym przypadku regulator korzysta z prawdziwego stanu  $x_1(t)$ , niedokładności spowodowane są wyłącznie błędem odtworzenia zmiennej stanu  $x_2(t)$ . W drugim przypadku obie zmienne stanu są obserwowane, ich wartości początkowe nie są znane, warunek początkowy obserwatora jest zerowy.

### 2.1.11. Zasada separowalności

Rozpatruje się układ regulacji z regulatorem  $K$  w pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego i obserwatorem stanu. Struktura układu została pokazana na rys. 2.27.



Rys. 2.27. Struktura układu regulacji z obserwatorem

Dynamika obiektu wraz z regulatorem opisana jest równaniem

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK\hat{x}(t) \quad (2.141)$$

Niech  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  będzie błędem estymacji stanu. Zachodzi wówczas

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BK(x(t) - e(t)) \quad (2.142)$$

Uwzględniając, że błąd estymacji stanu spełnia równanie

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (2.143)$$

można zapisać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (2.144)$$

Równanie charakterystyczne ma postać

$$\begin{vmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.145)$$

Wyznacznik blokowej macierzy trójkątnej

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}||s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{LC}| = 0 \quad (2.146)$$

Dobór regulatora i obserwatora może odbywać się niezależnie, bieguny regulatora nie mają wpływu na bieguny obserwatora (i odwrotnie). Fakt ten znany jest w literaturze jako tzw. zasada separowalności [3,6].

Można wyprowadzić relację między wejściem a wyjściem obiektu z regulatorem i obserwatorem, a więc transmitancję układu zamkniętego. Wstawiając prawo regulacji  $u(t) = K\hat{x}(t)$  do równania obserwatora

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \mathbf{A}\hat{x}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{L}(y(t) - \mathbf{C}\hat{x}(t)) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{BK} - \mathbf{LC})\hat{x}(t) \end{aligned} \quad (2.147)$$

Przez analogię do równania stanu  $\dot{x}(t) = \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t)$ , którego równanie charakterystyczne ma postać  $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$ , dla układu regulacji z obserwatorem otrzymuje się

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC}| = 0 \quad (2.148)$$

Transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = -K(s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK} + \mathbf{LC})^{-1}\mathbf{L} \quad (2.149)$$

Podobną zależność można wyprowadzić dla układu z obserwatorem zredukowanym.

### 2.1.12. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego

W dotychczasowych rozważaniach zakładano, że parametry modelu odpowiadają parametrom rzeczywistego procesu. W praktyce nie ma to jednak miejsca, ewentualne różnice oraz zakłócenia mogą spowodować powstanie uchybu ustalonego. Należy więc zaprojektować układ regulacji z całkowaniem, który byłby w stanie zerować uchyb w stanie ustalonym, podobnie jak odbywa się to w klasycznym układzie regulacji PID.

Rozważa się model liniowy

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \end{aligned} \quad (2.150)$$

Niech  $e(t) = y^{zad}(t) - y(t)$  będzie różnicą między sygnałem zadany a wyjściowym, czyli uchybem regulacji. Definiuje się dodatkową zmienną stanu  $x_e(t)$ , której celem jest całkowanie uchybu

$$\dot{x}_e(t) = \int e \, dt \quad (2.151)$$

Innymi słowy, zachodzi związek

$$\dot{x}_e(t) = e(t) = y^{zad}(t) - y(t) \quad (2.152)$$

Uwzględniając równanie wyjścia procesu, otrzymuje się

$$\dot{x}_e(t) = y^{zad}(t) - Cx(t) \quad (2.153)$$

Rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} y^{zad}(t) \quad (2.154)$$

Liniowe prawo regulacji ma postać

$$u(t) = -K \begin{bmatrix} x(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

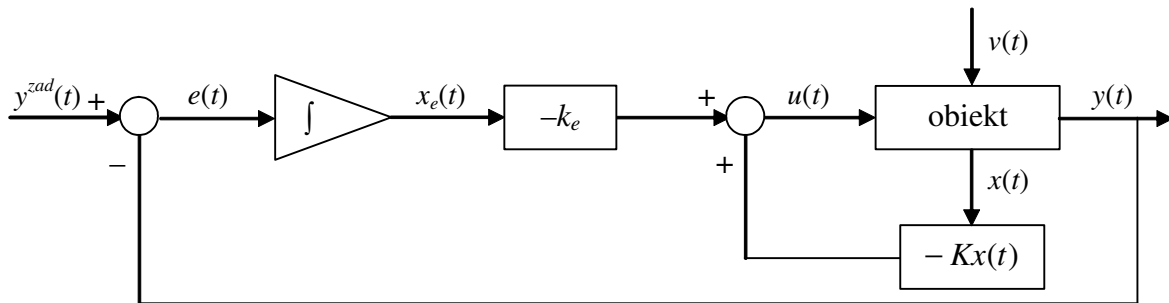
przy czym elementy wektora sprzężeń zwrotnych  $K=[K_e \ K]$  oblicza się w taki sposób, aby równanie charakterystyczne  $|sI - (A_r - B_r K)| = 0$  miało zadane z góry pierwiastki. Można to zrobić porównując współczynniki odpowiednich wielomianów lub wykorzystać polecenie programu Matlab

`L=acker(Ar,Br, [so1 ... son se])`

gdzie

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

Struktura uzyskanego układu regulacji z całkowaniem pokazana została na rys. 2.28. Założono przy tym, że stan procesu jest mierzony. Oczywiście nic nie stoi na przeszkodzie, aby regulator korzystał ze stanu obliczanego przez obserwator pełnego lub zredukowanego rzędu. Zostanie to omówione w dalszej części bieżącego rozdziału.



Rys. 2.28. Struktura układu regulacji z całkowaniem

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.157)$$

zaprojektować układ regulacji z całkowaniem. Przyjąć potrójny biegun regulatora  $s_0$ . Zakłó-

cenie  $v(t)$  działa na wejście procesu. Przeprowadzić symulacje dla a)  $s_0 = -1$ , b)  $s_0 = -3$ , przyjmując zerowe warunki początkowe  $x(0) = [0 \ 0]^T$ .

### Rozwiązanie

Rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y^{zad}(t) \quad (2.158)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$\begin{aligned} |sI - (A_r - B_r K)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 0 \end{bmatrix} [k_1 \ k_2 \ k_e] \right| \\ &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0,5k_1 - 1 & 0,5k_2 + s & 0,5k_e \\ 1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + 0,5k_2 s^2 + (0,5k_1 - 1)s - 0,5k_e \end{aligned} \quad (2.159)$$

Żąda się, aby równanie charakterystyczne miało potrójny pierwiastek  $s_0$

$$(s - s_0)^3 = s^3 - 3s_0 s^2 + 3s_0^2 s - s_0^3 \quad (2.160)$$

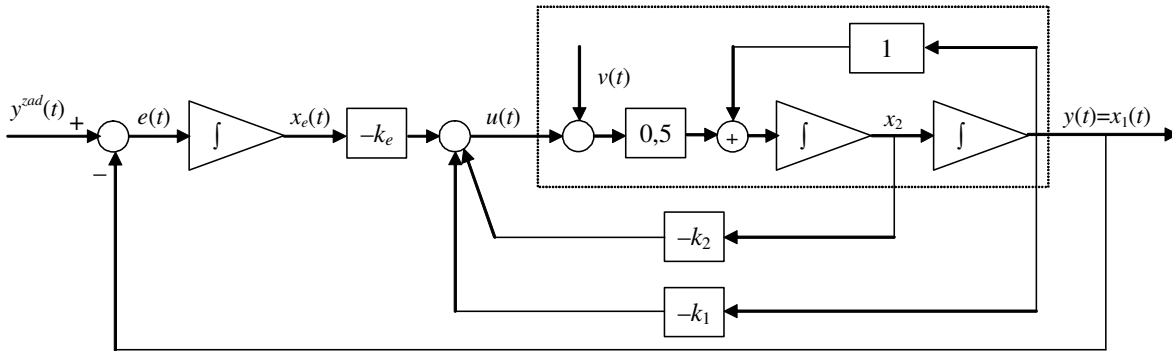
Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} 0,5k_1 - 1 = 3s_0^2 \\ 0,5k_2 = -3s_0 \\ -0,5k_e = -s_0^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 2(3s_0^2 + 1) \\ k_2 = -6s_0 \\ k_e = 2s_0^3 \end{cases} \quad (2.161)$$

Dla  $s_0 = -1$  otrzymuje się  $k_1=8$ ,  $k_2=6$ ,  $k_e=-2$ , dla  $s_0 = -3$  otrzymuje się  $k_1=56$ ,  $k_2=18$ ,  $k_e=-54$ . Prawo regulacji ma postać

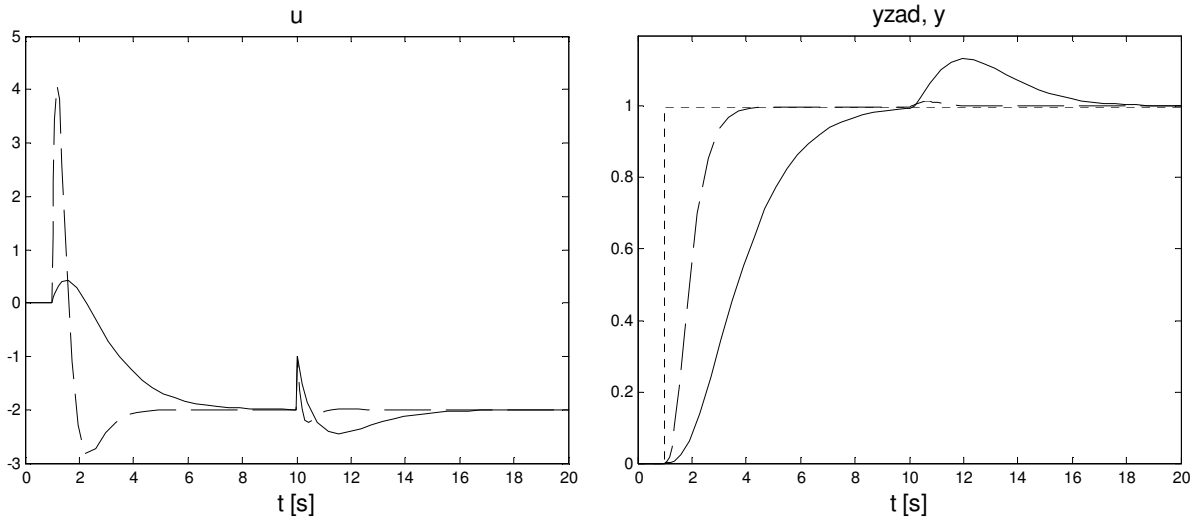
$$u(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_e] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.162)$$

Struktura uzyskanego układu regulacji z całkowaniem pokazana została na rys. 2.29.



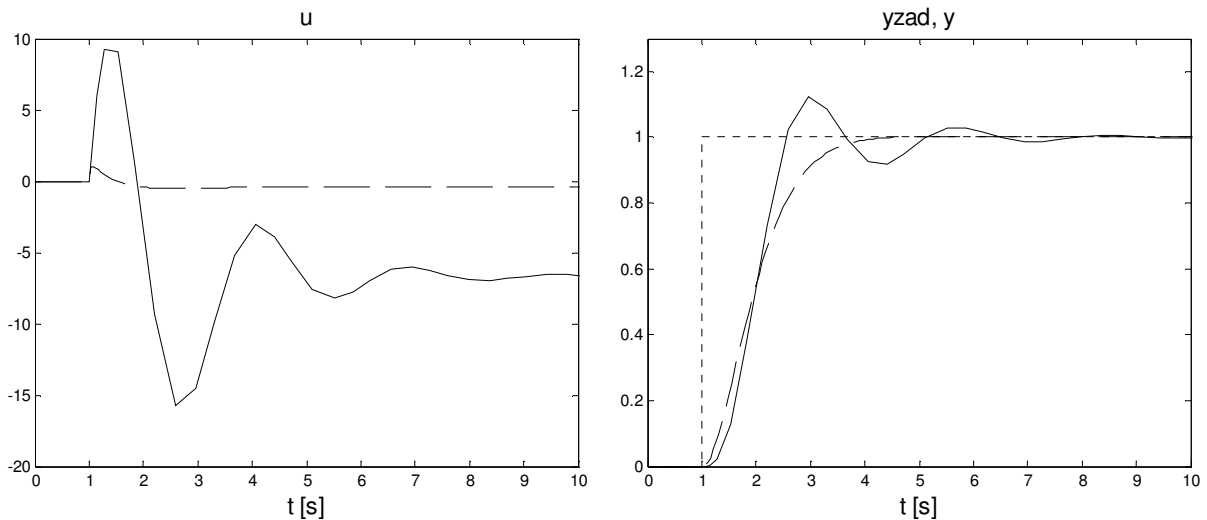
Rys. 2.29. Struktura układu regulacji z całkowaniem (przykład)

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 2.30. W chwili  $t=1$  następuje zmiana wartości zadanej z 0 do 1, natomiast w chwili  $t=10$  następuje zmiana sygnału zakłócenia z wartości 0 do 1. Zwiększenie modułu biegunów układu zamkniętego przyspiesza działanie układu regulacji. Jest to widoczne zarówno podczas reakcji na zmianę wartości zadanej i podczas tłumienia wpływu zakłócenia.



Rys. 2.30. Wyniki symulacji przy zmianie wartości zadanej w chwili  $t=1$  i skoku zakłócenia w chwili  $t=10$  przy  $s_0 = -1$  (linia ciągła) i  $s_0 = -3$  (linia przerywana)





Rys. 2.31. Wyniki symulacji przy zmianie wartości zadanej w chwili  $t=1$  przy zmianach współczynnika wzmocnienia obiektu:  $p=0,15$  (linia ciągła) i  $p=2,5$  (linia przerywana)

### Zadanie

Zbadać odporność zaprojektowanego układu regulacji na zmiany wzmocnienia statycznego procesu, tzn. przyjąć, że równania rzeczywistego procesu są następujące

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.163)$$

gdzie  $p=0,15$  lub  $p=2,5$ , natomiast w modelu stosowanym do zaprojektowania regulatora  $p=0,5$ . Przyjąć potrójny biegun regulatora  $s_0 = -3$  oraz zerowe warunki początkowe  $x(0) = [0 \ 0]^T$ .

### Rozwiązanie

Wyniki symulacji przy skokowej zmianie wartości zadanej przedstawiono na rys. 2.31. Dla obu wartości wzmocnienia statycznego układ jest stabilny, dzięki całkowaniu następuje redukcja do zera uchybu ustalonego.

Układ regulacji zaprojektowano przy założeniu, że potrójny biegun układu zamkniętego leży w punkcie  $s_0 = -3$ . Jest to oczywiście prawdą tylko wówczas, gdy rzeczywisty obiekt jest taki sam jak model użyty podczas obliczeń. Przy uwzględnieniu zmian współczynnika wzmocnienia obiektu, równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned}
|sI - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_e & k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ pk_e & pk_1 - 1 & pk_2 + s \end{vmatrix} = s^3 + pk_2 s^2 + (pk_1 - 1)s + pk_e \quad (2.164) \\
&= s^3 + 18ps^2 + (56p - 1)s + 54p
\end{aligned}$$

Dla  $p=0,15$  otrzymuje się następujące pierwiastki rzeczywistego układu zamkniętego

$$s_{1,2} = -0,6252 \pm 2,2796i, s_3 = -1,4497 \quad (2.165)$$

natomiast dla  $p=2,5$

$$s_{1,2} = -1,6260 \pm 0,7679i, s_3 = -41,7480 \quad (2.166)$$

Bieguny sprzężone otrzymane w pierwszym przypadku są przyczyną powstania w układzie drgań gasnących, natomiast w drugim przypadku dominujący jest biegun trzeci, zapewnia on stabilną pracę układu.

### Zadanie

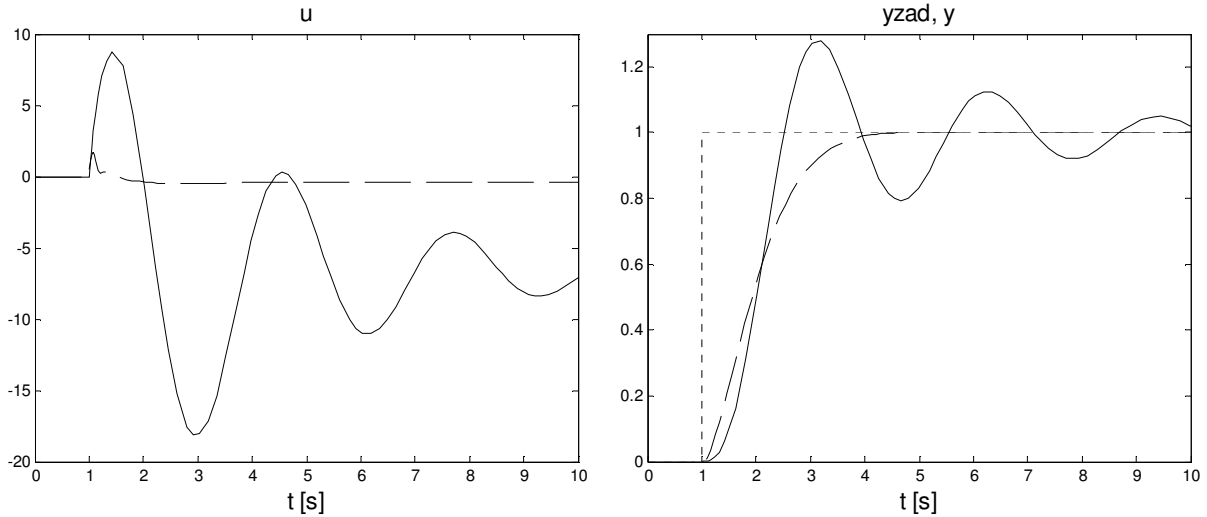
W zaprojektowanym układzie regulacji przyjąć, że stan  $x_2(t)$  nie jest dostępny pomiarowo, do jego estymacji zastosować obserwator zredukowanego rzędu. Przyjąć zerowe warunki początkowe procesu i obserwatora. Zbadać odporność zaprojektowanego układu regulacji na zmiany wzmocnienia statycznego procesu, tzn. przyjąć, że rzeczywisty proces ma postać

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}
\end{aligned} \quad (2.167)$$

gdzie  $p=0,15$  lub  $p=2,5$ . Przyjąć potrójny biegun regulatora  $s_0 = -3$  oraz zerowe warunki początkowe  $x(0) = [0 \ 0]^T$ .

## Rozwiązanie

Wyniki symulacji pokazano na rys. 2.32. Podobnie jak w przypadku przedstawionym na rys. 2.31. (gdy obie zmienne stanu są mierzone) dla obu wartości wzmocnienia statycznego układ jest stabilny, dzięki całkowaniu następuje redukcja do zera uchybu ustalonego. Warto jednak podkreślić, że przy  $p=0,15$  występują oscylacje znacznie większe niż w przypadku układu regulacji korzystającego z rzeczywistego stanu. Jest to spowodowane tym, że regulator korzysta z niedokładnej informacji o stanie. Dzieje się tak, ponieważ właściwości modelu zastosowanego do projektowania obserwatora różnią się w stosunku do parametrów rzeczywistego procesu.



Rys. 2.32. Wyniki symulacji układu regulacji z obserwatorem zredukowanego rzędu przy zmianie wartości zadanej w chwili  $t=1$  przy zmianach współczynnika wzmocnienia obiektu:  $p=0,15$  (linia ciągła) i  $p=2,5$  (linia przerywana)

## 2.2. Algorytm PID – realizacje praktyczne

Sygnał sterujący w algorytmie PID obliczany jest ze wzoru

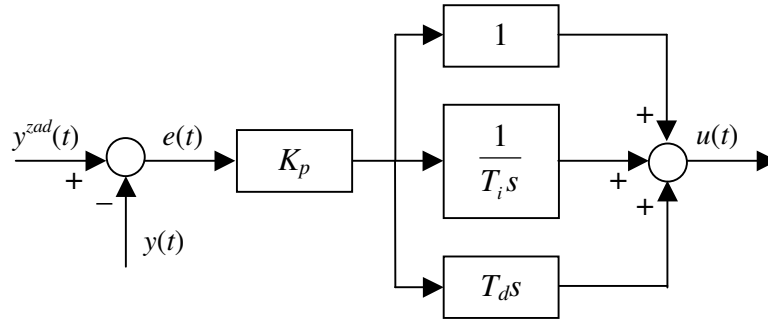
$$u(t) = u_0 + K_p \left( e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.168)$$

gdzie:  $K_p$  – współczynnik wzmocnienia,  $T_i$  – stała czasowa całkowania (tzw. czas zdwojenia),  $T_d$  – stała czasowa różniczkowania (tzw. czas wyprzedzenia). Opracowano kilka struktur praktycznej realizacji algorytmu PID. W strukturze standardowej (rys. 2.33) transformata sygnału sterującego obliczana jest ze wzoru

$$U(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) E(s) \quad (2.169)$$

gdzie

$$E(s) = Y^{zad}(s) - Y(s) \quad (2.170)$$



Rys. 2.33. Standardowa struktura regulatora PID

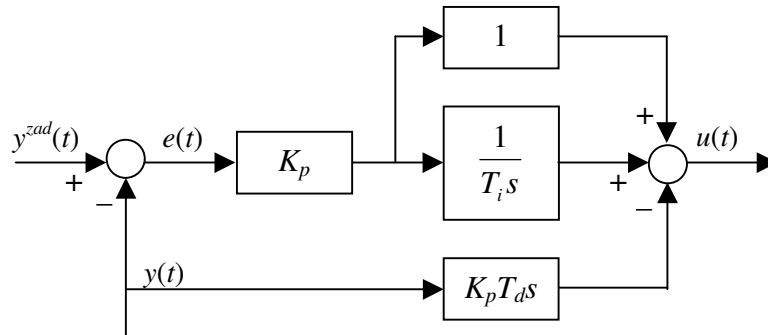
W miejsce idealnego członu różniczkującego  $T_d s$  w praktyce stosuje się różniczkowanie rzeczywiste

$$\frac{T_d s}{\frac{T_d}{\alpha} s + 1} \quad (2.171)$$

gdzie  $\alpha=1...5$ .

Przy szybkich zmianach wartości zadanej stosuje się strukturę z różniczkowaniem sygnału wyjściowego pokazaną na rys. 2.34. Transformata sygnału sterującego

$$U(s) = K_p \left[ \left( 1 + \frac{1}{T_i s} \right) E(s) - T_d s Y(s) \right] \quad (2.172)$$



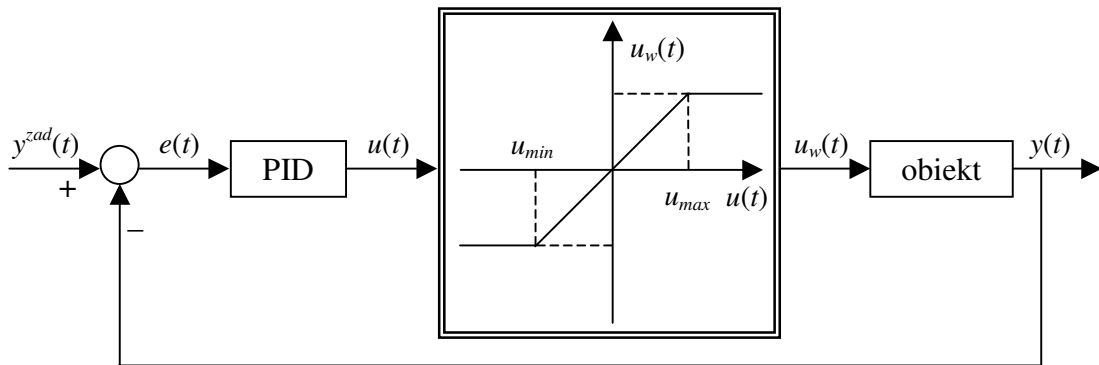
Rys. 2.34. Struktura regulatora PID z różniczkowaniem sygnału wyjściowego

### 2.2.1. Regulacja PID z ograniczeniem całkowania

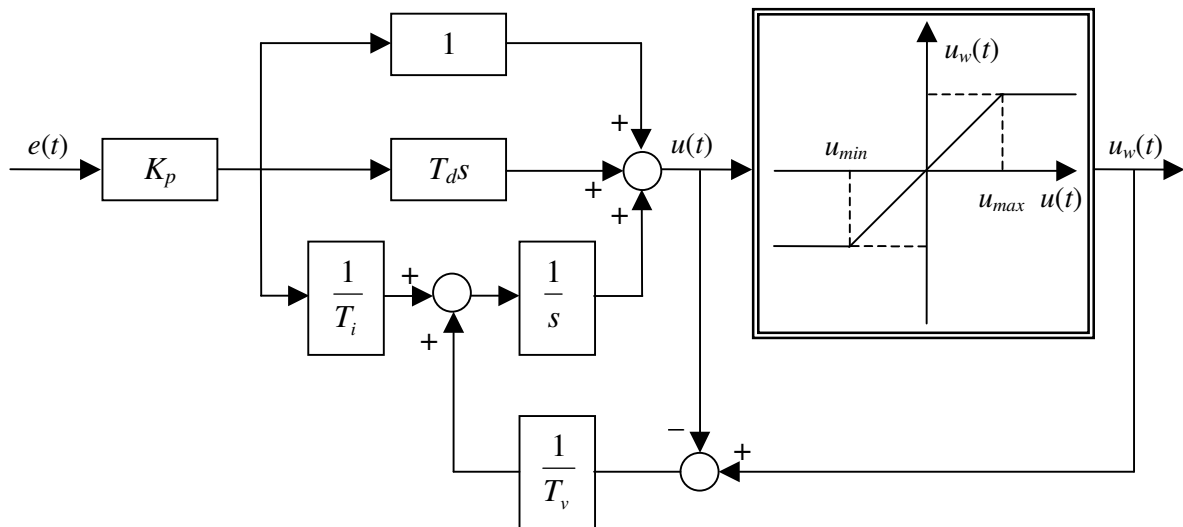
Praktycznie we wszystkich stosowanych układach regulacji należy liczyć się z możliwością wystąpienia ograniczeń sygnału sterującego elementu wykonawczego. Po pierwsze, właściwie zawsze istnieją ograniczenia maksymalnej i minimalnej wartości sygnału (spowodowane zjawiskiem nasycenia charakterystyki elementu wykonawczego). Po drugie, z uwagi na uwarunkowania technologiczne i wymogi bezpieczeństwa, niekiedy również szybkość zmian sygnału sterującego nie może być zbyt duża. O ile odpowiednią szybkość działania algorytmu PID można dobrać dzięki doborowi jego nastaw, to bardzo często obliczony sygnał sterujący  $u(t)$  przekracza ograniczenia elementu wykonawczego ( $u_{min}$ ,  $u_{max}$ ). Algorytm nie pracuje wówczas poprawnie. Na przykład, w układzie regulacji pokazanym na rys. 2.35 następuje duża, skokowa zmiana sygnału wartości zadanej. Rzeczywisty sygnał sterujący obiektem przyjmuje wartość  $u_w(t)=u_{max}$ . Uchyb regulacji jest duży, człon całkujący regulatora całkuje

uchyb, sygnał  $u(t)$  obliczany przez regulator rośnie, ale rzeczywisty sygnał sterujący pozostaje stały ( $u_w(t)=u_{max}$ ). Osiągnięcie żadanego stanu ustalonego wymaga długotrwałego „odcałkowania” uchybu.

Opracowano kilka rozwiązań eliminujących opisane zjawisko. Ich idea polega na zatrzymaniu operacji całkowania, lub jej ograniczenia wówczas, gdy punkt pracy układu znajdzie się w nieliniowym obszarze charakterystyki członu wykonawczego. Na rys. 2.36 pokazano strukturę układu regulacji, w którym sygnał korekty proporcjonalny do różnicy sygnałów  $u(t)$  oraz  $u_w(t)$  oddziałuje na sygnał członu całkującego.



Rys. 2.35. Nasycenie sygnału sterującego w układzie regulacji PID



Rys. 2.36. Struktura układu regulacji PID z korektą składowej całkowej

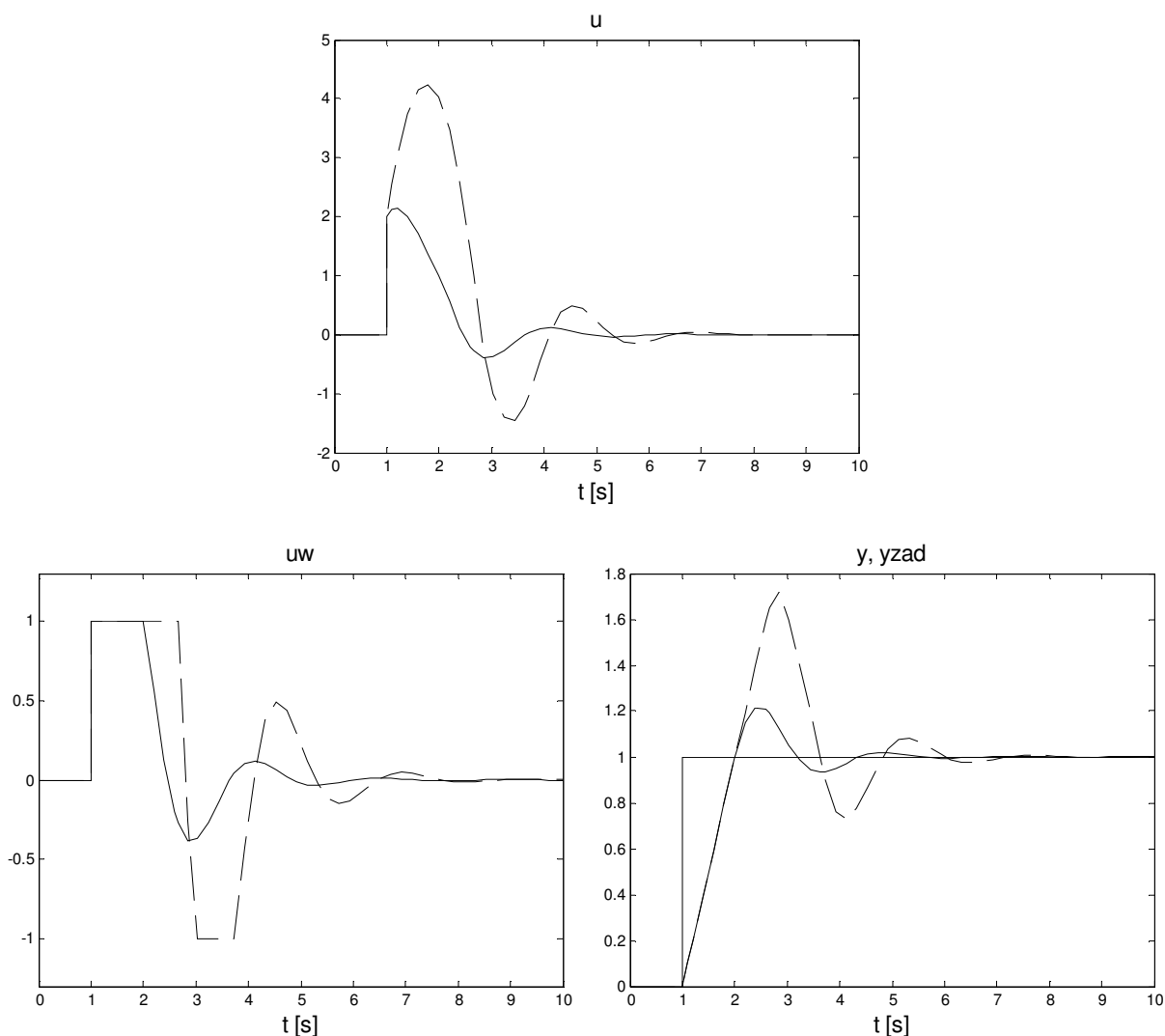
### Przykład

Do obiektu o transmitancji

$$G(s) = \frac{1}{s} \quad (2.173)$$

dobrano regulator PI o nastawach  $K_p=2$ ,  $1/T_i=4$ . Element wykonawczy ma nieliniową charakterystykę statyczną (nasycenie),  $u_{min}=-1$ ,  $u_{max}=1$ , przyjęto  $T_v=T_i$ . Przy zerowej wartości zadanej w chwili  $t=1$  następuje skokowa zmiana wartości zadanej od 0 do 1. Wyniki symulacji

przedstawiono na rys. 2.37. W porównaniu z klasycznym układem regulacji, w strukturze z korektą składowej całkowej przebieg sygnału sterującego jest znacznie łagodniejszy, mniejsze jest również przeregulowanie sygnału wyjściowego.



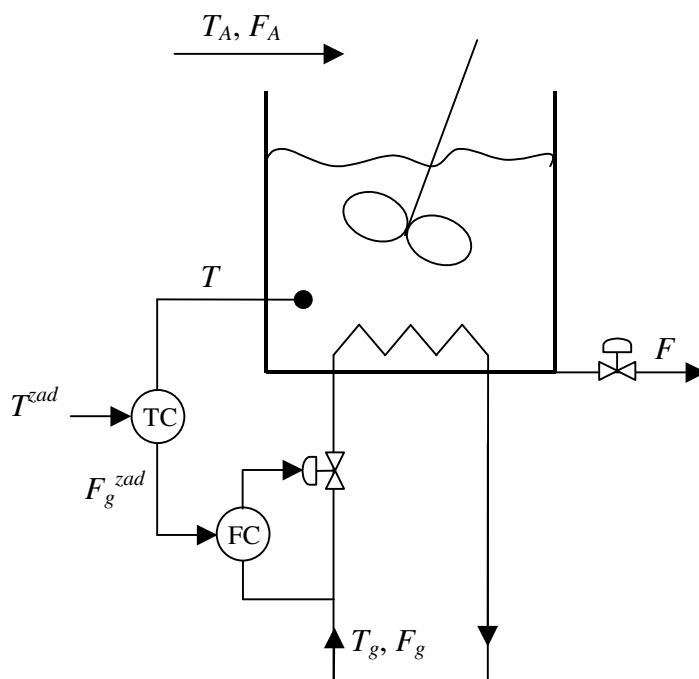
Rys. 2.37. Wyniki symulacji obiektu z nasyceniem w klasycznym układzie regulacji PID (linia przerywana) i w układzie regulacji PID z korektą składowej całkowej (linia ciągła)

### 2.2.2. Regulacja kaskadowa

W niektórych przypadkach zastosowanie klasycznego układu regulacji PID może nie zapewnić wymaganej jakości regulacji. Pomijając nieliniowe algorytmy regulacji, w takim przypadku stosuje się nieco bardziej złożone struktury, wyprowadzając z obiektu pewną dodatkową wielkość pomocniczą i doprowadzając ją w pewien sposób do regulatora. Zostanie to omówione na przykładzie [5].

#### Przykład

W układzie regulacji reaktora chemicznego głównym zakłóceniem są zmiany ciśnienia (a co za tym idzie natężenia przepływu  $F_g$ ) czynnika grzewczego (pary wodnej). W rezultacie temperatura  $T$  cieczy wewnątrz reaktora jest zmienna. Rozwiązaniem oczywistym jest stabilizacja wartości temperatury  $T$  za pomocą dodatkowego regulatora, który zmienia przepływ substancji grzewczej.



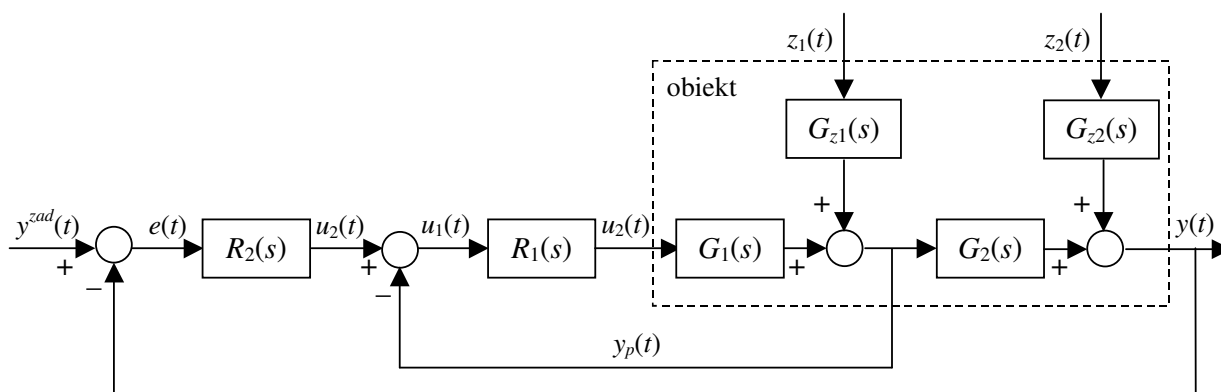
Rys. 2.38. Kaskadowa regulacja temperatury  $T$  w reaktorze chemicznym

Warunkiem stosowania regulacji kaskadowej jest dostępność pomocniczej wielkości pomiarowej, która charakteryzuje się następującymi cechami:

- Jest ona wrażliwa na zmiany istotnego (głównego) zakłócenia.
- Zmienna sterująca wpływa na zmienną pomocniczą.
- Dynamika pętli zmiennej pomocniczej jest szybsza niż dynamika pętli podstawowej zmiennej regulowanej.

Jeżeli któryś z powyższych warunków nie jest spełniony, zastosowanie regulacji kaskadowej nie przynosi poprawy. W powyższym przykładzie regulacja kaskadowa nic nie daje, jeżeli głównym zakłóceniem będzie zmiana temperatury surowca  $T_A$  lub natężenie dopływu  $F_A$ .

Na rys. 2.39 pokazano strukturę układu regulacji kaskadowej, przy czym obiekt rozdzielono na dwie części oraz wprowadzono dwa regulatory. Symbolem  $y_p$  oznaczono pomocniczą zmienną pomiarową, natomiast  $z_1$  jest głównym zakłóceniem.



Rys. 2.39. Struktura układu regulacji kaskadowej

Podstawowym czynnikiem warunkującym przewagę regulacji kaskadowej jest możliwość szybkiej i dobrej (czyli o dużym współczynniku wzmocnienia regulatora) regulacji w pętli

wewnętrznej, tzn. szybkość dynamiki członu  $G_1(s)$  jest znacznie mniejsza niż szybkość dynamiki bloku  $G_2(s)$ .

Z punktu widzenia regulatora  $R_2$  obiekt ma transmitancję

$$\frac{Y(s)}{U_2(s)} = G_2(s) \frac{R_1(s)G_1(s)}{1 + R_1(s)G_1(s)} \quad (2.174)$$

W paśmie częstotliwości, dla których  $|R_1(j\omega)G_1(j\omega)| \gg 1$

$$\frac{Y(s)}{U_2(s)} \cong G_2(s) \quad (2.175)$$

Najistotniejszą zaletą regulacji kaskadowej jest możliwość *dobrej kompensacji zakłócenia występującego w pętli wewnętrznej*. Dla tej pętli

$$\frac{Y(s)}{Z_1(s)} = \frac{G_{z1}(s)}{1 + R_1(s)G_1(s)} G_2(s) \quad (2.176)$$

### Przykład

Dany jest obiekt regulacji o transmitancji [5]

$$G(s) = \frac{\exp\left(-\left(0,3 + \frac{0,3}{\eta}\right)s\right)}{\left(\left(\frac{0,7}{\eta}\right)s + 1\right)(0,7s + 1)} \quad (2.177)$$

W układzie regulacji kaskadowej obiekt ten można złożyć z następujących transmitancji  $G_1(s)$  i  $G_2(s)$

$$G_1(s) = \frac{\exp\left(-\frac{0,3}{\eta}s\right)}{\left(\frac{0,7}{\eta}\right)s + 1}, \quad G_2(s) = \frac{\exp(-0,3s)}{0,7s + 1} \quad (2.178)$$

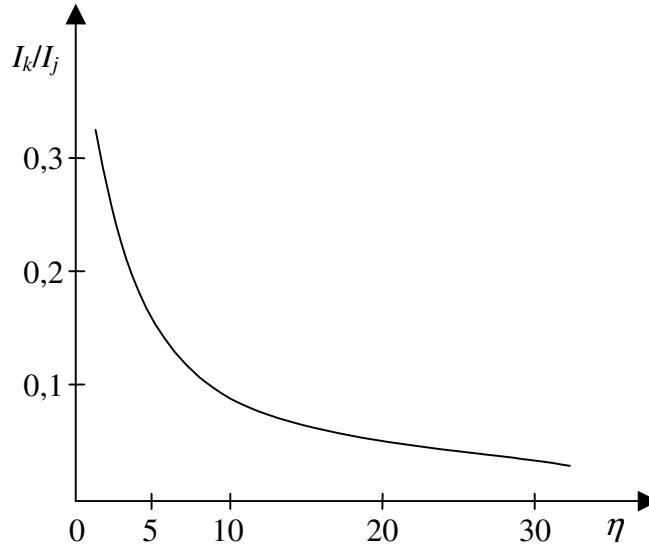
przy czym  $T_2 \gg T_1$ , główne zakłócenie występuje w pętli wewnętrznej.

Zaprojektowano dwa układy regulacji. W pierwszym zastosowano klasyczny regulator PI, natomiast w drugim regulator kaskadowy. W celu porównania skuteczności regulacji przy skokowej zmianie wartości zadanej na rys. 2.40 porównano iloraz całkowego wskaźnika jakości

$$I = \int_0^{\infty} |e(t)| dt \quad (2.179)$$

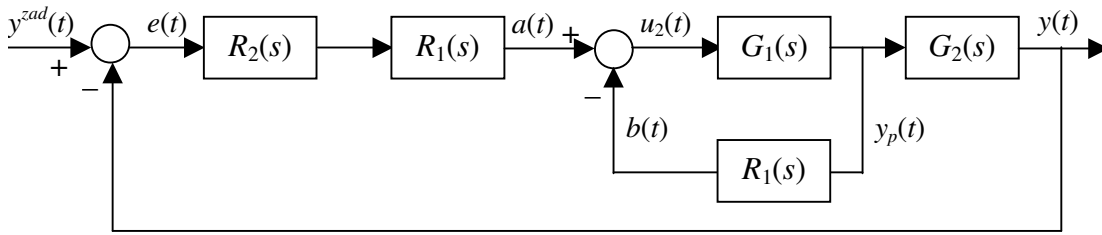
w układzie regulacji kaskadowej ( $I_k$ ) i jednopętlowym ( $I_j$ ).





Rys. 2.40. Wskaźnik skuteczności regulacji kaskadowej

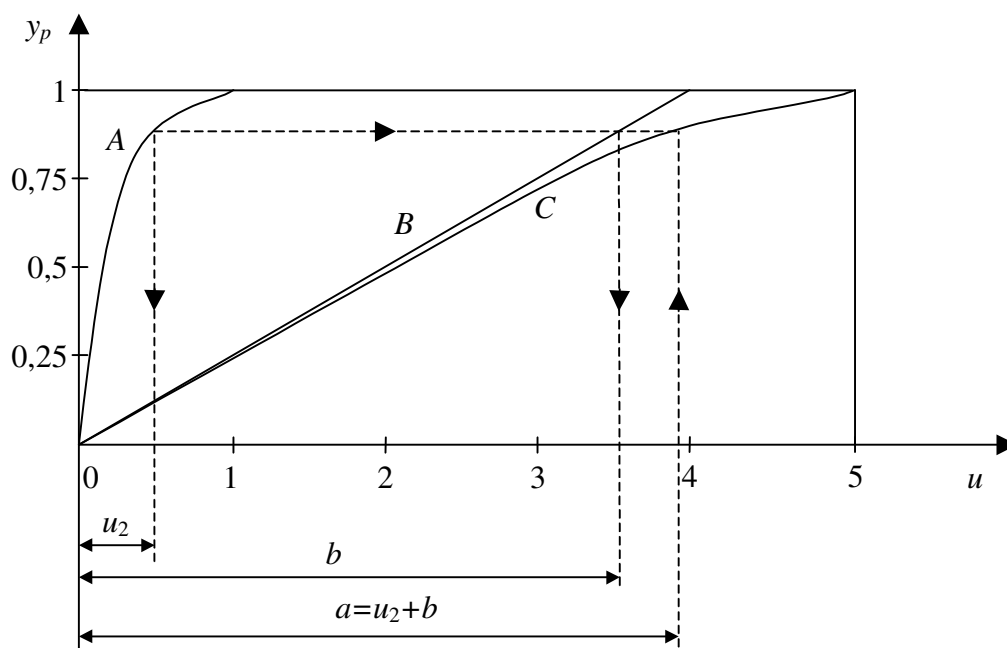
Drugą zaletą regulacji kaskadowej jest *linearyzacja* (zmniejszenie nieliniowości) obiektu objętego pętlą wewnętrzną. Przedstawiony schemat regulacji kaskadowej można przekształcić do schematu pokazanego na rys. 2.41.



Rys. 2.41. Struktura równoważna układu regulacji kaskadowej

Jeżeli transmitancja  $G_1(s)$  ma nieliniową charakterystykę statyczną, to nadając regulatorowi  $R_1(s)$  dodatni współczynnik wzmocnienia  $K_p$  otrzymuje się charakterystykę wypadkową o bardziej liniowym przebiegu. Zjawisko to zostało zilustrowane na rys. 2.42. Pierwotna charakterystyka statyczna  $y_p=f(u_2)$  członu  $G_1(s)$  jest nieliniowa. Szuka się charakterystyki  $y_p=f(a)$ . Można zauważyć, że wielkość  $a=b+u_2$ , oraz że dla każdej wartości  $y_p$  wielkość  $u_2$  odczyta się wprost z rys. 2.42, natomiast wielkość  $b$  można wyznaczyć znając współczynnik wzmocnienia regulatora  $R_1(s)$ . Przyjmując np.  $K_p=4$ , należy narysować prostą o nachyleniu  $1/4$  i następnie dla każdej wartości  $y_p$  wyznaczyć punkt wypadkowej charakterystyki statycznej  $y_p=f(a)$ . Drogę postępowania zaznaczono linią przerywaną. Do linearyzacji charakterystyki statycznej wystarcza, aby regulator  $R_1(s)$  miał działanie proporcjonalne. Linearyzację można również zauważyć ze wzoru

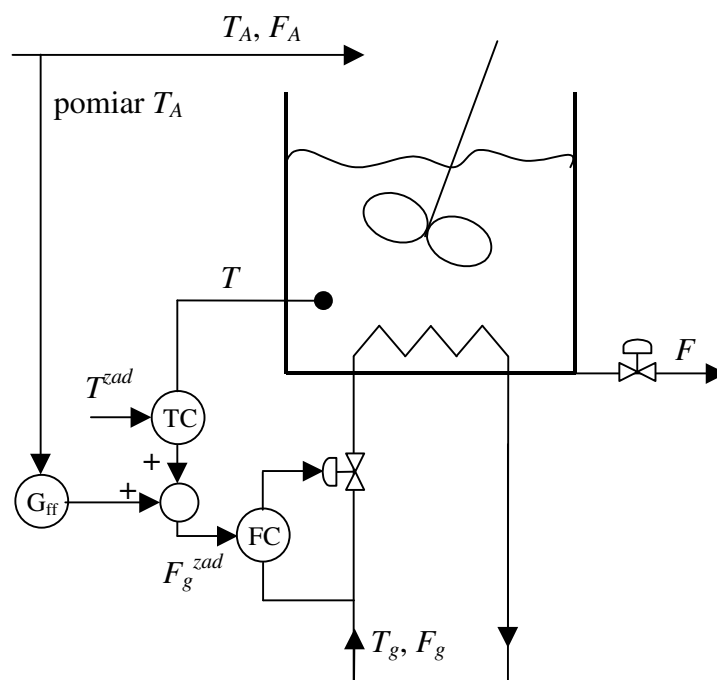
$$\frac{Y_p(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)}{1 + R_1(j\omega)G_1(j\omega)} \bigg|_{|R_1(j\omega)G_1(j\omega)| \gg 1} \cong \frac{1}{R_1(j\omega)} \quad (2.180)$$



Rys. 2.42. Linearyzacja charakterystyki statycznej członu  $G_1(s)$  w układzie regulacji kaskadowej: A – charakterystyka obiektu  $y_p(u_2)$ , B – odwrócona charakterystyka regulatora  $y_p(b)=1/K_p$ , C – charakterystyka po linearyzacji  $y_p(a)$

### 2.2.3. Regulacja z pomiarem zakłócenia

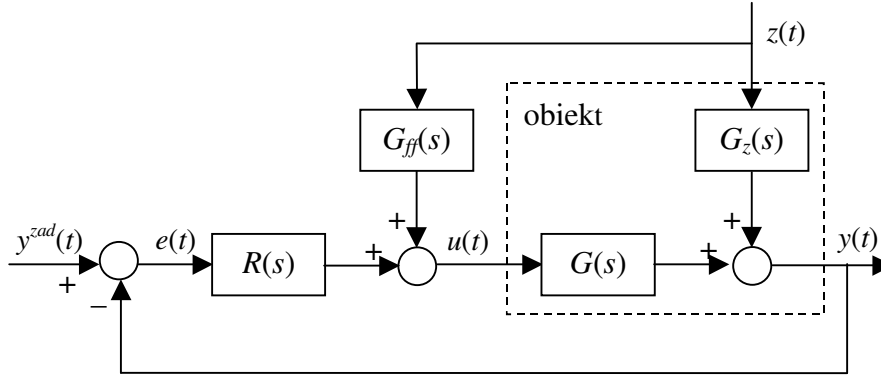
Jeżeli zadaniem regulacji jest kompensacja wpływu zakłóceń, co ma miejsce w większości zastosowań, praca regulatora będzie znacznie ułatwiona, jeżeli będzie on dysponował pomiarem wartości tych zakłóceń. Układy tego typu nazywa się układami z regulacji z pomiarem zakłóceń (ang. feedforward) lub układami zamknięto-otwartymi.



Rys. 2.43. Układ regulacji reaktora chemicznego z pomiarem temperatury  $T_A$

### Przykład

W układzie regulacji reaktora chemicznego [5] głównym zakłóceniem są zmiany temperatury surowca  $T_A$ . W rezultacie temperatura  $T$  cieczy wewnątrz reaktora jest zmienna. Ponieważ dokładny pomiar temperatury nie jest kosztowny, informacja taka może być wykorzystana w układzie regulacji pokazanym na rys. 2.43.



Rys. 2.44. Struktura zamknięto-otwartego układu regulacji

Struktura zamknięto-otwartego układu regulacji została pokazana na rys. 2.44. W przypadku idealnym (dokładny pomiar zakłócenia i doskonały model matematyczny toru zakłóceń) otrzymuje się

$$G_z(s)Z(s) + G(s)G_{ff}(s)Z(s) = 0 \quad (2.181)$$

czyli

$$G_{ff}(s) = -\frac{G_z(s)}{G(s)} \quad (2.182)$$

Oczywiście powyższa transmitancja musi być realizowalna. Na przykład, jeżeli w obiekcie występuje opóźnienie

$$G(s) = e^{-sT_0} G_0(s) \quad (2.183)$$

przy liczeniu transmitancji  $G_{ff}(s)$  uwzględnia się tylko odwracalną transmitancję  $G_0(s)$

$$G_{ff}(s) = -\frac{G_z(s)}{G_0(s)} \quad (2.184)$$

W rzeczywistości modele matematyczne obciążone są błędami, zarówno strukturalnymi (nieliniowości, rząd dynamiki) jak i ilościowymi (nie dokładność parametrów). Z punktu widzenia jakości regulacji w układzie zamknięto-otwartym, najistotniejsze jest odwzorowanie wzmocnienia i opóźnienia członu  $G_{ff}(s)$ , czyli wielkości

$$K_{ff} = -\frac{K_z}{K}, \quad T_{0ff} = T_{0z} - T_0 \quad (2.185)$$

W praktyce regulacja w pętli otwartej nigdy nie jest idealna, a więc do wyzerowania uchybu ustalonego stosuje się pętlę sprzężenia zwrotnego. Im lepszy model, tym skuteczniejsza regulacja w pętli otwartej, a tym samym kompensacja wpływu zakłóceń. Warto podkreślić, że dynamika toru otwartego nie wpływa na stabilność pętli zamkniętej.

Warunki stosowania sprzężenia od zakłócenia są następujące:

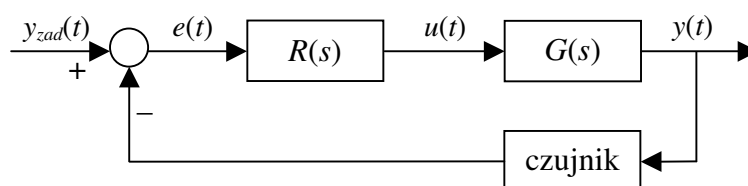
1. Jakość regulacji przy użyciu klasycznego układu regulacji jest niezadowalająca.
2. Istotne zakłócenie jest mierzone.
3. Dynamika toru zakłócenia jest wolniejsza niż dynamika głównego toru procesu.
4. Znane są modele toru zakłócenia i toru sterowania.



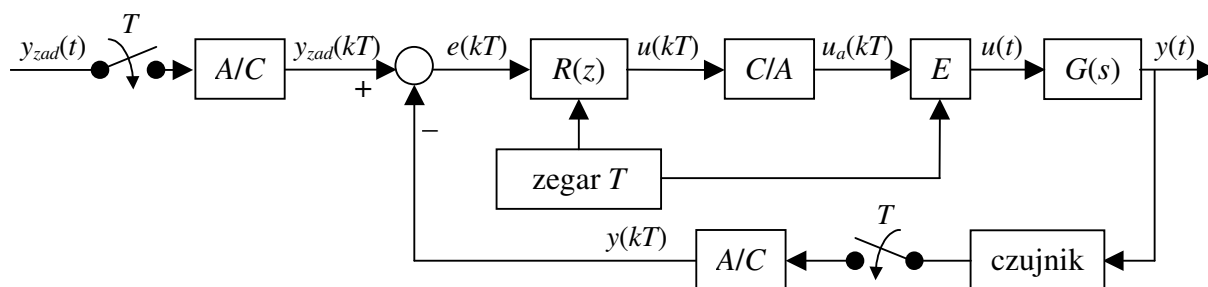
### 3. Dyskretne układy regulacji

W przeszłości stosowano hydrauliczne oraz pneumatyczne regulatory PID, które następnie zostały zastąpione układami elektronicznymi, początkowo lampowymi, a następnie tranzystorowymi. W chwili obecnej powszechnie stosuje się regulatory mikroprocesorowe, które umożliwiają stosowanie bardzo złożonych algorytmów regulacji (zaliczanych do tzw. zaawansowanych technik regulacji), przede wszystkim wielowymiarowych i nieliniowych, na przykład algorytmów regulacji predykcyjnej.

Na rys. 3.1 i rys. 3.2 porównano strukturę dwóch układów regulacji. W pierwszym przypadku zastosowano klasyczny, ciągły regulator, natomiast w drugim przypadku – regulator cyfrowy (dyskretny). W obu przypadkach obiekt regulacji jest ciągły.



Rys. 3.1. Struktura ciągłego układu regulacji

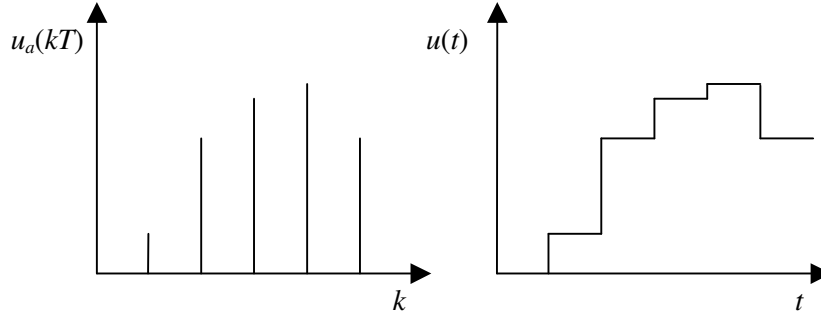


Rys. 3.2. Struktura dyskretnego układu regulacji,  $k=0,1,2,\dots$

W klasycznym ciągłym układzie regulacji pomiar wszystkich wielkości jest ciągły, algorytm regulacji oblicza wartość sygnału sterującego dla dowolnej chwili  $t$ . Zarówno obiekt jak i regulator można opisać ciągłymi równaniami różniczkowymi (lub transmitancjami). W cyfrowym układzie regulacji dokonuje się próbkowania (pomiaru) ciągłego sygnału wyjściowego  $y(t)$  tylko w dyskretnych chwilach  $T, 2T, 3T, \dots$ . Za pomocą przetwornika analogowo-cyfrowego zostaje on zamieniony na odpowiadającą mu reprezentację cyfrową  $y(T), y(2T), y(3T), \dots$ . Aktualizacja pomiarów i konwersja jest powtarzana co stały czas  $T$ , nazywany okresem próbkowania. W niektórych rozwiązaniach stosuje się analogowy sygnał wartości zadanej  $y_{zad}(t)$ , wymaga on więc również próbkowania, przeważnie jednak jego wartość jest zadawana cyfrowo w algorytmie regulacji. Podobnie jak poprzednio, obiekt regulacji jest ciągły, natomiast dyskretny regulator  $R(z)$  opisuje się za pomocą równania różnicowego.

Cyfrowy algorytm regulacji wyznacza wartość sygnału sterującego tylko w dyskretnych chwilach próbkowania  $u(T), u(2T), u(3T), \dots$ , natomiast przetwornik cyfrowo-analogowy zamienia sygnał dyskretny na odpowiadające mu wartości analogowe  $u_a(T), u_a(2T), u_a(3T), \dots$ . Sygnał ten ma postać impulsów Diraca, aby otrzymać ciągły sygnał sterujący proces należy zastosować tzw. ekstrapolator  $E$ . Na rys. 3.3 pokazano zasadę działania najprostszego ekstrapolatora zerowego rzędu (ang. ZOH – Zero Order Holder). Obliczony przez ekstrapolator sygnał ciągły (schodkowy)  $u(t)$  wykorzystuje się do sterowania procesu.

W ogólności istnieją dwie metody projektowania cyfrowego algorytmu regulacji. W pierwszym przypadku, dla danego obiektu ciągłego  $G(s)$  projektuje się ciągły regulator  $R(s)$ , który następnie aproksymuje się za pomocą odpowiedniego równania różnicowego. Do projektowania regulatora można zastosować wszystkie znane metody, a mianowicie podejście klasyczne (kształtowanie charakterystyk częstotliwościowych) lub nowoczesną teorię regulacji. Podejście takie nazywa się emulacją. Można również od razu projektować cyfrowy algorytm regulacji, przy czym bardzo często wykorzystuje się dyskretny model procesu, na przykład w postaci dyskretnej transmitancji. Podejście takie nazywa się bezpośrednim projektowaniem dyskretnego układu regulacji.



Rys. 3.3. Zasada działania ekstrapolatora zerowego rzędu

### 3.1. Transformata Z

Podczas analizy układów ciągłych stosuje się transformatę Laplace'a

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

Przy zerowych warunkach początkowych

$$L\{\dot{f}(t)\} = sF(s) \quad (3.2)$$

Powyższy wzór umożliwia proste wyznaczenie transmitancji na podstawie równania różniczkowego.

W przypadku układów dyskretnych stosuje się przekształcenie Z zdefiniowane następująco

$$Z\{f(k)\} = F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} \quad (3.3)$$

Przy zerowych warunkach początkowych

$$Z\{f(k-1)\} = z^{-1}F(z) \quad (3.4)$$

Powyższy wzór umożliwia proste wyznaczenie transmitancji dyskretniej na podstawie równania różnicowego. Na przykład równanie

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_0 y(k-2) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) \quad (3.5)$$

można zapisać w postaci

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})Y(z) = (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})U(z) \quad (3.6)$$

czemu odpowiada transmitancja

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.7)$$

Opóźnienie jednostkowe oznaczane jest symbolem  $z^{-1}$ . Niekiedy stosuje się również symbol  $q^{-1}$ .

Dla układów ciągłych twierdzenie o wartości końcowej, z którego zazwyczaj wyznacza się wzmacnienie statyczne członów dynamicznych lub uchyb ustalony, ma postać

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (3.8)$$

przy założeniu, że bieguny  $sX(s)$  leżą w lewej półpłaszczyźnie. W przypadku obiektów dyskretnych

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (3.9)$$

pod warunkiem, że bieguny  $(1 - z^{-1})X(z)$  leżą w kole jednostkowym. Transformaty Laplace'a oraz Z najpopularniejszych funkcji podano w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Transformaty Laplace'a oraz Z wybranych funkcji ( $T$  – okres próbkowania)

$x(t)$	$X(s)$	$X(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - lT)$	$e^{-lT}$	$z^{-l}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$



**Zadanie**

Obliczyć wzmocnienie statyczne dyskretnego członu dynamicznego

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{1 + 0,2z^{-1}} \quad (3.10)$$

**Rozwiązanie**

Niech  $u(k)=1$  dla  $k \geq 1$ , czyli

$$U(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad (3.11)$$

oraz

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{(1-z^{-1})(1+0,2z^{-1})} \quad (3.12)$$

Z twierdzenia o wartości końcowej

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1})Y(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1,2(z^{-1} + 1)}{(1+0,2z^{-1})} = 2 \quad (3.13)$$

A więc w stanie ustalonym dla sygnału wejściowego o wartości 1 na wyjściu otrzymuje się sygnał o wartości 2. Wzmocnienie statyczne wynosi więc 2.

Wzmocnienie statyczne obiektu o danej transmitancji, zarówno ciągłej jak i dyskretniej, można znaleźć również ze wzorów

$$K_{stat} = \lim_{s \rightarrow 0} G(s), \quad K_{stat} = \lim_{z \rightarrow 1} G(z) \quad (3.14)$$

**3.2. Emulacja**

Opracowano wiele skutecznych metod syntezy ciągłych układów regulacji [3, 5, 6, 7, 10, 11]. Do praktycznej implementacji algorytmów stosuje się zazwyczaj sterowniki cyfrowe. Emulacja pozwala wyznaczyć aproksymację ciągłego algorytmu regulacji (opisanego równaniem różniczkowym) za pomocą algorytmu dyskretnego (opisanego równaniem różnicowym).

**3.2.1. Metoda Eulera**

Najprostszą metodą aproksymacji ciągłych równań różniczkowych za pomocą równań różnicowych jest metoda Eulera, w której korzysta się ze wzoru różnicowego

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k+1) - x(k)}{T} \quad (3.15)$$

gdzie  $T=t(k+1)-t(k)$  jest okresem próbkowania. Powyższe podstawienie może być użyte w miejsce wszystkich pochodnych występujących w ciągłym algorytmie regulacji. Można również wykorzystać różnicę wsteczną

$$\dot{x}(t) \cong \frac{x(k) - x(k-1)}{T} \quad (3.16)$$

**Zadanie**

Dany jest obiekt regulacji

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad (3.17)$$

oraz regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.18)$$

Korzystając z metody Eulera znaleźć równanie różnicowe aproksymujące ciągły algorytm regulacji i odpowiadającą mu transmitancję. Do symulacji przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$  oraz  $T=0,02$ .

**Rozwiązanie**

Z transmitancji regulatora otrzymuje się ciągłe równanie różniczkowe w postaci operatorowej

$$(s+10)U(s) = 70(s+2)E(s) \quad (3.19)$$

oraz w postaci czasowej

$$\dot{u}(t) + 10u(t) = 70(\dot{e}(t) + 2e(t)) \quad (3.20)$$

Stosując wzór Eulera dla pochodnych sygnałów  $u(t)$  oraz  $e(t)$  oraz wprowadzając czas dyskretny

$$\frac{u(k+1) - u(k)}{T} + 10u(k) = 70 \left( \frac{e(k+1) - e(k)}{T} + 2e(k) \right) \quad (3.21)$$

co można przekształcić do postaci

$$u(k+1) + (10T-1)u(k) = 70e(k+1) + 70(2T-1)e(k) \quad (3.22)$$

Stosując podstawienie  $k:=k-1$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$u(k) + (10T-1)u(k-1) = 70e(k) + 70(2T-1)e(k-1) \quad (3.23)$$

W postaci operatorowej

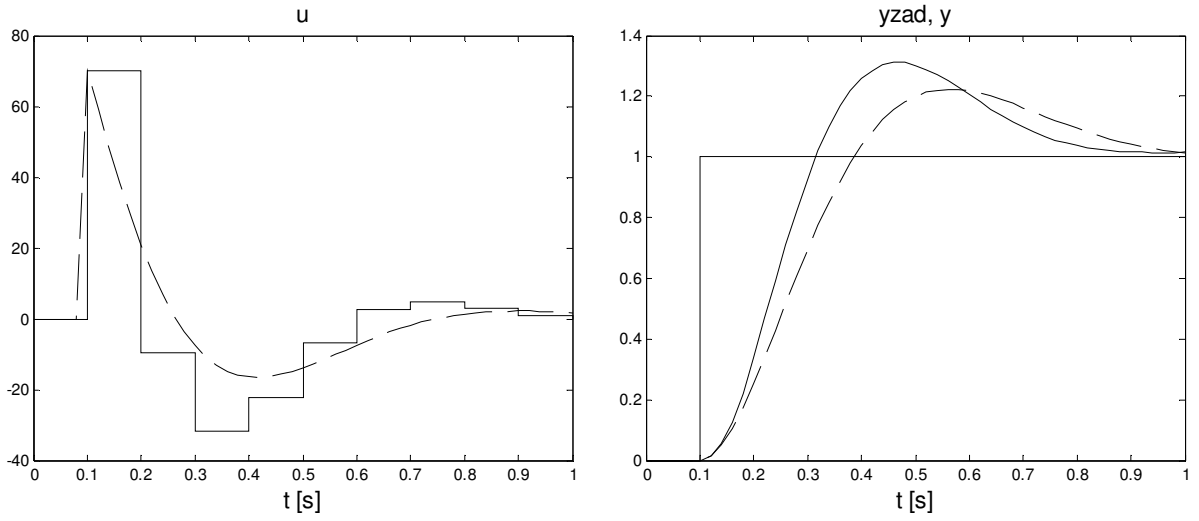
$$(1 + (10T-1)z^{-1})U(z) = 70(1 + (2T-1)z^{-1})E(z) \quad (3.24)$$

Szukana transmitancja regulatora cyfrowego ma więc postać

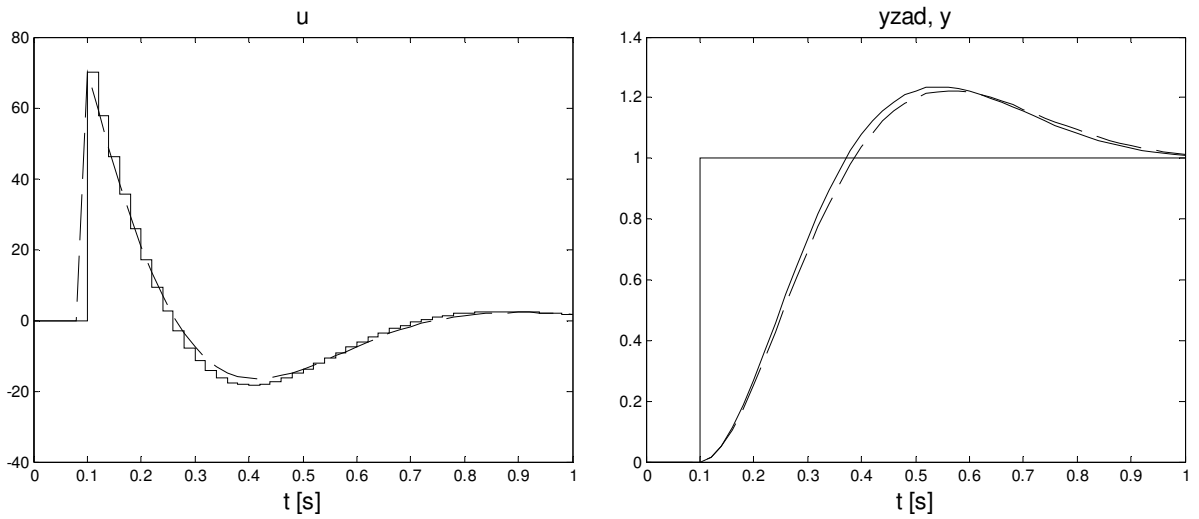
$$R(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = 70 \frac{1 + (2T-1)z^{-1}}{1 + (10T-1)z^{-1}} \quad (3.25)$$

Na rys. 3.4 przedstawiono wyniki symulacji układu regulacji obiektu ciągłego z cyfrowym regulatorem oraz, w celu porównania, układu regulacji z regulatorem ciągłym. Przy zwiększaniu częstotliwości próbkowania (odpowiadające zmniejszaniu okresu próbkowania  $T$ ) aproksymacja sygnału sterującego jest coraz dokładniejsza. Zastosowanie cyfrowego regulatora z odpowiednio krótkim okresem próbkowania umożliwia otrzymanie tak samo dobrej jakości regulacji jak w układzie regulatorem ciągłym.

a)



b)



Rys. 3.4. Wyniki symulacji ciągłego układu regulacji z ciągłym regulatorem (linia przerywana) oraz z cyfrowym regulatorem (linia ciągła): a)  $T=0,1$ , b)  $T=0,02$

### 3.2.2. Całkowanie metodą prostokątów i trapezów

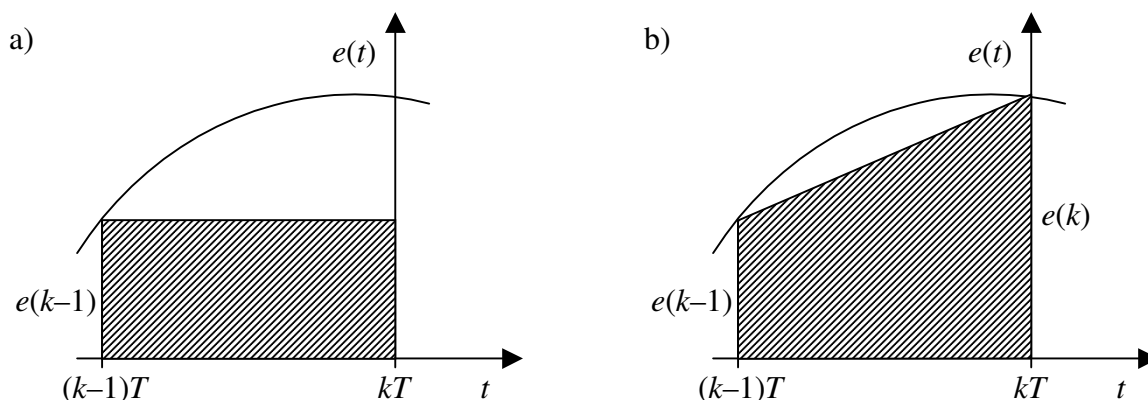
Na rys. 3.5 pokazano zasadę całkowania metodą prostokątów i trapezów. Przyrost sygnału sterującego jest równy polu pod krzywą uchybu

$$u(kT) - u(kT - T) = u(k) - u(k-1) = \int_{kT-T}^{kT} e(\tau) d\tau \quad (3.26)$$

W przypadku całkowania metodą prostokątów

$$u(k) - u(k-1) = T e(k-1) \Rightarrow u(k) = \frac{T z^{-1}}{1 - z^{-1}} e(k) \quad (3.27)$$

Pole pod krzywą  $e(t)$  nie jest wyznaczone dokładnie, a więc określenie sygnału sterującego w chwili  $k$  na podstawie sygnałów z chwili  $k-1$ , może nie być wystarczające.



Rys. 3.5. Zasada całkowania: a) metodą prostokątów, b) metodą trapezów

W przypadku całkowania metodą trapezów otrzymuje się dokładniejszy rezultat, bowiem sygnał  $u(k)$  zależy od sygnałów  $u(k-1)$ ,  $e(k-1)$  oraz  $e(k)$ , a mianowicie

$$u(k) - u(k-1) = T \frac{e(k-1) + e(k)}{2} \Rightarrow u(k) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} e(k) \quad (3.28)$$

Całkowanie metodą trapezów, zwane również metodą Tustina, jest bardzo często wykorzystywane do obliczania transmitancji dyskretnej na podstawie ciągłej. W miejsce wszystkich operatorów  $s$  podstawia się po prostu

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad \text{lub} \quad s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3.29)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.30)$$

Korzystając z całkowania metodą trapezów znaleźć odpowiadającą mu transmitancję dyskretną. Przyjąć okres próbkowania  $T$ .

### Rozwiązanie

Stosując podstawienie Tustina otrzymuje się

$$R(z) = 70 \frac{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 2}{\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 10} = 70 \frac{T+1+(T-1)z^{-1}}{5T+1+(5T-1)z^{-1}} \quad (3.31)$$

### 3.2.3. Metoda przekształcenia biegunów i zer

W przypadku układów ciągłych, właściwości układu zamkniętego zależą od położenia jego biegunów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ . Podobnie jest w przypadku układów dyskretnych i płaszczyzny  $z$ , choć obszar stabilności ma nieco inny kształt. Dla przykładu rozważa się sygnał

$$f(t) = e^{-at} \quad t > 0 \quad (3.32)$$

Odpowiadająca mu transformata Laplace'a ma postać

$$F(s) = \frac{1}{s+a} \quad (3.33)$$

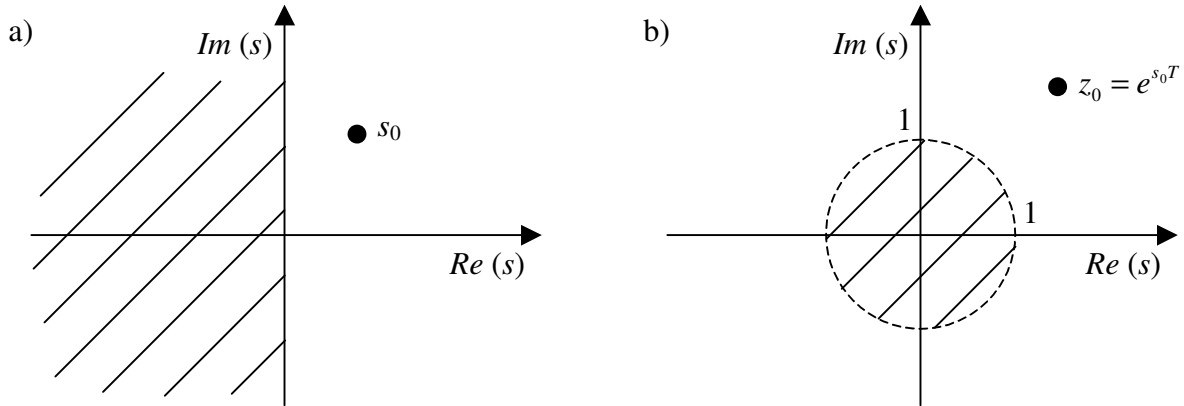
czyli biegun  $s = -a$ . Transformata dyskretna ma postać

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-aT}} \quad (3.34)$$

Biegunowi ciągłemu  $s = -a$  odpowiada biegun dyskretny  $z = e^{-aT}$ . Powyższy rezultat można uogólnić, na podstawie znajomości bieguna  $s_0$  na płaszczyźnie  $s$  można wyznaczyć odpowiadający mu biegun  $z_0$  na płaszczyźnie  $z$

$$z_0 = e^{s_0 T} \quad (3.35)$$

O ile warunkiem stabilności dla układów ciągłych jest położenie biegunów układu zamkniętego w lewej półpłaszczyźnie, to dla układów dyskretnych muszą one leżeć w kole jednostkowym.



Rys. 3.6. Obszar stabilności (zakreskowany) układu ciągłego (a) i dyskretnego (b)

Ze wzoru  $z_0 = e^{s_0 T}$  można wyznaczyć położenie bieguna  $z_0$  na płaszczyźnie zmiennej  $z$  na podstawie położenia bieguna  $s_0$  na płaszczyźnie zmiennej  $s$ . Wzór ten można wykorzystać do aproksymacji transmitancji ciągłej transmitancją dyskretną. Należy znaleźć dyskretne bieguny i zera odpowiadające wszystkim biegunom i zerom występującym w transmitancji ciągłej. Odpowiednikiem transmitancji ciągłej

$$R(s) = \frac{(s - s_1^0)(s - s_2^0) \cdots (s - s_m^0)}{(s - s_1^b)(s - s_2^b) \cdots (s - s_n^b)} \quad (3.36)$$

jest transmitancja dyskretna

$$R(z) = K \frac{(z - z_1^0)(z - z_2^0) \cdots (z - z_m^0)}{(z - z_1^b)(z - z_2^b) \cdots (z - z_n^b)} \quad (3.37)$$

gdzie dyskretne zera i bieguny oblicza się następująco

$$\begin{aligned} z_i^0 &= e^{s_i^0 T} & \text{dla } i = 1, \dots, m \\ z_i^b &= e^{s_i^b T} & \text{dla } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.38)$$

natomiast współczynnik  $K$  dobiera się w taki sposób, aby wzmocnienie statyczne obu członów było jednakowe, czyli

$$K_c = K_d \Leftrightarrow \lim_{s \rightarrow 0} R(s) = \lim_{z \rightarrow 1} R(z) \quad (3.39)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.40)$$

Korzystając z metody przekształcenia biegunów i zer znaleźć odpowiadającą mu transmitancję dyskretną. Przyjąć okres próbkowania  $T$ .

### Rozwiązanie

Zeru  $s_0 = -2$  odpowiada zero  $z_0 = e^{-2T}$ , biegunowi  $s_b = -10$  odpowiada biegun  $z_b = e^{-10T}$ . Transmitancja dyskretna ma postać

$$R(z) = K \frac{z - e^{-2T}}{z - e^{-10T}} \quad (3.41)$$

Z twierdzenia o wartości końcowej oblicza się wzmocnienie statyczne regulatora ciągłego

$$K_c = \lim_{s \rightarrow 0} 70 \frac{s+2}{s+10} = 14 \quad (3.42)$$

Dla regulatora dyskretnego

$$K_d = \lim_{z \rightarrow 1} K \frac{z - e^{-2T}}{z - e^{-10T}} = K \frac{1 - e^{-2T}}{1 - e^{-10T}} \quad (3.43)$$

Ponieważ musi zachodzić  $K_d = K_c$ , otrzymuje się

$$K = 14 \frac{1 - e^{-10T}}{1 - e^{-2T}} \quad (3.44)$$

Szukana transmitancja dyskretna ma postać

$$R(z) = 14 \frac{(1 - e^{-10T})(z - e^{-2T})}{(1 - e^{-2T})(z - e^{-10T})} = 14 \frac{(1 - e^{-10T})(1 - z^{-1}e^{-2T})}{(1 - e^{-2T})(1 - z^{-1}e^{-10T})} \quad (3.45)$$

### Zadanie

Dany jest regulator

$$R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = 70 \frac{s+2}{s+10} \quad (3.46)$$

Porównać transmitancję dyskretną przy zastosowaniu metody Eulera, metody trapezów oraz metody przekształcenia biegunów i zer. Przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$  oraz  $T=0,02$ .

### Rozwiązanie

Korzystając z wyników trzech ostatnich zadań otrzymuje się transmitancje zebrane w tab. 3.2. Jak łatwo sprawdzić (podstawiając  $z=1$ ), niezależnie od metody aproksymacji regulatora ciągłego, jego wzmocnienie statyczne wynosi 14.

Tabela 3.2. Porównanie transmitancji dyskretnych regulatora otrzymanych różnymi metodami emulacji

Metoda emulacji	$T=0,1$	$T=0,02$
metoda Eulera	$R(z) = 70 \frac{1 - 0,8z^{-1}}{1}$	$R(z) = 70 \frac{1 - 0,96z^{-1}}{1 - 0,8z^{-1}}$
metoda trapezów	$R(z) = 70 \frac{1,1 - 0,9z^{-1}}{1,5 - 0,5z^{-1}}$	$R(z) = 70 \frac{1,02 - 0,98z^{-1}}{1,1 - 0,9z^{-1}}$
metoda przekształcenia biegunów i zer	$R(z) = 48,8207 \frac{1 - 0,8187z^{-1}}{1 - 0,3679z^{-1}}$	$R(z) = 64,7216 \frac{1 - 0,9608z^{-1}}{1 - 0,8187z^{-1}}$

Ponieważ ekstrapolator wnosi opóźnienie rzędu  $T/2$ , w wielu przypadkach warto uwzględnić ten czynnik. Korzystając z aproksymacji

$$e^{-T_0 s} \cong \frac{1}{1 + T_d s} \quad (3.47)$$

otrzymuje się

$$G_{ZOH}(s) \cong \frac{1}{1 + 0,5Ts} \quad (3.48)$$

### 3.3. Bezpośrednie projektowanie dyskretnych układów regulacji

Oprócz emulacji, do projektowania cyfrowego układu regulacji można zastosować metodę bezpośrednią. W przeciwieństwie do emulacji wykorzystuje się dyskretny model procesu, do którego bezpośrednio dobiera się cyfrowy algorytm regulacji.

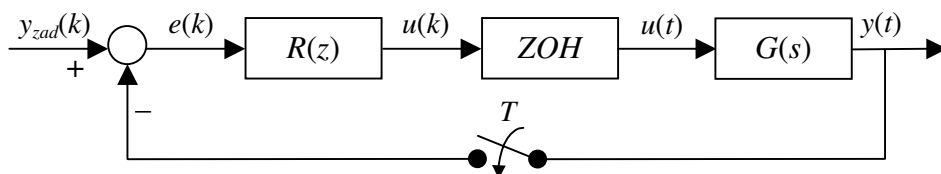
Pierwszym etapem prac jest wyznaczenie dyskretnego modelu procesu ciągłego. W ogólności można wyróżnić dwa przypadki. W przeciwieństwie do emulacji, w której stosuje się dyskretną aproksymację ciągłego regulatora, na podstawie modelu ciągłego można dokładnie wyznaczyć model dyskretny. Znajac metodę ekstrapolacji można dokładnie określić sygnał sterujący między kolejnymi chwilami próbkowania  $T, 2T, 3T, \dots$ , a także sygnał wyjściowy procesu, który jest funkcją sygnału wejściowego i wyjściowego w poprzednich chwilach próbkowania (równanie różnicowe).

Dla obiektu ciągłego  $G(s)$  i ekstrapolatora zerowego rzędu dyskretna transmitancja obiektu obliczana jest ze wzoru

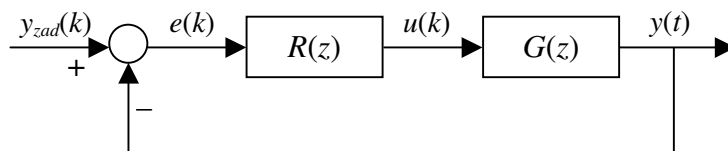
$$G(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) \quad (3.49)$$

Czynnik  $s$  w mianowniku wiąże się z faktem, że sygnał sterujący zmienia się skokowo w każdej chwili próbkowania. Reasumując, powyższy związek pozwala zastąpić ciągły obiekt z ekstrapolatorem zerowego rzędu przez obiekt dyskretny, co pokazano na rys. 3.7.

a)



b)



Rys. 3.7. Dyskretny układ regulacji z ekstrapolatorem i ciągłym obiektem (a) oraz odpowiadający mu dyskretny układ regulacji (b)

Do projektowania dyskretnych układów regulacji wykorzystuje się analogiczne metody jak w przypadku układów ciągłych, a więc metody częstotliwościowe oraz metody przestrzeni stanu. Transmitancja układu zamkniętego ma postać

$$G_z(z) = \frac{Y(z)}{Y_{zad}(z)} = \frac{R(z)G(z)}{1 + R(z)G(z)} \quad (3.50)$$

natomiast równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$1 + R(z)G(z) = 0 \quad (3.51)$$

### Zadanie

Dla układu o transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s^2 - 1} \quad (3.52)$$

znaleźć transmitancję dyskretną. Zastosować ekstrapolator zerowego rzędu, przyjąć okres próbkowania  $T$ . Wyznaczyć równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$ .

### Rozwiązanie

Rozkładając transmitancję  $G(s)$  na ułamki proste otrzymuje się

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{a}{(s-1)} + \frac{b}{(s+1)} \\ &= \frac{a(s+1) + b(s-1)}{(s-1)(s+1)} = \frac{(a+b)s + a-b}{(s-1)(s+1)} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Szukane parametry  $a, b$  są rozwiązaniem układu równań liniowych

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0,25 \\ b = -0,25 \end{cases} \quad (3.54)$$



Transmitancję dyskretną wyznacza się ze wzoru

$$\begin{aligned} G(z) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G(s)}{s} \right) = \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( -0,25 \frac{-1}{s(s-1)} - 0,25 \frac{1}{s(s+1)} \right) \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{-0,25(1-e^T)z}{(z-1)(z-e^T)} - \frac{0,25(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})} \right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Definiując  $\alpha = e^T$  oraz  $\beta = e^{-T}$  otrzymuje się

$$G(z) = \frac{-0,25(1-\alpha)}{z-\alpha} - \frac{0,25(1-\beta)}{z-\beta} = \frac{0,25(\alpha+\beta-2)z + 0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)}{z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta} \quad (3.56)$$

co można zapisać w standardowej postaci

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (3.57)$$

Dla przykładowej wartości  $T=0,1$  otrzymuje się  $b_0=b_1=0,00250208$ ,  $a_0=1$ ,  $a_1=-2,01000834$ .

Równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$  w dziedzinie zmiennej  $z$

$$(z^2 + a_1 z + a_0)Y(z) = (b_1 z + b_0)U(z) \quad (3.58)$$

w dziedzinie czasu dyskretnego

$$y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_1 u(k+1) + b_0 u(k) \quad (3.59)$$

stosując podstawienie  $k:=k-2$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$y(k) = b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) - a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) \quad (3.60)$$

### Zadanie

Dla układu o transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{e^{-5s}}{40s+1} \quad (3.61)$$

znaleźć transmitancję dyskretną. Zastosować ekstrapolator zerowego rzędu, przyjąć okres próbkowania  $T=2,5$  s. Wyznaczyć równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$ .

### Rozwiązanie

Daną transmitancję można zapisać w postaci

$$G(s) = G_0(s)e^{-5s}, \quad G_0(s) = \frac{1}{40s+1} \quad (3.62)$$

Transmitancję dyskretną układu bez opóźnienia wyznacza się ze wzoru

$$\begin{aligned} G_0(z) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{G_0(s)}{s} \right) = \\ &= \left( \frac{z-1}{z} \right) Z \left( \frac{0,025}{s(s+0,025)} \right) = \left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{(1-e^{-0,025T})z}{(z-1)(z-e^{-0,025T})} = \frac{1-e^{-0,025T}}{z-e^{-0,025T}} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Niech  $\alpha = e^{-0,025 \cdot 2,5}$  Ciągłemu opóźnieniu  $e^{-5s}$  odpowiada opóźnienie dyskretne  $z^{-5/T} = z^{-2}$ . Transmitancja układu z opóźnieniem ma więc postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = G_0(z)z^{-2} = \frac{(1-\alpha)z^{-2}}{z-\alpha} \quad (3.64)$$

Równanie różnicowe odpowiadające transmitancji  $G(z)$  w dziedzinie zmiennej  $z$

$$(z-\alpha)Y(z) = (1-\alpha)z^{-2}U(z) \quad (3.65)$$

w dziedzinie czasu dyskretnego

$$y(k+1) - \alpha y(k) = (1-\alpha)u(k-2) \quad (3.66)$$

stosując podstawienie  $k:=k-1$  otrzymuje się równanie różnicowe dla bieżącej chwili  $k$

$$y(k) = (1-\alpha)u(k-3) + \alpha y(k-1) \quad (3.67)$$

### 3.4. Cyfrowa realizacja algorytmu PID

Algorytm PID

$$u(t) = (u_p(t) + u_i(t) + u_d(t))e(t) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) e(t) \quad (3.68)$$

jest bardzo rozpowszechniony w praktyce, istnieją proste, lecz skuteczne metody doboru nastaw (np. metoda Zieglera i Nicholasa). Obecnie do implementacji algorytmu stosuje się sterowniki cyfrowe. Dla członu proporcjonalnego otrzymuje się

$$u_p(t) = Ke(t) \Rightarrow u_p(k) = Ke(k) \quad (3.69)$$

Do dyskretnego całkowania można użyć metody prostokątów

$$u_i(k) = \frac{K}{T_i} T \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + u(0) = u_i(k-1) + \frac{K}{T_i} T e(k-1) \quad (3.70)$$

lub metody trapezów

$$u_i(k) = \frac{K}{T_i} \frac{T}{2} \left( \sum_{j=0}^{k-1} e(j) + e(k) \right) + u(0) = u_i(k-1) + \frac{K}{T_i} T \left( \frac{e(k-1) + e(k)}{2} \right) \quad (3.71)$$

Stosując metodę Eulera do dyskretnej aproksymacji członu różniczkującego otrzymuje się

$$u_d(k) = KT_d \left( \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right) \quad (3.72)$$

Reasumując, stosując całkowanie metodą trapezów, równanie różnicowe cyfrowego algorytmu PID ma postać

$$u(k) = K \left[ 1 + \frac{T}{2T_i} \left( \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + \frac{T_d}{T} (1-z^{-1}) \right] e(k) \quad (3.73)$$

czyli

$$u(k) = \frac{r_2 z^{-2} + r_1 z^{-1} + r_0}{1 - z^{-1}} e(k) \quad (3.74)$$

gdzie

$$r_2 = \frac{KT_d}{T}, \quad r_1 = K \left( \frac{T}{2T_i} - 2 \frac{T_d}{T} - 1 \right), \quad r_0 = K \left( 1 + \frac{T}{2T_i} + \frac{T_d}{T} \right) \quad (3.75)$$

### 3.5. Symulacja dyskretnych układów regulacji

Jeżeli znany jest dyskretny model obiektu regulacji, można bardzo łatwo przeprowadzić symulację działania cyfrowego układów regulacji tego obiektu. Wyjaśnione to zostanie na przykładzie.

#### Zadanie

Dyskretny model obiektu regulacji ma postać

$$G(z) = \frac{y(k)}{u(k)} = \frac{b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.76)$$

gdzie  $b_1=0,035$ ,  $b_0=0,0307$ ,  $a_1=-1,6375$ ,  $a_0=0,6703$ , natomiast dyskretny algorytm PID opisany jest przez

$$u(k) = \frac{r_2 z^{-2} + r_1 z^{-1} + r_0}{1 - z^{-1}} e(k) \quad (3.77)$$

gdzie  $r_2=3$ ,  $r_1=-7,14$ ,  $r_0=4,26$ . Napisać program do symulacji algorytmu regulacji, przyjąć okres próbkowania  $T=2$  sek. W chwili  $t=20$  sek. (czemu odpowiada czas dyskretny  $k=10$ ) następuje skokowa zmiana sygnału wartości zadanej od 0 do 1.

#### Rozwiązanie

Równanie różnicowe obiektu ma postać

$$y(k) = b_1 u(k-3) + b_0 u(k-4) - a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) \quad (3.78)$$

natomiast równanie różnicowe regulatora ma postać

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (3.79)$$

W obiekcie występuje opóźnienie równe czterem okresom próbkowania, a więc symulację można rozpocząć od chwili  $k=5$ . Program symulacyjny (Matlab) jest następujący

```
%inicjalizacja
a1=-1.6375; a0=0.6703; b1=0.035; b0=0.0307;
r2=3; r1=-7.14, r0=4.26;
kk=50; %koniec symulacji
```

```
%warunki początkowe
u(1:4)=0; y(1:4)=0;
yzad(1:9)=0; yzad(10:kk)=1;
e(1:4)=0;
```

```

for k=5:kk; %główna pętla symulacyjna
    %symulacja obiektu
    y(k)=b1*u(k-3)+b0*u(k-4)-a1*y(k-1)-a0*y(k-2);

    %uchyb regulacji
    e(k)=yzad(k)-y(k);

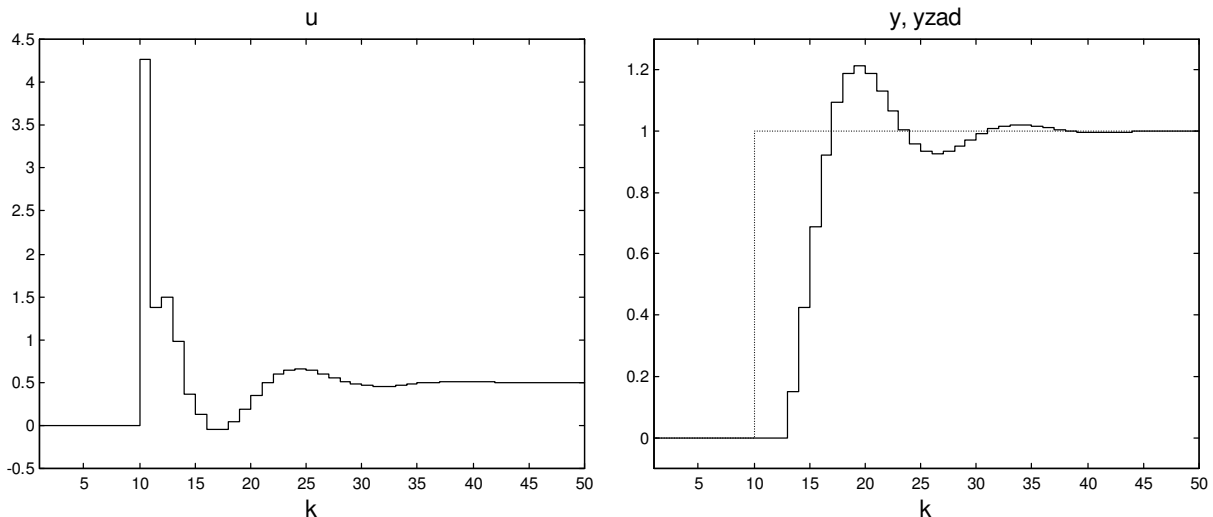
    %sygnał sterujący regulatora PID
    u(k)=r2*e(k-2)+r1*e(k-1)+r0*e(k)+u(k-1);
end;

%wyniki symulacji
figure; stairs(u);
title('u'); xlabel('k');

figure; stairs(y); hold on; stairs(yzad,':');
title('yzad, y'); xlabel('k');

```

Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID przedstawiono na rys. 3.8.



Rys. 3.8. Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID

### Zadanie

Zbadać odporność zaprojektowanego układu regulacji na zmiany wzmocnienia statycznego procesu, tzn. przyjąć, że rzeczywisty proces ma transmitancję

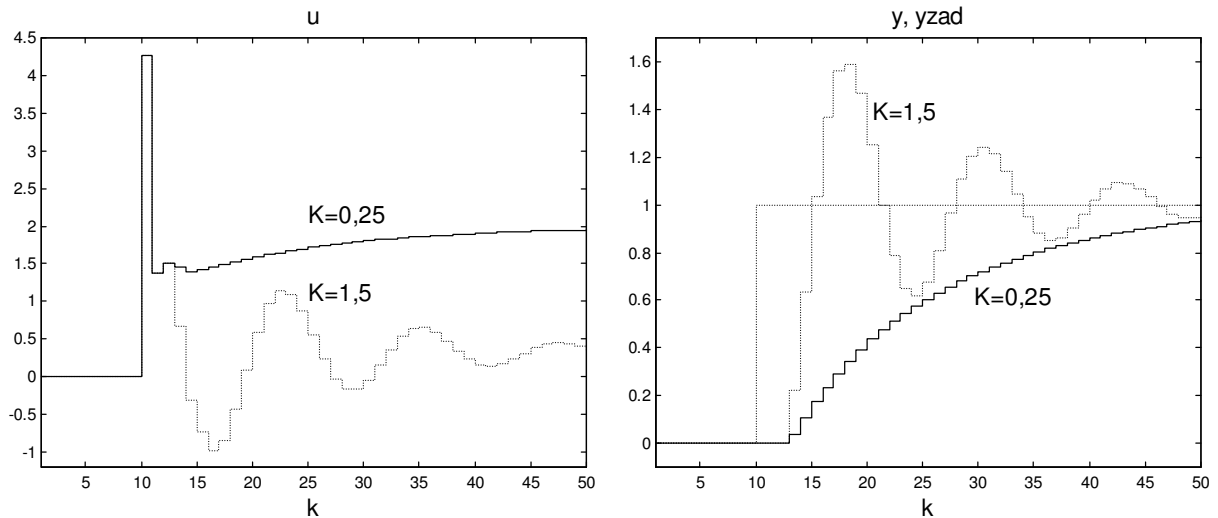
$$G(z) = \frac{y(k)}{u(k)} = K \frac{b_1 z^{-3} + b_0 z^{-4}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.80)$$

gdzie  $K=0,25$  lub  $K=1,5$ . Wyznaczyć wartość  $K_{gr}$ , przy której w układzie pojawią się drgania niegasnące.

### Rozwiązanie

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.9. Przy zwiększaniu wzmocnienia obiektu układ regulacji traci stabilność, zmniejszanie wzmocnienia powoduje spowolnienie regulacji. Wyznaczona eksperymentalnie wartość  $K_{gr}$  wynosi 2,05. Jest rzeczą intuicyjną, że zwiększanie wzmocnienia obiektu (przy niezmiennym regulatorze) prowadzi do powstania oscylacji, w

skrajnym przypadku do oscylacji. Dzieje się tak ponieważ regulator został zaprojektowany dla mniejszego wzmocnienia obiektu, przy zwiększonym wzmocnieniu generuje sterowania zbyt duże, prowadzące do oscylacji.



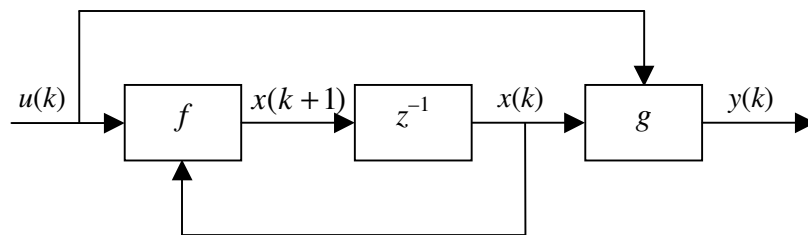
Rys. 3.9. Wyniki symulacji cyfrowego algorytmu PID przy zmianach wzmocnienia obiektu  $K$

### 3.6. Metody przestrzeni stanu

Analogicznie jak dla układów ciągłych, dynamikę układów dyskretnych można również opisać w przestrzeni stanu, ale zamiast równań różniczkowych stosuje się równania różnicowe. Ogólna postać modelu jest następująca

$$\begin{aligned} x(k+1) &= f(x(k), u(k), k) \\ y(k) &= g(x(k), u(k), k) \end{aligned} \quad (3.81)$$

czemu odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.10.



Rys. 3.10. Schemat blokowy dyskretnego układu nieliniowego

Przyjęto, że okres próbkowania  $T$  jest jednostkowy, dlatego też zastosowano człon opóźnienia jednostkowego.

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, także w klasie układów dyskretnych można wyróżnić układy deterministyczne i stochastyczne, stacjonarne i niestacjonarne, o stałych skupionych i rozłożonych oraz liniowe i nieliniowe.

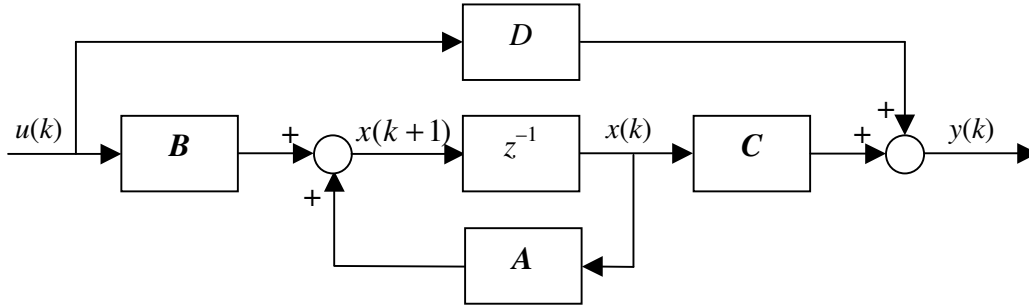
#### 3.6.1. Równania stanu liniowych, dyskretnych układów dynamicznych

Rozważa się deterministyczny, stacjonarny układ dyskretny o jednym wejściu i jednym wyjściu. Jest on opisany zwyczajnymi liniowymi równaniami różnicowymi oraz równaniem

wyjścia

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (3.82)$$

przy czym  $\dim u(k)=1$ ,  $\dim y(k)=1$ ,  $\dim x(k)=n$ , wymiar macierzy jest następujący:  $A$ :  $n \times n$ ,  $B$ :  $n \times 1$ ,  $C$ :  $1 \times n$ ,  $D$ :  $1 \times 1$ . Powyższym równaniom odpowiada schemat blokowy pokazany na rys. 3.11.



Rys. 3.11. Schemat blokowy dyskretnego układu liniowego

### 3.6.2. Sterowalność i obserwowalność dyskretnych liniowych układów dynamicznych

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, zagadnienia sterowalności i obserwowalności mają kluczowe znaczenie z punktu widzenia syntezy układu regulacji.

Układ dyskretny jest *sterowalny* w chwili  $k_0$ , jeżeli istnieje takie sterowanie dyskretnie  $u(k)$  dla  $k=k_0, k_0+1, \dots, k_k$ , które spowoduje w skończonym przedziale czasu  $(k_k - k_0)$  zmianę dowolnego stanu początkowego  $x(k_0)$  w dowolny inny stan końcowy  $x(k_k)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $k_0$ , to układ jest *całkowicie sterowalny* (w skrócie po prostu sterowalny).

Układ jest *obserwowalny* w przedziale  $k \in [k_0 - k_k]$ , jeżeli na podstawie dyskretnych sygnałów sterowania  $u(k)$  i wyjścia  $y(k)$  dla  $k=k_0, k_0+1, \dots, k_k$ , można określić początkowy stan układu  $x(k_0)$ . Jeżeli warunek ten jest spełniony dla dowolnej chwili  $k_0$ , to układ jest *całkowicie obserwowalny* (w skrócie po prostu obserwowalny).

Warunki sterowalności i obserwowalności układów dyskretnych są takie same jak w przypadku układów ciągłych. Układ jest *sterowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n \quad (3.83)$$

natomiast jest *obserwowalny* wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (3.84)$$

Dla układów o jednym wejściu i jednym wyjściu warunki sterowalności i obserwowalności sprowadzają się do nieosobliwości odpowiednich macierzy.

**Zadanie**

Zbadać obserwowalność i sterowalność układu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.85)$$

**Rozwiązanie**

Wyznacznik macierzy sterowalności

$$|[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta \\ \beta & \alpha\beta \end{vmatrix} = 0 \quad (3.86)$$

a więc układ nie jest sterowalny.

Wyznacznik macierzy obserwowalności

$$|\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}| = \begin{vmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.87)$$

a więc układ nie jest obserwowalny.

**3.6.3. Wyznaczanie transmitancji dyskretnej na podstawie dyskretnych równań stanu**

Równanie stanu i równanie wyjścia w postaci operatorowej (po zastosowaniu przekształcenia Z), dla zerowych warunków początkowych  $x(0)=0$ , przyjmują postać

$$\begin{aligned} zX(z) &= \mathbf{A}X(z) + \mathbf{B}U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}X(z) + \mathbf{D}U(z) \end{aligned} \quad (3.88)$$

Dla  $|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| \neq 0$  z równania stanu otrzymuje się

$$X(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}U(z) \quad (3.89)$$

po wstawieniu do równania wyjścia

$$Y(z) = (\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D})U(z) \quad (3.90)$$

Transmitancja dyskretna ma więc postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.91)$$

**Zadanie**

Znaleźć transmitancję układu o macierzach równania stanu i wyjścia

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [2 \quad 1], \quad D = 0 \quad (3.92)$$

**Rozwiązanie**

Macierz odwrotna ma postać

$$(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{[(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^D]^r}{|\mathbf{zI} - \mathbf{A}|} = \frac{1}{z(z+2)+3} \begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Natomiast transmitancja

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbf{C}(\mathbf{zI} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + D \\ &= [2 \quad 1] \frac{1}{z(z+2)+3} \begin{bmatrix} z+2 & 1 \\ -3 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z(z+2)+3} [2z+1 \quad z+2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{z+2}{z(z+2)+3} \end{aligned} \quad (3.94)$$

W programie Matlab do wyznaczenia dyskretnej transmitancji na podstawie macierzy równań stanu służy polecenie `ss2tf`, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych.

**3.6.4. Wyznaczanie równań stanu na podstawie transmitancji**

Niech transmitancja dyskretna ma postać

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \dots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \quad (3.95)$$

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, istnieje kilka metod wyboru zmiennych stanu i wyznaczania macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $D$  dla danej transmitancji dyskretnej [7]. W dalszej części pracy omówione zostaną dwa warianty metody bezpośredniej, która jest odpowiednikiem metody bezpośredniej stosowanej w przypadku układów ciągłych. Mnożąc licznik i mianownik transmitancji przez  $z^{-n}$  otrzymuje się

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_{n-1}z^{-1} + b_{n-2}z^{-2} + \dots + b_1z^{1-n} + b_0z^{-n}}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n}} \quad (3.96)$$

Niech

$$E(z) = \frac{U(z)}{1 + a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n}} \quad (3.97)$$

będzie sygnałem pomocniczym, czyli

$$E(z) = U(z) - (a_{n-1}z^{-1} + \dots + a_1z^{1-n} + a_0z^{-n})E(z) \quad (3.98)$$





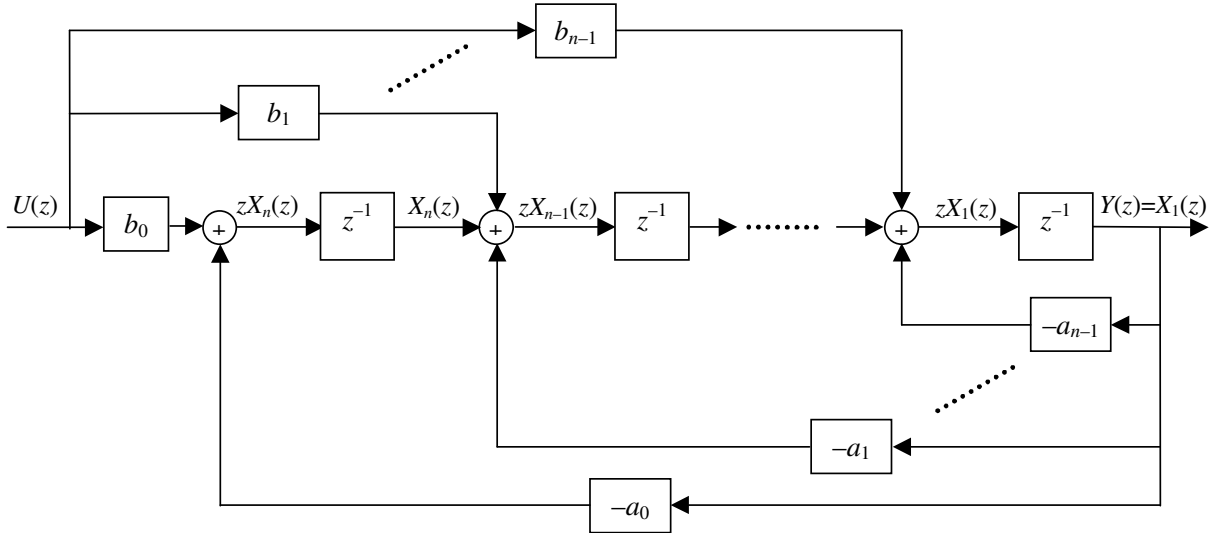
Równania stanu oraz równanie wyjścia mają wówczas postać

$$\begin{aligned}
 x_1(k+1) &= -a_{n-1}x_1(k) + x_2(k) + b_{n-1}u(k) \\
 x_2(k+1) &= -a_{n-2}x_1(k) + x_3(k) + b_{n-2}u(k) \\
 &\vdots \\
 x_{n-1}(k+1) &= -a_1x_1(k) + x_n(k) + b_1u(k) \\
 x_n(k+1) &= -a_0x_1(k) + b_0u(k) \\
 y(k) &= x_1(k)
 \end{aligned} \tag{3.103}$$

Macierze równania stanu i wyjścia mają postać

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ -a_{n-3} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_0 \end{bmatrix} \\
 C &= [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0], \quad D = 0
 \end{aligned} \tag{3.104}$$

Model układu dynamicznego uzyskany w drugim wariancie metody bezpośredniej pokazano na rys. 3.13.



Rys. 3.13. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

Można zauważyć, że macierze  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  dla przypadku ciągłego i dyskretnego mają taką samą strukturę (ale nie wartości elementów). Odpowiednikiem równań różniczkowych stosowanych w przypadku układów ciągłych są równania różnicowe stosowane w przypadku układów dyskretnych. Dlatego też w reprezentacji graficznej modeli ciągłych stosuje się integratory, w przypadku układów dyskretnych stosuje się bloki opóźniające.

W programie Matlab do wyznaczenia macierzy równań stanu układu dyskretnego na podstawie transmitancji dyskretniej, analogicznie jak w przypadku obiektów ciągłych, służy polecenie `tf2ss`.

**Zadanie**

Odpowiednikiem transmitancji ciągłej

$$G(s) = \frac{0,5}{(s-1)(s+1)} = \frac{0,5}{s^2 - 1} \quad (3.105)$$

jest

$$G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (3.106)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ . Wykorzystując dwa warianty metody bezpośredniej znaleźć równanie stanu i wyjścia procesu dyskretnego.

**Rozwiązanie**

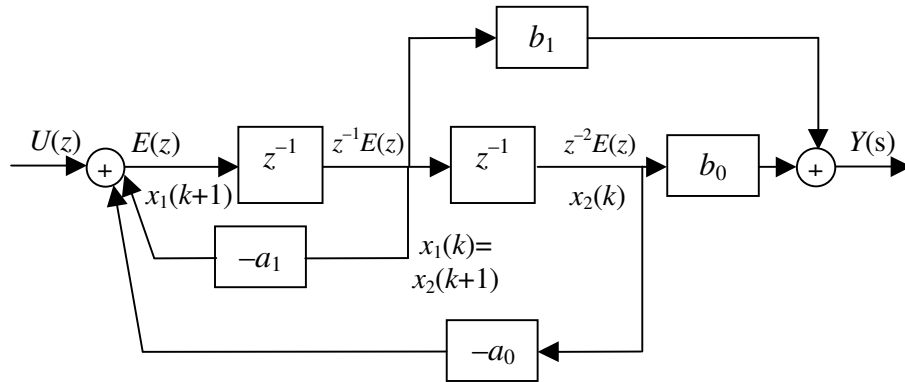
Mnożąc licznik i mianownik  $G(z)$  przez  $z^{-n}=z^{-2}$

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2}} \quad (3.107)$$

Otrzymuje się

$$\begin{aligned} E(z) &= U(z) - (a_1 z^{-1} + a_0 z^{-2})E(z) \\ Y(z) &= (b_1 z^{-1} + b_0 z^{-2})E(z) \end{aligned} \quad (3.108)$$

Model zamieszczony na rys. 3.14 odpowiada pierwszemu wariantowi metody bezpośredniej.



Rys. 3.14. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant I)

Równania dyskretnie w przestrzeni stanu są następujące

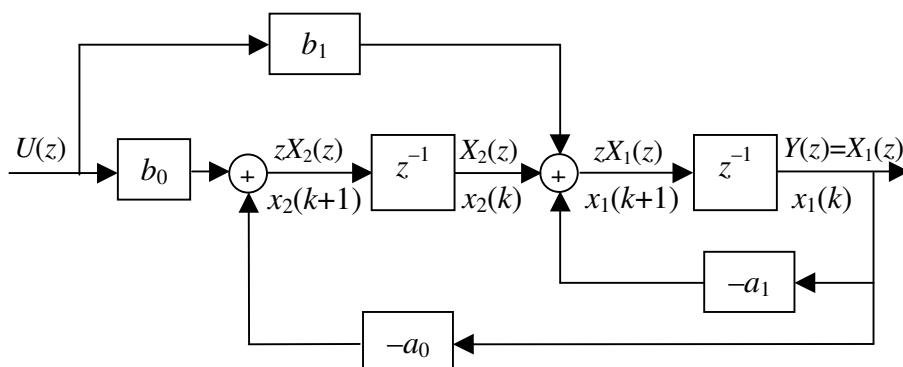
$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

W drugim wariancie metody bezpośredniej równania w przestrzeni stanu są następujące

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$
(3.110)

czemu odpowiada model zamieszczony na rys. 3.15.



Rys. 3.15. Model dyskretnego układu dynamicznego w przestrzeni stanu (wariant II)

W programie Matlab do konwersji między układem ciągłym a dyskretnym służą polecenia `c2d` oraz `c2dm`. Możliwa jest konwersja modeli w przestrzeni stanu

`[A_d, B_d, C_d, D_d] = c2dm(A, B, C, D, T, 'metoda')`

oraz transmitancyjnych

`[l_d, m_d] = c2dm(1, m, T, 'metoda')`

Układ ciągły opisany jest macierzami  $A, B, C, D$  lub transmitancją o współczynnikach licznika i mianownika  $1, m$ , `metoda` określa metodę dyskretyzacji. Najczęściej stosuje się `zoh` (ekstrapolator zerowego rzędu), `foh` (ekstrapolator pierwszego rzędu) lub `tustin` (aproxymację biliniową). Wynikiem są macierze lub współczynniki transmitancji modelu dyskretnego.

### 3.6.5. Wyznaczanie dyskretnych równań stanu na podstawie ciągłych równań stanu

Rozwiązanie ciągłego liniowego układu równań różniczkowych  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$  ma postać

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$
(3.111)

Powyższy wzór można wykorzystać do wyznaczenia dyskretnych równań stanu na podstawie równań ciągłych. Podstawiając dla czasu dyskretnego  $t=kT+T$ ,  $t_0=kT$ , otrzymuje się

$$x(kT+T) = e^{AT} x(kT) + \int_{kT}^{kT+T} e^{A(kT+T-\tau)} Bu(\tau) d\tau$$
(3.112)

Dla ekstrapolatora zerowego rzędu

$$u(\tau) = u(kT) \quad \text{dla} \quad kT \leq \tau \leq kT+T$$
(3.113)

Wprowadzając dodatkową zmienną  $\eta = kT + T - \tau$ , otrzymuje się

$$x(kT + T) = e^{AT} x(kT) + \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) B u(kT) \quad (3.114)$$

Definiując macierze

$$A_d = e^{AT}, \quad B_d = \left( \int_0^T e^{A\eta} d\eta \right) B \quad (3.115)$$

ciągłe równanie stanu można zapisać w postaci dyskretnej

$$x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k) \quad (3.116)$$

Rozwinięcie w szereg

$$A_d = e^{AT} = I + AT + \frac{A^2 T^2}{2!} + \frac{A^3 T^3}{3!} + \dots \quad (3.117)$$

można zapisać jako

$$A_d = e^{AT} = I + AT\Psi \quad (3.118)$$

gdzie

$$\Psi = I + \frac{AT}{2!} + \frac{A^2 T^2}{3!} + \dots \quad (3.119)$$

Macierz  $B_d$  oblicza się ze wzoru

$$B_d = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^{k+1}}{(k+1)!} B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k T^k}{(k+1)!} TB = \Psi TB \quad (3.120)$$

natomiast macierze dyskretnej wyjścia są takie same jak macierze równania ciągłego ( $C_d=C$ ,  $D_d=D$ ).

### Zadanie

Wyznaczyć wersję dyskretną ciągłego równania stanu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (3.121)$$

### Rozwiązanie

Ponieważ  $A^n=0$  dla  $n \geq 2$ , otrzymuje się

$$\Psi = I + \frac{AT}{2!} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0,5T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

oraz

$$\begin{aligned} A_d &= I + AT\Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B_d &= \Psi TB = T \begin{bmatrix} 1 & 0,5T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.123)$$

### 3.6.6. Projektowanie dyskretnych układów regulacji metodą sprzężenia od stanu

Do projektowania dyskretnych układów regulacji wykorzystuje się metody analogiczne do tych, które stosowane są dla układów ciągłych. W dalszej części pracy krótko omówiono regulator ze sprzężeniem od stanu oraz obserwator pełnego i zredukowanego rzędu.

Analogicznie jak w przypadku regulatora ciągłego, sygnał sterujący jest funkcją liniową zmiennych stanu

$$u(k) = -Kx(k) = -\begin{bmatrix} k_1 & \dots & k_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

Położenie biegunów układu zamkniętego kształtuje się odpowiednio dobierając wartości współczynników  $k_1, \dots, k_n$ . Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$x(k+1) = Ax(k) - BKx(k) = (A - BK)x(k) \quad (3.125)$$

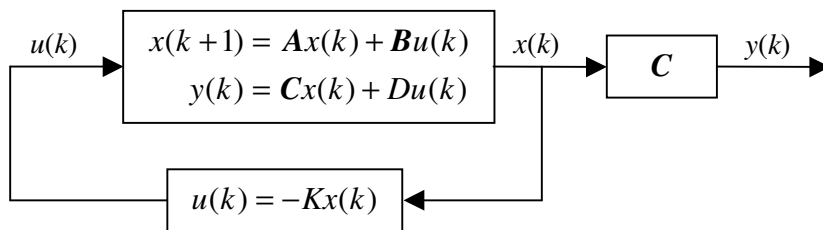
ma postać

$$|zI - (A - BK)| = 0 \quad (3.126)$$

Wektor  $K$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego miały zadane z góry wartości  $z_1, \dots, z_n$

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (3.127)$$

O ile w przypadku układów ciągłych pierwiastki równania charakterystycznego (bieguny układu zamkniętego) muszą leżeć w lewej półpłaszczyźnie, to w przypadku dyskretnym warunkiem stabilności jest ulokowanie pierwiastków w kole jednostkowym (rys. 3.6).



Rys. 3.16. Przesuwanie biegunów układu zamkniętego obiektu dyskretnego

**Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.128)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , w taki sposób dobrać wektor sprzężenia zwrotnego  $K$ , aby bieguny układu zamkniętego miały wartości  $z_1$ ,  $z_2$ . Przyjąć stan początkowy  $x(0)=[1 \ -1]^T$ , przeprowadzić symulacje dla biegunów dyskretnych a)  $z_1=z_2=0,5$ , b)  $z_1=z_2=0,75$ , przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$ .

**Rozwiązanie**

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma postać

$$\begin{aligned} |zI - (A - BK)| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z + a_1 + b_1 k_1 & b_1 k_2 - 1 \\ a_0 + b_0 k_1 & z + b_0 k_2 \end{bmatrix} \right| \\ &= z^2 + (b_0 k_2 + a_1 + b_1 k_1)z + (a_1 b_0 - a_0 b_1)k_2 + a_0 + b_0 k_1 \end{aligned} \quad (3.129)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $z_1, z_2$

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 \quad (3.130)$$

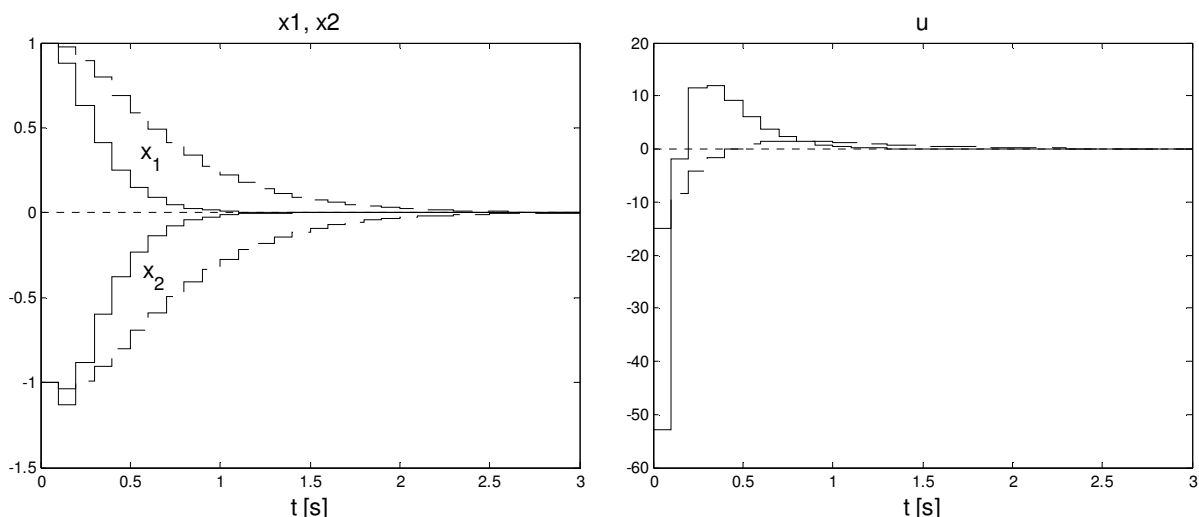
Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} (a_1 b_0 - a_0 b_1)k_2 + a_0 + b_0 k_1 = z_1 z_2 \\ b_0 k_2 + a_1 + b_1 k_1 = -(z_1 + z_2) \end{cases} \quad (3.131)$$

oraz

$$\begin{aligned} k_1 &= -\frac{1}{b_1}(z_1 + z_2 + a_1 + b_0) \\ k_2 &= -\frac{z_1 z_2 - a_0 + \frac{b_0}{b_1}(z_1 + z_2) + \frac{a_1 b_0}{b_1}}{a_1 b_0 - a_0 b_1 - \frac{b_0^2}{b_1}} \end{aligned} \quad (3.132)$$

Dla biegunów  $z_1=z_2=0,5$  wektor  $K=[228,2515 \ 175,4153]$ , dla biegunów  $z_1=z_2=0,75$  wektor  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 3.17. Można zauważyć, że im mniejszy moduł, tym otrzymane przebiegi są szybsze. W bardzo prosty sposób można to wytłumaczyć, pamiętając, że ciągłemu biegunowi  $s_0$  odpowiada biegun dyskretny  $z_0 = e^{s_0 T}$  (rys. 3.6). Zwiększaniu modułu leżącego w lewej półpłaszczyźnie bieguna ciągłego odpowiada zmniejszanie odpowiadającego mu bieguna dyskretnego.



Rys. 3.17. Trajektorie stanu układu zamkniętego i sygnał sterujący przy biegunach  $z_1=z_2=0,5$ , (linia ciągła) oraz  $z_1=z_2=0,75$  (linia przerywana)

Niech macierze  $A$  oraz  $B$  równania stanu mają strukturę odpowiadającą pierwszemu warianowi metody bezpośredniej. Dla układu dyskretnego o równaniu charakterystycznym

$$\begin{aligned} |zI - (A - BK)| &= (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \\ &= z^n + \alpha_{n-1}z^{n-1} + \dots + \alpha_1z + \alpha_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.133)$$

gdzie  $z_1, \dots, z_n$  są zadanymi z góry biegunami układu zamkniętego, współrzędne wektora sprzężeń zwrotnych oblicza się ze wzoru

$$k_i = \alpha_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.134)$$

lub też, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, ze wzoru Ackermana (2.67).

Podobnie jak w przypadku układów ciągłych, w programie Matlab do przesuwania biegunów układu zamkniętego służą polecenia `acker` i `place`. Dla obiektu o jednym wejściu i jednym wyjściu można wykorzystać polecenie

```
K=acker(A,B,[z1 ... zn])
```

W przypadku obiektów wielowymiarowych stosuje się polecenie

```
K=place(A,B,[z1 ... zn])
```

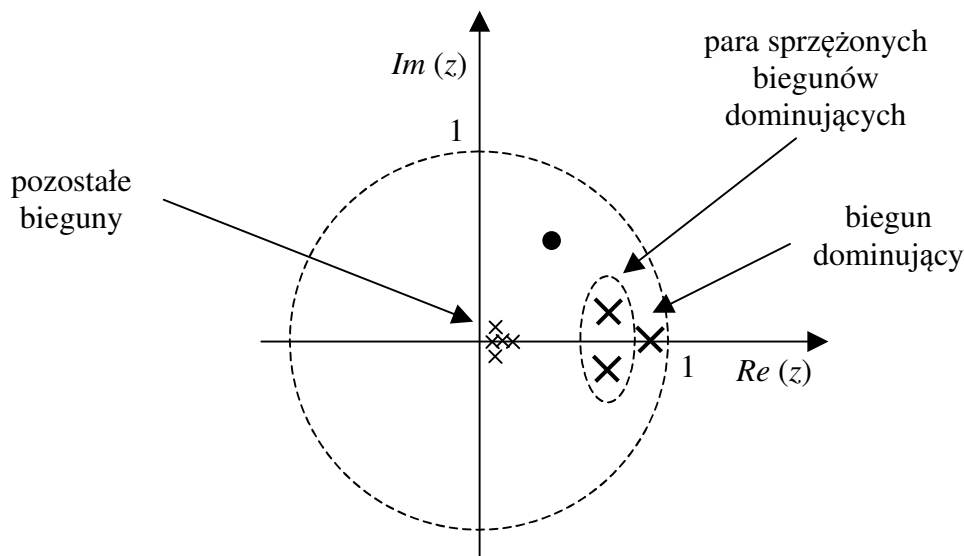
### 3.6.7. Dobór biegunów układu zamkniętego

W odróżnieniu od przypadku ciągłego, gdzie konieczne jest położenie biegunów w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $s$ , warunkiem stabilności układów dyskretnych jest położenie biegunów układu zamkniętego w okręgu jednostkowym na płaszczyźnie  $z$ . Jeżeli w układzie ciągłym występują bieguny zespolone, prowadzą one do oscylacyjnych przebiegów przejściowych. W układzie dyskretnym oscylacje pojawią się wówczas, jeżeli układ ma ujemne bieguny rzeczywiste. Bieguny takie nazywa się czasami *biegunami dzwoniącymi*. Dlatego też, mimo tego, że wszystkie bieguny położone w okręgu jednostkowym są stabilne, należy wybierać bieguny o dodatniej części rzeczywistej.

Podobnie jak w przypadku doboru biegunów ciągłego układu regulacji (podrozdział 2.1.7), również w przypadku dyskretnym można zastosować biegun dominujący, co przedstawiono na rys. 3.18. Aby uniknąć biegunów dzwoniących, leży on w prawej części okręgu jednost-



kowego. Ponieważ ma on największy wpływ na działanie zamkniętego układu regulacji, w porównaniu z innymi biegunami biegun dominujący ma największą część rzeczywistą. Pozostałe bieguny położone są blisko środka okręgu. Jeżeli zamiast pojedynczego bieguna dominującego występuje parę biegunów sprzężonych, mają one największą część rzeczywistą. Zakłada się, że wszystkie pozostałe bieguny mają znacznie mniejszy (pomijalny) wpływ na działanie układu regulacji. Ułatwieniem w zrozumieniu może być zastosowanie przekształcenia bieguna ciągłego  $s_0$  w biegun dyskretny  $z_0 = e^{s_0 T}$  (rys. 3.6). „Szybkie” bieguny ciągłe mają dużą, oczywiście ujemną, część rzeczywistą. Odpowiadające im bieguny dyskretny mają więc mały moduł, są położone blisko środka okręgu.



Rys. 3.18. Koncepcja dyskretnego bieguna dominującego

Precyzyjne zalecenia projektowe dotyczące doboru biegunów ciągłych zamkniętego układu regulacji, można również sformułować dla przypadku dyskretnego [16]. Jeżeli zamknięty układ regulacji ma pojedynczy rzeczywisty biegun dominujący  $z_0 = \sigma$  ( $\sigma > 0, |\sigma| > 0$ ), to związany z nim przebieg czasowy  $d(k)$  jest malejącym szeregiem potęgowym  $\{d(k)\} = \{a\sigma^k\}$ . Jeżeli dyskretną chwilę praktycznego zaniknięcia przebiegu ( $k_p$ ) określi się tak samo jak dla przebiegu z czasem ciągłym, czyli jako chwilę, dla której  $d(k_p) = \Delta a$ , gdzie  $\Delta$  jest pewną małą liczbą (np. 0,05), to wybrany biegun dominujący musi spełniać warunek  $(\sigma^0)^{k_p} = \Delta$ , czyli

$$\sigma^0 = \Delta^{\frac{1}{k_p}} \quad (3.135)$$

Przyjmując  $\Delta = 0,05$ , dla  $k_p = 10$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,7411$ , dla  $k_p = 100$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,9705$ , natomiast dla  $k_p = 1000$  otrzymuje się  $\sigma^0 = 0,9970$ .

Jeżeli zamknięty układ regulacji ma parę sprzężonych biegunów dominujących  $z_0 = |z_0| e^{\pm j\beta}$  ( $|z_0| < 1$ ,  $\text{Im}(z_0) \neq 0$ ,  $\beta = \arctg \frac{\text{Re}(z_0)}{|\text{Im}(z_0)|}$ ,  $0 < \beta < \pi$ ), to związany z nimi przebieg czasowy  $d(k)$  jest następujący

$$\{d(k)\} = \{a |z_0|^k \cos(\beta k + \psi)\} = \{A(k) \cos(\beta k + \psi)\} \quad (3.136)$$

Dla tego przebiegu można określić współczynnik tłumienia amplitudy  $t \rightarrow A(t) = a |z_0|^t$  jego ciągłej obwiedni za okres  $2\pi/\beta$  jako

$$\xi = \frac{A(t) - A\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)}{A(t)} = 1 - |z_0|^{\frac{2\pi}{\beta}} \quad (3.137)$$

Analogicznie jak w przypadku biegunów ciągłych, przyjmując pewną wartośćżądanego tłumienia  $\xi^0$  (np. 0,98) można wyznaczyć gwarantujący to tłumienie związek między modulem bieguna  $|z_0|$  a jego argumentem  $\beta$ . Związek ten ma postać

$$|z_0| = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} \quad (3.138)$$

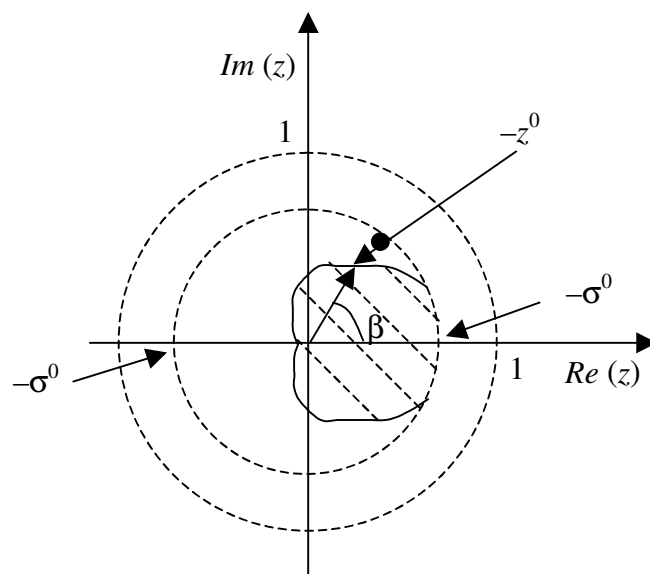
Bieguny zapewniające żądane tłumienie  $\xi^0$  mają więc postać

$$z_0 = |z_0| e^{\pm j\beta} = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} e^{\pm j\beta}, \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad (3.139)$$

Powyższy warunek ma prostą interpretację geometryczną. Bieguny sprzężone powinny leżeć na symetrycznych względem osi rzeczywistej spiralach logarytmicznych (rys. 3.19).

Reasumując powyższe rozważania, można sformułować następujące zalecenia projektowe dla układów dyskretnych:

- Bieguny powinny być co do modułu mniejsze od jedności i mieć dodatnie części rzeczywiste, a więc powinny być położone w prawej części okręgu jednostkowego.
- Dobrze jest, gdy biegun leżący najbliżej punktu  $1 + j0$  jest jednokrotny i rzeczywisty.
- Jeżeli zadany jest czas praktycznego zaniknięcia przebiegu  $k_p^0$  oraz tłumienie ma być większe niż  $\xi^0$ , to para sprzężonych biegunów dominujących powinna leżeć w obszarze przedstawionym na rys. 3.19 (obszar zakreskowany), gdzie  $\sigma^0$  określona jest wzorem (3.135), natomiast  $z^0 = (1 - \xi^0)^{\frac{\beta}{2\pi}} e^{\pm j\beta}$ ,  $0 \leq \beta \leq \pi$ .



Rys. 3.19. Położenie pary sprzężonych dyskretnych biegunów dominujących

Analogicznie jak w przypadku ciągłym, do doboru biegunów regulatora dyskretnego można wykorzystać metody polegające na minimalizacji wybranych wskaźników jakości regulacji. W regulacji liniowo-kwadratowej wektor sprzężeń zwrotnych  $K$  dobiera się w taki sposób, aby minimalizowany był wskaźnik jakości (w ogólności dla układu o wielu wejściach i wielu wyjściach)

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (x^T(k) \mathbf{Q} x(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k) + 2x^T(k) \mathbf{N} u(k)) \quad (3.140)$$

gdzie  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{R}$  oraz  $\mathbf{N}$  są macierzami wagowymi. Macierz sprzężeń zwrotnych obliczana jest z

$$\mathbf{K} = (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{N}^T) \quad (3.141)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  jest rozwiązaniem macierzowego równania Riccatiego

$$\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{A} - \mathbf{S} - (\mathbf{A}^T \mathbf{S} \mathbf{B} + \mathbf{N})(\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{B} + \mathbf{R})^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{S} \mathbf{A} + \mathbf{N}^T) + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (3.142)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego wskaźnik jakości (3.140) służy polecenie:

```
[K, S, E] = dlqr(A, B, Q, R, N)
```

przy czym wektor  $\mathbf{E}$  zawiera wartości własne macierzy układu zamkniętego  $(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})$ .

Alternatywnie, można przyjąć wskaźnik jakości

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} (y^T(k) \mathbf{Q} y(k) + u^T(k) \mathbf{R} u(k)) \quad (3.143)$$

W programie Matlab do wyznaczenia regulatora minimalizującego powyższy wskaźnik jakości służy polecenie:

```
[K, S, E] = dlqry(A, B, Q, R, N)
```

### 3.6.8. Dyskretne obserwatory stanu pełnego rzędu

Do estymacji niedostępnych pomiarowo zmiennych stanu, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, stosuje się obserwatory stanu. W dalszej części pracy krótko omówiono dyskretne obserwatory pełnego rzędu i zredukowane. Strukturę dyskretnego obserwatora pełnego rzędu pracującego w pętli zamkniętej pokazano na rys. 3.20. Obserwator jest opisany równaniem

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= \mathbf{A}\hat{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{L}(y(k) - \hat{y}(k)) \\ &= \mathbf{A}\hat{x}(k) + \mathbf{B}u(k) + \mathbf{L}(y(k) - \mathbf{C}\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.144)$$

gdzie

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{bmatrix} \quad (3.145)$$

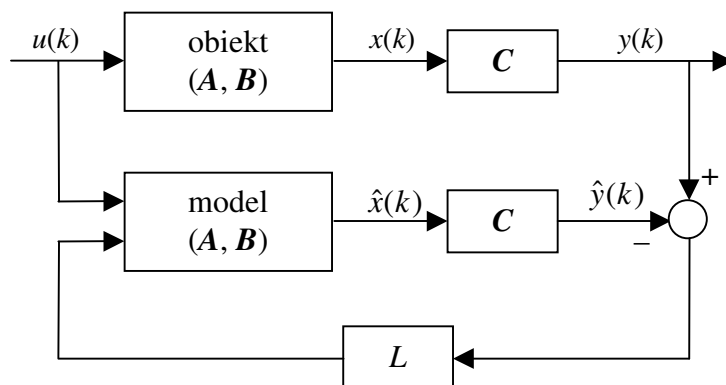
Równanie charakterystyczne obserwatora dyskretnego ma postać

$$|z\mathbf{I} - (\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C})| = 0 \quad (3.146)$$

Wektor  $\mathbf{L}$  dobiera się w taki sposób, aby pierwiastki równania charakterystycznego obserwa-

tora miały zadane z góry wartości  $s_1, \dots, s_n$

$$(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) = 0 \quad (3.147)$$



Rys. 3.20. Struktura obserwatora pełnego rzędu

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.148)$$

gdzie  $b_0 = 0,25(\alpha + \beta - 2)$ ,  $b_1 = 0,25(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)$ ,  $a_0 = \alpha\beta$ ,  $a_1 = -(\alpha + \beta)$ ,  $\alpha = e^T$ ,  $\beta = e^{-T}$ , wyznaczyć obserwator pełnego rzędu o biegunach  $z_{o1}, z_{o2}$ . Przyjąć: a)  $z_{o1} = z_{o2} = 0,75$ , b)  $z_{o1} = z_{o2} = 0,1$ .

### Rozwiązanie

Równanie charakterystyczne obserwatora ma postać

$$\begin{aligned} |zI - (A - LC)| &= \left| \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{bmatrix} z + a_1 + l_1 & -1 \\ l_2 + a_0 & z \end{bmatrix} \right| = z^2 + (l_1 + a_1)z + l_2 + a_0 \end{aligned} \quad (3.149)$$

Żąda się, aby miało ono pierwiastki  $z_1, z_2$

$$(z - z_{o1})(z - z_{o2}) = z^2 - (z_{o1} + z_{o2})z + z_{o1}z_{o2} \quad (3.150)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{cases} l_1 + a_1 = -(z_{o1} + z_{o2}) \\ l_2 + a_0 = z_{o1}z_{o2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_1 = -(z_{o1} + z_{o2}) - a_1 \\ l_2 = z_{o1}z_{o2} - a_0 \end{cases} \quad (3.151)$$

Dla biegunów obserwatora  $z_{o1} = z_{o2} = 0,75$  wektor  $L = [0,51 \ -0,4375]$ , dla  $z_{o1} = z_{o2} = 0,1$  wektor  $L = [1,8100 \ -0,9900]$ .

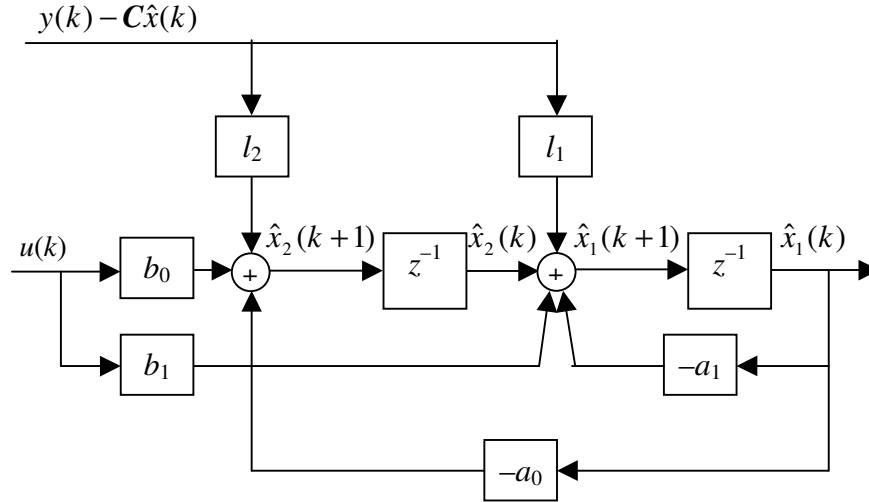
Równanie stanu obserwatora jest następujące

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + L(y(k) - C\hat{x}(k)) \quad (3.152)$$

czyli

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(k+1) &= -a_1\hat{x}_1(k) + \hat{x}_2(k) + b_1u(k) + l_1(y(k) - C\hat{x}(k)) \\ \hat{x}_2(k+1) &= a_0\hat{x}_1(k) + b_0u(k) + l_2(y(k) - C\hat{x}(k)) \end{aligned} \quad (3.153)$$

Struktura obserwatora została pokazana na rys. 3.21.



Rys. 3.21. Struktura dyskretnego obserwatora stanu pełnego rzędu (przykład)

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.154)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , przeprowadzić symulację układu regulacji z obserwatorem pełnego rzędu o biegunach  $z_{o1}$ ,  $z_{o2}$ , przy czym a)  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ , b)  $z_{o1}=z_{o2}=0,1$ . Stan początkowy procesu  $x(0) = [1 \ -1]^T$ , przyjąć stan początkowy obserwatora  $\hat{x}(0) = [0 \ 0]^T$ . Przyjęto bieguny regulatora  $z_1=z_2=0,75$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ , przyjąć okres próbkowania  $T=0,1$ .

### Rozwiązanie

Na rys. 3.22 przedstawiono trajektorie stanu procesu w dwóch przypadkach: gdy regulator korzysta z rzeczywistego (mierzonego) stanu procesu i gdy pomiar stanu zastąpiony jest jego estymacją za pomocą obserwatora pełnego rzędu. Analogicznie jak w przypadku ciągłym, na skutek zerowych warunków początkowych obserwatora w drugiej konfiguracji układu regulacji przebiegi przejściowe mają znacznie większą amplitudę, sprowadzenie procesu do punktu równowagi trwa dłużej, szczególnie dla wolniejszych biegunów obserwatora  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ .

Zgodnie z oczekiwaniami, zmniejszenie modułu biegunów obserwatora przyspiesza zbieżność stanu procesu.

Niech macierze  $A$  oraz  $C$  opisu w przestrzeni stanu mają strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej. Dla obserwatora dyskretnego o równaniu charakterystycznym

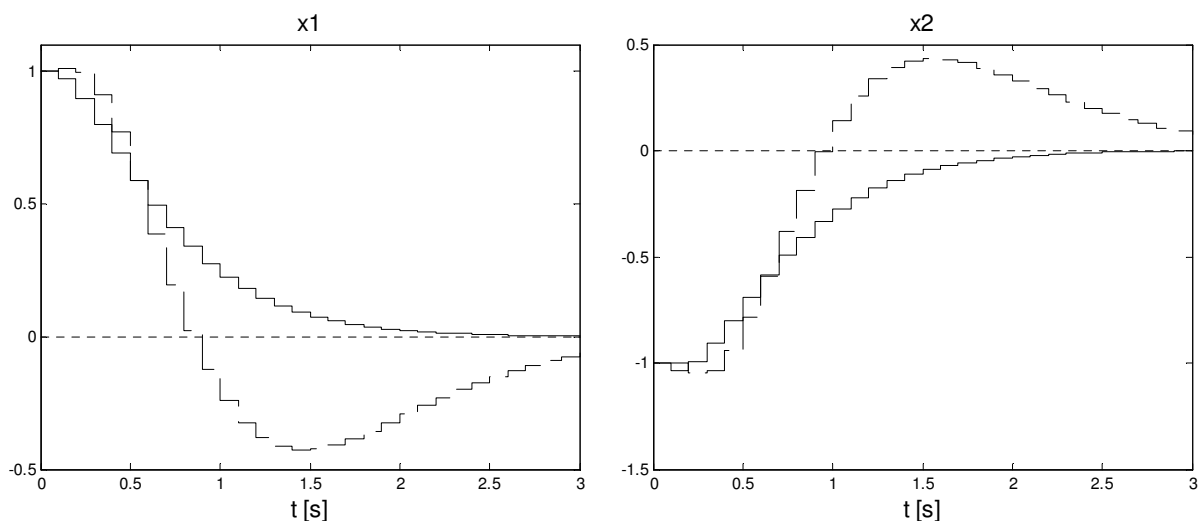
$$\begin{aligned} |zI - (A - LC)| &= (z - z_{o1})(z - z_{o2}) \dots (z - z_{on}) \\ &= z^n + \beta_{n-1}z^{n-1} + \dots + \beta_1z + \beta_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.155)$$

gdzie  $z_1, \dots, z_n$  są zadanymi z góry biegunami układu zamkniętego, współrzędne wektora  $L$  oblicza się ze wzoru

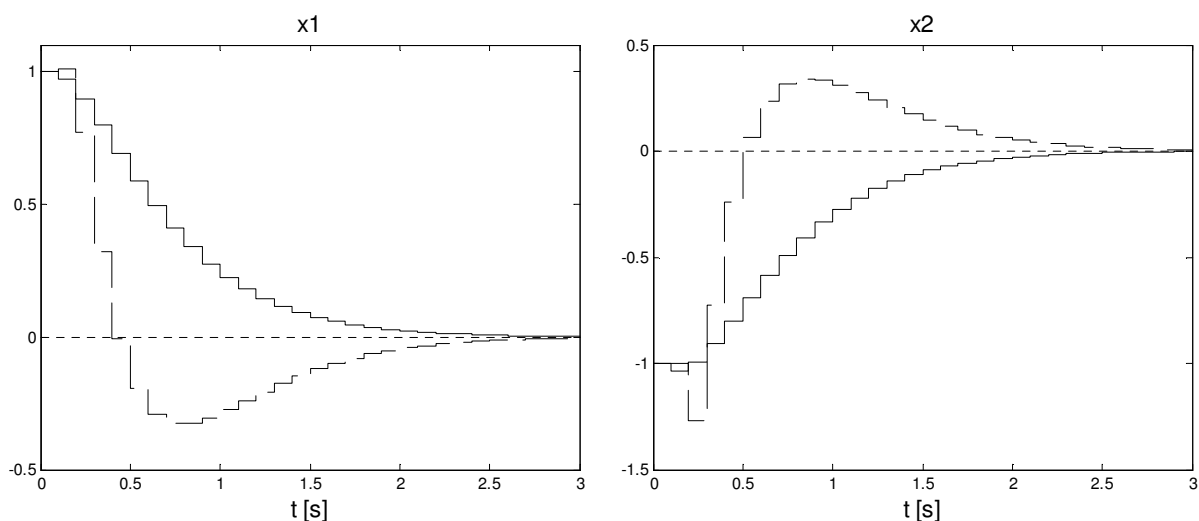
$$l_i = \beta_{n-i} - a_{n-i} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.156)$$

lub też, analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, ze wzoru Ackermana (2.121).

a)



b)



Rys. 3.22. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła) i estymowanego  $\hat{x}_1(k)$ ,  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana), bieguny obserwatora: a)  $z_{o1}=z_{o2}=0,75$ , b)  $z_{o1}=z_{o2}=0,1$

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, wektor obserwatora  $L$  dobiera się tak, aby pierwiastki równania  $|sI - (A - LC)|$  miały zadane wartości. W programie Matlab wektor  $L$  można obliczyć następująco

```
L=acker(A',C', [z_o1 ... z_on])
L=place(A',C', [z_o1 ... z_on])
```

### 3.6.9. Dyskretne obserwatory zredukowanego rzędu

Wyprowadzenie równań dyskretnego obserwatora zredukowanego rzędu jest bardzo podobne do przypadku ciągłego. Zakłada się, że macierz wyjścia ma strukturę odpowiadającą drugiemu wariantowi metody bezpośredniej

$$C = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (3.157)$$

Jeżeli macierz  $C$  nie ma żądanej postaci, stosuje się liniowe przekształcenie zmiennych stanu (2.123). Korzystając ze struktury macierzy  $C$ , wektor stanu można przedstawić w postaci

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ w(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

przy czym  $w(k)$  jest  $n-1$  wektorem bezpośrednio niedostępnych zmiennych stanu. Zadaniem obserwatora zredukowanego jest odtworzenie składowych tego wektora.

Równanie stanu układu

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (3.159)$$

można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} y(k+1) &= A_{11}y(k) + A_{12}w(k) + B_1u(k) \\ w(k+1) &= A_{21}y(k) + A_{22}w(k) + B_2u(k) \end{aligned} \quad (3.160)$$

gdzie

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.161)$$

Wymiar macierzy jest następujący:  $A_{11}$ :  $1 \times 1$ ,  $A_{12}$ :  $1 \times (n-1)$ ,  $A_{21}$ :  $(n-1) \times 1$ ,  $A_{22}$ :  $(n-1) \times (n-1)$ ,  $B_1$ :  $1 \times 1$ ,  $B_2$ :  $(n-1) \times 1$ . Mnożąc lewostronnie pierwsze z równań stanu przez wektor  $L$  o długości  $n-1$  i odejmując od drugiego równania otrzymuje się

$$w(k+1) = (A_{22} - LA_{12})w(k) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) + Ly(k+1) \quad (3.162)$$

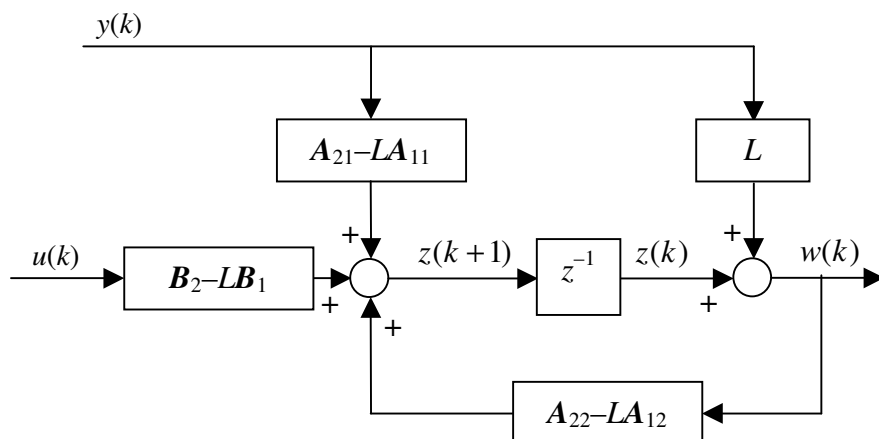
Aby uniknąć konieczności wykorzystania sygnału  $y(k+1)$  definiuje się dodatkowy stan

$$z(k) = w(k) - Ly(k) \quad (3.163)$$

Obserwator zredukowany dla stanu  $z(t)$  opisany jest więc równaniem

$$z(k+1) = (A_{22} - LA_{12})(z(k) + Ly(k)) + (A_{21} - LA_{11})y(k) + (B_2 - LB_1)u(k) \quad (3.164)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 3.23.



Rys. 3.23. Struktura dyskretnego obserwatora zredukowanego rzędu

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|zI - (A_{22} - LA_{12})| = 0 \quad (3.165)$$

Wektor  $L$  dobiera się w taki sposób, aby macierz  $A_{22} - LA_{12}$  miała z góry zadane stabilne wartości własne (leżące w okręgu jednostkowym), rzeczywiste lub zespolone parami sprzężone.

Wektor  $L$  oblicza się porównując współczynniki przy odpowiednich potęgach zmiennej  $z$  wielomianu charakterystycznego. Dla układów o wyższych rzędach warto skorzystać z programu Matlab. Szukaną wielkość  $L$  znajduje się następująco

$$L = \text{acker}(A_{22}', A_{12}', [z_{o2} \dots z_{on}])$$

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.166)$$

gdzie  $b_0 = 0,25(\alpha + \beta - 2)$ ,  $b_1 = 0,25(\alpha + \beta - 2\alpha\beta)$ ,  $a_0 = \alpha\beta$ ,  $a_1 = -(\alpha + \beta)$ ,  $\alpha = e^T$ ,  $\beta = e^{-T}$ , zaprojektować obserwator zredukowany o biegunie  $z_o$ .

### Rozwiązanie

Macierz wyjścia ma postać  $[1 \ 0]$ , a więc nie jest konieczne dodatkowe przekształcenie zmiennych stanu. Mierzona jest pierwsza zmienna stanu (wyjście), zadaniem obserwatora jest odtworzenie wielkości  $x_2(k)$

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ w(k) \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Niech

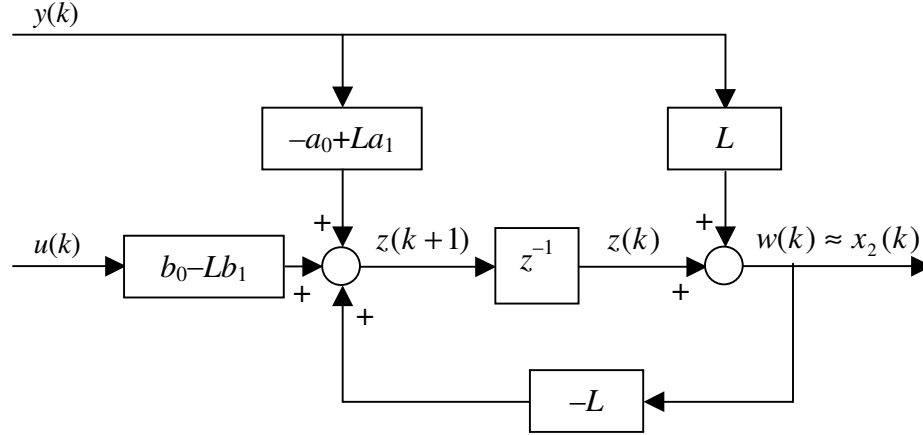
$$\begin{aligned} z(k) &= w(k) - Ly(k) \\ &= x_2(k) - Lx_1(k) \end{aligned} \quad (3.168)$$



Podstawiając  $A_{11}=-a_1$ ,  $A_{12}=1$ ,  $A_{21}=-a_0$ ,  $A_{22}=0$ ,  $B_1=b_1$ ,  $B_2=b_1$  otrzymuje się

$$z(k+1) = -L(z(k) + Ly(k)) + (-a_0 + La_1)y(k) + (b_0 - Lb_1)u(k) \quad (3.169)$$

Strukturę obserwatora pokazano na rys. 3.24.



Rys. 3.24. Struktura obserwatora zredukowanego rzędu odtwarzającego wartość  $x_2(k)$

Równanie charakterystyczne obserwatora zredukowanego rzędu ma postać

$$|zI - (A_{22} - LA_{12})| = |z + L| = 0 \quad (3.170)$$

Ponieważ projektowany obserwator ma mieć biegun równy  $z_o$ , czyli  $L = -z_o$ .

### Zadanie

Dla obiektu

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.171)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$$

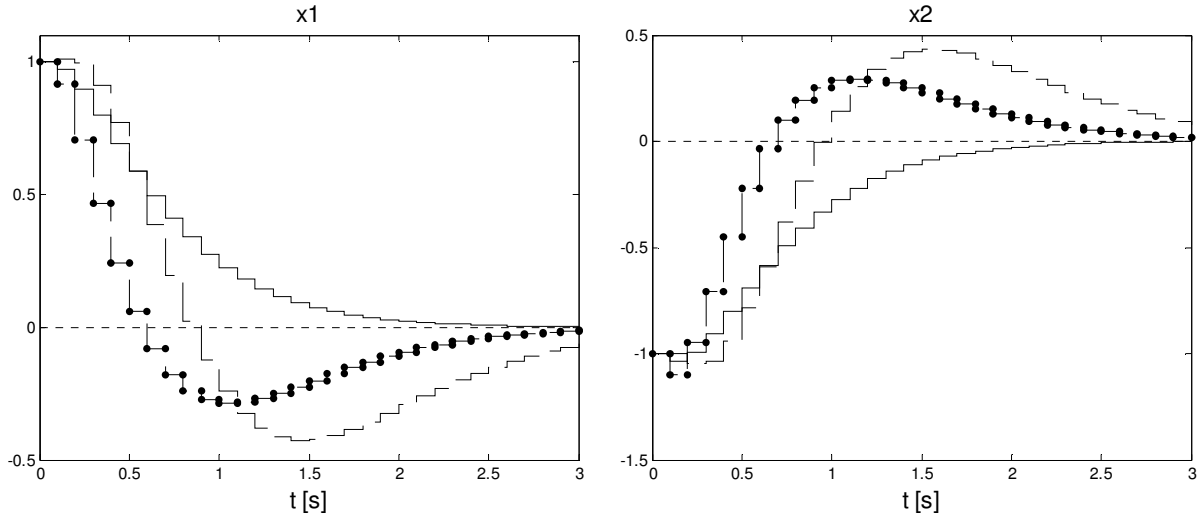
gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , przeprowadzić symulacje układu regulacji z obserwatorem zredukowanego rzędu o biegunie  $z_o$ , przy czym a)  $z_o=0,75$ , b)  $z_o=0,1$ , stan estymowany wykorzystać w regulacji, stan początkowy procesu  $x(0)=[1 \ -1]^T$ , stan początkowy obserwatora  $\hat{x}_2(k)=0$ , przyjąć bieguny regulatora  $z_1=z_2=0,75$ , czemu odpowiada wektor sprzężeń zwrotnych  $K=[109,3978 \ 94,4356]$ .

### Rozwiązanie

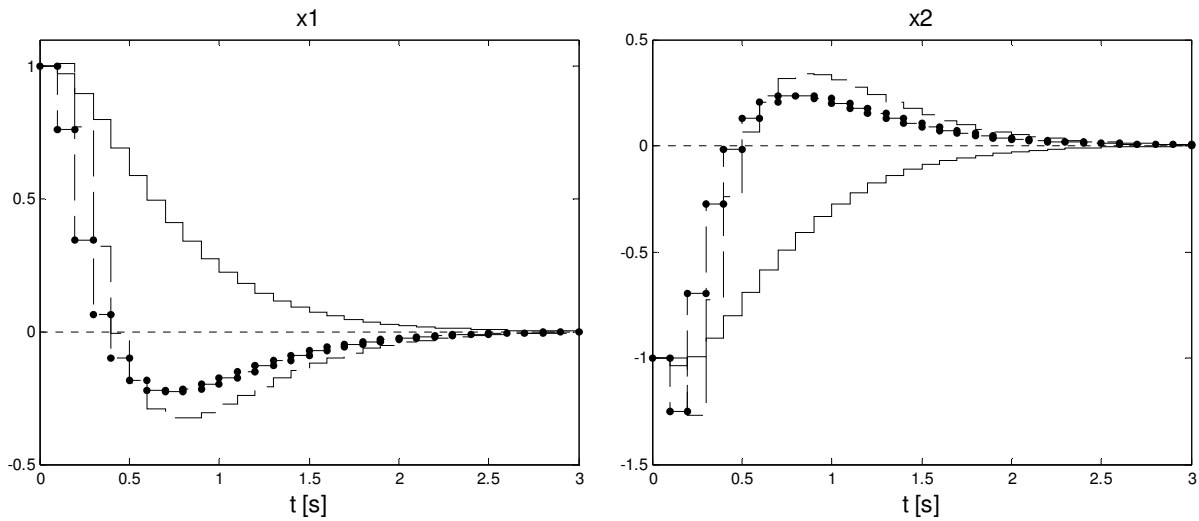
Na rys. 3.22 porównano trajektorie stanu uzyskane w trzech strukturach układu regulacji ze sprzężeniem zwrotnym. W pierwszym przypadku regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła). W drugim przypadku zastosowano obserwator pełnego rzędu – regulator korzysta ze stanu estymowanego  $\hat{x}_1(k)$  oraz  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana). W trzecim przypadku zastosowano obserwator zredukowany – regulator korzysta ze stanu rzeczywistego  $x_1(k)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana kropkowana). Biegun(y) obserwatora przyjęto jako a) 0,75, b) 0,1. Zgodnie z oczekiwaniami, zmniejszenie modułu biegunów obserwatora przyspiesza

zbieżność stanu procesu. Można zauważyć, analogicznie jak w przypadku ciągłym, że przebiegi uzyskane w układzie regulacji z obserwatorem zredukowanym są nieco lepsze niż w przypadku zastosowania obserwatora pełnego rzędu. Jest to spowodowane tym, że obserwator zredukowany korzysta z pomiaru pierwszej zmiennej stanu.

a)



b)



Rys. 3.25. Porównanie trajektorii stanu w układzie regulacji ze sprzężeniem zwrotnym: regulator korzysta ze stanu rzeczywistego (linia ciągła), estymowanego  $\hat{x}_1(k)$ ,  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana), rzeczywistego  $x_1(k)$  i estymowanego  $\hat{x}_2(k)$  (linia przerywana kropkowana), bieżący  $y$  obserwatora: a) 0,75, b) 0,1

### 3.6.10. Wymuszanie zerowego uchybu ustalonego

Analogicznie jak w przypadku układów ciągłych, dotychczas przedstawione układy regulacji warto uzupełnić o możliwość uwzględnienia niezerowej wartości zadanej i wprowadzić całkowanie, dzięki czemu wymuszony zostaje uchyb ustalony.

Równania stanu i wyjścia mają postać

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (3.172)$$

Niech  $e(k) = y^{zad}(k) - y(k)$  będzie aktualnym uchybem regulacji. Definiuje się dodatkową zmienną stanu  $x_e(k)$ , której celem jest całkowanie sygnału uchybu. W przypadku czasu ciągłego korzysta się z równania (2.151), natomiast w aktualnie rozważanym przypadku dyskretnym należy zastosować jedną z metod całkowania. Zastosujemy całkowanie metodą prostokątów

$$\begin{aligned} x_e(k+1) &= x_e(k) + Te(k) \\ &= x_e(k) + T(y^{zad}(k) - y(k)) \end{aligned} \quad (3.173)$$

Korzystając z równania wyjścia, otrzymuje się

$$x_e(k+1) = x_e(k) + T(y^{zad}(k) - Cx(k)) \quad (3.174)$$

Rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ x_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -TC & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ x_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 0_{n \times 1} \\ T \end{bmatrix} y^{zad}(k) \quad (3.175)$$

Prawo regulacji ma postać

$$u(k) = -K \begin{bmatrix} x(k) \\ x_e(k) \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

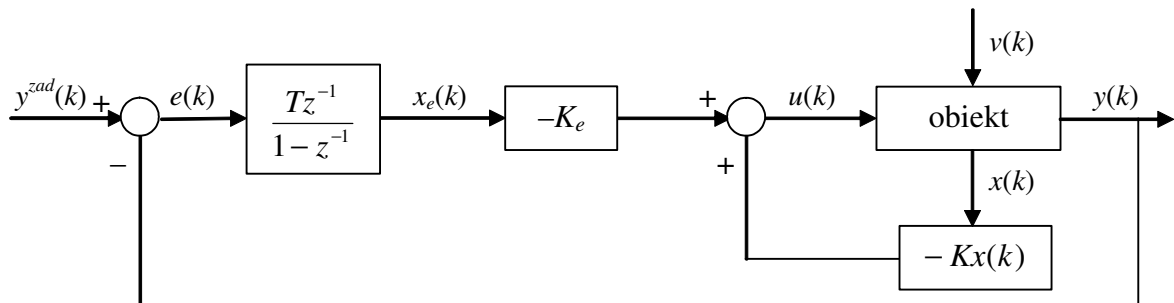
przy czym elementy wektora sprzężeń zwrotnych  $K = [K \ K_e]$  oblicza się w taki sposób, aby równanie charakterystyczne  $|zI - (A_r - B_r K)| = 0$  miało zadane z góry pierwiastki. Można to zrobić porównując współczynniki odpowiednich wielomianów lub wykorzystać polecenie programu Matlab

$L = \text{acker}(A_r, B_r, [z_{o1} \dots z_{on} z_e])$

gdzie

$$A_r = \begin{bmatrix} A & 0_{n \times 1} \\ -TC & 1 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

Struktura uzyskanego układu regulacji z całkowaniem pokazana została na rys. 3.26, przy czym zastosowano bezpośredni pomiar stanu. Oczywiście, otrzymany układ regulacji może być również wykorzystany w sytuacji zastosowania obserwatora pełnego lub zredukowanego rzędu.



Rys. 3.26. Struktura układu regulacji z całkowaniem

**Zadanie**

Dla obiektu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.178)$$

gdzie  $b_0=0,25(\alpha+\beta-2)$ ,  $b_1=0,25(\alpha+\beta-2\alpha\beta)$ ,  $a_0=\alpha\beta$ ,  $a_1=-(\alpha+\beta)$ ,  $\alpha=e^T$ ,  $\beta=e^{-T}$ , zaprojektować układ regulacji z całkowaniem. Przyjąć potrójny biegun  $z_0$ . Zakłócenie  $v(t)$  działa na wejście procesu. Przeprowadzić symulacje dla a)  $z_0=0,75$ , b)  $z_0=0,1$ , przyjąć zerowe warunki początkowe  $x_1(k)=x_2(k)=0$ .

**Rozwiązanie**

Ponieważ zakłócenie działa na wejście procesu, rozszerzone równanie stanu ma postać

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_e(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_0 & 0 & 0 \\ -T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ 0 \end{bmatrix} (u(t) + v(t)) - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ T \end{bmatrix} y^{zad}(t) \quad (3.179)$$

Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$\begin{aligned} |zI - (A_r - BK_r)| &= \begin{vmatrix} a_1 + z + b_1k_1 & b_1k_2 - 1 & b_1k_e \\ a_0 + b_0k_1 & z + b_0k_2 & b_0k_e \\ 0,1 & 0 & z - 1 \end{vmatrix} \\ &= z^3 + (a_1 + b_0k_2 + b_1k_1 - 1)z^2 \\ &\quad + (a_0 - a_1 + b_0k_1 - b_0k_2 - b_1k_1 - 0,1b_1k_e - a_0b_1k_2 + a_1b_0k_2)z \\ &\quad - a_0 - b_0k_1 - 0,1b_0k_e + a_0b_1k_2 - a_1b_0k_2 \end{aligned} \quad (3.180)$$

Żąda się, aby równanie charakterystyczne miało potrójny pierwiastek  $z_0$

$$(z - z_0)^3 = z^3 - 3z_0z^2 + 3z_0^2z - z_0^3 \quad (3.181)$$

Z porównania współczynników przy odpowiednich potęgach zmiennej  $s$  otrzymuje się

$$\begin{aligned} k_1 &= -(a_0b_0^2 - a_0b_1^2 + a_1b_0^2 + 3b_0^2z_0 - b_0^2 - a_1^2b_0^2 - 3b_0^2z_0^2 + a_1b_0b_1 + a_0a_1b_1^2 - a_1^2b_0b_1 \\ &\quad + 3a_0b_1^2z_0 - 3a_1b_0^2z_0 - b_0b_1z_0^3 + a_0a_1b_0b_1 + 3a_0b_0b_1z_0 - 3a_1b_0b_1z_0) \\ &\quad / ((b_0 + b_1)(b_0^2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2)) \end{aligned} \quad (3.182)$$

oraz

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{-(a_1b_0^2 - a_0b_1^2 + 3b_0^2z_0 - b_0^2 + b_1^2z_0^3 - a_0b_0b_1 + a_0b_0b_1 + 3b_0b_1z_0^3)}{(b_0 + b_1)(b_0^2 - a_1b_0b_1 + a_0b_1^2)} \\ k_e &= \frac{10(z_0^3 - 3z_0^2 + 3z_0 - 1)}{b_0 + b_1} \end{aligned} \quad (3.183)$$

Prawo regulacji ma postać

$$u(k) = - \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_e(k) \end{bmatrix} \quad (3.184)$$

## 4. Algorytmy regulacji predykcyjnej

### 4.1. Zasada regulacji predykcyjnej

Bieżąca optymalizacja punktu pracy przynosi wymierne korzyści ekonomiczne tylko wówczas, gdy warstwa regulacji zapewnia skuteczną regulację. Zastosowanie optymalizacji postawiło nowe wymagania przed układami regulacji. Zaistniała potrzeba zastąpienia uprzednio stosowanych algorytmów PID przez tzw. zaawansowane algorytmy regulacji. Przykładem techniki regulacji, której przydatność potwierdzona została tysiącami udanych aplikacji, jest regulacja predykcyjna [12]. Główne zalety regulacji predykcyjnej są następujące:

- a) można uwzględnić ograniczenia sygnałów wejściowych i wyjściowych procesu,
- b) można bardzo efektywnie regulować proces wielowymiarowy,
- c) dla silnie nieliniowych procesów można zaprojektować nieliniowy algorytm regulacji predykcyjnej,
- d) jeżeli dostępny jest model mierzonych zakłóceń, można w algorytmie uwzględnić wpływ tych zakłóceń na proces,
- e) główna zasada regulacji predykcyjnej jest stosunkowo prosta i uniwersalna, można zastosować różne typy modeli dynamicznych.

W dyskretnym algorytmie PID sygnał sterujący obliczany jest na podstawie wartości uchybu regulacji w chwili bieżącej  $k$  oraz chwilach poprzednich  $k-1$ ,  $k-2$

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (4.1)$$

Przy doborze nastaw regulatora zgodnie z metodą Zieglera i Nicholasa dokonuje się w istocie identyfikacji jednego punktu charakterystyki obiektu, dla wielu aplikacji dokładność otrzymanego układu regulacji może być niewystarczająca. W przypadku skomplikowanych, wielowymiarowych procesów synteza układu regulacji jest zwykle skomplikowana (konieczne jest odprężanie), bardzo często układ regulacji pracuje nieefektywnie z ekonomicznego punktu widzenia.

Cechą wspólną wszystkich algorytmów regulacji predykcyjnej, niezależnie od rodzaju zastosowanego modelu procesu, jest wykorzystanie zasady przesuwanego horyzontu, zwanej również zasadą sterowania repetycyjnego. W każdej iteracji algorytmu, czyli w każdej chwili  $kT$ , gdzie  $T$  oznacza okres próbkowania, równy czasowi powtarzania interwencji algorytmu,  $k=1, 2, \dots$ , dysponując:

- a) dynamicznym modelem procesu oraz właściwym mu modelem zakłóceń,
- b) pomiarami sygnałów procesowych, a mianowicie wartościami zmiennych wejściowych procesu do chwili  $k-1$  włącznie oraz zmiennych wyjściowych do chwili  $k$  włącznie,
- c) znaną lub założoną trajektorią wartości zadanych wyjść regulowanych procesu od chwili  $k$ ,

wyznaczana jest sekwencja przyszłych wartości sygnału sterującego. W każdej iteracji algorytmu wyznaczany jest wektor przyrostów sygnału sterującego

$$\Delta U(k) = [\Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \Delta u(k+2|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k)]^T \quad (4.2)$$

gdzie  $N_u$  oznacza horyzont sterowania, przy czym przyjmuje się, że

$$\Delta u(k+p|k) = 0 \quad \text{dla} \quad p \geq N_u \quad (4.3)$$

Zastosowana notacja  $\Delta u(k+p|k)$  oznacza przyrost sygnału sterującego obliczony w

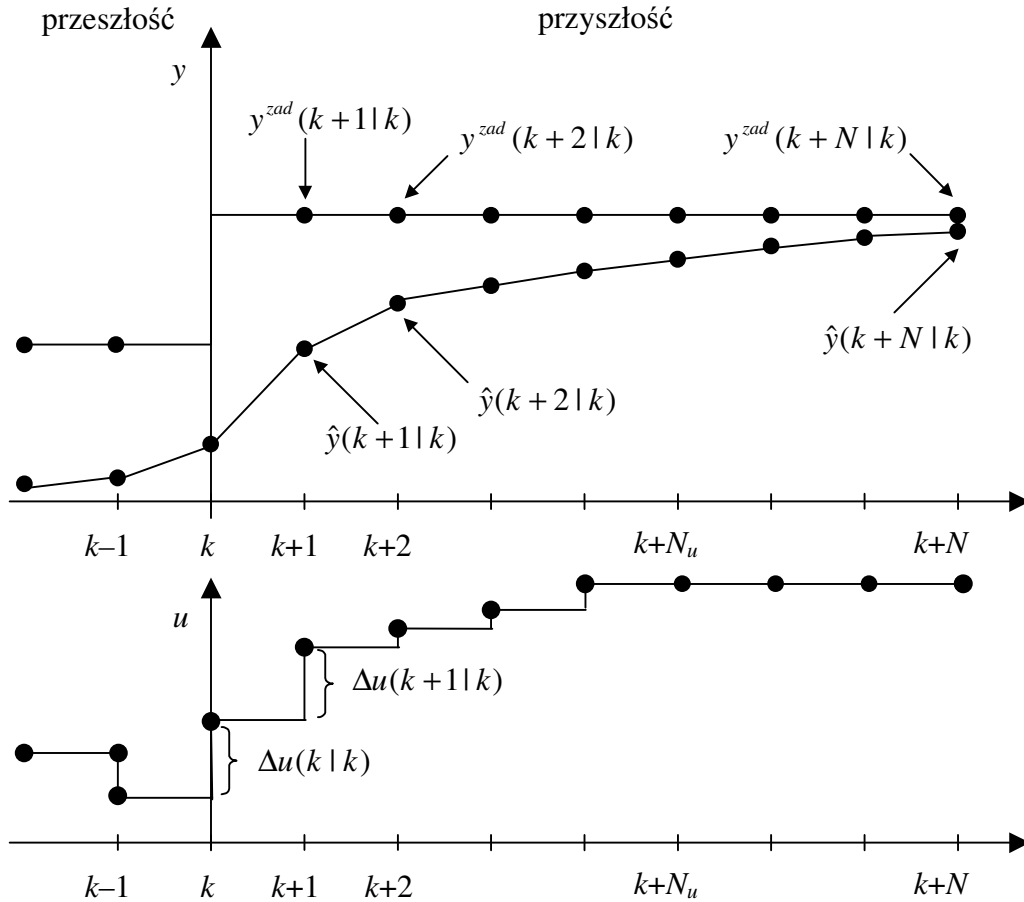
chwili  $k$ , który ma być wykorzystany do sterowania w chwili  $k+p$ . Związki między przyrostami a wartościami bezwzględnymi sygnału sterującego są następujące

$$\begin{aligned}\Delta u(k|k) &= u(k|k) - u(k-1) \\ \Delta u(k+1|k) &= u(k+1|k) - u(k|k) \\ \Delta u(k+2|k) &= u(k+2|k) - u(k+1|k) \\ &\vdots \\ \Delta u(k+N_u|k) &= u(k+N_u|k) - u(k+N_u-1|k)\end{aligned}\quad (4.4)$$

Do sterowania procesu wykorzystuje się jednak tylko pierwszy element wyznaczonego ciągu. Prawo regulacji ma postać

$$u(k) = u(k|k) = \Delta u(k|k) + u(k-1) \quad (4.5)$$

W kolejnej iteracji algorytmu  $(k+1)$ , odpowiadającej chwili  $(k+1)T$ , po aktualizacji pomiarów, cała procedura zostaje powtórzona. Oznacza to więc, że w przedziale  $t \in [kT, (k+1)T)$  wartość sterowania pozostaje stała.



Rys. 4.1. Zasada regulacji predykcyjnej,  $N$  – horyzont predykcyjny,  $N_u$  – horyzont sterowania

Zasada regulacji predykcyjnej została schematycznie przedstawiona na rys. 4.1. W aktualnej chwili  $k$ , korzystając przy tym z dostępnego modelu, prognozuje się zachowanie procesu na tzw. horyzoncie predykcyjnym  $N$ , dla wszystkich chwil  $k+pl$ , gdzie  $p=1, \dots, N$ . Dolna część rys. 4.1 przedstawia przykładową sekwencję sterującą, będącą przedmiotem obliczeń algorytmu, natomiast górna jego część – trajektorie sygnału wyjściowego. Trajektorie wyjściowe są na-

stępujące:

- a) Znana lub przewidywana trajektoria wartości zadanych zmiennej wyjściowej  $y^{zad}(k+1|k), y^{zad}(k+2|k), \dots, y^{zad}(k+N|k)$ . Notacja  $y^{zad}(k+p|k)$  oznacza wartość zadaną na chwilę  $k+p$  znaną w chwili (iteracji)  $k$ .
- b) Prognozowana trajektoria sygnału wyjściowego  $\hat{y}(k+1|k), \hat{y}(k+2|k), \dots, \hat{y}(k+N|k)$ . Notacja  $\hat{y}(k+p|k)$  oznacza prognozę sygnału wyjściowego na chwilę  $k+p$  wyznaczoną w chwili  $k$ . Trajektoria prognozowana zależy nie tylko od wyznaczonego aktualnie wektora zmiennych decyzyjnych  $\Delta U(k)$ , jest ona również funkcją poprzednich wartości sygnałów wejściowych i wyjściowych procesu.

Najczęściej zakłada się, że trajektoria zadana na całym horyzoncie predykcji nie ulega zmianie, co jest w istocie równoważne posługiwaniu się terminem wartości zadanej. W niektórych zastosowaniach, np. w robotyce, uwzględnienie zmian trajektorii zadanej na horyzoncie predykcji jest wskazane, ponieważ umożliwia z wyprzedzeniem reagować na jej zmiany.

Wektor zmiennych decyzyjnych algorytmu obliczany jest w wyniku minimalizacji pewnego wskaźnika jakości regulacji. Funkcja celu składa się zazwyczaj z dwóch członów. Pierwszy z nich, zdefiniowany na horyzoncie predykcji, uwzględnia różnice między prognozowaną trajektorią wyjścia a trajektorią zadaną (jest to więc prognozowany uchyb regulacji). Drugi składnik funkcji kryterialnej, zwany członem kary, uwzględnia zmienność wyznaczanej w aktualnej iteracji sekwencji przyszłych wartości sygnałów sterujących. Najczęściej spotykana kwadratowa funkcja celu ma postać

$$J(k) = \sum_{p=1}^N \varphi_p (y^{zad}(k+p|k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \sum_{p=0}^{N_u} \lambda_p (\Delta u(k+p|k))^2 \quad (4.6)$$

przy czym horyzonty sterowania i predykcji, a także nieujemne współczynniki wagowe  $\varphi_p, \lambda_p$  są parametrami dostrajanymi algorytmu. W powyższym wskaźniku jakości uwzględniono prognozowane uchyby regulacji od chwili  $k+1|k$  do  $k+N|k$ , co jest poprawne i dość często stosowane w literaturze. Z drugiej jednak strony, w przypadku występowania dużego opóźnienia pierwsze składniki pierwszej sumy funkcji kryterialnej są niezależne od zmiennych decyzyjnych algorytmu, mogą więc być pominięte. Współczynniki  $\varphi_p$  umożliwiają różnicowanie wpływu prognozowanych uchybów regulacji w poszczególnych chwilach horyzontu predykcji. Zadaniem współczynników  $\lambda_p$  jest nie tylko różnicowanie wpływu poszczególnych składników wyznaczanej sekwencji sygnału sterującego w poszczególnych chwilach horyzontu sterowania, lecz, przede wszystkim, określenie względnego wpływu drugiego członu funkcji celu. W najprostszym przypadku, najczęściej stosowanym w praktyce, przyjmuje się funkcję z jednym współczynnikiem dostrajalym  $\lambda$ , a mianowicie

$$J(k) = \sum_{p=1}^N (y^{zad}(k+p|k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \lambda \sum_{p=0}^{N_u} (\Delta u(k+p|k))^2 \quad (4.7)$$

Choć przyjęcie  $\lambda=0$  jest możliwe to jednak w praktyce nie jest stosowane, ponieważ, szczególnie w przypadku algorytmu bez ograniczeń, prowadzi do niekorzystnych (o dużych amplitudach i przyrostach) przebiegów sygnału sterującego, a także małej odporności na błędy modelowania.

Wyznaczenie wektora zmiennych decyzyjnych algorytmu regulacji predykccyjnej  $\Delta U(k)$  odbywa się w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji funkcji kryterialnej

$$\min_{\Delta U(k)=[\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+N_u-1|k)]^T} \{J(k)\} \quad (4.8)$$



Jeżeli do celów predykcji (tzn. do obliczania prognozowanej trajektorii  $\hat{y}(k+1|k)$ ,  $\hat{y}(k+2|k)$ , ...,  $\hat{y}(k+N|k)$ ) stosuje się model liniowy, zależność między zmiennymi decyzyjnymi algorytmu a elementami trajektorii prognozowanej jest liniowa. Dzięki temu minimalizowana funkcja kryterialna jest kwadratowa. Zadanie minimalizacji funkcji kwadratowej może być rozwiązane w sposób analityczny (ma ona jedno minimum globalne), bez potrzeby optymalizacji numerycznej. Przy braku ograniczeń rozwiązanie problemu dane jest w postaci analitycznej, co bardzo ułatwia implementację, nawet przy wykorzystaniu sprzętu o niewielkich możliwościach obliczeniowych.

Horyzonty sterowania i predykcji są parametrami dostrajanymi algorytmu, zależnymi od szybkości dynamiki procesu, możliwości obliczeniowych oraz dokładności modelu. W celu ograniczenia złożoności obliczeniowej przyjmuje się zwykle, że horyzont sterowania  $N_u$  jest znacznie krótszy niż horyzont predykcji

Jak już wspomniano, jedną z przyczyn wielkiej popularności algorytmów predykcyjnych jest możliwość uwzględnienia ograniczeń sygnałów procesowych. W ogólności rozważa się ograniczenia wartości sygnału sterującego

$$u^{\min} \leq u(k+p|k) \leq u^{\max} \quad (4.9)$$

gdzie  $p=0, \dots, N_u-1$ , ograniczenia przyrostów sygnału sterującego

$$-\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+p|k) \leq \Delta u^{\max} \quad (4.10)$$

gdzie  $p=0, \dots, N_u-1$ , oraz ograniczenia wartości sygnału wyjściowego

$$y^{\min} \leq \hat{y}(k+p|k) \leq y^{\max} \quad (4.11)$$

gdzie  $p=1, \dots, N$ .

Ograniczenia sygnałów sterujących wynikają, przede wszystkim, z uwarunkowań technologicznych dotyczących elementów wykonawczych. Ograniczenia sygnałów wyjściowych spowodowane są koniecznością spełnienia norm technologicznych, ekonomicznych, a także przepisów dotyczących ochrony środowiska.

W każdej iteracji algorytmu predykcyjnego w wersji z ograniczeniami wyznaczany jest wektor przyszłych wartości sygnałów sterujących  $\Delta U(k)$  w wyniku rozwiązania następującego zadania optymalizacji

$$\begin{aligned} & \min_{\Delta U(k)=[\Delta u(k|k) \dots \Delta u(k+N_u-1|k)]^T} \{J(k)\} \\ & \text{przy ograniczeniach} \\ & u^{\min} \leq u(k+p|k) \leq u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \\ & -\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+p|k) \leq \Delta u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \\ & y^{\min} \leq \hat{y}(k+p|k) \leq y^{\max} \quad \text{dla } p=1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.12)$$

Jeżeli do predykcji stosuje się model liniowy, otrzymany problem optymalizacji jest zadaniem programowania kwadratowego (kwadratowa funkcja celu, liniowe ograniczenia). Problemy tego typu, przy wykorzystaniu metod zbioru ograniczeń aktywnych lub punktu wewnętrznego, rozwiązywane są w sposób efektywny, przy czym, co istotne, można określić przewidywany czas obliczeń.

Warto podkreślić, że podane powyżej sformułowanie algorytmu regulacji predykcyjnej jest bardzo uniwersalne, nie ogranicza liczby wejść i wyjść procesu ani klasy modelu stosowanego do predykcji. Z tego też powodu, oraz dzięki możliwości uwzględnienia ograniczeń, uważa się, że algorytmy omawianej klasy są jedyną zaawansowaną techniką regulacji, która odniosła

istotny sukces praktyczny [12,15].

Jeżeli proces jest silnie nieliniowy, zastosowanie algorytmu liniowego może okazać się niewystarczające. Projektuje się wówczas nieliniowy algorytm regulacji predykcyjnej, w którym do obliczenia trajektorii prognozowanej stosuje się nieliniowy model procesu. Zasadnicza trudność polega na tym, trajektoria ta nie jest liniową funkcją wektora zmiennych decyzyjnych. Problem optymalizacji jest więc nieliniowy, często niewypukły.

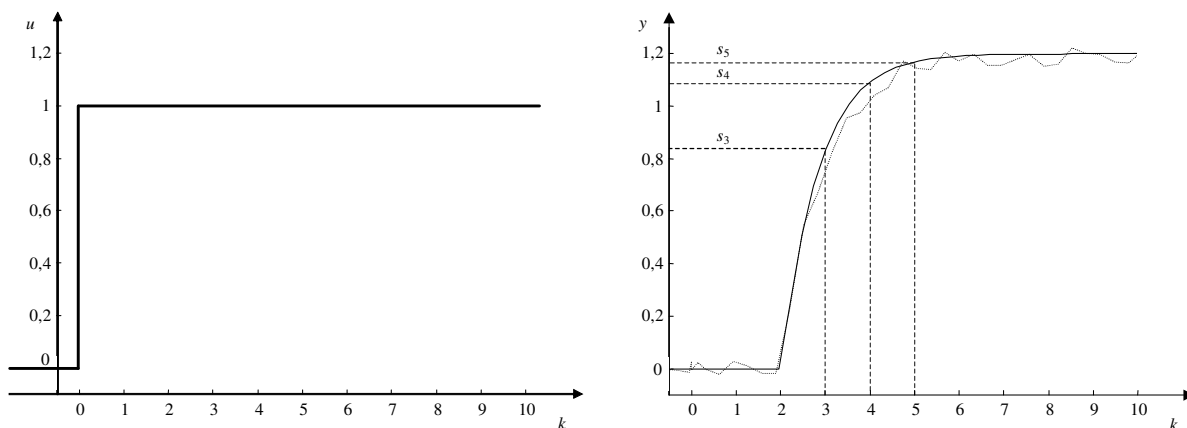
Należy podkreślić, że pomimo ciągłego rozwoju nieliniowych algorytmów regulacji predykcyjnej oraz dostępności szybkich, umożliwiających ich praktyczne zastosowanie sterowników, potencjalnie najprostsze algorytmy regulacji predykcyjnej z modelami liniowymi nie tracą na znaczeniu. W warunkach przemysłowych (liczne, trudne do przewidzenia zakłócenia) identyfikacja i walidacja modeli nieliniowych może okazać się bardzo trudna. Zastosowanie algorytmu liniowego jest często jedynym, realnym rozwiązaniem, szczególnie wówczas, gdy stopień nieliniowości procesu jest niewielki. Warto również podkreślić, że algorytmy te są zasadniczą częścią bardzo efektywnych i często stosowanych w praktyce algorytmów z linearyzacją [8, 14, 15], a także algorytmów adaptacyjnych.

## 4.2. Algorytm DMC

Algorytm DMC (Dynamic Matrix Control) był jednym z pierwszych algorytmów regulacji predykcyjnej [2]. Został on opracowany w pierwszej połowie lat siedemdziesiątych w firmie Shell. Do predykcji wykorzystuje się model procesu w postaci odpowiedzi skokowych. Algorytm ten doczekał się wielu udanych zastosowań, jest on obecny właściwie we wszystkich liczących się na rynku pakietach oprogramowania. Warto podkreślić, że wyprowadzenie i interpretacja algorytmu DMC jest stosunkowo łatwa.

### 4.2.1. Zastosowanie modelu odpowiedzi skokowej do predykcji

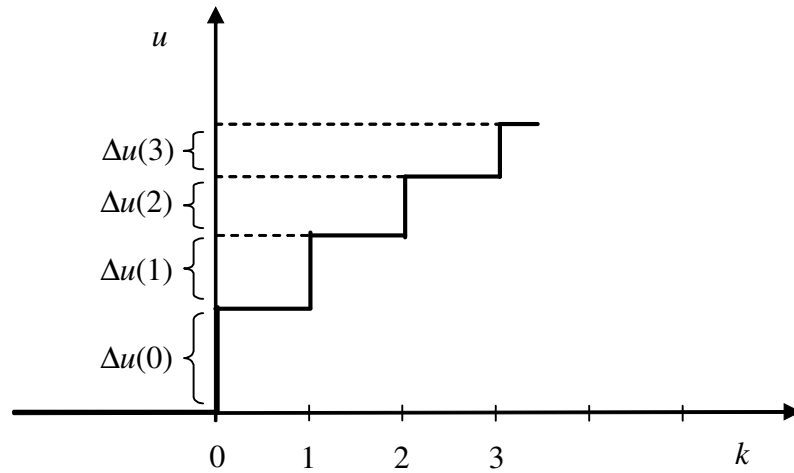
Identyfikacja modelu obiektu dynamicznego w postaci odpowiedzi skokowych jest metodą bardzo prostą, lecz równocześnie bardzo skuteczną, szczególnie w warunkach przemysłowych. W algorytmie DMC dynamika obiektu regulacji modelowana jest dyskretnymi odpowiedziami skokowymi, które opisują reakcję wyjścia na skok jednostkowy sygnału sterującego (od chwili  $k=0$  włącznie sygnał sterujący ma wartość 1, w przeszłości jest zerowy). Na rys. 4.2 przedstawiono przykładową odpowiedź skokową obiektu z opóźnieniem równym dwóm okresom próbkowania (dlatego dwa pierwsze współczynniki odpowiedzi skokowej są zerowe). Zaznaczono zarówno odpowiedź rzeczywistą (linia przerywana) jak i odpowiedź z idealnie odfiltrowanymi zakłóceniami szybkozmiennymi (linia ciągła).



Rys. 4.2. Przykładowa odpowiedź wyjścia obiektu  $y$  na skok sterowania  $u$

Znając dyskretną odpowiedź skokową obiektu  $\{s_1, s_2, s_3, \dots\}$  można modelować dyskretną odpowiedź wyjścia na sterowanie w postaci dowolnego sygnału dyskretnego (schodkowego). Można bowiem traktować sygnał schodkowy jako sumę skoków o różnych amplitudach, które rozpoczynają się w kolejnych chwilach, co przedstawiono na rys. 4.3. Korzystając z zasady superpozycji można zapisać

$$\begin{aligned}
 y(1) &= y(0) + s_1 \Delta u(0) \\
 y(2) &= y(0) + s_2 \Delta u(0) + s_1 \Delta u(1) \\
 y(3) &= y(0) + s_3 \Delta u(0) + s_2 \Delta u(1) + s_1 \Delta u(2) \\
 y(4) &= y(0) + s_4 \Delta u(0) + s_3 \Delta u(1) + s_2 \Delta u(2) + s_1 \Delta u(3) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.13}$$



Rys. 4.3. Reprezentacja sygnału schodkowego jako sumy sygnałów skokowych o różnych amplitudach  $\Delta u(k)$  i momentach skoku

Dla dowolnego  $k=1,2,3,\dots$

$$y(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k-j) \tag{4.14}$$

Dla chwili  $k+p$  otrzymuje się

$$y(k+p|k) = y(0) + \sum_{j=1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) \tag{4.15}$$

Powyższy wzór zostanie zastosowany do wyznaczenia równań predykcji w algorytmie DMC. Wartość wyjścia przewidywaną w bieżącej chwili  $k$  na chwilę  $k+p$  horyzontu predykcji oznacza się przez  $\hat{y}(k+p|k)$ , zaś wartość przyrostów sterowań wyznaczone w chwili  $k$  na chwilę  $k+p$  horyzontu sterowania przez  $\Delta u(k+p|k)$ . Wartość  $\hat{y}(k+p|k)$  jest równa sumie wielkości  $y(k+p|k)$  wyznaczonej na podstawie modelu (czyli ze wzoru (4.15)) oraz przewidywanej na chwilę  $k+p$  wartości zakłócenia  $d(k+p|k)$  sprowadzonego do wyjścia

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+p|k) &= y(k+p|k) + d(k+p|k) \\
 &= y(0) + \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) + \sum_{j=p+1}^{k+p} s_j \Delta u(k+p-j) + d(k+p|k)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Przyjmuje się, że zakłócenie w chwili  $k$  równe jest różnicy między zmierzoną wartością sygnału wyjściowego  $y(k)$  a wartością obliczoną na podstawie modelu  $y(k | k - 1)$

$$\begin{aligned} d(k) &= y(k) - y(k | k - 1) \\ &= y(k) - \left( y(0) + \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k - j) \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

W algorytmie DMC zakłada się, że w kolejnych chwilach horyzontu predykcji zakłócenie to nie ulega zmianie. Tak zwany model zakłóceń „typu DMC” ma postać

$$d(k + 1 | k) = d(k + 2 | k) = \dots = d(k + N | k) = d(k) \quad (4.18)$$

Uwzględniając uzyskane do tej pory zależności otrzymuje się następujący wzór na predykcję wyjścia w chwili  $k$  na chwilę  $k+p$ ,  $p=1,2,\dots,N$

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + p | k) &= y(k) + \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k + p - j | k) + \\ &+ \sum_{j=p+1}^{k+p} s_j \Delta u(k + p - j) - \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k - j) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Przekształcając otrzymuje się

$$\begin{aligned} \hat{y}(k + p | k) &= \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k + p - j | k) + \\ &+ y(k) + \sum_{j=1}^k s_{j+p} \Delta u(k - j) - \sum_{j=1}^k s_j \Delta u(k - j) \\ &= \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k + p - j | k) + y(k) + \sum_{j=1}^k (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k - j) \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pierwsza z sum po prawej stronie uzyskanej zależności zależy od przyrostów sterowania w chwili bieżącej i w przyszłości, a mianowicie od wielkości  $\Delta u(k | k)$ ,  $\Delta u(k + 1 | k)$ , ...,  $\Delta u(k + N_u - 1 | k)$  które są zmiennymi decyzyjnymi zadania optymalizacji sterowań w chwili  $k$ . Dlatego też nazywa się ona składową wymuszoną prognozowanej trajektorii wyjścia  $\hat{y}(k + p | k)$ . Składowa wymuszona ma więc postać

$$\Delta y(k + p | k) = \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k + p - j | k) \quad (4.21)$$

Pozostała część trajektorii prognozowanej nazywana jest składową swobodną, zależy ona jedynie od poprzednich przyrostów sterowania i dana jest wzorem

$$y^0(k + p | k) = y(k) + \sum_{j=1}^k (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k - j) \quad (4.22)$$

Reasumując, trajektorię prognozowaną na horyzoncie predykcji ( $p = 1, \dots, N$ ) można przedstawić jako sumę składowej wymuszonej i swobodnej

$$\hat{y}(k + p | k) = y^0(k + p | k) + \Delta y(k + p | k) \quad (4.23)$$

Dla rzeczywistych obiektów stabilnych (bez całkowania) stan wyjścia po wymuszeniu sko-

kowym ustala się

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s_{\infty} \quad (4.24)$$

Dlatego też wystarczy znać  $D$  współczynników odpowiedzi skokowej, tzn. liczbę kroków dyskretyzacji, po której wartość odpowiedzi skokowej można uznać za ustaloną, równą wzmocnieniu statycznemu obiektu  $K=s_{\infty}$ . Wielkość  $D$  nazywa się horyzontem dynamiki obiektu, na ogół słuszne jest następujące przybliżenie

$$D \cong \frac{(\tau + (3 \div 4)T_z)}{T} \quad (4.25)$$

przy czym  $T_z$  jest tzw. zastępczą stałą czasową obiektu.

Jeżeli  $s_j=K$  dla  $j \geq D$ , składową swobodną można przedstawić jako

$$y^0(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^{D-1} (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k-j) \quad (4.26)$$

ponieważ  $s_{j+p}-s_j=0$  dla  $j \geq D$ . Przyjęcie modelu tego typu ogranicza klasę rozważanych procesów do obiektów asymptotycznie stabilnych.

#### 4.2.2. Algorytm DMC w wersji analitycznej (bez ograniczeń)

W algorytmie DMC, każdej chwili  $k$  (iteracji) wyznacza się ciąg przyszłych przyrostów sygnału sterującego wielkości  $\Delta u(k|k)$ ,  $\Delta u(k+1|k)$ , ...,  $\Delta u(k+N_u-1|k)$  w wyniku minimalizacji wskaźnika jakości

$$J(k) = \sum_{p=1}^N \varphi_p (y^{zad}(k+p|k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \sum_{p=0}^{N_u} \lambda_p (\Delta u(k+p|k))^2 \quad (4.27)$$

W celu wyprowadzenie prawa regulacji warto zastosować zapis wektorowo-macierzowy. Definiując wektory

$$Y^{zad}(k) = \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) \\ \vdots \\ y^{zad}(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad \hat{Y}(k) = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}(k+N|k) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

o długości  $N$ , wektor

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

o długości  $N_u$  oraz macierze kwadratowe o wymiarowości  $N \times N$  i  $N_u \times N_u$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \varphi_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varphi_N \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{N_u-1} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

funkcję kryterialną można zapisać w postaci

$$J(k) = \|Y^{zad}(k) - \hat{Y}(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \quad (4.31)$$

Ponieważ prognozowana trajektoria wyjścia jest sumą składowej swobodnej i wymuszonej (4.23), w zapisie wektorowym

$$\hat{Y}(k) = Y^0(k) + \Delta Y(k) \quad (4.32)$$

gdzie

$$Y^0(k) = \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ \vdots \\ y^0(k+N|k) \end{bmatrix} \quad \Delta Y(k) = \begin{bmatrix} \Delta y(k+1|k) \\ \vdots \\ \Delta y(k+N|k) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

są wektorami o długości  $N$ . Korzystając z (4.32), wskaźnik jakości ma postać

$$J(k) = \|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - \Delta Y(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \quad (4.34)$$

Do predykcji wyjścia w algorytmie DMC stosuje się model procesu w postaci skończonej odpowiedzi skokowej. Oznacza to, że wektory  $Y^0(k)$  oraz  $\Delta Y(k)$  wyznaczone są na podstawie współczynników  $\{s_l, l=1,2,...,D, s_l=s_D \text{ dla } l>D\}$ . Składowa swobodna wyjścia

$$y^0(k+p|k) = y(k) + \sum_{j=1}^{D-1} (s_{j+p} - s_j) \Delta u(k-j) \quad (4.35)$$

może być przedstawiona w postaci wektorowej

$$Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) \quad (4.36)$$

gdzie macierz  $\mathbf{M}^P$  o wymiarowości  $N \times (D-1)$  ma strukturę

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & \dots & s_D - s_{D-1} \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & \dots & s_{D+1} - s_{D-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{N+1} - s_1 & s_{N+2} - s_2 & \dots & s_{N+D-1} - s_{D-1} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

Górny indeks „ $P$ ” powyższej macierzy wprowadzono w tym celu, aby podkreślić fakt, że określa ona predykcję wyjścia w zależności jedynie od przeszłych przyrostów sterowania. Dla każdego elementu  $s_l$  przy  $l \geq D$  zachodzi  $s_l = s_{\infty} = K$ . Wektory o długościach  $N$  i  $D-1$  mają postać

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(k) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad \Delta U^P(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \vdots \\ \Delta u(k-(D-1)) \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Składowa wymuszona wyjścia

$$\Delta y(k+p|k) = \sum_{j=1}^p s_j \Delta u(k+p-j|k) \quad (4.39)$$

może być przedstawiona w postaci wektorowej

$$\Delta Y(k) = \mathbf{M} \Delta U(k) \quad (4.40)$$

gdzie tzw. macierz dynamiczna  $\mathbf{M}$  o wymiarowości  $N \times N_u$  ma strukturę

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \dots & s_{N-N_u+1} \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

Wykorzystując (4.36) oraz (4.40), funkcję kryterialną można zapisać w postaci

$$J(k) = \|Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) - \mathbf{M} \Delta U(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \quad (4.42)$$

Zakłada się, że  $\varphi_p \geq 0$  i  $\lambda_p > 0$ , czyli  $\Psi \geq 0$  i  $\Lambda > 0$ . Oznacza to, że funkcja kryterialna  $J(k)$  jest ściśle wypukła. Przyrównując do zera wektor gradientu

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \Delta U(k)} = -2\mathbf{M}^T \Psi (Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) - \mathbf{M} \Delta U(k)) + 2\Lambda \Delta U(k) = 0 \quad (4.43)$$

otrzymuje się wektor optymalnych przyrostów sterowania

$$\begin{aligned} \Delta U(k) &= (\mathbf{M}^T \Psi \mathbf{M} + \Lambda)^{-1} \mathbf{M}^T \Psi (Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)) \\ &= \mathbf{K} (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

gdzie

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \Psi \mathbf{M} + \Lambda)^{-1} \mathbf{M}^T \Psi \quad (4.45)$$

jest macierzą o wymiarowości  $N_u \times N$ . Macierz  $\mathbf{K}$  wyznaczana jest jednokrotnie w trakcie projektowania algorytmu (ang. off-line). Hesjan funkcji kryterialnej jest równy

$$\frac{\partial^2 J(k)}{\partial \Delta U^2(k)} = 2(\mathbf{M}^T \Psi \mathbf{M} + \Lambda) \quad (4.46)$$

Ponieważ  $\Psi \geq 0$ ,  $\Lambda > 0$  macierz drugich pochodnych jest dodatnio określona, a więc uzyskane rozwiązanie problemu optymalizacji bez ograniczeń jest rzeczywiście minimum globalnym funkcji kryterialnej  $J(k)$ .

### Zadanie

Dany jest obiekt regulacji opisany prostym modelem w postaci odpowiedzi skokowej złożonym z czterech współczynników

$$s_1 = 0,7585, \quad s_2 = 1,0376, \quad s_3 = 1,1403, \quad s_4 = 1,1780 \quad (4.47)$$

Horyzont dynamiki  $D=4$ . Niech  $N=4$ ,  $N_u=2$ ,  $\Psi=\mathbf{I}$ ,  $\Lambda=\lambda \mathbf{I}$ . Przeprowadzić symulację analitycznego algorytmu DMC. Zbadać wpływ parametru  $\lambda$  na jakość regulacji przy skokowej zmianie wartości zadanej. Założyć, że trajektoria zadana jest stała na horyzoncie predykcji, czyli  $y^{zad}(k+1|k) = y^{zad}(k+2|k) = \dots = y^{zad}(k+N|k) = y^{zad}(k)$ . Podany model ma służyć zarówno do zaprojektowania algorytmu DMC oraz do symulacji procesu.

**Rozwiązanie**

Dla przyjętego horyzontu predykcji odpowiedź swobodna

$$Y^0(k) = Y(k) + \mathbf{M}^P \Delta U^P(k) \quad (4.48)$$

ma postać

$$\begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ y^0(k+4|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} + \mathbf{M}^P \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

gdzie

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & s_4 - s_3 \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & s_5 - s_3 \\ s_4 - s_1 & s_5 - s_2 & s_6 - s_3 \\ s_5 - s_1 & s_6 - s_2 & s_7 - s_3 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

przy czym  $s_l = s_D$  dla  $l > 4$ . Macierz dynamiczna ma postać

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

W przypadku ogólnym wektor optymalnych przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania oblicza się ze wzoru

$$\Delta U(k) = \mathbf{K} (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \quad (4.52)$$

gdzie

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{M} + \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} \quad (4.53)$$

Zakładając, że trajektoria zadana jest stała na horyzoncie predykcji czyli

$$Y^{zad}(k) = \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) \\ y^{zad}(k+2|k) \\ y^{zad}(k+3|k) \\ y^{zad}(k+4|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

wektor optymalnych przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania oblicza się ze wzoru

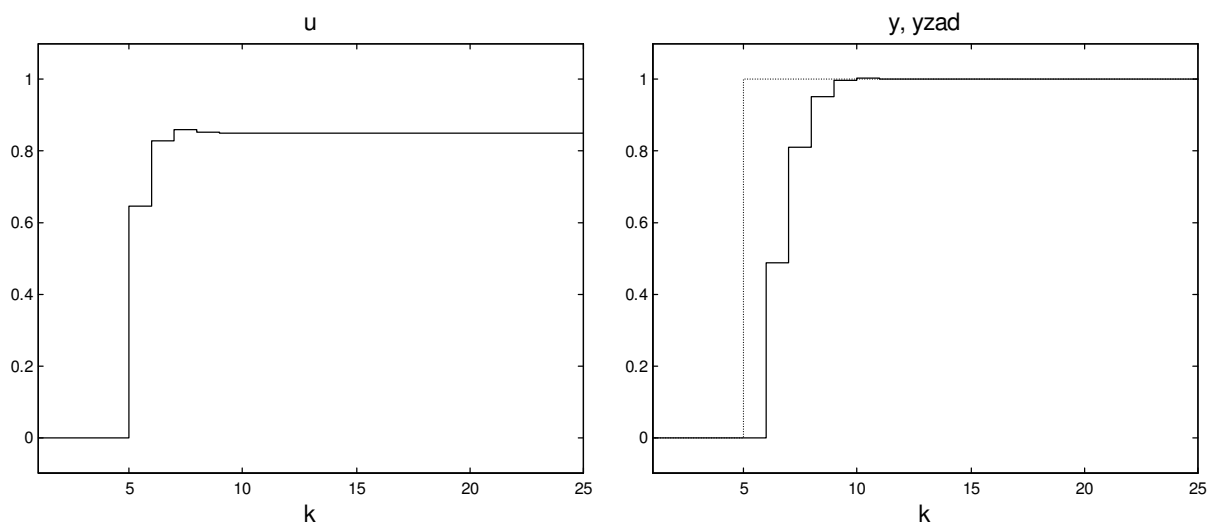
$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \end{bmatrix} = \mathbf{K} \left( \begin{bmatrix} y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} - \mathbf{M}^P \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \end{bmatrix} \right) \quad (4.55)$$



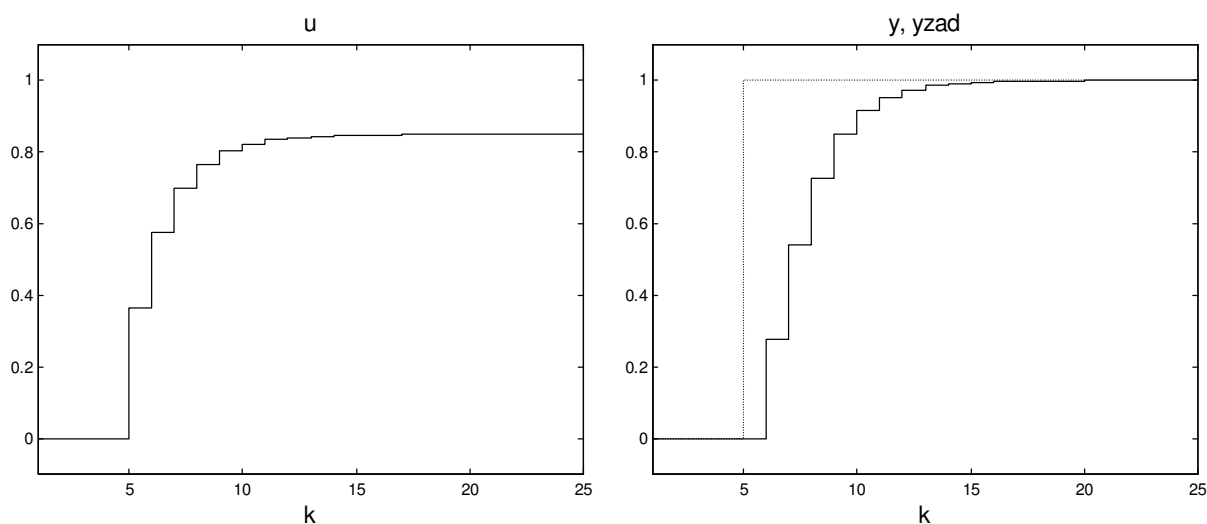
Do sterowania w chwili  $k$  wykorzystuje się pierwszy element obliczonego wektora optymalnych przyrostów. Prawo regulacji ma więc postać

$$u(k) = \Delta u(k | k) + u(k-1) \quad (4.56)$$

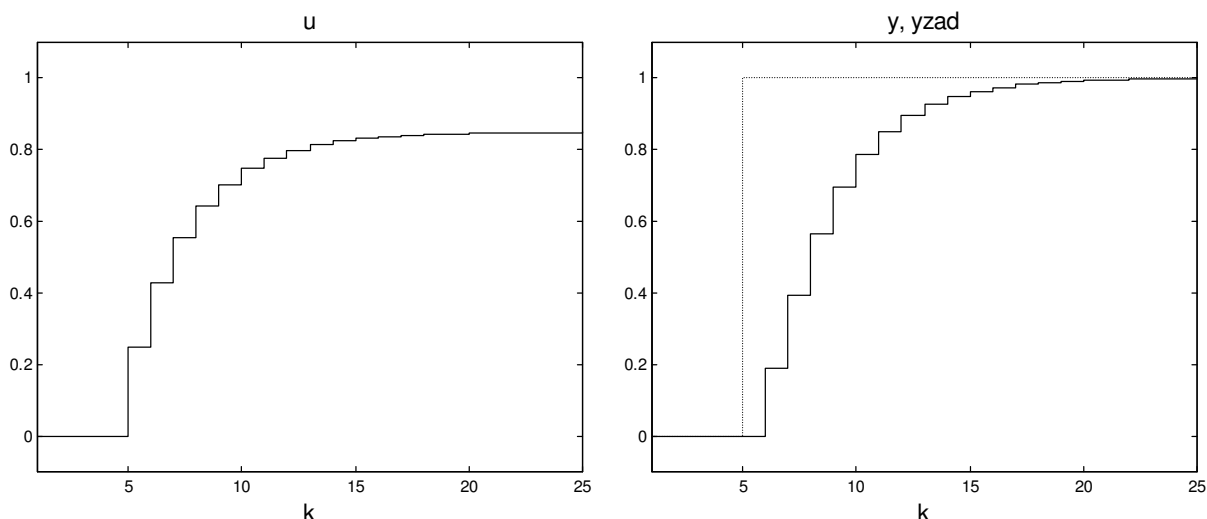
Na rys. 4.4, 4.5, 4.6 przedstawiono wyniki symulacji zaprojektowanego analitycznego algorytmu DMC. W chwili  $k=5$  następuje skokowa zmiana wartości zadanej z 0 na 1. Przy małej wartości parametru  $\lambda$  układ bardzo szybko nadąża za zmianami wartości zadanej, czemu towarzyszą niekorzystnie duże zmiany sygnału sterującego. W praktyce sygnał taki może doprowadzić do uszkodzenia elementu wykonawczego. Zwiększenie wartości parametru  $\lambda$  pozwala uzyskać ograniczenie amplitudy i szybkości narastania sygnału sterującego. Niestety, wraz ze wzrostem parametru  $\lambda$  pogarsza się szybkość regulacji, proces wolniej dąży do wartości zadanej. Projektant powinien więc wybrać taki parametr  $\lambda$ , który z jednej strony wystarczająco ograniczy duże, niekorzystne przyrosty sygnału sterującego, z drugiej strony, zapewni szybką, dokładną regulację. Dla omawianego przykładu można przyjąć, że dobrym rozwiązaniem jest przyjęcie  $\lambda=5$ , co zapewnia kompromis między szybkością regulacji i kształtem sygnału sterującego.



Rys. 4.4. Wyniki symulacji algorytmu DMC bez ograniczeń,  $\lambda=1$



Rys. 4.5. Wyniki symulacji algorytmu DMC bez ograniczeń,  $\lambda=5$



Rys. 4.6. Wyniki symulacji algorytmu DMC bez ograniczeń,  $\lambda=10$

Algorytm DMC ma kilka parametrów dostrajalnych: horyzont dynamiki  $D$ , horyzont predykcji  $N$ , horyzont sterowania  $N_u$  oraz współczynniki wagowe  $\varphi_p$ ,  $\lambda_p$ . O ile rola współczynników wagowych została omówiona we wstępie bieżącego rozdziału, warto krótko omówić dobór horyzontów. Bardzo często horyzont predykcji jest równy horyzontowi dynamiki, który z kolei jest zdeterminowany szybkością procesu i okresem próbkowania. Warto wspomnieć, że horyzont predykcji nie może być zbyt krótki, gdyż grozi to utratą stabilności algorytmu (i odwrotnie, wydłużanie horyzontu ma właściwości stabilizujące). Horyzont sterowania jest równy liczby zmiennych decyzyjnych algorytmu. Aby zminimalizować nakład obliczeń stosuje się zwykle krótkie horyzonty sterowania, np.  $N_u < 10$ . W niektórych przypadkach można przyjąć jednostkowy horyzont sterowania,

### Zadanie

Dla modelu (4.47) przeprowadzić symulacje analitycznego algorytmu DMC przy założeniu, że trajektoria zadana w postaci fali prostokątnej

- jest stała na horyzoncie predykcji,
- jest zmienna na horyzoncie predykcji.

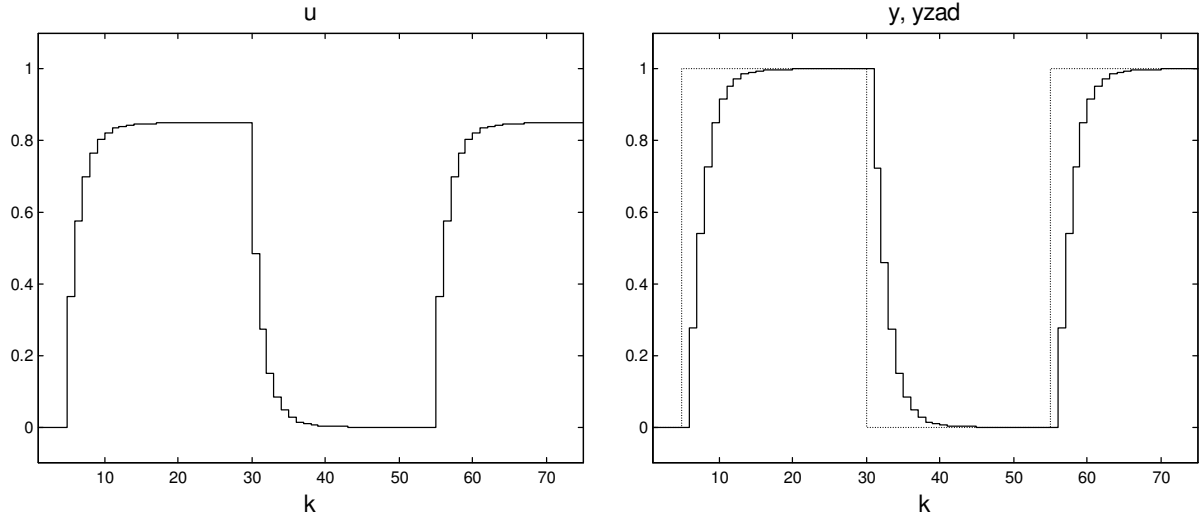
Przyjąć  $\lambda=5$ .

### Rozwiązanie

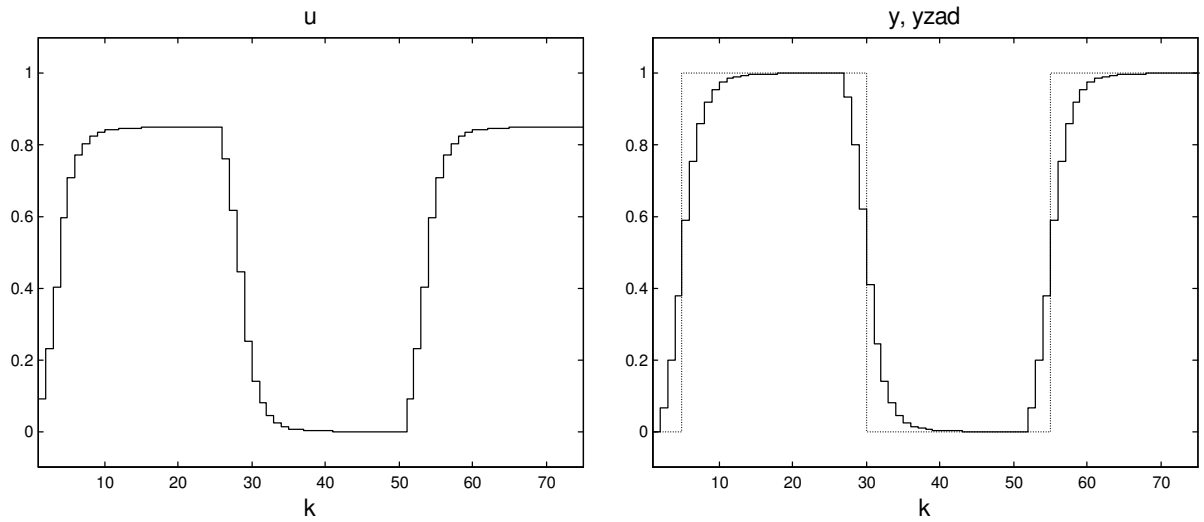
Zakładając, że trajektoria zadana jest zmienna na horyzoncie predykcji, wektor optymalnych przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania oblicza się ze wzoru

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \end{bmatrix} = \mathbf{K} \left( \begin{bmatrix} y^{zad}(k+1|k) \\ y^{zad}(k+2|k) \\ y^{zad}(k+3|k) \\ y^{zad}(k+3|k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} - \mathbf{M}^P \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \end{bmatrix} \right) \quad (4.57)$$

Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 4.7 i rys. 4.8.



Rys. 4.7. Wyniki symulacji algorytmu DMC, trajektoria zadana stała na horyzoncie predykcji



Rys. 4.8. Wyniki symulacji algorytmu DMC, trajektoria zadana zmienna na horyzoncie predykcji

#### 4.2.3. Analityczna postać prawa regulacji DMC

Pomimo tego, że w algorytmie regulacji predykccyjnej w chwili  $k$  wyznacza się cały ciąg przyszłych przyrostów sygnału sterującego  $\Delta u(k|k)$ ,  $\Delta u(k+1|k)$ , ...,  $\Delta u(k+N_u-1|k)$ , do sterowania obiektem wykorzystuje się jedynie  $\Delta u(k|k)$ . Przyjmuje się oznaczenia

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \\ \vdots \\ \bar{K}_{H_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,N} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{N_u,1} & k_{N_u,2} & \dots & k_{N_u,N} \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

gdzie wektory wierszowe  $\bar{K}_i$  mają długość  $N$ , korzystając ze wzoru (4.44), prawo regulacji ma postać

$$\Delta u(k) = \Delta u(k|k) = \bar{K}_1 (Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)) \quad (4.59)$$

W kolejnej chwili  $(k+1)$ , cała procedura obliczeniowa zostaje powtórzona. Uzyskane prawo

regulacji jest liniowym sprzężeniem zwrotnym od różnicy trajektorii zadanej i swobodnej.

Prawo regulacji DMC można łatwo przekształcić do postaci bezpośrednio zależnej od wyjścia i sterowania. Przedstawiając macierz  $\mathbf{M}^P$  w postaci

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} M_1^P & M_2^P & \dots & M_{D-1}^P \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

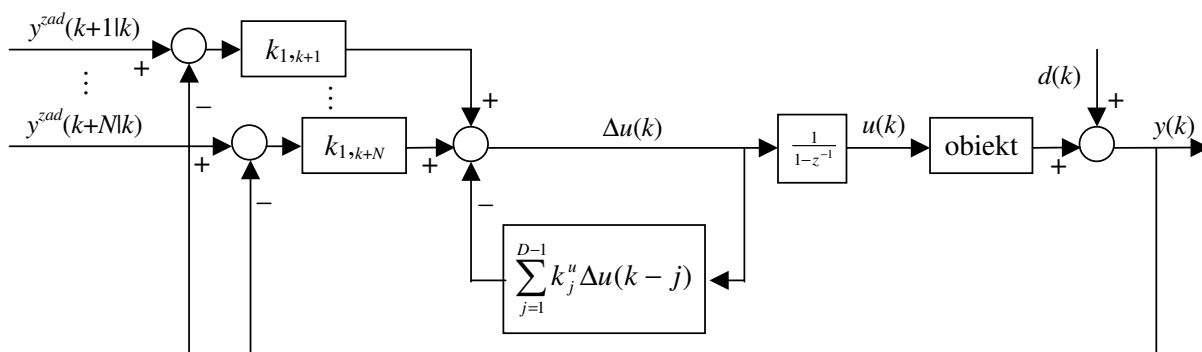
gdzie każdy z wektorów kolumnowych  $M_i^P$  ma długość  $N$ , oraz wykorzystując strukturę macierzy  $\mathbf{K}$ , przyrost sygnału sterującego w chwili  $k$  można zapisać jako

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = \Delta u(k|k) &= \bar{K}_1(Y^{zad}(k) - Y(k)) - \sum_{j=1}^{D-1} (\bar{K}_1 M_j^P) \Delta u(k-j) \\ &= \sum_{p=1}^N k_{1,p} (y^{zad}(k+p|k) - y(k)) - \sum_{j=1}^{D-1} k_j^u \Delta u(k-j) \end{aligned} \quad (4.61)$$

gdzie

$$k_j^u = \bar{K}_1 M_j^P \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, D-1 \quad (4.62)$$

Uzyskany wzór dotyczy regulatora predykcyjnego DMC wyznaczonego analitycznie przy braku ograniczeń. Jego strukturę przedstawiono na rys. 4.9. Blok  $\frac{1}{1-z^{-1}}$  realizuje dyskretne całkowanie – sumowanie kolejnych przyrostów wektora sygnału sterującego. Umożliwia to przeliczenie przyrostów na odpowiadające im wartości bezwzględne sterowania.



Rys. 4.9. Ogólna struktura regulatora DMC w wersji analitycznej

W regulacji obiektów przemysłowych nie uwzględnia się zazwyczaj zmiany sygnału wartości zadanej na horyzoncie predykcji, to znaczy przyjmuje się

$$y^{zad}(k+1|k) = y^{zad}(k+2|k) = \dots = y^{zad}(k+N|k) = y^{zad}(k) \quad (4.63)$$

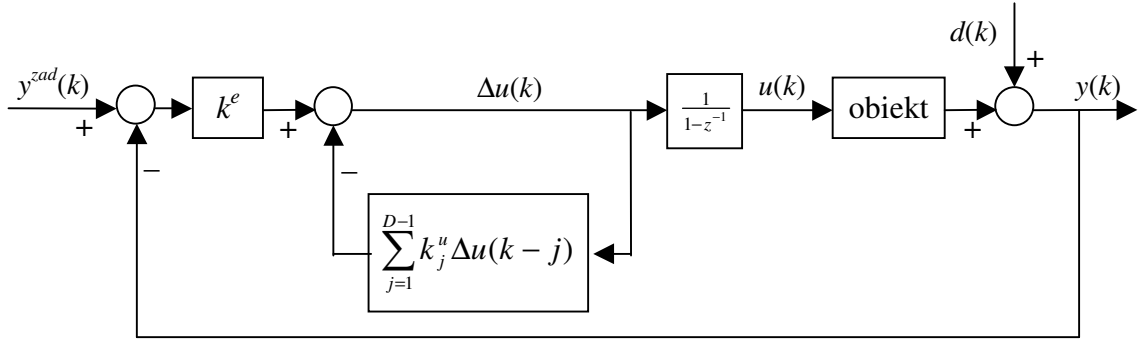
Prawo regulacji upraszcza się wówczas do postaci

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = \Delta u(k|k) &= \sum_{p=1}^N k_{1,p} (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^{D-1} k_j^u \Delta u(k-j) \\ &= k^e (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^{D-1} k_j^u \Delta u(k-j) \end{aligned} \quad (4.64)$$

gdzie

$$k^e = \sum_{p=1}^N k_{1,p} \quad (4.65)$$

Strukturę uzyskanego algorytmu przedstawiono na rys. 4.10.



Rys. 4.10. Struktura regulatora DMC w wersji analitycznej przy braku zmian trajektorii zadanej na horyzoncie predykcji

Prawo regulacji można zapisać w postaci

$$\Delta u(k) + \sum_{j=1}^{D-1} K_j^u z^{-j} \Delta u(k) = k^e e(k) \quad (4.66)$$

czyli

$$\Delta u(k) = \left( 1 + \sum_{j=1}^{D-1} K_j^u z^{-j} \right)^{-1} k^e e(k) \quad (4.67)$$

oraz

$$\frac{\Delta u(k)}{e(k)} = \frac{k^e}{1 + k_1^u z^{-1} + k_2^u z^{-2} + \dots + k_{D-1}^u z^{-(D-1)}} \quad (4.68)$$

### Zadanie

Przyjmując stałą na horyzoncie predykcji trajektorię zadaną, czyli

$$y^{zad}(k+1|k) = \dots = y^{zad}(k+4|k) = y^{zad}(k) \quad (4.69)$$

dla modelu (4.47) należy wyznaczyć prawo regulacji analitycznego algorytmu DMC.

### Rozwiązanie

Przyjmując oznaczenia

$$\mathbf{M}^P = \begin{bmatrix} M_1^P & M_2^P & M_3^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2 - s_1 & s_3 - s_2 & s_4 - s_3 \\ s_3 - s_1 & s_4 - s_2 & s_5 - s_3 \\ s_4 - s_1 & s_5 - s_2 & s_6 - s_3 \\ s_5 - s_1 & s_6 - s_2 & s_7 - s_3 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

oraz

$$\mathbf{K} = (\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{M} + \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

a także zakładając stałą na horyzoncie predykcji wartość zadaną, optymalny wektor przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania oblicza się ze wzoru

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_1 \\ \bar{K}_2 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k) \\ y(k) \\ y(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_1^P & M_2^P & M_3^P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(k-1) \\ \Delta u(k-2) \\ \Delta u(k-3) \end{bmatrix} \right) \quad (4.72)$$

Optymalny przyrost sygnału sterującego w chwili  $k$

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = \Delta u(k|k) &= \sum_{p=1}^4 k_{1,p} (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^3 (\bar{K}_1 M_j^P) \Delta u(k-j) \\ &= k^e (y^{zad}(k) - y(k)) - \sum_{j=1}^3 k_j^u \Delta u(k-j) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Dla  $\lambda=1$  wartości parametrów wynoszą

$$k^e = 0,6450, \quad k^u = [0,2231 \quad 0,0794 \quad 0,0243] \quad (4.74)$$

dla  $\lambda=5$  otrzymuje się

$$k^e = 0,3632, \quad k^u = [0,1356 \quad 0,0474 \quad 0,0137] \quad (4.75)$$

natomiast dla  $\lambda=10$  otrzymuje się

$$k^e = 0,2493, \quad k^u = [0,0943 \quad 0,0329 \quad 0,0094] \quad (4.76)$$

W programie symulacyjnym należy jednokrotnie wyznaczyć wartość współczynników analitycznego prawa regulacji  $k^e$ ,  $k^u$ . Wielkość  $\Delta u(k|k)$  oblicza się ze wzoru analitycznego. Oczywiście, zastosowanie analitycznego prawa regulacji pozwala ograniczyć nakład obliczeń, wyniki symulacji są takie same.

#### 4.2.4. Algorytm DMC w wersji analitycznej z rzutowaniem ograniczeń

W rzeczywistych układach regulacji zawsze istnieją ograniczenia sygnału sterującego wynikające z możliwości fizycznych elementów wykonawczych. Niekiedy również występują ograniczenia związane z sygnałem wyjściowym procesu. Są one zazwyczaj natury technologicznej (np. zanieczyszczenia produktu powinny być poniżej pewnej granicy).

Jeżeli ograniczenia sygnałów sterujących nie mogą być pominięte, natomiast ograniczenia sprzętowe powodują, że nie można wykorzystać bardziej złożonej obliczeniowo numerycznej wersji algorytmu DMC z optymalizacją, jedynym wyjściem jest rzutowanie (przycięcie) ograniczeń. W praktyce algorytm tego typu działa prawidłowo, szczególnie w przypadku procesu o jednym wejściu i jednym wyjściu. Rozpatruje się ograniczenie szybkości narastania aktualnie obliczanego sygnału sterującego

$$-\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k|k) \leq \Delta u^{\max} \quad (4.77)$$

oraz ograniczenie wartości

$$u^{\min} \leq u(k|k) \leq u^{\max} \quad (4.78)$$

Warto zwrócić uwagę, że powyższe ograniczenia dotyczą wyłącznie pierwszego elementu wektora zmiennych decyzyjnych  $\Delta u(k|k)$ . Procedura rzutowania obliczonego analitycznie przyrostu  $\Delta u(k|k)$  na zbiór rozwiązań dopuszczalnych jest następująca

$$\begin{aligned} &\text{jeżeli } \Delta u(k|k) < -\Delta u^{\max} \quad \Delta u(k|k) = -\Delta u^{\max} \\ &\text{jeżeli } \Delta u(k|k) > \Delta u^{\max} \quad \Delta u(k|k) = \Delta u^{\max} \\ &u(k|k) = \Delta u(k|k) + u(k-1) \\ &\text{jeżeli } u(k|k) < u^{\min} \quad u_n(k|k) = u^{\min} \\ &\text{jeżeli } u(k|k) > u^{\max} \quad u_n(k|k) = u^{\max} \\ &u(k) = u(k|k) \end{aligned} \quad (4.79)$$

#### 4.2.5. Algorytm DMC w wersji numerycznej (z ograniczeniami)

Przy liniowym modelu procesu (np. w postaci skończonej odpowiedzi skokowej) i braku ograniczeń problem optymalizacji, w wyniku którego wyznacza się optymalną wartość sygnału sterującego algorytmu regulacji predykcyjnej, jest zadaniem optymalizacji funkcji kwadratowej wypukłej. Można podać jego analityczne rozwiązanie, uzyskane prawo regulacji może być bardzo łatwo zaimplementowane przy wykorzystaniu prostego sterownika. Uwzględnienie liniowych ograniczeń powoduje, że w każdej iteracji algorytmu wektor zmiennych decyzyjnych należy wyznaczyć w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji kwadratowej. Dla zadań tego typu istnieją efektywne i niezawodne algorytmy optymalizacji (np. metoda ograniczeń aktywnych). Biorąc pod uwagę możliwości obliczeniowe współczesnego sprzętu, ich implementacja nie stanowi problemu.

W celu sformułowania zadania optymalizacji należy wszystkie ograniczenia przedstawić jako funkcje wektora zmiennych decyzyjnych  $\Delta U(k)$ . W przypadku ograniczeń szybkości narastania sygnału sterującego

$$-\Delta u^{\max} \leq \Delta u(k+p|k) \leq \Delta u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \quad (4.80)$$

definiując wektor o długości  $N_u$

$$\Delta U^{\max} = \begin{bmatrix} \Delta u^{\max} \\ \vdots \\ \Delta u^{\max} \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

istniejące ograniczenia można zapisać w postaci

$$-\Delta U^{\max} \leq \Delta U(k) \leq \Delta U^{\max} \quad (4.82)$$

W przypadku ograniczeń wartości sygnału sterującego

$$u^{\min} \leq u(k+p|k) \leq u^{\max} \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \quad (4.83)$$

definiując wektory o długościach  $N_u$

$$U^{\min} = \begin{bmatrix} u^{\min} \\ \vdots \\ u^{\min} \end{bmatrix}, \quad U^{\max} = \begin{bmatrix} u^{\max} \\ \vdots \\ u^{\max} \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

oraz uwzględniając, że

$$u(k+p|k) = u(k-1) + \sum_{j=0}^p \Delta u(k+j|k) \quad \text{dla } p=0, \dots, N_u-1 \quad (4.85)$$

istniejące ograniczenia można zapisać w postaci

$$U^{\min} \leq U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U(k) \leq U^{\max} \quad (4.86)$$

gdzie

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

jest macierzą o wymiarowości  $N_u \times N_u$ , natomiast  $U(k-1) = [u(k-1) \ \dots \ u(k-1)]^T$  jest wektorem o długości  $N_u$ .

Dla ograniczeń wartości sygnału sterującego

$$y^{\min} \leq \hat{y}(k+p|k) \leq y^{\max} \quad \text{dla } p=1, \dots, N \quad (4.88)$$

definiując wektory o długościach  $N$

$$Y^{\min} = \begin{bmatrix} y^{\min} \\ \vdots \\ y^{\min} \end{bmatrix}, \quad Y^{\max} = \begin{bmatrix} y^{\max} \\ \vdots \\ y^{\max} \end{bmatrix} \quad (4.89)$$

istniejące ograniczenia można zapisać w postaci

$$Y^{\min} \leq Y^0(k) + \mathbf{M}\Delta U(k) \leq Y^{\max} \quad (4.90)$$

Reasumując, w każdej iteracji algorytmu DMC w wersji numerycznej wektor zmiennych decyzyjnych  $\Delta U(k)$  obliczany jest w wyniku rozwiązania zadania optymalizacji

$$\min_{\Delta U(k)} \left\{ J(k) = \left\| (Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)) - \mathbf{M} \Delta U(k) \right\|_{\Psi}^2 + \left\| \Delta U(k) \right\|_{\Lambda}^2 \right\} \quad (4.91)$$

przy ograniczeniach

$$-\Delta U^{\max} \leq \Delta U(k) \leq \Delta U^{\max}$$

$$U^{\min} \leq U(k-1) + \mathbf{J}\Delta U(k) \leq U^{\max}$$

$$Y^{\min} \leq Y^0(k) + \mathbf{M}\Delta U(k) \leq Y^{\max}$$

Powyższy problem optymalizacji można łatwo zapisać w postaci standardowej, typowej



dla zadań programowania kwadratowego

$$\begin{aligned} \min_x \left\{ J(k) = \frac{1}{2} x^T \mathbf{H} x + f^T x \right\} \\ x^{\min} \leq x \leq x^{\max} \\ \mathbf{A}x \leq b \end{aligned} \quad (4.92)$$

gdzie

$$\begin{aligned} x &= \Delta U(k), \quad x^{\min} = -\Delta U^{\max}, \quad x^{\max} = \Delta U^{\max} \\ \mathbf{H} &= 2(\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} \mathbf{M} + \mathbf{A}) \\ f &= -2\mathbf{M}^T \boldsymbol{\Psi} (Y^{zad}(k) - Y(k) - \mathbf{M}^P \Delta U^P(k)) \end{aligned} \quad (4.93)$$

oraz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{J} \\ \mathbf{J} \\ -\mathbf{M} \\ \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -U^{\min} + U(k-1) \\ U^{\max} - U(k-1) \\ -Y^{\min} + Y^0(k) \\ Y^{\max} - Y^0(k) \end{bmatrix} \quad (4.94)$$

Zadanie programowanie kwadratowego można rozwiązać pod warunkiem, że zbiór dopuszczalny określony przez ograniczenia nie jest pusty (tzn. ograniczenia nie mogą być sprzeczne). Niebezpieczeństwo tego typu istnieje wówczas, gdy istnieją ograniczenia sygnału wyjściowego, ponieważ dowolne, ale niesprzeczne ograniczenia sygnału sterującego ograniczają co prawda zbiór dopuszczalny, ale go nie likwidują. W celu eliminacji zjawiska braku rozwiązań dopuszczalnych wprowadza się tzw. miękkie ograniczenia wyjścia [15].

### Zadanie

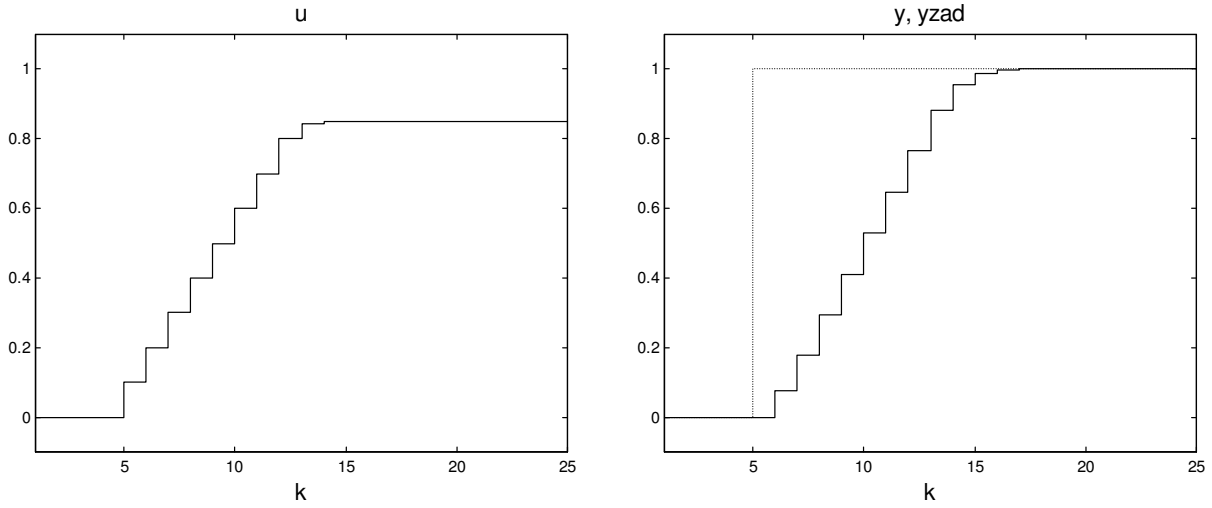
Niech dane będzie ograniczenie szybkości narastania sygnału sterującego  $\Delta u^{\max}=0,1$ . Aby spełnić to ograniczenie w algorytmie analitycznym należy zastosować dość dużą wartość parametru  $\lambda$ , prowadzi to niekorzystnego spowolnienia regulacji. Dla modelu (4.47) zaprojektowano więc algorytm w wersji numerycznej, przyjęto  $\lambda=1$ . Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 4.11.

### Zadanie

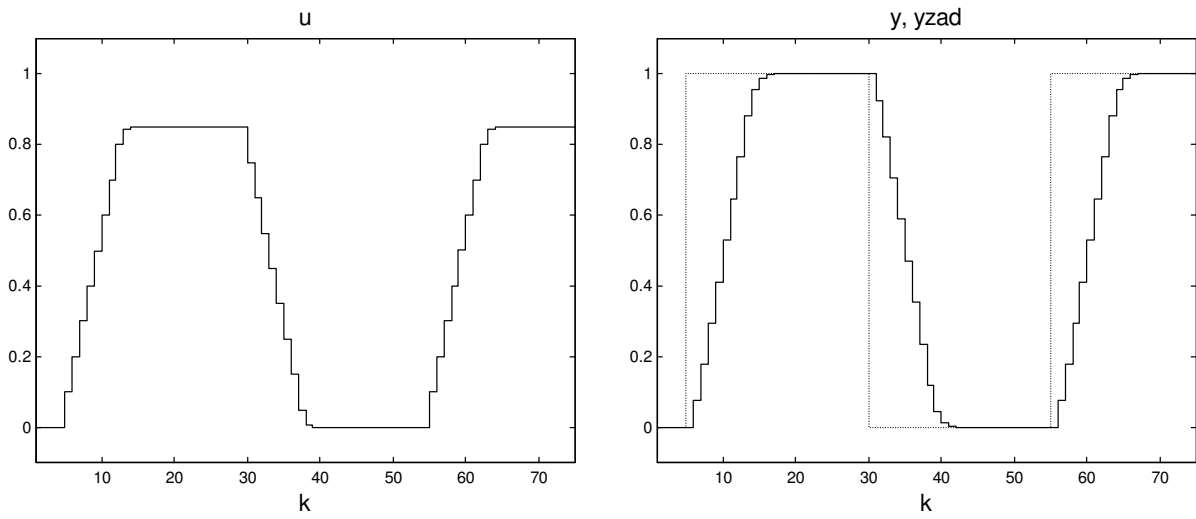
Dla modelu (4.47) przeprowadzić symulacje algorytmu DMC z ograniczeniem  $\Delta u^{\max}=0,1$  przy założeniu, że trajektoria zadana w postaci fali prostokątnej

- jest stała na horyzoncie predykcji,
- jest zmienna na horyzoncie predykcji.

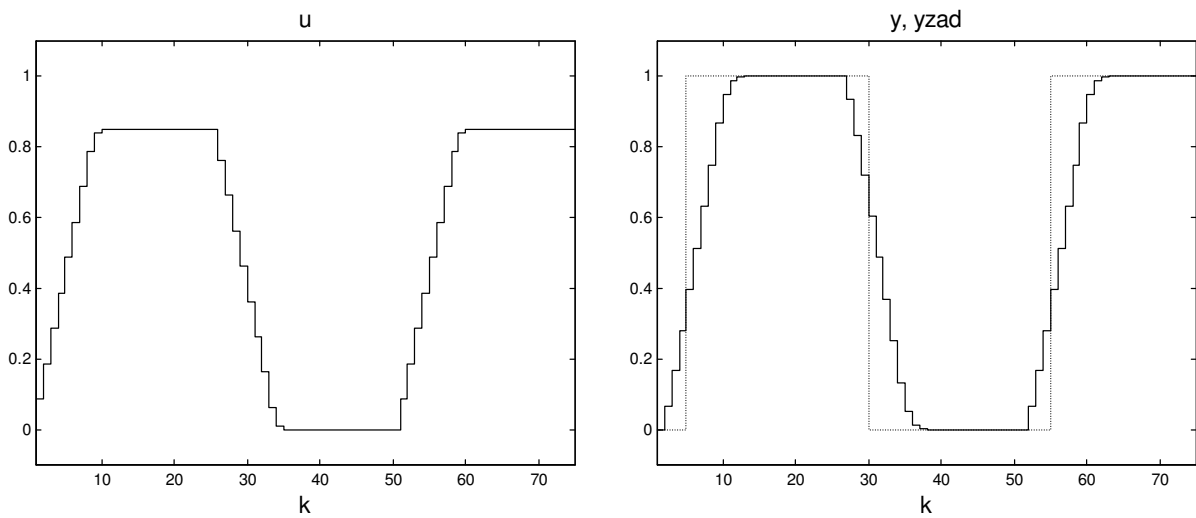
Wyniki symulacji przedstawiono na rys. 4.12 i rys. 4.13, przyjęto  $\lambda=1$ . W drugim przypadku algorytm z wyprzedzeniem podejmuje działanie.



Rys. 4.11. Wyniki symulacji algorytmu DMC z ograniczeniem  $\Delta u^{max}=0,1$ ,  $\lambda=1$



Rys. 4.12. Wyniki symulacji algorytmu DMC z ograniczeniem  $\Delta u^{max}=0,1$ ,  $\lambda=1$ , trajektoria zadana stała na horyzoncie predykcji



Rys. 4.13. Wyniki symulacji algorytmu DMC z ograniczeniem  $\Delta u^{max}=0,1$ ,  $\lambda=1$ , trajektoria zadana zmienna na horyzoncie predykcji

### 4.3. Algorytm GPC

Zasada regulacji predykcyjnej jest bardzo ogólna, nie narzuca rodzaju modelu procesu. Dlatego też opracowano wiele odmian algorytmów. Istniejące między nimi różnice są konsekwencją zastosowania różnych modeli. Stosowany w algorytmie DMC model w postaci odpowiedzi skokowej może być w bardzo prosty sposób wyznaczony, co ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Z drugiej jednak strony, algorytm DMC w wersji klasycznej nadaje się tylko do regulacji procesów stabilnych bez całkowania. Drugim bardzo popularnym rozwiązaniem jest algorytm GPC (ang. Generalized Predictive Control) [1], w którym wykorzystuje się model w postaci równania różnicowego (transmitancję dyskretną). Dzięki temu można opisać znacznie szerszą klasę procesów niż modelem odpowiedzi skokowej. Warto także zauważyć, że modele stosowane w algorytmie DMC mają zwykle kilkadziesiąt współczynników, podczas gdy odpowiadające im modele transmitancyjne jedynie kilka współczynników.

W algorytmie GPC model procesu o jednym wejściu i jednym wyjściu ma postać równania różnicowego

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k) \quad (4.95)$$

gdzie wielomiany  $A(z^{-1})$  i  $B(z^{-1})$  mają postać

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= (1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_A} z^{-n_A}) \\ B(z^{-1}) &= (b_1 z^{-1} + \dots + b_{n_B} z^{-n_B}) \end{aligned} \quad (4.96)$$

Przy czym  $n_A$  oraz  $n_B$  są liczbami naturalnymi określającymi stopień wielomianów. Wyjście modelu w chwili  $k$  oblicza się ze wzoru

$$\begin{aligned} y(k) &= b_1 u(k-1) + \dots + b_{n_B} u(k-n_B) - a_1 y(k-1) - \dots - a_{n_A} y(k-n_A) \\ &= \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i) \end{aligned} \quad (4.97)$$

W algorytmie GPC, każdej chwili  $k$  wyznacza się ciąg przyszłych przyrostów sygnału sterującego  $\Delta u(k|k)$ ,  $\Delta u(k+1|k)$ , ...,  $\Delta u(k+N_u-1|k)$  w wyniku minimalizacji wskaźnika jakości (4.27), czyli

$$\begin{aligned} J(k) &= \sum_{p=1}^N \varphi_p (y^{zad}(k+p|k) - \hat{y}(k+p|k))^2 + \sum_{p=0}^{N_u} \lambda_p (\Delta u(k+p|k))^2 \\ &= \|Y^{zad}(k) - \hat{Y}(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \end{aligned} \quad (4.98)$$

Warto zauważyć, że definicja funkcji kryterialnej, postać odpowiednich wektorów i macierzy w algorytmie GPC jest taka sama jak w algorytmie DMC. Jedyna różnica polega na zastosowaniu do predykcji, zamiast modelu odpowiedzi skokowej, modelu wejście-wyjście typu ARX. Konsekwencją tego faktu, co zostanie pokazane w dalszej części rozdziału, jest sposób obliczania trajektorii swobodnej.

#### 4.3.1. Zastosowanie równania różnicowego do predykcji

Podczas obliczania prognozowanej trajektorii sygnałów wyjściowych wykorzystuje się model matematyczny procesu. Ponieważ w praktyce nieuniknione są błędy modelowania oraz niedokładne pomiary sygnałów, możliwe jest również występowanie niemierzalnych zakłóceń, prognozowane trajektorie różnią się od rzeczywistych wartości sygnału wyjściowego

osiąganych przez proces w kolejnych iteracjach algorytmu. W algorytmie regulacji konieczny jest więc mechanizm kompensujący błędy i zakłócenia. Wszystkie wymienione zjawiska można potraktować łącznie, przyjmując mianowicie, że na proces działają pewne zastępcze zakłócenia. Ogólne równanie predykcji na horyzoncie predykcji ( $p = 1, \dots, N$ ) ma postać

$$\hat{y}(k+p|k) = y(k+p|k) + d(k+p|k) \quad (4.99)$$

gdzie wielkość  $y(k+p|k)$  jest obliczana na podstawie modelu procesu, natomiast  $d(k+p|k)$  jest prognozą niemierzalnego zakłócenia spowodowanego do wyjścia. W najprostszych przypadkach można założyć, że wartość tego zakłócenia nie ulega zmianie na horyzoncie predykcji, lub, co równoważne, że brak jest informacji o zmianach tego zakłócenia. Stosowany model zakłóceń, jest więc następujący

$$d(k+1|k) = d(k+2|k) = \dots = d(k+N|k) = d(k) \quad (4.100)$$

Powyższe równanie predykcji oraz model zakłóceń stosowane są w algorytmie DMC – wzory (4.16) i (4.18), dlatego też omawiany model zakłóceń jest określany terminem „typu DMC”. Zakłócenie działające na proces w chwili  $k$  równe jest różnicy między aktualnie mierzoną wartością sygnału wyjściowego  $y(k)$  a odpowiadającą mu wartością  $y(k|k-1)$  obliczoną na podstawie modelu przy wykorzystaniu pomiarów do chwili  $k-1$  włącznie

$$\begin{aligned} d(k) &= y(k) - y(k|k-1) \\ &= y(k) - \left( \sum_{i=1}^{n_B} b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i y(k-i) \right) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Uwzględniając model zakłóceń „typu DMC”, przewidywana trajektoria sygnału wyjściowego obliczana jest ze wzoru

$$\hat{y}(k+p|k) = y(k+p|k) + d(k) \quad (4.102)$$

Stosując ogólne równanie predykcji dla  $p=1$  otrzymuje się predykcję sygnału wyjściowego

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+1|k) &= b_1 u(k|k) + b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) + \dots + b_{n_B} u(k-n_B+1) \\ &\quad - a_1 y(k) - a_2 y(k-1) - a_3 y(k-2) - \dots - a_{n_A} y(k-n_A+1) + d(k) \end{aligned} \quad (4.103)$$

Dla  $p=2$  otrzymuje się predykcję

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+2|k) &= b_1 u(k+1|k) + b_2 u(k|k) + b_3 u(k-1) + \dots + b_{n_B} u(k-n_B+2) \\ &\quad - a_1 \hat{y}(k+1|k) - a_2 y(k) - a_3 y(k-1) - \dots - a_{n_A} y(k-n_A+2) + d(k) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Dla  $p=3$  otrzymuje się predykcję

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+3|k) &= b_1 u(k+2|k) + b_2 u(k+1|k) + b_3 u(k|k) + \dots + b_{n_B} u(k-n_B+3) \\ &\quad - a_1 \hat{y}(k+2|k) - a_2 \hat{y}(k+1|k) - a_3 y(k) - \dots - a_{n_A} y(k-n_A+3) + d(k) \end{aligned} \quad (4.105)$$

W analogiczny sposób wyznacza się predykcję sygnału wyjściowego dla kolejnych chwil horyzontu predykcji ( $p=4, \dots, N$ ). Można zauważyć, że sygnały prognozowane można przedstawić w zwięzły sposób jako funkcje przyszłych przyrostów sygnału sterującego (zmiennych decyzyjnych algorytmu), w poniższych wzorach celowo pominięto wpływ

przeszłości

$$\begin{aligned}
 \hat{y}(k+1|k) &= s_1 \Delta u(k|k) + \dots \\
 \hat{y}(k+2|k) &= s_2 \Delta u(k|k) + s_1 \Delta u(k+1|k) + \dots \\
 \hat{y}(k+3|k) &= s_3 \Delta u(k|k) + s_2 \Delta u(k+1|k) + s_1 \Delta u(k+2|k) + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{4.106}$$

gdzie współczynniki odpowiedzi skokowej oblicza się ze wzoru rekurencyjnego (tzn. dla  $j = 1, \dots, N$ ) na podstawie współczynników modelu (4.97)

$$s_j = \sum_{i=1}^{\min(j, n_B)} b_i - \sum_{i=1}^{\min(j-1, n_A)} a_i s_{j-i} \tag{4.107}$$

Analogicznie jak w przypadku algorytmu DMC, można zauważyć, że występująca w optymalizowanym wskaźniku jakości trajektoria prognozowana  $\hat{Y}(k)$  jest sumą zależącej od przyszłości trajektorii wymuszonej oraz składowej swobodnej, która zależy wyłącznie od przeszłości

$$\hat{Y}(k) = \mathbf{M} \Delta U(k) + Y^0(k) \tag{4.108}$$

Macierz dynamiczna  $\mathbf{M}$  o wymiarowości  $N \times N_u$  ma strukturę taką samą jak w algorytmie DMC

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_N & s_{N-1} & \dots & s_{N-N_u+1} \end{bmatrix} \tag{4.109}$$

W algorytmie GPC inaczej niż w algorytmie DMC liczy się trajektorię swobodną. W oryginalnym algorytmie przedstawionym w pracy [1] stosuje się tzw. równanie diofantyczne, w metodzie omówionej poniżej zastosowano model zakłóceń typu DMC. Do wyznaczenia elementów trajektorii swobodnej można wykorzystać prostą metodę rekurencyjną. Zostanie to wyjaśnione na przykładzie.

### Zadanie

Dany jest model procesu dynamicznego

$$y(k) = b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) \tag{4.110}$$

gdzie  $b_2=0,1$ ,  $b_3=0,2$ ,  $a_1=0,05$ ,  $a_2=0,15$ . Obliczyć rekurencyjnie odpowiedź skokową. Dla aktualnej chwili  $k$  obliczyć w sposób rekurencyjny trajektorię swobodną, przyjmując horyzont predykcji  $N=4$ ,  $u(k-1)=1,6045$ ,  $u(k-2)=0,9122$ ,  $u(k-3)=0$ ,  $y(k)=0,0912$ ,  $y(k-1)=y(k-2)=0$ .

### Rozwiązanie

W modelu występuje jednostkowe opóźnienie, ponieważ współczynnik  $b_1=0$ ,  $n_A=2$ ,  $n_B=3$ . Współczynniki odpowiedzi skokowej oblicza się ze wzoru rekurencyjnego

$$s_j = \sum_{i=1}^{\min(j,3)} b_i - \sum_{i=1}^{\min(j-1,2)} a_i s_{j-i} \tag{4.111}$$

Mają one wartość

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1 = 0 \\ s_2 &= b_1 + b_2 - a_1 s_1 = 0,1 \\ s_3 &= b_1 + b_2 + b_3 - a_1 s_2 - a_2 s_1 = 0,295 \\ s_4 &= b_1 + b_2 + b_3 - a_1 s_3 - a_2 s_2 = 0,2703 \end{aligned} \quad (4.112)$$

Aby wyznaczyć trajektorię swobodną  $y^0(k+p|k)$  dla  $p=1,2,3,4$  korzysta się z ogólnego równania predykcji (4.102)

$$\hat{y}(k+p|k) = y(k+p|k) + d(k) \quad (4.113)$$

oraz z warunków

$$\begin{aligned} u(k+p|k) &:= u(k-1) & \text{dla } p \geq 0 \\ \hat{y}(k+p|k) &:= y^0(k+p|k) & \text{dla } p \geq 1 \end{aligned} \quad (4.114)$$

dzięki czemu trajektoria swobodna zależy tylko od przeszłości. Wartość niemierzalnego zakłócenia działającego na proces w chwili  $k$  ma wartość

$$\begin{aligned} d(k) &= y(k) - y(k|k-1) \\ &= y(k) - (b_2 u(k-2) + b_3 u(k-3) - a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2)) \\ &= -2 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \quad (4.115)$$

Dla  $p=1$  z modelu otrzymuje się

$$y(k+1|k) = b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) - a_1 y(k) - a_2 y(k-1) \quad (4.116)$$

czyli

$$\begin{aligned} y^0(k+1|k) &= y(k+1|k) + d(k) \\ &= b_2 u(k-1) + b_3 u(k-2) - a_1 y(k) - a_2 y(k-1) + d(k) \\ &= 0,3383 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Dla  $p=2$  z modelu otrzymuje się

$$y(k+2|k) = b_2 u(k|k) + b_3 u(k-1) - a_1 \hat{y}(k+1|k) - a_2 y(k) \quad (4.118)$$

ale dla trajektorii swobodnej  $u(k|k) := u(k-1)$  i  $\hat{y}(k+1|k) := y^0(k+1|k)$ , czyli

$$\begin{aligned} y^0(k+2|k) &= y(k+2|k) + d(k) \\ &= b_2 u(k-1) + b_3 u(k-1) - a_1 y^0(k+1|k) - a_2 y(k) + d(k) \\ &= 0,4507 \end{aligned} \quad (4.119)$$

Dla  $p=3$  z modelu otrzymuje się

$$y(k+3|k) = b_2 u(k+1|k) + b_3 u(k|k) - a_1 \hat{y}(k+2|k) - a_2 \hat{y}(k+1|k) \quad (4.120)$$

ale dla trajektorii swobodnej  $u(k+1|k) := u(k-1)$ ,  $u(k|k) := u(k-1)$ ,  $\hat{y}(k+2|k) := y^0(k+2|k)$  i  $\hat{y}(k+1|k) := y^0(k+1|k)$ ,

czyli

$$\begin{aligned} y^0(k+3|k) &= y(k+3|k) + d(k) \\ &= b_2 u(k-1) + b_3 u(k-1) - a_1 y^0(k+2|k) - a_2 y^0(k+1|k) + d(k) \quad (4.121) \\ &= 0,4080 \end{aligned}$$

Dla  $p=4$  z modelu otrzymuje się

$$y(k+4|k) = b_2 u(k+2|k) + b_3 u(k+1|k) - a_1 \hat{y}(k+3|k) - a_2 \hat{y}(k+2|k) \quad (4.122)$$

ale dla trajektorii swobodnej  $u(k+2|k) := u(k-1)$ ,  $u(k+1|k) := u(k-1)$ ,  $\hat{y}(k+3|k) := y^0(k+3|k)$  i  $\hat{y}(k+2|k) := y^0(k+2|k)$ , czyli

$$\begin{aligned} y^0(k+4|k) &= y(k+4|k) + d(k) \\ &= b_2 u(k-1) + b_3 u(k-1) - a_1 y^0(k+3|k) - a_2 y^0(k+2|k) + d(k) \quad (4.123) \\ &= 0,3933 \end{aligned}$$

Reasumując, trajektoria swobodna jest następująca

$$Y^0(k) = \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ y^0(k+4|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3383 \\ 0,4507 \\ 0,4080 \\ 0,3933 \end{bmatrix} \quad (4.124)$$

Przy wykorzystaniu modelu zakłóceń „typu DMC”, przewidywane wartości sygnałów wyjściowych  $\hat{y}(k+p|k)$  są sumą sygnałów  $y(k+p|k)$  obliczonych na podstawie modelu oraz zakłóceń  $d(k)$  działających na proces w chwili  $k$ . Wyjście modelu procesu dla dowolnej chwili  $k+p$ , gdzie  $p=1, \dots, N$ , można przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} y(k+p|k) &= \sum_{i=1}^{N_{un}(p)} b_i u(k-i+p|k) + \sum_{i=N_{un}(p)+1}^{n_B} b_i u(k-i+p) + \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_{\hat{y}}(p)} a_i \hat{y}(k-i+p|k) - \sum_{i=N_{\hat{y}}(p)+1}^{n_A} a_i y(k-i+p) \end{aligned} \quad (4.125)$$

W powyższym równaniu pojawiają się zarówno przyszłe wartości sygnałów sterujących odpowiadające zmiennym decyzyjnym algorytmu, sygnały obliczone i wykorzystane do sterowania w poprzednich iteracjach, prognozowane wartości sygnałów wyjściowych oraz zmierzone w przeszłości sygnały wyjściowe. Symbol  $N_{un}(p)$  oznacza liczbę sygnałów sterujących od chwili  $k$  włącznie, natomiast  $N_{\hat{y}}(p)$  jest liczbą sygnałów wyjściowych od chwili  $k+1$  włącznie przy predykcji dla chwili  $k+p$

$$N_{un}(p) = \min(p, n_B), \quad N_{\hat{y}}(p) = \min(p-1, n_A) \quad (4.126)$$

Prognozowana trajektoria sygnałów wyjściowych, na podstawie ogólnego równania predykcji (4.102), jest równa

$$\begin{aligned} \hat{y}(k+p|k) = & \sum_{i=1}^{N_{un}(p)} b_i u(k-i+p|k) + \sum_{i=N_{un}(p)+1}^{n_B} b_i u(k-i+p) + \\ & - \sum_{i=1}^{N_{\hat{y}}(p)} a_i \hat{y}(k-i+p|k) - \sum_{i=N_{\hat{y}}(p)+1}^{n_A} a_i y(k-i+p) + d(k) \end{aligned} \quad (4.127)$$

Składową swobodną  $y^0(k+p|k)$  oblicza się na podstawie predykcji wyjścia danego powyższym wzorem przy założeniu, że od chwili  $k$  wartość sterowania nie zmienia się, a także, że prognozowane sygnały wyjściowe od chwili  $k+1$  zostają zastąpione przez odpowiadające im sygnały odpowiedzi swobodnej

$$\begin{aligned} u(k+p|k) &:= u(k-1) & \text{dla } p \geq 0 \\ \hat{y}(k+p|k) &:= y^0(k+p|k) & \text{dla } p \geq 1 \end{aligned} \quad (4.128)$$

Uwzględniając powyższy wzór oraz warunki, trajektoria swobodna wyraża się zależnością

$$\begin{aligned} y^0(k+p|k) = & \sum_{i=1}^{N_{un}(p)} b_i u(k-1) + \sum_{i=N_{un}(p)+1}^{n_B} b_i u(k-i+p) + \\ & - \sum_{i=1}^{N_{\hat{y}}(p)} a_i y^0(k-i+p|k) - \sum_{i=N_{\hat{y}}(p)+1}^{n_A} a_i y(k-i+p) + d(k) \end{aligned} \quad (4.129)$$

Powyższy wzór pozwala obliczać odpowiedź swobodną w każdej iteracji w sposób rekurencyjny.

Istnieje nieco inny sposób obliczania trajektorii swobodnej. Można wykazać, że trajektoria swobodna opisana jest zależnością analityczną (bez potrzeby obliczeń rekurencyjnych) [8]

$$y^0(k+p|k) = \sum_{j=1}^{n_B} e_j(p) u(k-j) + \sum_{j=0}^{n_A} f_j(p) y(k-j) \quad (4.130)$$

gdzie dla  $p=1, \dots, N$

$$e_j^{m,n}(p) = \begin{cases} 0 & \text{dla } j=1, n_B=1 \\ g_j(p) & \text{dla } j=1, n_B>1 \\ g_j(p) - g_{j-1}(p) & \text{dla } j=2, \dots, n_B-1, j < n_B, n_B>1 \\ -g_{j-1}(p) & \text{dla } j=n_B, n_B>1 \end{cases} \quad (4.131)$$

Dla  $p=1$

$$f_j(1) = \begin{cases} 1-a_1 & \text{dla } j=0 \\ a_j - a_{j+1} & \text{dla } j=1, \dots, n_A-1 \\ a_j & \text{dla } j=n_A \end{cases} \quad (4.132)$$

natomiast dla  $p=2, \dots, N$

$$f_j(p) = \begin{cases} f_0(p-1)f_j(1) + f_{j+1}(p-1) & \text{dla } j=0, \dots, n_A-1 \\ f_0(p-1)f_j(1) & \text{dla } j=n_A \end{cases} \quad (4.133)$$



Dla  $p = 1$

$$g_i(1) = b_{i+1} \quad \text{dla} \quad j = 0, \dots, n_B - 1 \quad (4.134)$$

natomiast dla  $p = 2, \dots, N$

$$g_j(p) = \begin{cases} g_{j+1}(p-1) & \text{dla} \quad j = 1-p, \dots, -1 \\ f_0(p-1)g_j(1) + g_{j+1}(p-1) & \text{dla} \quad j = 0, \dots, n_B - 2 \\ f_0(p-1)g_j(1) & \text{dla} \quad j = n_B - 1 \end{cases} \quad (4.135)$$

Reasumując, przedstawiono trzy metody obliczenia trajektorii swobodnej w algorytmie GPC:

- Dla konkretnego przypadku rozważono ogólne równanie predykcji i prostą metodę rekurencyjną, trajektoria swobodna liczona jest ze wzorów (4.117), (4.119), (4.121), (4.123).
- W przypadku ogólnym można zastosować wzór rekurencyjny (4.129).
- Można zastosować analityczną postać trajektorii swobodnej (4.130).

#### 4.3.2. Algorytm GPC w wersji analitycznej (bez ograniczeń)

Uwzględniając, że trajektoria swobodna jest sumą składowej wymuszonej oraz swobodnej, funkcja kryterialna przybiera postać

$$\begin{aligned} J(k) &= \|Y^{zad}(k) - \hat{Y}(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \\ &= \|Y^{zad}(k) - Y^0(k) - M\Delta U(k)\|_{\Psi}^2 + \|\Delta U(k)\|_{\Lambda}^2 \end{aligned} \quad (4.136)$$

Zakłada się, że  $\varphi_p \geq 0$  i  $\lambda_p > 0$ , czyli  $\Psi \geq 0$  i  $\Lambda > 0$ . Oznacza to, że funkcja kryterialna  $J(k)$  jest ściśle wypukła. Przyrównując do zera wektor gradientu

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \Delta U(k)} = -2M^T \Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k) - M\Delta U(k)) + 2\Lambda \Delta U(k) = 0 \quad (4.137)$$

otrzymuje się wektor optymalnych przyrostów sterowania

$$\begin{aligned} \Delta U(k) &= (M^T \Psi M + \Lambda)^{-1} M^T \Psi (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \\ &= K (Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \end{aligned} \quad (4.138)$$

gdzie

$$K = (M^T \Psi M + \Lambda)^{-1} M^T \Psi \quad (4.139)$$

jest macierzą o wymiarowości  $N_u \times N$ . Macierz  $K$  wyznaczana jest jednokrotnie w trakcie projektowania algorytmu (ang. off-line). Hesjan funkcji kryterialnej jest równy

$$\frac{\partial^2 J(k)}{\partial \Delta U^2(k)} = 2(M^T \Psi M + \Lambda) \quad (4.140)$$

Ponieważ  $\Psi \geq 0$ ,  $\Lambda > 0$  macierz drugich pochodnych jest dodatnio określona, a więc uzyskane rozwiązanie problemu optymalizacji bez ograniczeń jest rzeczywiście minimum globalnym funkcji kryterialnej  $J(k)$ .

Warto zwrócić uwagę, że zależności otrzymane dla algorytmu GPC są takie same jak wzory stosowane w przypadku algorytmu DMC. Jediną różnicą jest inny model procesu, czego skutkiem jest inny sposób wyznaczenia składowej swobodnej prognozowanej trajektorii wyjścia.

### Zadanie

Dla modelu (4.110) i wyznaczonej w sposób rekurencyjny trajektorii swobodnej (4.124) należy obliczyć sterowanie dla aktualnej chwili  $k$ , przyjmując  $N=4$ ,  $N_u=2$ ,  $\Psi=I$ ,  $\Lambda=\lambda I$ ,  $\lambda=0,5$ ,  $u(k-1)=1,6045$ ,  $u(k-2)=0,9122$ ,  $u(k-3)=0$ ,  $y(k)=0,0912$ ,  $y(k-1)=y(k-2)=0$ . Założyć, że trajektoria zadana jest stała na horyzoncie predykcji,  $y^{zad}(k)=1$ .

### Rozwiązanie

Dla współczynników odpowiedzi skokowej  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = 0,1$ ,  $s_3 = 0,295$ ,  $s_4 = 0,2703$  macierz dynamiczna  $M$  o wymiarowości  $4 \times 2$  ma strukturę

$$M = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ s_2 & s_1 \\ s_3 & s_2 \\ s_4 & s_3 \end{bmatrix} \quad (4.141)$$

Wektor optymalnych przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania

$$\Delta U(k) = K(Y^{zad}(k) - Y^0(k)) \quad (4.142)$$

gdzie

$$K = (M^T \Psi M + \Lambda)^{-1} M^T \Psi = (M^T M + \lambda M)^{-1} M^T \quad (4.143)$$

Podstawiając dane otrzymuje się

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0,1538 & 0,4256 & 0,3327 \\ 0 & -0,0281 & 0,0896 & 0,4333 \end{bmatrix} \quad (4.144)$$

Zakładając, że trajektoria zadana jest stała na horyzoncie predykcji, wektor optymalnych przyrostów sygnału sterującego na horyzoncie sterowania oblicza się ze wzoru

$$\Delta U(k) = \begin{bmatrix} \Delta u(k|k) \\ \Delta u(k+1|k) \end{bmatrix} = K \left( \begin{bmatrix} y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \\ y^{zad}(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y^0(k+1|k) \\ y^0(k+2|k) \\ y^0(k+3|k) \\ y^0(k+4|k) \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0,5384 \\ 0,3004 \end{bmatrix} \quad (4.145)$$

Sterowanie dla aktualnej chwili  $k$  ma więc wartość

$$u(k) = u(k|k) = \Delta u(k|k) + u(k-1) = 2,1428 \quad (4.146)$$

### 4.3.3. Analityczna postać prawa regulacji GPC

Analogicznie jak w przypadku algorytmu DMC, również w algorytmie GPC można wyznaczyć analityczne prawo regulacji, oczywiście wyłącznie przy braku ograniczeń [8].

Korzystając ze wzoru (4.138), wartość sygnału sterującego w aktualnej iteracji ma wartość

$$\Delta u(k) = \Delta u(k|k) = \sum_{p=1}^N k_{1,p} (y^{zad}(k+p|k) - y^0(k+p|k)) \quad (4.147)$$

Korzystając z analitycznej postaci odpowiedzi swobodnej (4.130), otrzymuje się

$$\Delta u(k|k) = \sum_{p=1}^N k_{1,p} y^{zad}(k+p|k) - \sum_{p=1}^N k_{1,p} \sum_{j=1}^{n_B} e_j(p) u(k-j) - \sum_{p=1}^N k_{1,p} \sum_{j=0}^{n_A} f_j(p) y(k-j) \quad (4.148)$$

Prawo regulacji można przedstawić jako funkcję poprzednich wartości sygnałów wejściowych i wyjściowych oraz trajektorii wartości zadanej

$$\Delta u(k) = \sum_{p=1}^N k_{1,p} y^{zad}(k+p|k) - \sum_{j=1}^{n_B} k_j^u u(k-j) - \sum_{j=0}^{n_A} k_j^y y(k-j) \quad (4.149)$$

gdzie

$$k_j^u = \sum_{p=1}^N k_{1,p} e_j(p), \quad k_j^y = \sum_{p=1}^N k_{1,p} f_j(p) \quad (4.150)$$

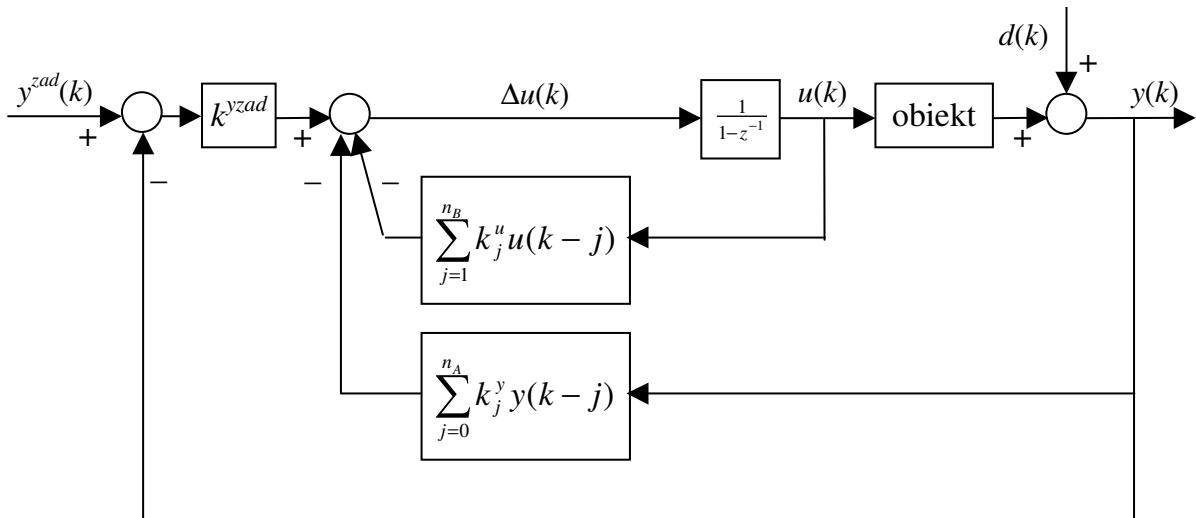
Jeżeli trajektoria zadana jest stała na całym horyzoncie predykcji, czyli  $y^{zad}(k+1|k) = \dots = y^{zad}(k+N|k) = y^{zad}(k)$

$$\Delta u(k|k) = k^{yzad} y^{zad}(k) - \sum_{j=1}^{n_B} k_j^u u(k-j) - \sum_{j=0}^{n_A} k_j^y y(k-j) \quad (4.151)$$

gdzie

$$k^{yzad} = \sum_{p=1}^N k_{1,p} \quad (4.152)$$

Wynikła ze wzoru (4.151) struktura algorytmu GPC w wersji analitycznej przy braku zmian trajektorii zadanej na horyzoncie predykcji została pokazana na rys. 4.14.



Rys. 4.14. Struktura regulatora GPC w wersji analitycznej przy braku zmian trajektorii zadanej na horyzoncie predykcji

Warto przypomnieć, że analityczne prawo regulacji (4.61) lub (4.64) algorytmu DMC, jest funkcją wartości (lub trajektorii) zadanej, aktualnej wartości wyjścia i poprzednich wartości wyjść. W algorytmie GPC istnieją dodatkowe zależności od wartości sygnału wyjściowego w poprzednich iteracjach (ostatnia suma we wzorach (4.149) i (4.151)). Jest to konsekwencją zastosowania innych modeli w tych dwóch algorytmach. Stosowany w algorytmie DMC model odpowiedzi skokowej zależy wyłącznie od wejść (wartości sygnałów wejściowych), natomiast stosowane w algorytmie GPC równanie różnicowe jest funkcją zarówno wejść jak i wyjść w poprzednich iteracjach.

#### **4.3.4. Algorytm GPC z ograniczeniami**

Ze względów praktycznych algorytm GPC jest najczęściej stosowany w wersji z ograniczeniami. Analogicznie jak w algorytmie DMC, istnieją dwie metody uwzględnienia ograniczeń. W najprostszym przypadku można zastosować najprostszy algorytm bez ograniczeń i rzutować uzyskane rozwiązanie na zbiór rozwiązań dopuszczalnych. Gdy dostępny sterownik ma większe możliwości obliczeniowe można zastosować algorytm GPC uwzględniający ograniczenia w sposób dokładny – są one częścią zadania optymalizacji kwadratowej. Rozwiązywane jest zadanie optymalizacji kwadratowej (4.91) (to samo co w algorytmie DMC), jedyną różnicą, spowodowaną zastosowaniem innego modelu, jest odmienny sposób obliczania trajektorii swobodnej.



## 5. Nieliniowa regulacja rozmyta

Podejściem klasycznym, najczęściej stosowanym w trakcie projektowania układu regulacji, jest wyznaczenie modelu liniowego w otoczeniu punktu pracy, a następnie, dla tego modelu, dobór nastaw regulatora PID lub zaprojektowanie innego regulatora liniowego, np. predykcyjnego typu DMC lub GPC. Postępowanie takie jest właściwe dla bardzo szerokiej klasy procesów, szczególnie wówczas, gdy nieliniowości obiektu nie są znaczne, natomiast zmiany punktu pracy stosunkowo niewielkie. Ponieważ właściwości rzeczywistych procesów są nieliniowe (np. współczynnik wzmocnienia statycznego zmienia się przy zmiany punktu pracy, podobnie jak stałe czasowe) projektowane regulatory powinny być odporne, a więc powinny działać stabilnie przy zmianach parametrów obiektu.

Można wymienić co najmniej dwa czynniki, dla których można zaobserwować wzrost zainteresowania nieliniowymi układami regulacji. Po pierwsze, istnieje wiele procesów o właściwościach silnie nieliniowych. Zastosowanie odpornego algorytmu liniowego zazwyczaj jest możliwe, lecz uzyskana jakość regulacji (czas regulacji, przeregulowanie) jest niewystarczająca z technologicznego punktu widzenia. Po drugie, zastosowanie bieżącej optymalizacji zwiększa wymagania stawiane warstwie regulacji. Konieczne stają się szybkie i częste zmiany punktu pracy, często są to zmiany duże. Dzięki rozwojowi elektroniki można zastosować sterowniki mikroprocesorowe, które umożliwiają implementację złożonych algorytmów regulacji, tzw. algorytmów zaawansowanych (ang. advanced control techniques), a więc bardziej złożonych niż klasyczne algorytmy PID.

Istotą regulacji nieliniowej jest projektowanie nieliniowego regulatora dla nieliniowego modelu procesu. Istnieje wiele klas regulatorów nieliniowych, na szczególną uwagę zasługuje podejście wykorzystujące nieliniowe modele rozmyte (ang. fuzzy) i regulatory rozmyte. Modele rozmyte, szczególnie o strukturze Takagi-Sugeno, bardzo dobrze nadają się do aproksymacji silnie nieliniowych funkcji statycznych i dynamicznych, a więc także nieliniowych obiektów regulacji. Ogromną zaletą regulatorów rozmytych, zwanych również obszarowymi, jest wykorzystanie dobrze znanych i skutecznych algorytmów liniowych (PID, ze sprzężeniem od stanu, predykcyjnych) w strukturze obszarowej. Powstałe algorytmy regulacji są bardzo chętnie wykorzystywane w praktyce. Zapewniają one skuteczną regulację nieliniowych procesów przy dużych zmianach punktu pracy, natomiast ich projektowanie i implementacja są stosunkowo proste.

### 5.1. Systemy rozmyte typu Takagi-Sugeno

#### 5.1.1. Zbiory rozmyte i zmienne lingwistyczne

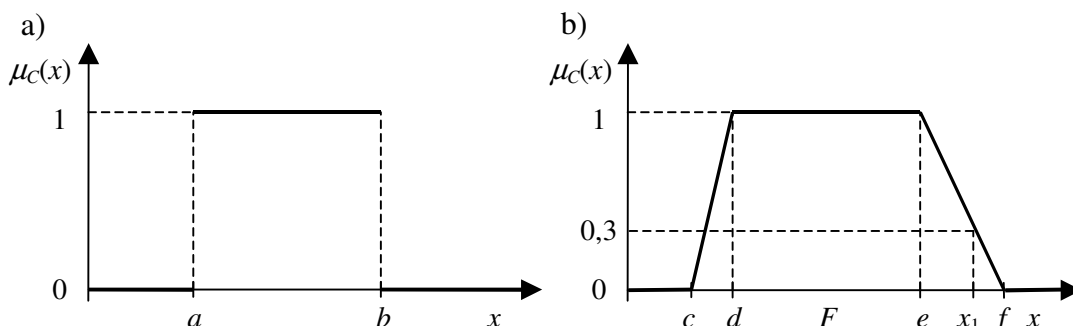
Na rys. 5.1 pokazano funkcję przynależności zbioru klasycznego (tzn. ostrego)  $C$  oraz funkcję przynależności zbioru rozmytego  $F$ . Dla zbioru klasycznego każdy z elementów osi liczbowej należy do zbioru  $C$  lub nie, funkcja przynależności  $\mu_C(x)$  zbioru  $C$  może przyjmować jedynie wartości 0 lub 1

$$\mu_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } x \in C \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin C \end{cases} \quad (5.1)$$

Natomiast funkcja przynależności  $\mu_F(x)$  zbioru rozmytego  $F$  może przyjmować każdą z wartości między 0 a 1

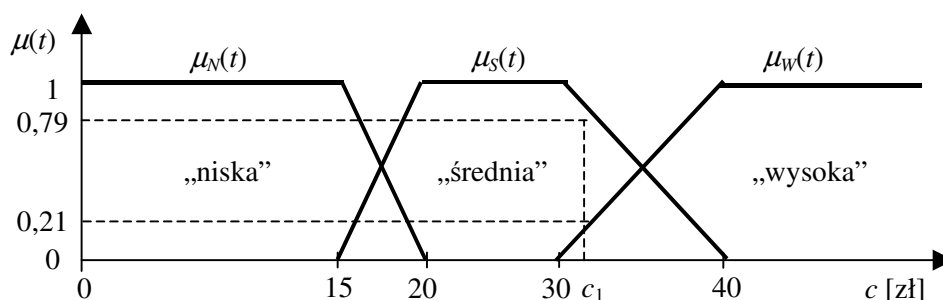
$$\mu_F(x) = \begin{cases} \in (0,1] & \text{jeżeli } x \in F \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin F \end{cases} \quad (5.2)$$

Zastosowana funkcja przynależności ma kształt trapezowy. Każdy z punktów odcinka  $[d, e]$  należy w pełni do zbioru  $F$ , tzn. z funkcją przynależności równą 1, podobnie jak każdy z punktów odcinka  $[a, b]$  należy do ostrego zbioru  $C$ . Punkty odcinków  $(c, d)$  i  $(e, f)$  „nie w pełni” należą do zbioru  $F$ , ponieważ odpowiadające im wartości funkcji przynależności są zawarte w przedziale  $(0, 1)$ . W tym sensie granice zbioru  $F$  są rozmyte, dlatego też stosuje się termin „zbiór rozmyty”. Przykładowo, punkt  $x_1$  należy do zbioru  $F$  z wartością funkcji przynależności 0,3, inaczej ze stopniem przynależności 0,3 (ang. degree of membership).



Rys. 5.1. Funkcje przynależności: a) zbioru ostrego  $C$ , b) zbioru rozmytego  $F$

Zdefiniowanie zbioru rozmytego pozwala wprowadzić pojęcie *zmiennej lingwistycznej* (ang. linguistic variable). Zmienna lingwistyczna, zwana też rozmytą, jest pośrednią między zmienną numeryczną a zmienną symboliczną, której wartości są symbolami. Pojęcie to zilustrowano na rys. 5.2, zmienna lingwistyczna „cena” (cena obiadu) przyjmuje wartości „niska”, „średnia” i „wysoka”. Dla każdego ze zbiorów zdefiniowano odpowiednie funkcje przynależności  $\mu_N(x)$ ,  $\mu_S(x)$  i  $\mu_W(x)$ . Przykładowo, cena  $c_1$  jest „średnia” ze stopniem przynależności 0,79 i jednocześnie „wysoka” ze stopniem przynależności 0,21. Zmienne lingwistyczne (rozmyte) pozwalają opisywać zjawiska nieprecyzyjnie zdefiniowane znacznie lepiej niż klasyczne zmienne numeryczne (ostre). Na przykład, przedstawione na rys. 5.2 określenie zmiennej rozmytej „cena” może odzwierciedlać odczucia danej grupy znajomych lub rodziny.



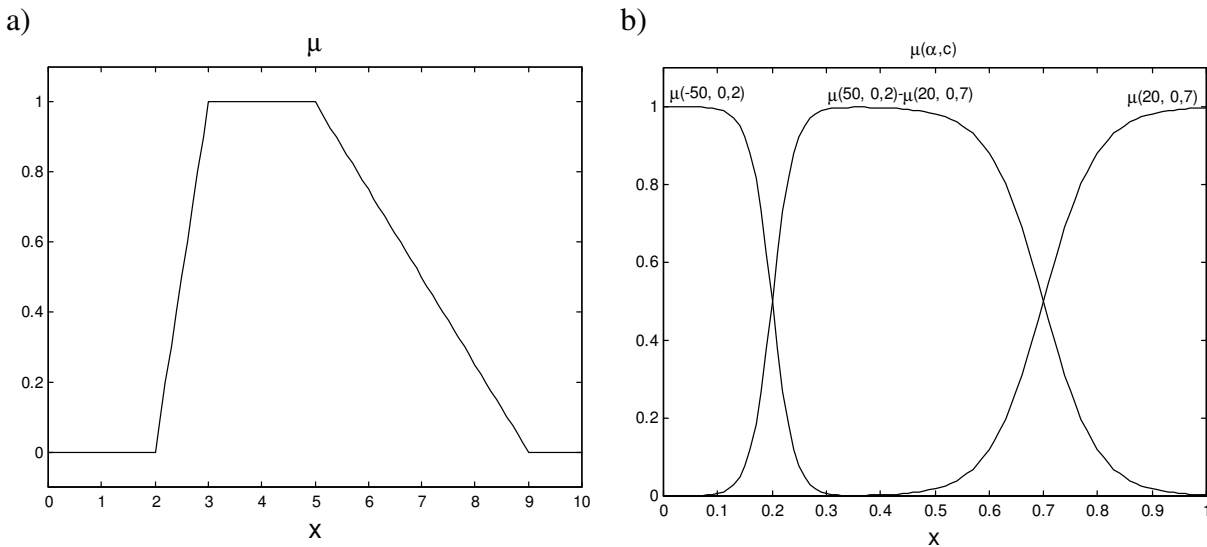
Rys. 5.2. Ilustracja zmiennej lingwistycznej „cena” przyjmującej trzy wartości: „niska”, „średnia”, „wysoka”

Dla konkretnej numerycznej wartości zmiennej proces określania jej wartości lingwistycznej łącznie z odpowiednią wartości funkcji przynależności nazywany jest procesem rozmywania (ang. fuzzification). W powyższym przykładzie zmienna lingwistyczna „cena” przyjmuje trzy wartości, natomiast wartości numerycznej  $c_1$  zmiennej „cena” w procesie rozmywania zostają przyporządkowane wartości lingwistyczne „średnia” i „wysoka” z odpowiednimi wartościami funkcji przynależności. Wartość lingwistyczna definiowana jest przez funkcję przynależności do tej wartości, tzn. tożsama jest z definiowanym przez funkcję przynależności zbiorem rozmytym.

Najprostsze funkcje przynależności mają kształt trapezowy lub trójkątny. Trapezowa funkcja przynależności opisana jest wzorem

$$\mu_x(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{dla } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{dla } c \leq x \leq d \\ 0 & \text{dla } d \leq x \end{cases} \quad (5.3)$$

Choć jest ona dość często stosowana w praktyce, jej wadą jest nieróżniczkowalność, co uniemożliwia zastosowania do uczenia modeli rozmytych efektywnych metod gradientowych. Przykładową trójkątną funkcję przynależności dla  $a=2, b=3, c=5, d=9$  pokazano na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Przykładowe funkcje przynależności: a) trójkątna, b) sigmoidalne

Najczęściej stosuje się różniczkowalne funkcje przynależności. Najpopularniejsze z nich są funkcje sigmoidalne, dzwonowe oraz gaussowskie. Sigmoidalna jednostronna funkcja przynależności zdefiniowana jest wzorem

$$\mu_x(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha(x - c))} \quad (5.4)$$

gdzie parametr  $\alpha$  określa stromość jej zbocza, natomiast  $c$  położenie (centrum),  $\mu_x(c)=0,5$ . Dla  $\alpha < 0$  funkcja jest lewostronnie otwarta, a dla  $\alpha > 0$  prawostronnie otwarta. Z dwóch jednostronnych funkcji sigmoidalnych można otrzymać funkcję dwustronną. Należy w tym celu odjąć od siebie dwie funkcje prawostronnie (lub lewostronnie) otwarte lub przemnożyć funkcję prawostronnie otwartą przez położoną na prawo od niej funkcję lewostronnie otwartą. Stosując różnicę funkcji sigmoidalnych można uzyskać funkcję przynależności o różnych nachyleniach zboczy

$$\mu_x(x) = \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_1(x - c_1))} - \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_2(x - c_2))} \quad (5.5)$$

Dzwonowa funkcja przynależności, zwana też funkcją dzwonową uogólnioną lub funkcją



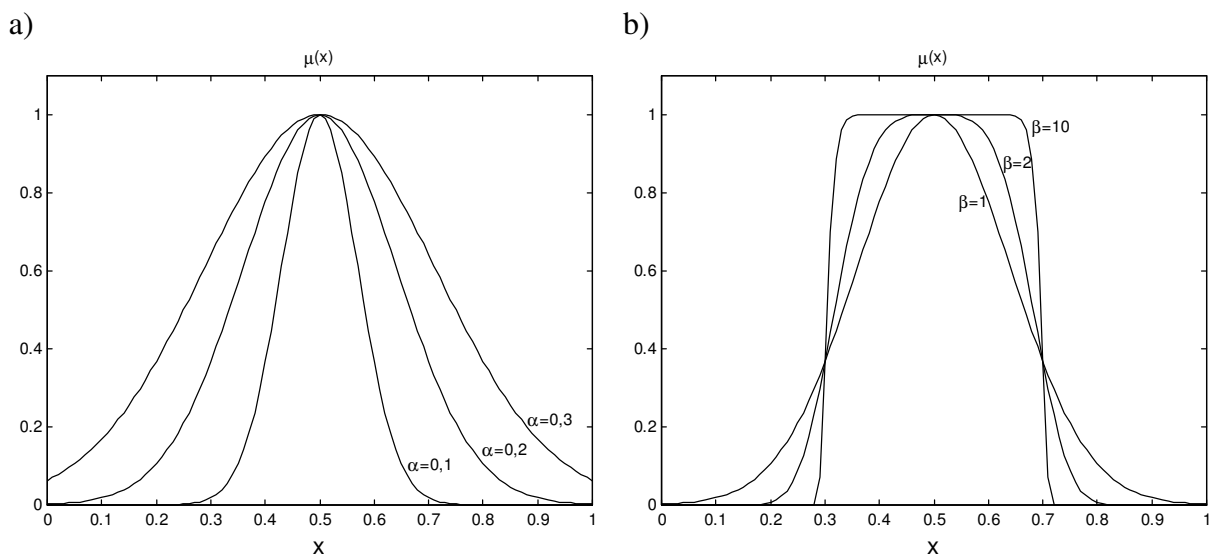
gaussowską, zdefiniowana jest wzorem wymiernym

$$\mu_x(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-c}{\alpha}\right)^{2\beta}} \quad (5.6)$$

lub wykładniczym

$$\mu_x(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{\alpha}\right)^{2\beta}\right] \quad (5.7)$$

gdzie parametr  $c$  określa środek symetrii (centrum),  $\alpha$  wpływa na szerokość „dzwonu”, natomiast  $\beta$  określa stromość jej zbocza. Na rys. 5.4 przedstawiono przykłady funkcji dzwonowych.



Rys. 5.4. Wpływ parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  na kształt dzwonowej funkcji przynależności: a) zmiana parametru  $\alpha$  przy  $\beta=1$ ,  $c=0,5$ , b) zmiana parametru  $\beta$  przy  $\alpha=0,2$ ,  $c=0,5$

### 5.1.2. Modele rozmyte typu Takagi-Sugeno

Ogólnie rzecz ujmując, modele rozmyte służą do aproksymacji funkcji nieliniowych. Mogą być więc one zastosowane do modelowania zależności statycznych lub dynamicznych. Idea modelowania rozmytego polega na zastosowaniu wielu lokalnych (obszarowych) modeli liniowych, przy czym przełączane są one w sposób rozmyty. Modele rozmyte można przedstawić za pomocą bazy reguł wnioskowania rozmytego. Każda reguła wnioskowania składa się z dwóch części: poprzednika i następnika. Pojedyncza reguła ma postać

$$\text{jeżeli } \langle \text{poprzednik} \rangle \text{ to } \langle \text{następnik} \rangle \quad (5.8)$$

Poprzednik określa warunek, natomiast następnik konkluzję, jaka będzie realizowana, jeżeli dany warunek jest prawdziwy. Przy  $n$  zmiennych wejściowych pojedyncza reguła ma postać

$$\text{jeżeli } x_1 \text{ jest } A_1 \text{ i } x_2 \text{ jest } A_2 \text{ i } \dots \text{ i } x_n \text{ jest } A_n \text{ to } \langle \text{następnik} \rangle \quad (5.9)$$

przy czym  $A_1, \dots, A_n$  oznaczają odpowiednie zbiory rozmyte.

W systemach rozmytych można zastosować następnik rozmyty lub funkcyjny. Pojedyncza

reguła wykorzystująca następnik funkcyjny ma postać

$$\text{jeżeli } x_1 \text{ jest } A_1 \text{ i } x_2 \text{ jest } A_2 \text{ i } \dots \text{ i } x_n \text{ jest } A_n \text{ to } y=f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (5.10)$$

Wykorzystanie reguł wnioskowania z następnikami funkcyjnymi umożliwia efektywne modelowanie silnie nieliniowych zależności przy użyciu niewielkiej liczby reguł. Systemy rozmyte wykorzystujące wnioskowanie z następnikami funkcyjnymi nazywane są systemami Takagi-Sugeno. Najczęściej stosuje się następniki funkcyjne w postaci wielomianów pierwszego rzędu. Zakładając, że zadaniem systemu rozmytego jest aproksymacja pewnej nieliniowej funkcji statycznej, następnik funkcyjny ma postać

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j x_j \quad (5.11)$$

Zastosowanie funkcji tego typu ma dwie zalety. Użycie liniowych funkcji następników wystarczy do dokładnego modelowania bardzo silnych nieliniowości, liczba parametrów jest stosunkowo niewielka. Co więcej, opracowano wiele metod identyfikacji modeli liniowych i syntezy układów regulacji, które można poszczególnych obszarach modelu rozmytego.

Zbiór wszystkich reguł wnioskowania rozmytego nazywany jest bazą wiedzy tego systemu. Baza wiedzy typu Takagi-Sugeno składa się z  $r$  reguł postaci

$$\begin{aligned} R^1 : & \text{jeżeli } x_1 \text{ jest } A_1^1 \text{ i } x_2 \text{ jest } A_2^1 \dots \text{ i } x_n \text{ jest } A_n^1 \text{ to } y^1 = a_0^1 + \sum_{j=1}^n a_j^1 x_j \\ & \vdots \\ R^r : & \text{jeżeli } x_1 \text{ jest } A_1^r \text{ i } x_2 \text{ jest } A_2^r \dots \text{ i } x_n \text{ jest } A_n^r \text{ to } y^r = a_0^r + \sum_{j=1}^n a_j^r x_j \end{aligned} \quad (5.12)$$

gdzie górny indeks wskazuje numer reguły. Wyjście nieliniowego modelu rozmytego jest sumą ważoną wyjść kolejnych liniowych modeli lokalnych

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x) y^i}{\sum_{l=1}^r w^l(x)} = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x) \left[ a_0^i + \sum_{j=1}^n a_j^i x_j \right]}{\sum_{l=1}^r w^l(x)} \quad (5.13)$$

gdzie  $w^i(x)$  jest poziomem aktywacji  $i$ -tej reguły.

### Przykład

Do modelowania statycznej zależności nieliniowej

$$y(x) = \frac{\sin(2x)}{\exp(0,2x)} \quad (5.14)$$

gdzie  $x \in \langle 0, 10 \rangle$ , zastosowano system rozmyty. Przygotowano dwie aproksymacje tej funkcji, a mianowicie z trójelementową reprezentacją zmiennej lingwistycznej  $x$

$$x \in \{ \text{„małe”}, \text{„średnie”}, \text{„duże”} \} = \{ X_m, X_s, X_d \} \quad (5.15)$$

oraz z czteroelementową reprezentacją zmiennej lingwistycznej  $x$

$$x \in \{ \text{„bardzo małe”}, \text{„małe”}, \text{„duże”}, \text{„bardzo duże”} \} = \{ X_{bm}, X_m, X_d, X_{bd} \} \quad (5.16)$$

W pierwszym przypadku baza wiedzy zawiera  $r=3$  reguły

$$\begin{aligned} R^1 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_m \text{ to } y^1 &= a_0^1 + a_1^1 x \\ R^2 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_s \text{ to } y^2 &= a_0^2 + a_1^2 x \\ R^3 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_d \text{ to } y^3 &= a_0^3 + a_1^3 x \end{aligned} \quad (5.17)$$

W pierwszym przypadku baza wiedzy zawiera  $r=4$  reguły

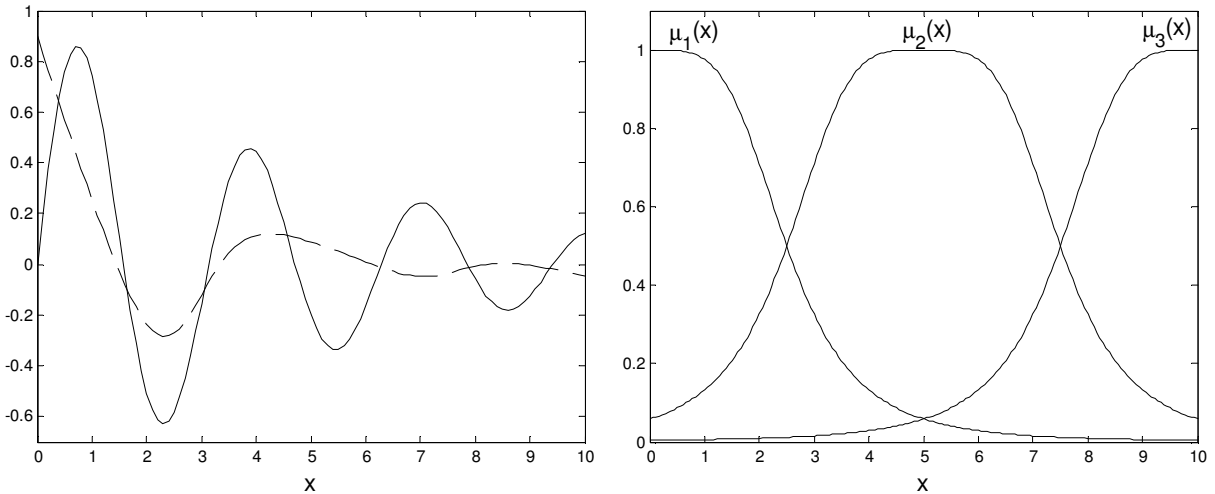
$$\begin{aligned} R^1 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_{bm} \text{ to } y^1 &= a_0^1 + a_1^1 x \\ R^2 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_m \text{ to } y^2 &= a_0^2 + a_1^2 x \\ R^3 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_d \text{ to } y^3 &= a_0^3 + a_1^3 x \\ R^4 : \text{jeżeli } x \text{ jest } X_{bd} \text{ to } y^4 &= a_0^4 + a_1^4 x \end{aligned} \quad (5.18)$$

Wyjście modelu jest sumą ważoną wyjść kolejnych liniowych modeli lokalnych

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x) y^i}{\sum_{l=1}^r w^l(x)} = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x) [a_0^i + a_1^i x]}{\sum_{l=1}^r w^l(x)} \quad (5.19)$$

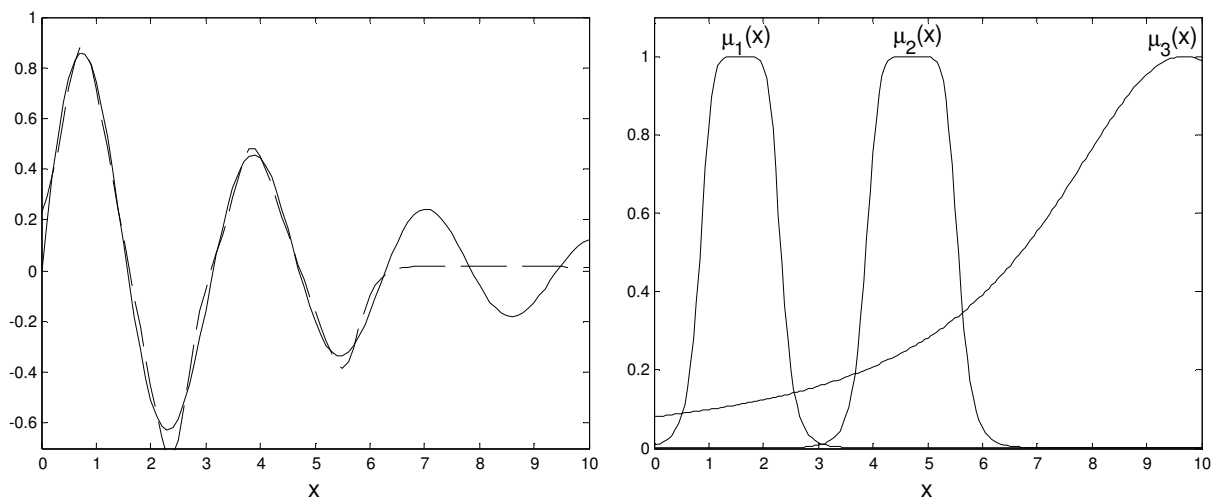
gdzie poziom aktywacji  $i$ -tej reguły wynika z wartości funkcji przynależności

$$w^i(x) = \mu_i(x) \quad \text{dla } i = 1, \dots, r \quad (5.20)$$

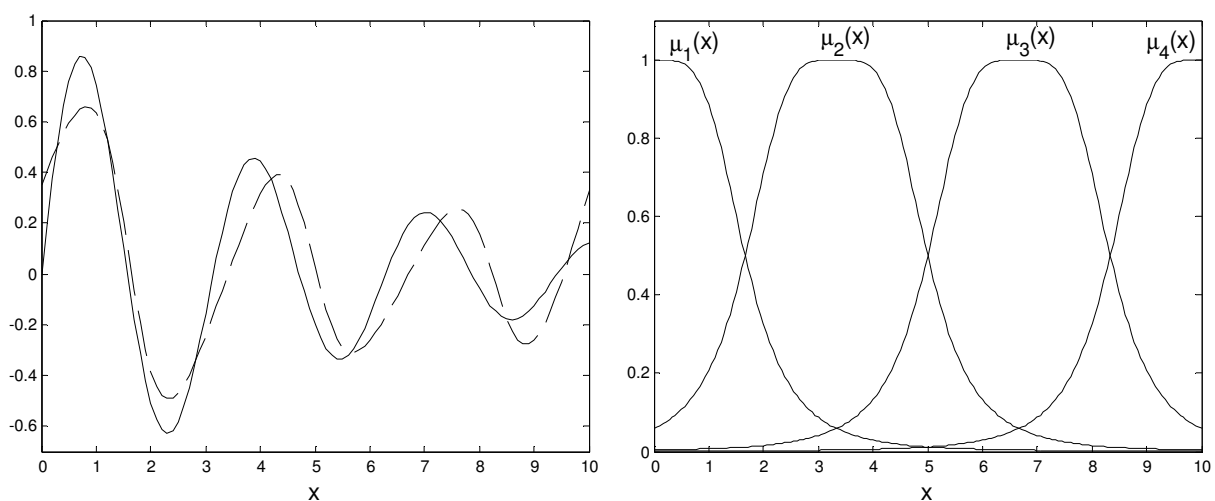


Rys. 5.5. Funkcja nieliniowa  $y(x)$  (linia ciągła) i jej aproksymacja rozmyta (linia przerywana) z trzema modelami lokalnymi: wersja wyjściowa

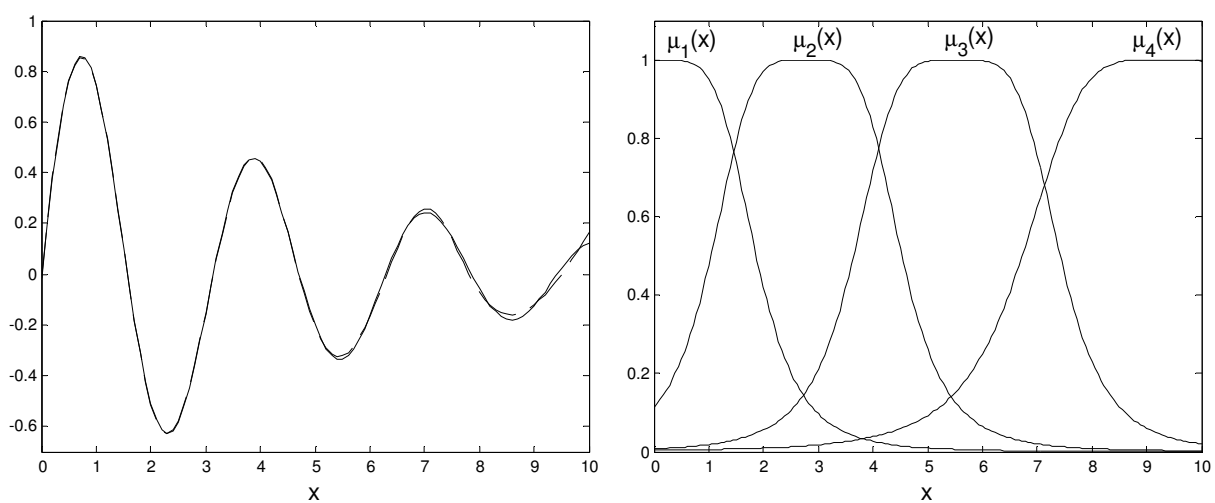
Na rys. 5.5 przedstawiono nieliniową funkcję  $y(x)$  i jej aproksymację rozmytą wykorzystującą trzy modele lokalne (a więc istnieją trzy zbiory rozmyte zdefiniowane trzema funkcjami przynależności). Przyjęto równomierne rozłożenie funkcji przynależności, jednak dokładność aproksymacji jest niezadowalająca. Po dostrojeniu parametrów funkcji przynależności (rys. 5.6) widać, że trójelementowa reprezentacja zmiennej lingwistycznej  $x$  nie zapewnia dostatecznie dokładnej aproksymacji, zastosowanie bardziej złożonej aproksymacji jest więc uzasadnione. Na rys. 5.7 pokazano wyjściową aproksymację funkcji uzyskaną w modelu rozmytym zawierającą cztery modele lokalne. Na rys. 5.8 pokazano aproksymację modelu po dostrojeniu parametrów funkcji przynależności.



Rys. 5.6. Funkcja nieliniowa  $y(x)$  (linia ciągła) i jej aproksymacja rozmyta (linia przerywana) z trzema modelami lokalnymi: po dostrojeniu parametrów funkcji przynależności



Rys. 5.7. Funkcja nieliniowa  $y(x)$  (linia ciągła) i jej aproksymacja rozmyta (linia przerywana) z czterema modelami lokalnymi: wersja wyjściowa



Rys. 5.8. Funkcja nieliniowa  $y(x)$  (linia ciągła) i jej aproksymacja rozmyta (linia przerywana) z czterema modelami lokalnymi: po dostrojeniu parametrów funkcji przynależności

### Przykład

Do modelowania nieliniowego obiektu dynamicznego zastosowano model rozmyty typu Takagi-Sugeno. Baza reguł zawiera dwie reguły

$$\begin{aligned} R^1 : \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^1 \text{ to } y^1(k) &= b^1 y(k-1) - a^1 u(k-1) \\ R^2 : \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^2 \text{ to } y^2(k) &= b^2 y(k-1) - a^2 u(k-1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Zbiory rozmyte  $U^1$  i  $U^2$  zdefiniowane są sigmoidalnymi funkcjami przynależności

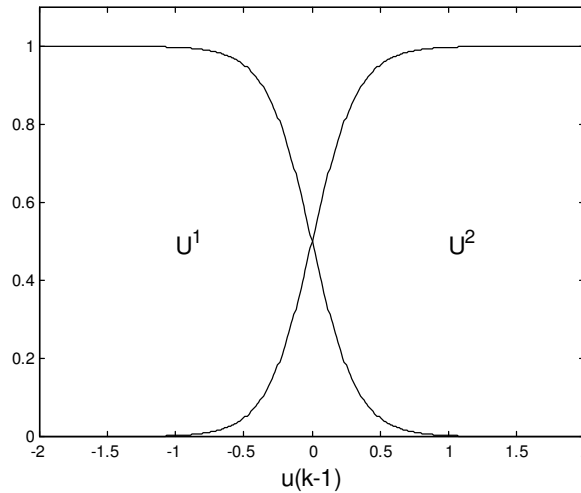
$$\begin{aligned} \mu_{U^1}(u(k-1)) &= \frac{1}{1 + \exp(6u(k-1))} \\ \mu_{U^2}(u(k-1)) &= 1 - \mu_{U^1}(u(k-1)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

Wyjście modelu jest sumą ważoną obu liniowych modeli lokalnych

$$\begin{aligned} y(k) &= \frac{\sum_{i=1}^2 \mu_{U^i}(u(k-1)) y^i(k)}{\sum_{i=1}^2 \mu_{U^i}(u(k-1))} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^2 \mu_{U^i}(u(k-1)) [b^i u(k-1) - a^i u(k-1)]}{\sum_{i=1}^2 \mu_{U^i}(u(k-1))} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Reasumując, system rozmyty opisuje nieliniowy model dynamiczny

$$y(k) = f(u(k-1), y(k-1)) \quad (5.24)$$



Rys. 5.9. Funkcje przynależności modelu rozmytego

W dotychczasowych przykładach baza reguł była bardzo prosta, a mianowicie wybór konkretnego modelu lokalnego był uzależniony od jednego sygnału. W modelu statycznym jest to oczywiste (funkcja ma jeden argument), natomiast w przypadku modelu dynamicznego wybór modelu lokalnego może być zależny od wartości obu sygnałów  $u(k-1)$  i  $y(k-1)$ .

### Przykład

Do modelowania nieliniowego obiektu dynamicznego zastosowano model rozmyty typu Takagi-Sugeno. Baza reguł zawiera cztery reguły

$$\begin{aligned}
 R^1 : & \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^1 \text{ i } y(k-1) \text{ jest } Y^1 \text{ to } y^1(k) = b^1 y(k-1) - a^1 u(k-1) \\
 R^2 : & \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^1 \text{ i } y(k-1) \text{ jest } Y^2 \text{ to } y^2(k) = b^2 y(k-1) - a^2 u(k-1) \\
 R^3 : & \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^2 \text{ i } y(k-1) \text{ jest } Y^1 \text{ to } y^3(k) = b^3 y(k-1) - a^3 u(k-1) \\
 R^4 : & \text{jeżeli } u(k-1) \text{ jest } U^2 \text{ i } y(k-1) \text{ jest } Y^2 \text{ to } y^4(k) = b^4 y(k-1) - a^4 u(k-1)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

Zbiory rozmyte  $U^1$ ,  $U^2$ ,  $Y_1$  i  $Y_2$  zdefiniowane są sigmoidalnymi funkcjami przynależności

$$\begin{aligned}
 \mu_{U^1}(u(k-1)) &= \frac{1}{1 + \exp(6u(k-1))}, \quad \mu_{U^2}(u(k-1)) = 1 - \mu_{U^1}(u(k-1)) \\
 \mu_{Y^1}(y(k-1)) &= \frac{1}{1 + \exp(2y(k-1))}, \quad \mu_{Y^2}(y(k-1)) = 1 - \mu_{Y^1}(y(k-1))
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Wyjście modelu jest sumą ważoną kolejnych liniowych modeli lokalnych

$$\begin{aligned}
 y(k) &= \frac{\sum_{i=1}^4 w^i(u(k-1), y(k-1)) y^i(k)}{\sum_{i=1}^4 w^i(u(k-1), y(k-1))} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^4 w^i(u(k-1), y(k-1)) [b^i u(k-1) - a^i u(k-1)]}{\sum_{i=1}^4 w^i(u(k-1), y(k-1))}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

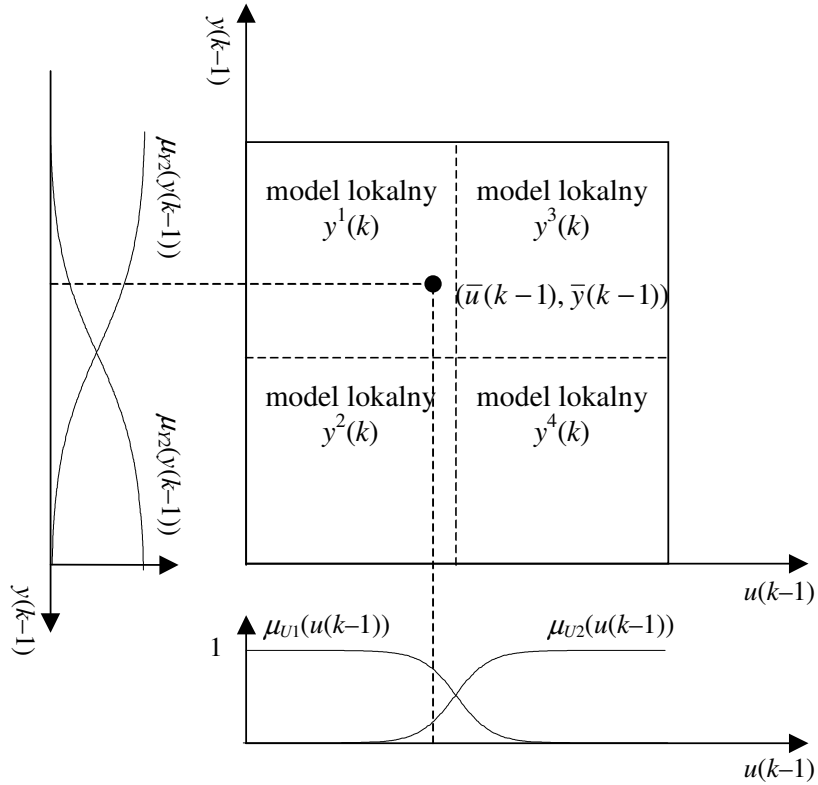
Poziom aktywacji kolejnych reguł wyznacza się jako iloczyn algebraiczny

$$\begin{aligned}
 w^1(u(k-1), y(k-1)) &= \mu_{U^1}(u(k-1)) \mu_{Y^1}(y(k-1)) \\
 w^2(u(k-1), y(k-1)) &= \mu_{U^1}(u(k-1)) \mu_{Y^2}(y(k-1)) \\
 w^3(u(k-1), y(k-1)) &= \mu_{U^2}(u(k-1)) \mu_{Y^1}(y(k-1)) \\
 w^4(u(k-1), y(k-1)) &= \mu_{U^2}(u(k-1)) \mu_{Y^2}(y(k-1))
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Na rys. 5.10. przedstawiono funkcje przynależności oraz sposób wyboru modelu lokalnego. Analogicznie jak w poprzednim przykładzie, system rozmyty opisuje nieliniowy model dynamiczny  $y(k) = f(u(k-1), y(k-1))$ , ale wybór modelu lokalnego jest uzależniony od wartości obu argumentów modelu, tzn. od sygnałów  $u(k-1)$  i  $y(k-1)$ .

Reasumując, wnioskowanie rozmyte typu Takagi-Sugeno składa się z trzech etapów

1. Obliczenie poziomów aktywacji reguł, określanych również jako siły odpalenia reguł, odpowiadającym aktualnym wartościom numerycznym zmiennych wejściowych.
2. Wyznaczenie wartości następników funkcyjnych poszczególnych reguł.
3. Wyznaczenie konkluzji finalnej – ważone i normowane sumowanie wartości zmiennej wyjściowej uzyskanych w następnikach reguł z uwzględnieniem poziomów aktywacji poszczególnych reguł.



Rys. 5.10. Funkcje przynależności i sposób wyboru modelu lokalnego

Obliczenie poziomu aktywacji  $w^i$  reguły, nawet w rozważanym jednorodnym przypadku poprzedników zawierających tylko proste warunki połączone operatorem koniunkcji, nie jest operacją jednoznaczną. Powszechnie stosuje się operator mnożenia lub operator minimum. Przy zastosowaniu operatora mnożenia, dla zmiennych wejściowych  $x=[x_1 \ x_2 \dots \ x_n]^T$  poziom aktywacji  $i$ -tej reguły wyznaczany jest iloczynem algebraicznym

$$w^i(x) = \mu_{A_1^i}(x) \cdot \mu_{A_2^i}(x) \cdot \dots \cdot \mu_{A_n^i}(x) \quad \text{dla } i = 1, \dots, r \quad (5.29)$$

natomiast przy zastosowaniu operatora minimum poziom aktywacji wyznaczany jest iloczynem logicznym

$$w^i(x) = \min\{\mu_{A_1^i}(x), \mu_{A_2^i}(x), \dots, \mu_{A_n^i}(x)\} \quad \text{dla } i = 1, \dots, r \quad (5.30)$$

W niniejszej pracy stosuje się wyłącznie operator mnożenia (iloczynu algebraicznego).

Ostatnim etapem wnioskowania numerycznego jest ważone i normowane sumowanie wartości następników poszczególnych reguł. Dla  $r$  reguł sumowanie to wykonuje się zgodnie ze wzorem

$$y = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(x) y^i}{\sum_{i=1}^r w^i(x)} \quad (5.31)$$

gdzie  $y^i$  jest wartością następników poszczególnych reguł w punkcie  $x$ , natomiast  $y$  jest konkluzją finalną – wartością zmiennej wyjściowej systemu rozmytego typu Takagi-Sugeno w punkcie  $x$ .

Z punktu widzenia relacji między zmiennymi wejściowymi i zmienną wyjściową system

rozmyty można traktować jako pewne odwzorowanie funkcyjne o cechach zależnych od cech funkcji przynależności i funkcji następników. Jeżeli funkcje przynależności oraz funkcje następników są różniczkowalne i poziomy aktywacji wyznacza się operatorem mnożenia, to nieliniowe odwzorowanie realizowane przez model jest ciągle i różniczkowalne.

## 5.2. Dyskretne rozmyte algorytmy regulacji typu Takagi-Sugeno

Przez rozmyty algorytm regulacji typu Takagi-Sugeno rozumie się system rozmyty, w którym następnik każdej reguły jest funkcją definiującą algorytm regulacji, zaprojektowany do regulacji obiektu lokalnie w obszarze (zbiorze rozmytym) określonym poprzednikiem reguły. W literaturze rozwiązanie takie nazywa się niekiedy algorytmem obszarowym, wieloobszarowym lub wielomodelowym [15]. Algorytmy regulacji następników reguł projektowane są na ogół lokalnie, dla lokalnych modeli opisujących obiekt w poszczególnych obszarach. W ogólności, modele lokalne mogą być liniowe lub nieliniowe, podobnie jak algorytmy lokalnych regulatorów. W praktyce jednak stosuje się liniowe lokalne modele i algorytmy regulacji. Przy właściwym doborze liczby i parametrów funkcji przynależności modelowanie jest wystarczające, natomiast stosując algorytmy liniowe można wykorzystać znane i sprawdzone rozwiązania.

Podczas projektowania regulatora rozmytego należy:

1. Skonstruować model rozmyty obiektu.
2. Dla każdego z liniowych modeli obszarowych zaprojektować regulator liniowy pracujący prawidłowo w danym obszarze (np. regulator liniowy ze sprzężeniem od stanu, regulator PID, algorytm regulacji predykcyjnej itd).
3. Przeprowadzić symulację uzyskanego rozmytego algorytmu regulacji. Jeżeli uzyskane wyniki są niezadowalające powrócić do punktu 2 i skorygować parametry regulatorów lokalnych, ewentualnie powrócić do punktu 1 skonstruować model rozmyty o większej dokładności (np. zwiększając liczbę funkcji przynależności). Należy zwrócić szczególną uwagę na kwestię stabilności regulatora.

W pierwszym etapie prac należy

- a) Zdefiniować zmienne występujące w poprzednikach reguł. Wartości tych zmiennych będą określać przynależność aktualnego stanu (punktu pracy) obiektu do wydzielonych lokalnych obszarów, w których obiekt przybliża się modelami liniowymi.
- b) Dokonać podziału zakresu zmienności każdej ze zmiennych poprzedników reguł na zbiory rozmyte (określić ich liczbę oraz kształt funkcji przynależności).
- c) Sformułować lokalne modele liniowe obiektu.

### 5.2.1. Regulator rozmyty typu Takagi-Sugeno ze sprzężeniem od stanu

Rozważa się dyskretny model rozmyty Takagi-Sugeno obiektu dynamicznego o regułach w następującej postaci

$$\begin{aligned} R_{\text{mod}}^1 : \text{jeżeli } x_1(k) \text{ jest } A_1^1 \text{ i } x_2(k) \text{ jest } A_2^1 \dots \text{ i } x_n(k) \text{ jest } A_n^1 \text{ to } x^1(k+1) &= A^1 x(k) + B^1 u(k) \\ \vdots & \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$R_{\text{mod}}^r : \text{jeżeli } x_1(k) \text{ jest } A_1^r \text{ i } x_2(k) \text{ jest } A_2^r \dots \text{ i } x_n(k) \text{ jest } A_n^r \text{ to } x^r(k+1) = A^r x(k) + B^r u(k)$$

gdzie  $A^i$  oraz  $B^i$  są macierzami stanu i sterowania lokalnych modeli liniowych utworzonych dla poszczególnych obszarów, górny indeks wskazuje numer reguły,  $r$  jest liczbą reguł. Dla



aktualnych wartości stanu i wejścia wyjście modelu rozmytego, tzn. stan w chwili następnej, wyznaczane jest ze wzoru

$$x(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(k) [A^i x(k) + B^i u(k)]}{\sum_{l=1}^r w^l(k)} \quad (5.33)$$

gdzie  $w^l(k)$  są poziomami aktywacji poszczególnych reguł

$$w^i(k) = \prod_{j=1}^r \mu_{A_j^i}(x_j(k)) \quad (5.34)$$

Przyjęto naturalne założenie, że zawsze

$$\sum_{l=1}^r w^l(k) > 0 \quad (5.35)$$

czyli dla każdej wartości zmiennej stanu z rozważanego zakresu ich zmienności model jest określony – co najmniej jedna reguła jest aktywowana. Wygodnie jest operować unormowanymi poziomami aktywacji reguł

$$\tilde{w}^i(k) = \frac{w^i(k)}{\sum_{l=1}^r w^l(k)} \quad (5.36)$$

gdzie  $i=1, \dots, r$ . Zachodzi wówczas

$$\sum_{i=1}^r \tilde{w}^i(k) = 1 \quad (5.37)$$

Model obiektu niesterowanego (czyli przy  $u(k) \equiv 0$ ) ma postać

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \tilde{w}^i(k) A^i x(k) \quad (5.38)$$

Dla każdego z lokalnych liniowych modeli dynamicznych występujących w następniku reguł, tzn. dla każdego z obszarów modelu rozmytego, można zaprojektować standardowy liniowy regulator ze sprzężeniem od stanu. Uzyskuje się w ten sposób rozmyty regulator Takagi-Sugeno o regułach

$$\begin{aligned} R_{reg}^1 : & \text{jeżeli } x_1(k) \text{ jest } A_1^1 \text{ i } x_2(k) \text{ jest } A_2^1 \text{ i } \dots \text{ i } x_n(k) \text{ jest } A_n^1 \text{ to } u^1(k) = -K^1 x(k) \\ & \vdots \\ R_{reg}^r : & \text{jeżeli } x_1(k) \text{ jest } A_1^r \text{ i } x_2(k) \text{ jest } A_2^r \text{ i } \dots \text{ i } x_n(k) \text{ jest } A_n^r \text{ to } u^r(k) = -K^r x(k) \end{aligned} \quad (5.39)$$

gdzie  $K^j$  są wektorami współczynników sprzężeń od stanu,  $j=1, 2, \dots, r$ . Liczba reguł oraz poprzedniki (a więc również liczba i kształt funkcji przynależności) modelu i regulatora są takie same. Oczywiście, poprzedniki modelu i regulatora mogą być różne, różna może być ich liczba. Z drugiej jednak strony przyjęcie tych samych poprzedników modelu i regulatora jest podejściem naturalnym. Jeżeli w poszczególnych obszarach liniowe modele lokalne dobrze aproksymują właściwości nieliniowego procesu, to dobrane do nich liniowe regulatory lokalne powinny zapewnić dobrą jakość regulacji procesu nieliniowego opisanego modelem roz-

mytym . Kompletny nieliniowy regulator rozmyty (prawo regulacji) ma postać

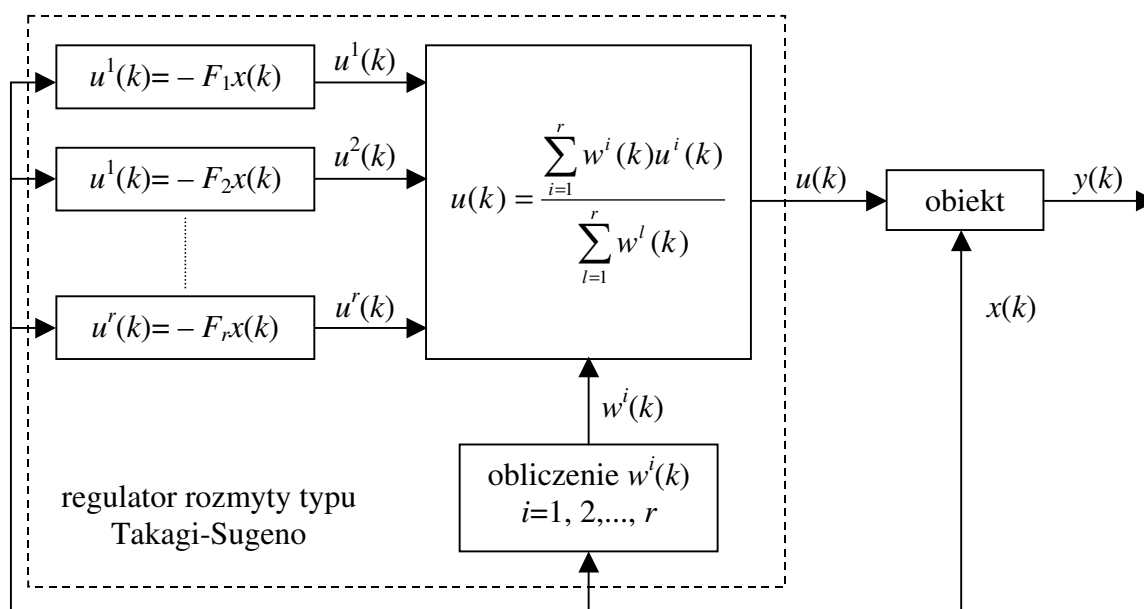
$$u(k) = -\sum_{j=1}^r \tilde{w}^j(k) K^j x(k) \quad (5.40)$$

Struktura układu regulacji z rozmytym regulatorem typu Takagi-Sugeno ze sprzężeniem od stanu została pokazana na rys. 5.11.

Równanie dynamiki układu zamkniętego, stosowane przy analizie stabilności, ma postać

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \tilde{w}^i(k) \tilde{w}^j(k) (A^i - B^i K^j) x(k) \quad (5.41)$$

W praktyce bardzo często nie jest dostępny pomiarowo cały wektor stanu. Analogicznie jak w przypadku obiektów opisanych modelami liniowymi, należy zaprojektować obserwator stanu o strukturze rozmytej. Jego reguły będą identyczne jak reguły modelu i regulatora, natomiast następniki będą klasycznymi formułami liniowych obserwatorów stanu.



Rys. 5.11. Struktura układu regulacji z rozmytym regulatorem typu Takagi-Sugeno ze sprzężeniem od stanu

### Przykład

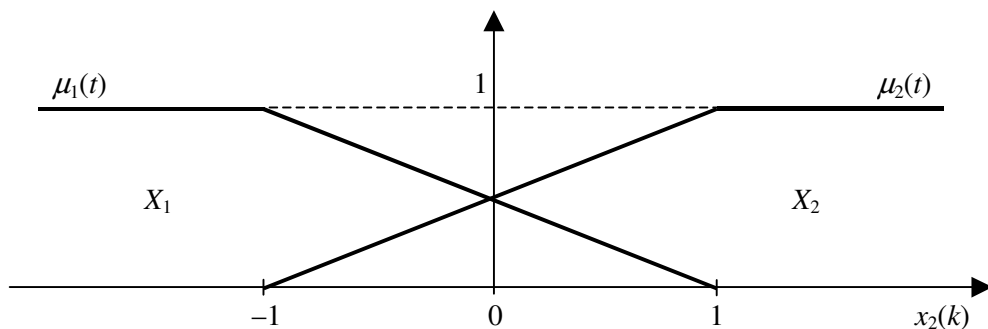
Rozważa się model rozmyty

$$\begin{aligned} R_{\text{mod}}^1 : \text{jeżeli } x_2(k) \text{ jest } X_1 \text{ to } x^1(k+1) &= A^1 x(k) + B u(k) \\ R_{\text{mod}}^2 : \text{jeżeli } x_2(k) \text{ jest } X_2 \text{ to } x^2(k+1) &= A^2 x(k) + B u(k) \end{aligned} \quad (5.42)$$

gdzie  $x(k) = [x_1(k) \ x_2(k)]^T \in \mathfrak{R}^2$ ,  $u(k) \in \mathfrak{R}$  oraz

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

Zbiory rozmyte  $X_1$  i  $X_2$  zdefiniowane trapezowymi funkcjami przynależności pokazanymi na rys. 5.12.



Rys. 5.12. Zbiory rozmyte modelu

Regulator rozmyty o strukturze Takagi-Sugeno, analogicznie jak model obiektu, zawiera dwie reguły

$$\begin{aligned} R_{reg}^1 &: \text{jeżeli } x_2(k) \text{ jest } X_1 \text{ to } u^1(k) = -K^1 x(k) \\ R_{reg}^2 &: \text{jeżeli } x_2(k) \text{ jest } X_2 \text{ to } u^2(k) = -K^2 x(k) \end{aligned} \quad (5.44)$$

Oba bieguny obu lokalnych liniowych układów zamkniętych (czyli  $A^1 - BK^1$  oraz  $A^2 - BK^2$ ) są równe i wynoszą 0,25. Obliczone wektory współczynników sprzężeń od stanu regulatorów lokalnych są następujące

$$K^1 = [0,5 \quad -0,4375], \quad K^2 = [-1,5 \quad -0,4375] \quad (5.45)$$

Sygnał sterujący regulatora rozmytego wyznacza się z zależności

$$u(k) = \frac{w^1(k)u^1(k) + w^2(k)u^2(k)}{w^1(k) + w^2(k)} \quad (5.46)$$

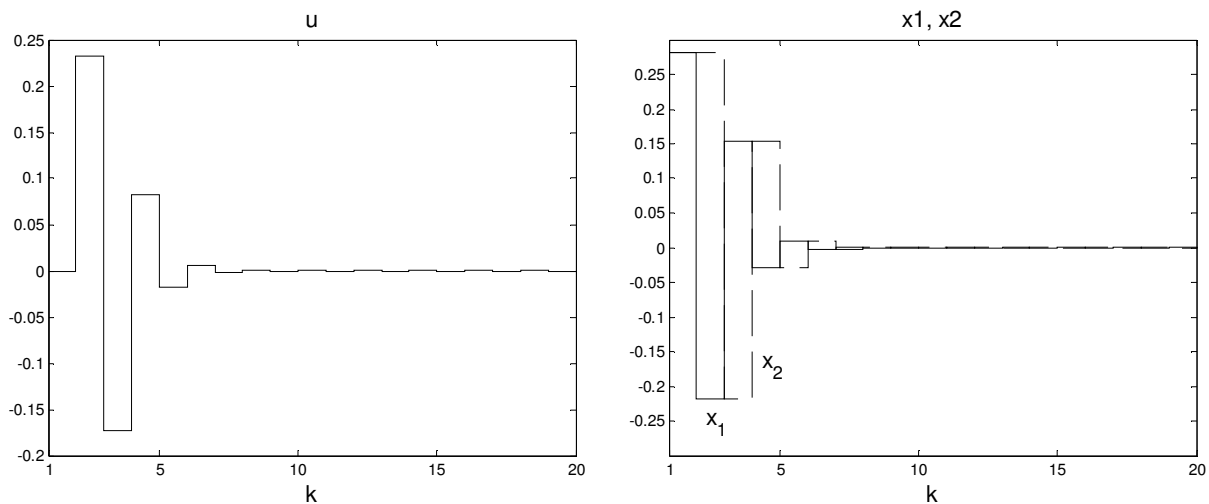
gdzie

$$w^1(k) = \mu_1(x_2(k)), \quad w^2(k) = \mu_2(x_2(k)) \quad (5.47)$$

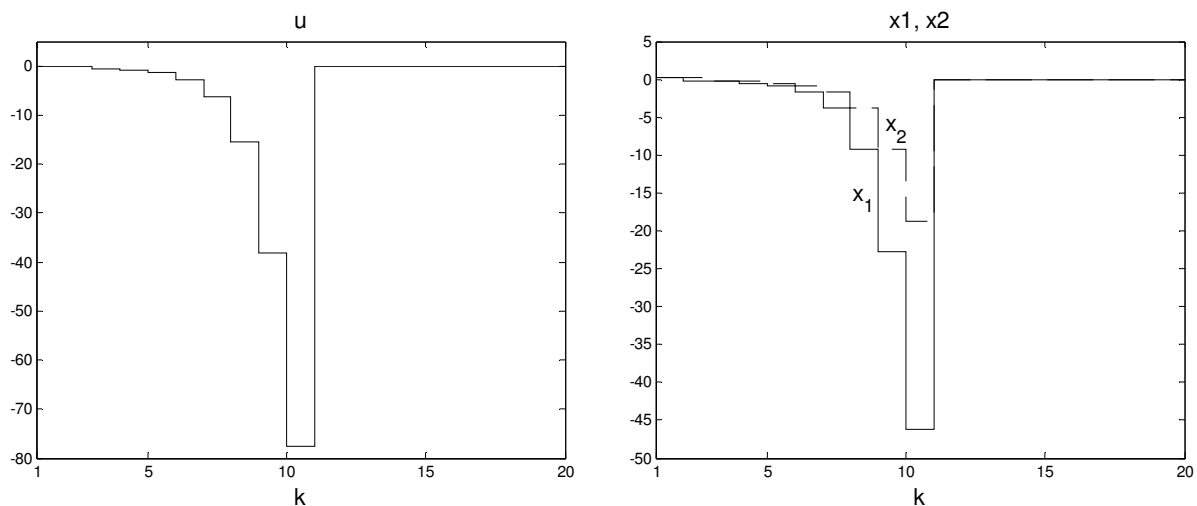
Przetestowano trzy układy regulacji obiektu nieliniowego. Założono, że zadaniem regulatora jest przeprowadzenie procesu ze stanu początkowego  $x = [0.28078 \quad 0.28078]^T$  (odpowiadającemu stanowi ustalonemu przy sterowaniu  $u = 0,5$ ) do stanu zerowego. W pierwszym przypadku zastosowano liniowy regulator lokalny z pierwszego obszaru, prawo regulacji ma postać  $u(k) = -K^1 x(k)$ . Otrzymane wyniki symulacji przedstawiono na rys. 4.15. Z uwagi na nieliniowość procesu otrzymane przebiegi mają charakter oscylacyjny. W drugim przypadku zastosowano liniowy regulator  $u(k) = -K^2 x(k)$ . Niestety, również drugi liniowy regulator lokalny nie radzi sobie z nieliniowościami obiektu, amplitudy sygnałów są bardzo duże, co pokazano na rys. 4.16. Przebiegi otrzymane w regulatorze rozmytym (rys. 4.17) są szybkie, ich amplituda jest mała, brak jest oscylacji.

### 5.2.2. Regulator rozmyty PID typu Takagi-Sugeno

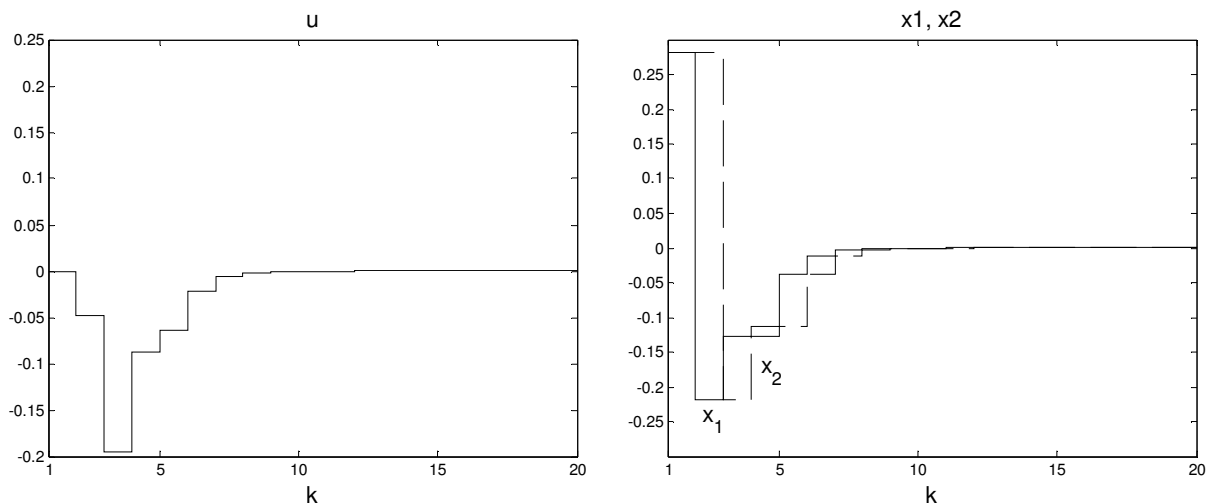
W układach regulacji procesów technologicznych stosuje się bardzo często dobrze znane regulatory typu PID. Wraz z coraz częstszym zastosowaniem do bieżącego sterowania struktur warstwowych z bieżącą optymalizacją punktu pracy rośnie potrzeba stosowania regulatorów nieliniowych, zdolnych pracować w szerokim zakresie zmian punktów pracy. Stąd w zastosowaniach przemysłowych istotne jest dysponowanie stosunkowo prostym regulatorem nieliniowym, najlepiej będącym nieliniowym uogólnieniem regulatora PID.



Rys. 4.15. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z liniowym regulatorem  $u(k) = -K^1 x(k)$



Rys. 4.16. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z liniowym regulatorem  $u(k) = -K^1 x(k)$



Rys. 4.17. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z regulatorem rozmytym

W klasycznym liniowym algorytmie PID aktualne sterowanie jest funkcją poprzedniego sterowania oraz wartości uchybu ( $e(k) = y^{zad}(k) - y(k)$ ) w obecnej i poprzednich iteracjach

$$u(k) = r_2 e(k-2) + r_1 e(k-1) + r_0 e(k) + u(k-1) \quad (4.153)$$

Idea rozmytego algorytmu PID jest naturalna, w każdym obszarze rozmytym pracuje inny liniowy lokalny regulator PID o innych parametrach. Całkowity sygnał sterujący regulatora rozmytego jest kombinacją sygnałów obliczanych przez poszczególne regulatory lokalne.

Niech model rozmyty Takagi-Sugeno ma postać

$$\begin{aligned} R_{\text{mod}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k-n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k-m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\ & \text{to } y^1(k+1) = a_1^1 y(k) + \dots + a_{n_A}^1 y(k-n_A+1) + b_0^1 u(k) + \dots + b_{m_B}^1 u(k-m_B) \\ & \vdots \\ R_{\text{mod}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k-n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k-m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\ & \text{to } y^r(k+1) = a_1^r y(k) + \dots + a_{n_A}^r y(k-n_A+1) + b_0^r u(k) + \dots + b_{m_B}^r u(k-m_B) \end{aligned} \quad (4.154)$$

Powyższy wzór jest bardzo ogólny, w praktyce najczęściej stosuje się uproszczone poprzedniki, np. uwzględnia się tylko jeden sygnał, a więc wybór modelu lokalnego dokonywany jest na podstawie jednego sygnału. Wyjście modelu rozmytego wyznaczone jest ze wzoru

$$y(k+1) = \frac{\sum_{i=1}^r w^i(k) y^i(k+1)}{\sum_{l=1}^r w^l(k)} \quad (4.155)$$

gdzie  $w^i(k)$  są poziomami aktywacji poszczególnych reguł w chwili  $k$ -tej

$$w^i(k) = \prod_{j=0}^{n_R} \mu_{A_j^i}(y(k-j)) \prod_{p=1}^{m_R} \mu_{B_p^i}(u(k-p)) \quad (4.156)$$

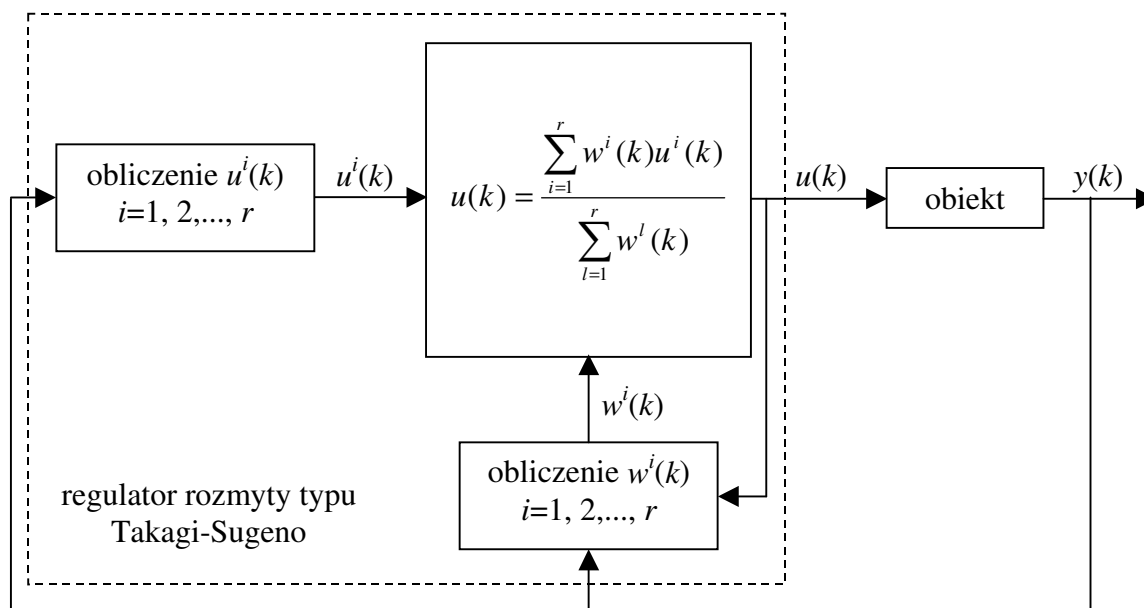
Zakładając, że poprzedniki modelu i regulatora są identyczne, rozmyty regulator PID ma bazę reguł postaci

$$\begin{aligned} R_{\text{reg}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k-n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k-m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\ & \text{to } u^1(k) = u(k) = r_2^1 e(k-2) + r_1^1 e(k-1) + r_0^1 e(k) + u(k-1) \\ & \vdots \\ R_{\text{reg}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k-n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k-m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\ & \text{to } u^r(k) = u(k) = r_2^r e(k-2) + r_1^r e(k-1) + r_0^r e(k) + u(k-1) \end{aligned} \quad (5.48)$$

gdzie  $j=1, \dots, r$  indeksuje reguły. W trakcie projektu należy dobrać liniowe regulatory lokalne dla kolejnych modeli lokalnych. Sygnał wyjściowy regulatora obliczany jest ze wzoru

$$u(k) = \frac{\sum_{j=1}^r w^j(k) u^j(k)}{\sum_{l=1}^r w^l(k)} = \sum_{j=1}^r \tilde{w}^j(k) u^j(k) \quad (5.49)$$

gdzie  $w^j(k)$  są poziomami aktywacji poszczególnych reguł regulatora w chwili  $k$ -tej. Struktura układu regulacji została pokazana na rys. 5.13.



Rys. 5.13. Struktura układu regulacji z regulatorem rozmytym PID

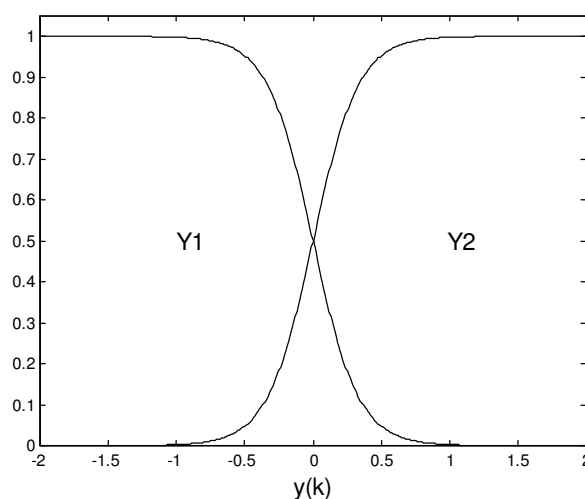
**Przykład**

Rozważa się model rozmyty [15]

$$\begin{aligned} R_{\text{mod}}^1 &: \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } Y_1 \text{ to } y^1(k+1) = 0,7y(k) + 0,8u(k) \\ R_{\text{mod}}^2 &: \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } Y_2 \text{ to } y^2(k+1) = 0,3y(k) + 0,2u(k) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Zbiory rozmyte  $Y_1$  i  $Y_2$  zdefiniowane są sigmoidalnymi funkcjami przynależności

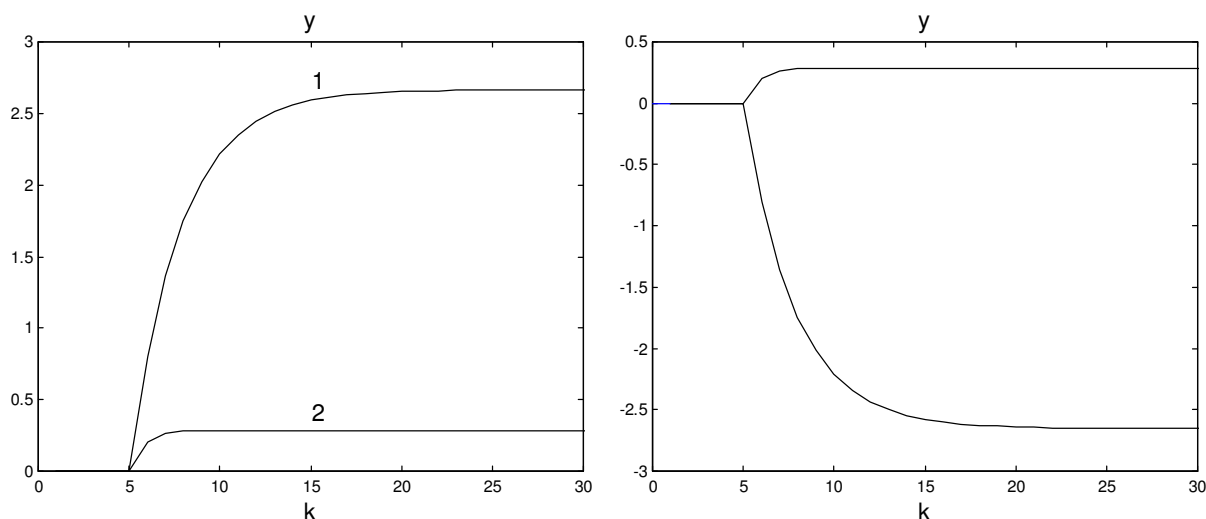
$$\mu_{Y_1}(y(k)) = \frac{1}{1 + \exp(6y(k))}, \quad \mu_{Y_2}(y(k)) = 1 - \mu_{Y_1}(y(k)) \quad (5.51)$$



Rys. 5.14. Funkcje przynależności modelu rozmytego

Porównanie odpowiedzi skokowych modeli lokalnych występujących w następnikach reguł modelu rozmytego świadczy o tym, że obiekt, pomimo bardzo prostej struktury, jest silnie nieliniowy, przy czym nieliniowość ma zarówno charakter statyczny (współczynnik wzmoc-

nienia) jak i dynamiczny (stała czasowa). Nieliniowość ta widoczna jest również przy porównaniu odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego przy skoku sterowania  $u(k)$  od 0 do  $\pm 1$ . Należy podkreślić, że omawiany obiekt jest trudny w sterowaniu, ponieważ stałe czasowe są małe w porównaniu z okresem próbkowania  $T=1$ .



Rys. 5.15. a) Odpowiedzi skokowe modeli lokalnych przy skoku sterowania  $u(k)$  od 0 do 1, b) odpowiedzi skokowe modelu nieliniowego przy skoku sterowania  $u(k)$  od 0 do  $\pm 1$

W pierwszej kolejności dla danego obiektu nieliniowego zaprojektowano dwa klasyczne dyskretny regulatory PID w wersji z całkowaniem metodą trapezów. Do obiektu  $y^1(k)=0,7y(k)+0,8u(k)$ , czyli dla punktu pracy  $y = -1$ , zastosowano regulator o nastawach dobranych metodą korygowanego eksperymentu Zieglera-Nicholsa

$$K^1 = 0,9 \quad T_i^1 = 3 \quad (5.52)$$

Równanie pierwszego regulatora lokalnego ma postać

$$u(k) = u(k-1) + 1,05e(k) - 0,75e(k-1) \quad (5.53)$$

Do obiektu  $y^2(k)=0,3y(k)+0,2u(k)$ , czyli dla punktu pracy  $y = 1$ , zastosowano regulator o nastawach

$$K^2 = 2 \quad T_i^2 = 1 \quad (5.54)$$

Równanie drugiego regulatora lokalnego ma postać

$$u(k) = u(k-1) + 2,25e(k) - 0,75e(k-1) \quad (5.55)$$

Dobre regulatory liniowe przetestowano z nieliniowym obiektem, przy szybkich i dużych zmianach punktu pracy. Regulatory liniowe działają fatalnie w całym obszarze. Pierwszy z regulatorów, zaprojektowany dla punktu pracy  $y = -1$ , działa bardzo wolno (rys. 5.16), natomiast drugi regulator, zaprojektowany dla punktu pracy  $y = 1$ , jest zbyt szybki, co prowadzi do powstania szkodliwych oscylacji, szczególnie dla ujemnych wartości sygnału wyjściowego (rys. 5.17). Dlatego też przed przystąpieniem do projektowania regulatora rozmytego zmniejszono współczynnik wzmocnienia drugiego regulatora PID do wartości  $K^2=1,5$ . Wyniki symulacji obiektu nieliniowego ze zmodyfikowanym regulatorem z drugiego obszaru pokazano na rys. 5.18.

Przyjmując poprzedniki takie same jak w modelu obiektu oraz następniki w postaci dobra-

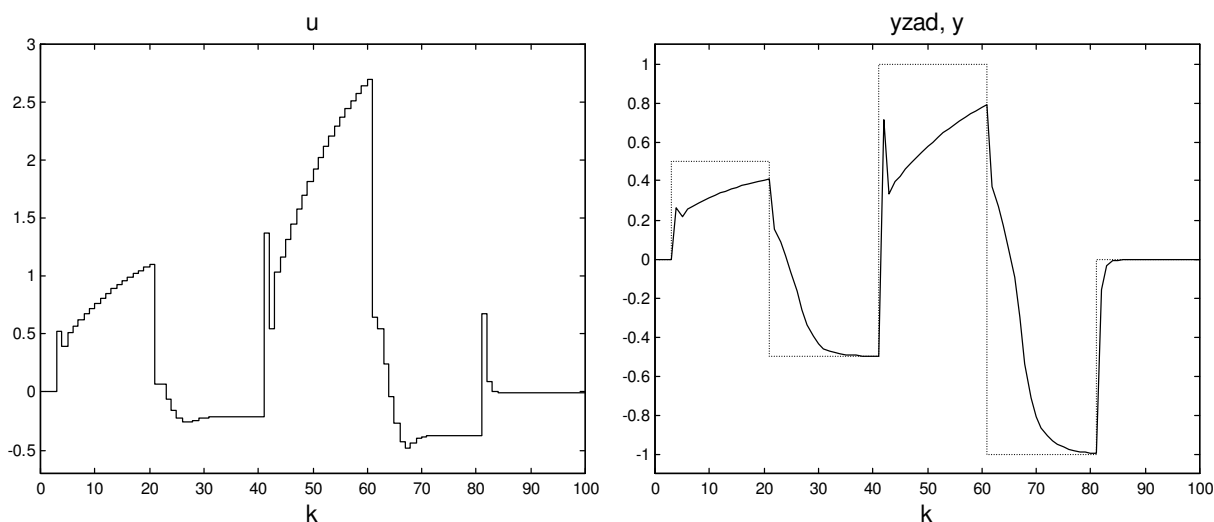
nych lokalnych regulatorów PID, otrzymuje się następujące reguły regulatora rozmytego

$$\begin{aligned} R_{reg}^1 : \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } Y_1 \text{ to } u^1(k) &= u(k-1) + 1,05e(k) - 0,75e(k-1) \\ R_{reg}^2 : \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } Y_2 \text{ to } u^2(k) &= u(k-1) + 2,25e(k) - 0,75e(k-1) \end{aligned} \quad (5.56)$$

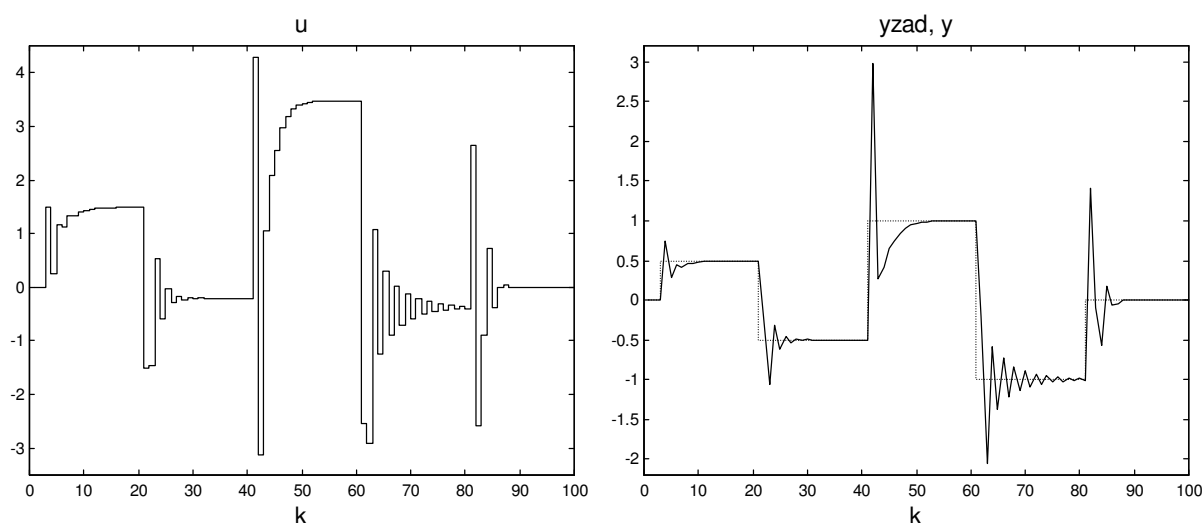
Sygnał sterujący regulatora rozmytego wyznacza się z zależności

$$u(k) = \frac{w^1(k)u^1(k) + w^2(k)u^2(k)}{w^1(k) + w^2(k)} \quad (5.57)$$

Zaprojektowany regulator nieliniowy testowano w takich samych warunkach jak regulatory liniowe (tzn. przyjęto takie same zmiany sygnału wartości zadanej). Wyniki symulacji pokazano na rys. 5.19. W porównaniu z pierwszym z regulatorów PID pracuje on znacznie szybciej, natomiast w porównaniu z drugim z regulatorów PID pracuje on stabilnie, bez szkodliwych oscylacji.

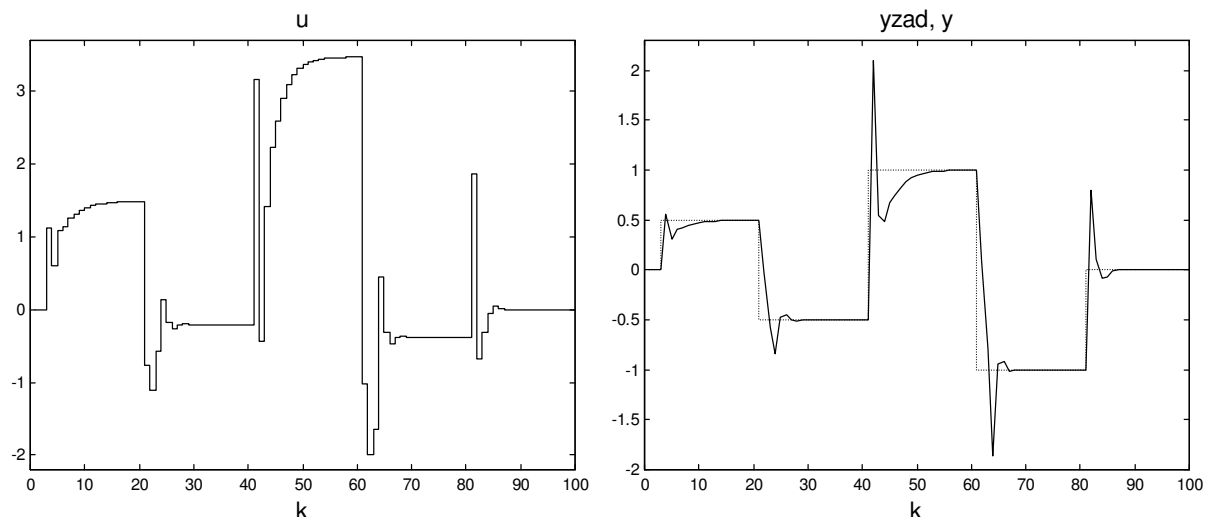


Rys. 5.16. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z liniowym regulatorem PID zaprojektowanym dla punktu pracy  $y = -1$

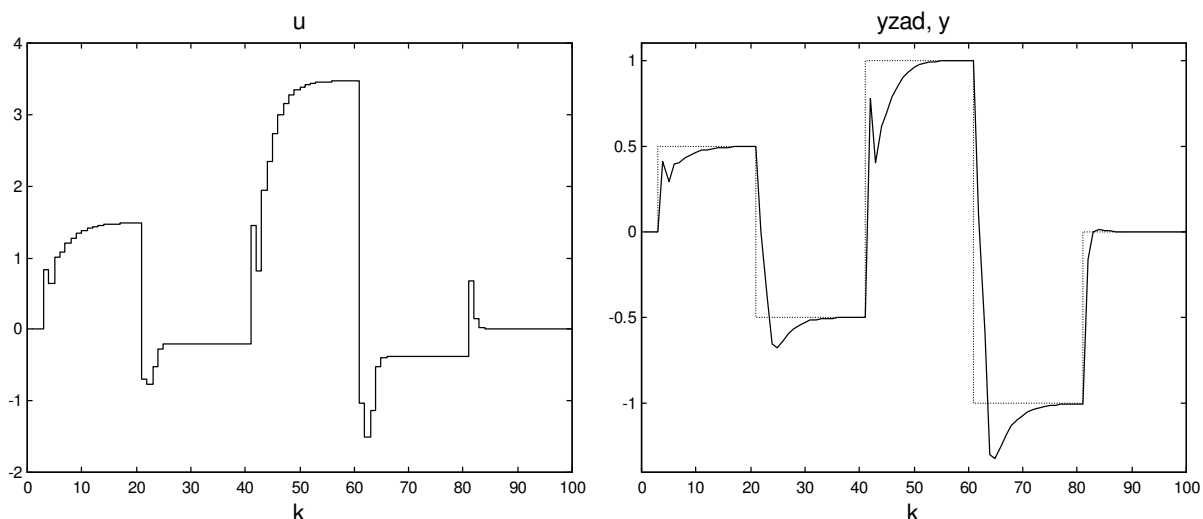


Rys. 5.17. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z liniowym regulatorem PID zaprojektowanym dla punktu pracy  $y = 1$ ,  $K^2=2$





Rys. 5.18. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z liniowym regulatorem PID zaprojektowanym dla punktu pracy  $y = 1$ ,  $K^2=1,5$



Rys. 5.19. Wyniki symulacji obiektu nieliniowego z nieliniowym rozmytym regulatorem PID

### 5.2.3. Rozmyte algorytmy regulacji predykcyjnej

Istnieje możliwość zaprojektowania algorytmu regulacji predykcyjnej przy wykorzystaniu modelu rozmytego, zwanego krótko rozmytym algorytmem regulacji predykcyjnej. Opracowano kilka wersji takich algorytmów, różniących się sposobami wykorzystania nieliniowego modelu i uwzględnieniem lub nieuwzględnieniem ograniczeń, a tym samym złożonością obliczeniową. W dalszej części pracy zostanie przedstawiona najprostsza, analityczna wersja takiego algorytmu (bez ograniczeń).

Projektowanie rozmytego algorytmu predykcyjnego przebiega analogicznie jak regulatora rozmytego ze sprzężeniem od stanu lub rozmytego regulatora typu PID. Dla każdego z podobszarów, w których można przyjąć liniowe przybliżenie obiektu, projektuje się klasyczny, liniowy algorytm predykcyjny w wersji analitycznej. Finalny, nieliniowy algorytm regulacji jest kombinacją algorytmów lokalnych, wynikającą z zasad wnioskowania rozmytego.

Niech rozmyty model odpowiedzi skokowej składa się z zestawu  $r$  lokalnych odpowiedzi

skokowych

$$\begin{aligned}
 R_{\text{mod}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\
 & \text{to } y^1(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k s_j^1 \Delta u(k-j) \\
 & \vdots \\
 R_{\text{mod}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\
 & \text{to } y^r(k) = y(0) + \sum_{j=1}^k s_j^r \Delta u(k-j)
 \end{aligned} \tag{5.58}$$

Pierwszy model lokalny złożony jest ze współczynników odpowiedzi skokowej  $s_1^1, s_2^1, \dots, s_D^1$ , ostatni model zawiera współczynniki  $s_1^r, s_2^r, \dots, s_D^r$ .

Przyjmując dla zwięzłości zapisu, że wartość zadana nie zmienia się na horyzoncie predykcji, a więc dla kolejnych regulatorów lokalnych DMC można wykorzystać prawo regulacji (4.64), rozmyty regulator DMC opisany jest zbiorem reguł

$$\begin{aligned}
 R_{\text{reg}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\
 & \text{to } \Delta u^1(k) = (k^e)^1 e(k) - \sum_{q=1}^{D-1} (k_q^u)^1 \Delta u(k-q) \\
 & \vdots \\
 R_{\text{reg}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\
 & \text{to } \Delta u^r(k) = (k^e)^r e(k) - \sum_{q=1}^{D-1} (k_q^u)^r \Delta u(k-q)
 \end{aligned} \tag{5.59}$$

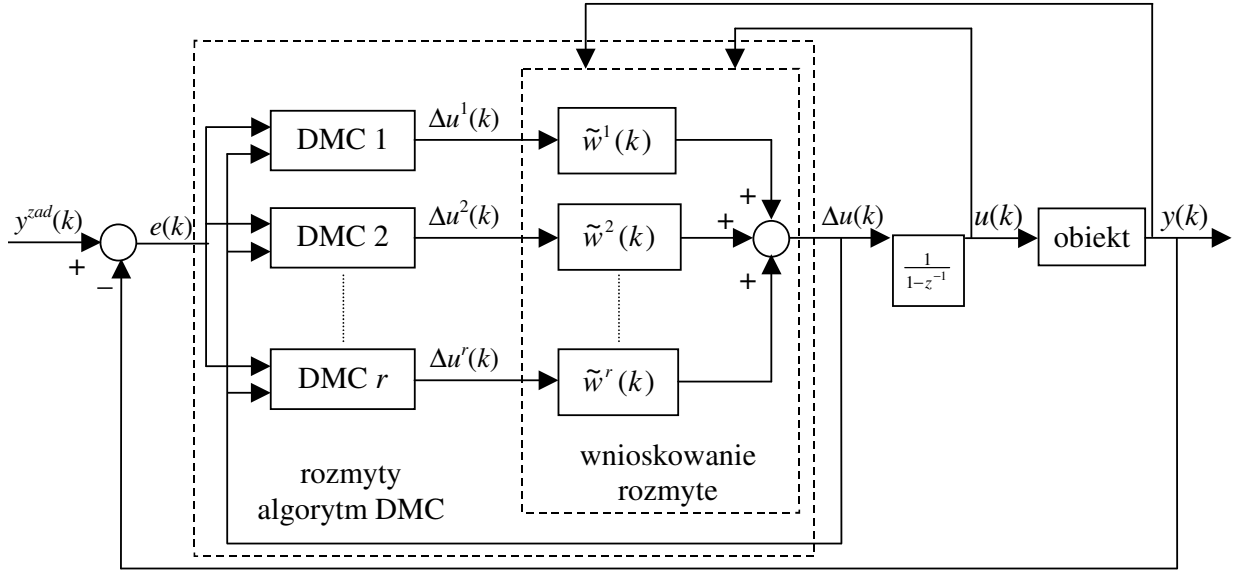
W trakcie projektowania rozmytego algorytmu DMC należy dobrać liniowe regulatory lokalne do modeli zastosowanych w poszczególnych obszarach. Dla pierwszego regulatora lokalnego są to współczynniki  $(k^e)^1, (k_1^u)^1, \dots, (k_{D-1}^u)^1$ , dla ostatniego  $r$ -tego regulatora lokalnego są to współczynniki  $(k^e)^r, (k_1^u)^r, \dots, (k_{D-1}^u)^r$ .

Sygnał wyjściowy rozmytego regulatora DMC jest sumą ważoną sygnałów poszczególnych regulatorów lokalnych

$$\Delta u(k) = \frac{\sum_{j=1}^r w^j(k) \Delta u^j(k)}{\sum_{l=1}^r w^l(k)} = \sum_{j=1}^r \tilde{w}^j(k) \Delta u^j(k) \tag{5.60}$$

Strukturę otrzymanego algorytmu regulacji przedstawiono na rys. 5.20.

Przedstawiony algorytm regulacji DMC nie uwzględnia ograniczeń. Oczywiście, nic nie stoi na przeszkodzie, aby w miejsce analitycznych lokalnych regulatorów DMC zastosować algorytmy numeryczne. Rozwiązując  $r$  zadań programowania kwadratowego wyznacza się sygnały sterujące poszczególnych regulatorów lokalnych, sygnał wyjściowy regulatora rozmytego jest sumą ważoną tych sygnałów uwzględniającą aktualny punkt pracy.



Rys. 5.20. Struktura układu regulacji z rozmytym algorytmem regulacji predykcyjnej DMC

W bardzo podobny sposób projektuje się rozmyty algorytm GPC. W tym przypadku modele lokalne są liniowymi równaniami różnicowymi, dla których projektuje się niezależnie klasyczne, liniowe algorytmu GPC. Model rozmyty składa się z zestawu  $r$  lokalnych modeli liniowych (4.97)

$$\begin{aligned}
 R_{\text{mod}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\
 & \text{to } y^1(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i^1 u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i^1 y(k-i) \\
 & \vdots
 \end{aligned} \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\text{mod}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\
 & \text{to } y^r(k) = \sum_{i=1}^{n_B} b_i^r u(k-i) - \sum_{i=1}^{n_A} a_i^r y(k-i)
 \end{aligned}$$

Pierwszy model lokalny złożony jest ze współczynników  $b_1^1, \dots, b_{n_B}^1$  oraz  $a_1^1, \dots, a_{n_A}^1$ , ostatni model zawiera współczynniki  $b_1^r, \dots, b_{n_B}^r$  oraz  $a_1^r, \dots, a_{n_A}^r$ .

Zakładając, że wartość zadana nie zmienia się na horyzoncie predykcji, a więc dla kolejnych regulatorów lokalnych GPC można wykorzystać prawo regulacji (4.151), rozmyty regulator GPC opisany jest zbiorem reguł

$$\begin{aligned}
 R_{\text{reg}}^1 : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^1 \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^1 \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^1 \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^1 \\
 & \text{to } \Delta u^1(k) = (k^{y^{\text{zad}}})^1 y^{\text{zad}}(k) - \sum_{j=1}^{n_B} (k_j^u)^1 u(k-j) - \sum_{j=0}^{n_A} (k_j^y)^1 y(k-j) \\
 & \vdots \\
 R_{\text{reg}}^r : & \text{jeżeli } y(k) \text{ jest } A_0^r \text{ i } \dots \text{ i } y(k - n_R) \text{ jest } A_{n_R}^r \text{ i } u(k-1) \text{ jest } B_1^r \text{ i } \dots \text{ i } u(k - m_R) \text{ jest } B_{m_R}^r \\
 & \text{to } \Delta u^r(k) = (k^{y^{\text{zad}}})^r y^{\text{zad}}(k) - \sum_{j=1}^{n_B} (k_j^u)^r u(k-j) - \sum_{j=0}^{n_A} (k_j^y)^r y(k-j)
 \end{aligned} \tag{5.62}$$

W trakcie projektowania rozmytego algorytmu GPC należy dobrać liniowe regulatory lokalne

do modeli zastosowanych poszczególnych obszarach. Dla pierwszego regulatora lokalnego są to współczynniki  $(k^{yzad})^1, (k_1^u)^1, \dots, (k_{n_B}^u)^1, (k_0^y)^1, \dots, (k_{n_A}^y)^1$ , dla ostatniego  $r$ -tego regulatora lokalnego są to współczynniki  $(k^{yzad})^r, (k_1^u)^r, \dots, (k_{n_B}^u)^r, (k_0^y)^r, \dots, (k_{n_A}^y)^r$ . Analogicznie jak w przypadku rozmytego regulatora DMC, sygnał wyjściowy rozmytego regulatora DMC jest sumą ważoną sygnałów poszczególnych regulatorów lokalnych (5.60). Struktura otrzymanego algorytmu jest bardzo podobna do struktury rozmytego algorytmu DMC przedstawionego na rys. 5.20.



## 6. Dodatki

### 6.1. Projekt

W trakcie semestru studenci mają za zadanie wykonać dwa jednoosobowe zadania projektowe. Szczególny nacisk położony jest na badania symulacyjne, które można przeprowadzić w środowisku Matlab/Simulink. Projektuje się dyskretne układy regulacji, możliwe do implementacji przy wykorzystaniu dyskretnych urządzeń sterujących. Modele obiektów dane są zwykle w postaci ciągłej, konieczne jest wyznaczenie odpowiedniej reprezentacji dyskretnej.

Tematyka pierwszego projektu związana jest z projektowaniem układów regulacji ze sprzężeniem od stanu. Dla zadanego modelu obiektu (zwykle niestabilnego) należy dokonać doboru biegunów układu zamkniętego. Celem jest szybka stabilizacja punktu pracy procesu, amplituda i szybkość zmian sygnału sterującego również musi być brana pod uwagę. Należy sprawdzić sposób działania układu z biegunami wielokrotnymi i dominującymi. W drugiej części projektu należy zaprojektować obserwator zredukowanego rzędu, a więc na podstawie równań modelu określić jego strukturę oraz eksperymentalnie dobrać bieguny obserwatora. Na wstępie, przy uruchomionym obserwatorze, lecz regulatorze korzystającym z rzeczywistego stanu, należy porównać jakość odtwarzania sygnałów zmiennych stanu. Po dobraniu biegunów obserwatora należy sprawdzić działanie układu regulacji, który korzysta z sygnałów obliczanych przez obserwator. Może wówczas okazać się konieczna modyfikacja biegunów obserwatora.

Celem drugiego projektu jest zaprojektowanie dyskretnego algorytmu PID oraz algorytmu regulacji predykcyjnej typu DMC lub GPC. Dla zadanego modelu procesu w postaci transmi-tancji ciągłej (np. obiekt wieloinercyjny z dość dużym opóźnieniem) należy znaleźć model dyskretny wykorzystywany w algorytmie predykcyjnym, a więc odpowiedź skokową lub model w postaci równania różnicowego. Dobór nastaw algorytmu PID odbywa się metodą Zieglera-Nicholsa, możliwa jest modyfikacja otrzymanych nastaw na drodze symulacyjnej. Należy zbadać wpływ parametrów algorytmu predykcyjnego (tzn. horyzontu predykcji, horyzontu sterowania, współczynnika kary, ewentualnie ograniczeń) na jego pracę, wybrać wartości tych parametrów, które uznane są za najlepsze. Z uwagi na opóźnienie procesu jakość regulacji algorytmu PID nie jest duża, natomiast dzięki zastosowaniu do predykcji modelu w algorytmie predykcyjnym pracuje one dużo efektywniej. Należy sprawdzić działanie algorytmu predykcyjnego przy zmiennej trajektorii zadanej (fali prostokątnej) w dwóch przypadkach: zmiany trajektorii zadanej są znane na horyzoncie predykcji (algorytm reaguje z wyprzedzeniem) oraz w wersji klasycznej, gdy trajektoria zadana jest stała na horyzoncie predykcji, operuje się wówczas pojęciem wartości zadanej. Należy również sprawdzić odporność algorytmu regulacji predykcyjnej przy zmianach wzmocnienia i opóźnienia procesu.



## 7. Literatura

- [1] D. W. Clarke, C. Mohtadi, P. S. Tuffs: Generalized predictive control – I. The basic algorithm. *Automatica*, tom 23, nr 2, str. 137–148, 1987.
- [2] C. R. Cutler, B. L. Ramaker: Dynamic matrix control – a computer control algorithm. *Proceedings of the AIChE National Meeting*, Houston, USA, 1979.
- [3] R. C. Dorf, R. H. Bishop: *Modern control systems*. Addison-Wesley, Reading, 1995.
- [4] W. Findeisen: *Struktury sterowania dla złożonych procesów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej Warszawa, 1997.
- [5] W. Findeisen: *Technika regulacji automatycznej*. PWN, Warszawa, 1978.
- [6] G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini: *Feedback control of dynamic systems*. Addison Wesley, Reading, 1994.
- [7] T. Kaczorek: *Teoria układów regulacji automatycznej*. WNT, Warszawa, 1977.
- [8] M. Ławryńczuk: *Nieliniowe algorytmy regulacji predykcyjnej z neuronowymi modelami procesów*. Wydział Elektroniki i Technik Informacyjnych Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2003.
- [9] J. M. Maciejowski: *Predictive control with constraints*. Prentice Hall, Harlow, 2002.
- [10] J. Pułaczewski: *Podstawy regulacji automatycznej*. WSiP, Warszawa, 1985.
- [11] J. Pułaczewski, K. Szacka, A. Manitius: *Zasady automatyki*. WNT, Warszawa, 1974.
- [12] S. J. Qin, T. A. Badgwell: A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, tom 11, nr 7, str. 733–764, 2003.
- [13] K. Szacka: *Teoria układów dynamicznych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 1995.
- [14] P. Tatjewski: *Advanced control of industrial processes, structures and algorithms*. Springer, Londyn, 2007.
- [15] P. Tatjewski: *Zaawansowane sterowanie obiektów przemysłowych, struktury i algorytmy*. EXIT, Warszawa, 2002.
- [16] A. Woźniak: *Ustalanie pożądanego rozkładu biegunów*. Materiały wykładowe PURE, Warszawa, 2003.