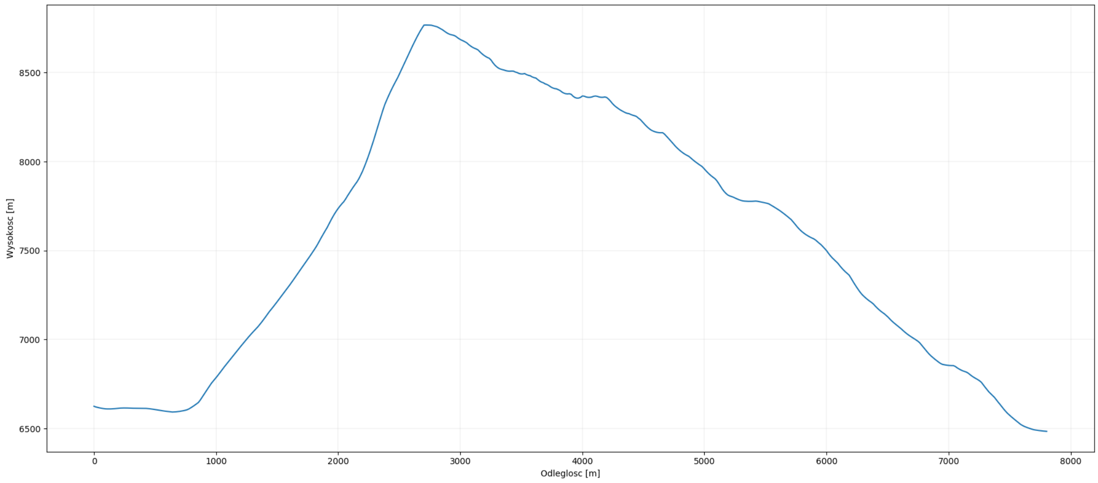
1 Cel projektu

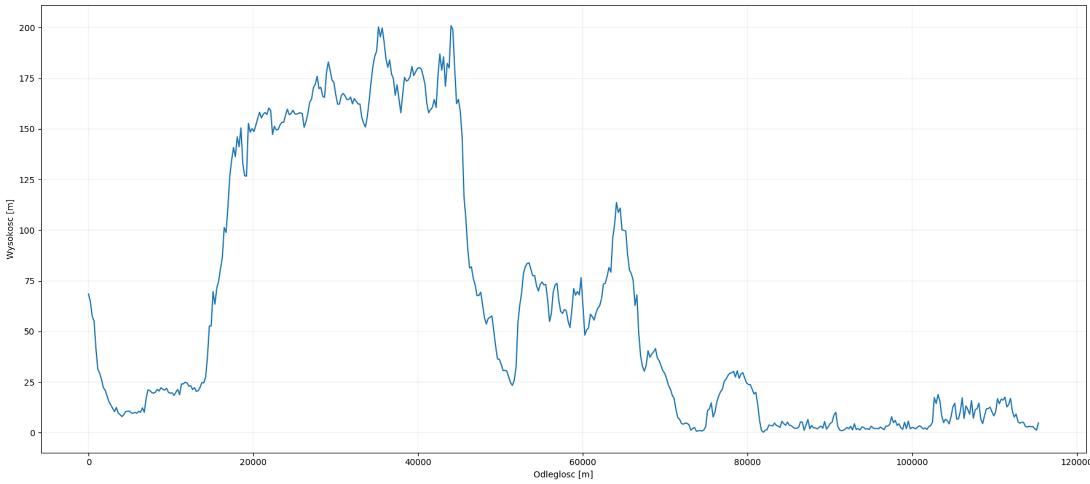
Celem projektu było zaimplementowanie metod interpolacji: Lagrange'a oraz funkcje sklejane trzeciego stopnia, a następnie przeprowadzenie testów pod względem przydatności obu metod przy określaniu terenu wysokościowego tras.

2 Dane testowe

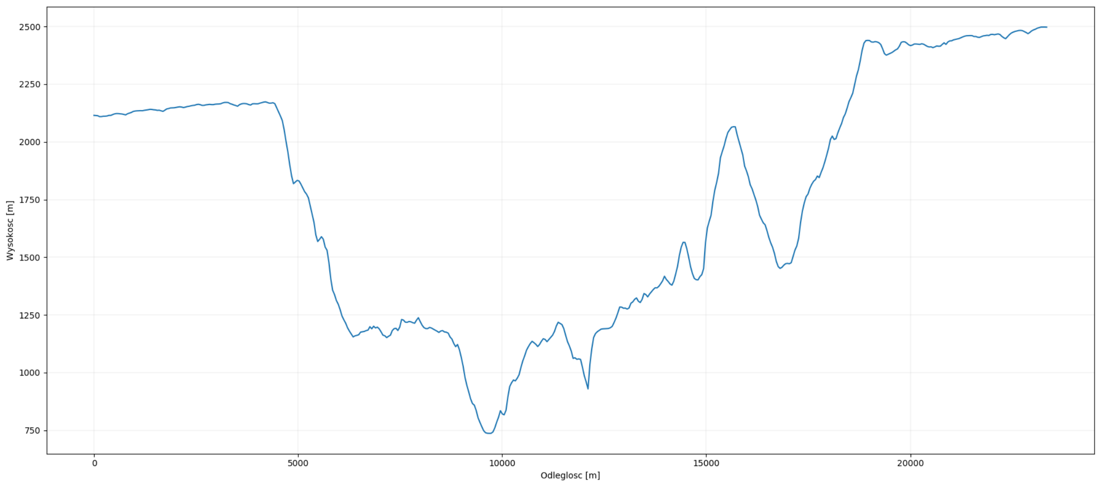
1. Mount Everest - najwyższy szczyt na świecie (8848m n.p.m), jedno, wyraźne wzniesienie



2. Hel - trasa bardzo niesymetryczna, wiele różnych wzniesień



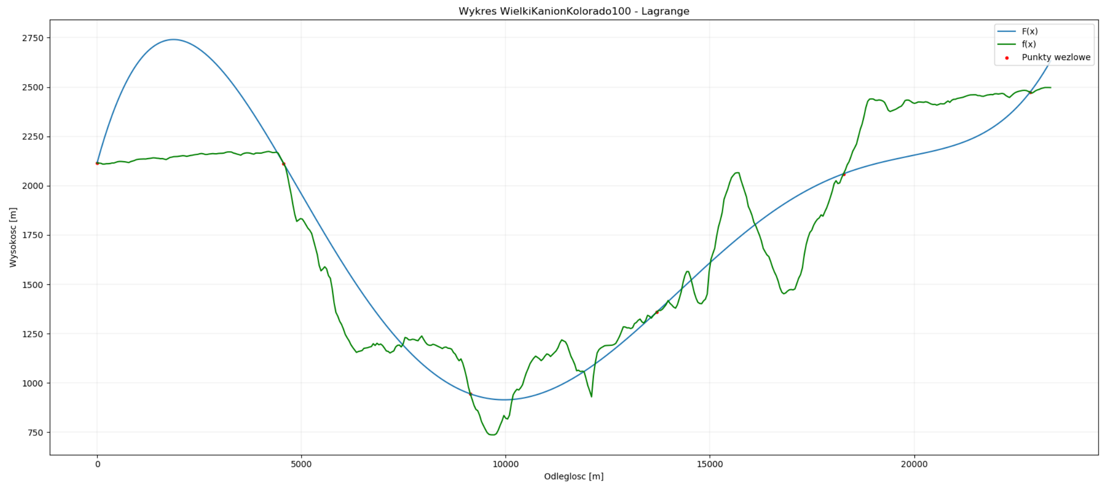
3. Wielki Kanion w Kolorado - Jedno wyraźne wgłębienie z kilkoma mniejszymi wzniesieniami wewnątrz.

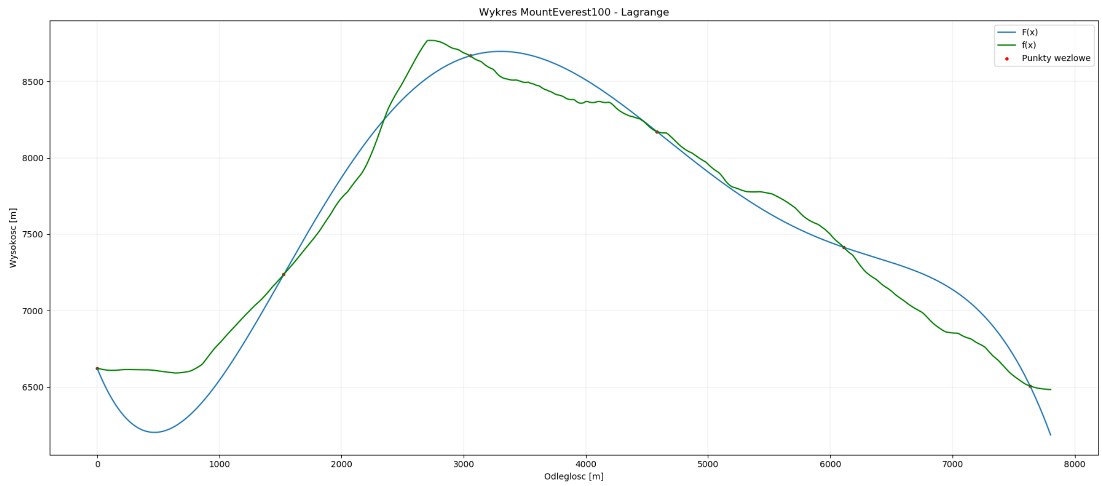


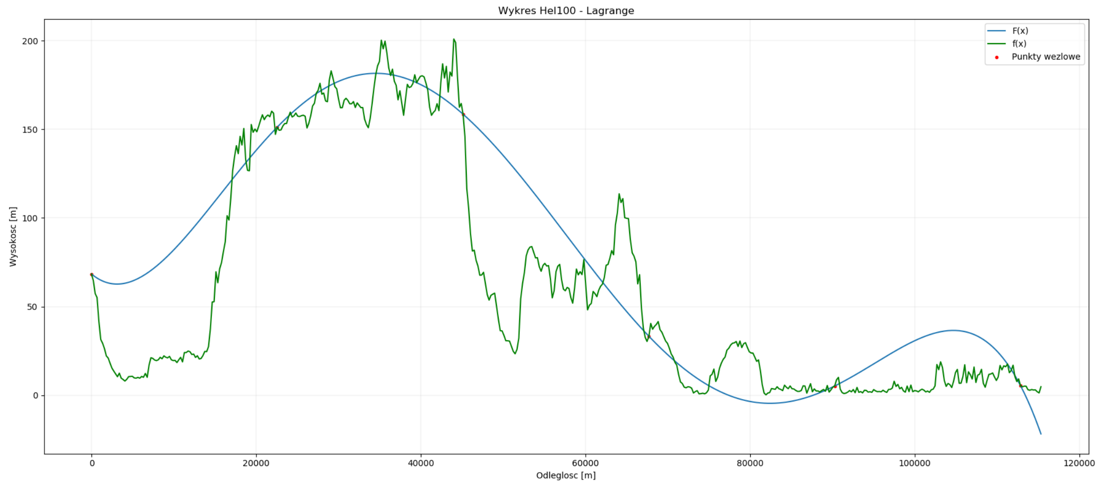
3 Interpolacja Lagrange'a

Jest to interpolaca przy pomocy wielomianu wysokiego stopnia, który przybliży przy pomocy szczątkowych danych wykres zadanej funkcji. Charakteryzuje się bardzo prostą implementacją. Od ilości węzłów zależy stopień obliczonego wielomianu.

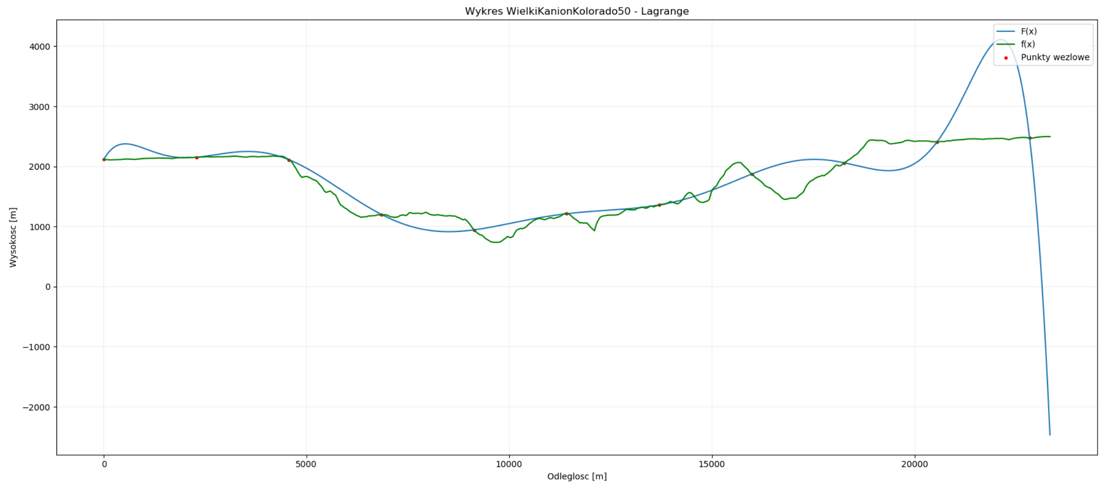
Na poniższym rysunku widzimy przybliżenia funkcji terenów dla Wielkiego Kanionu, Mount Everestu oraz Helu wielomianami 5 stopnia,

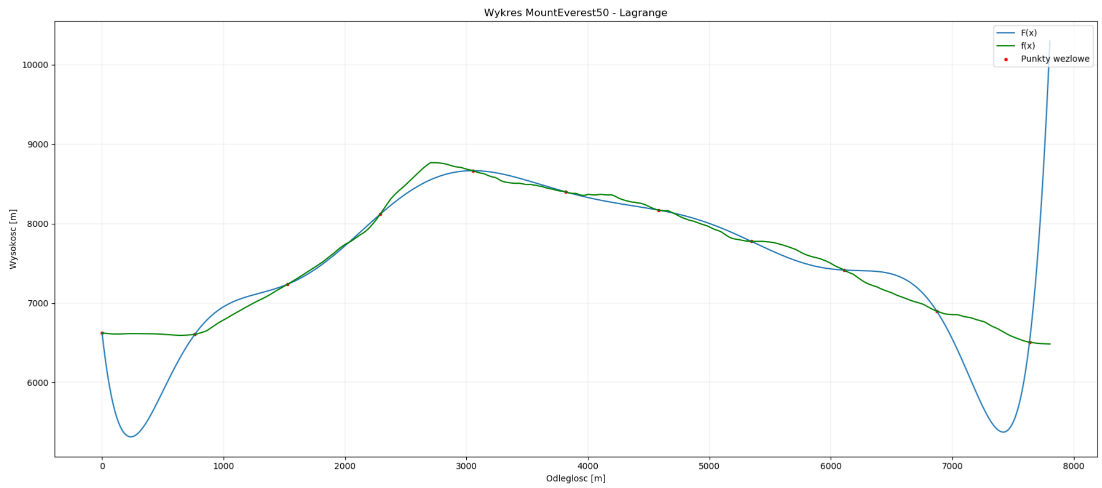


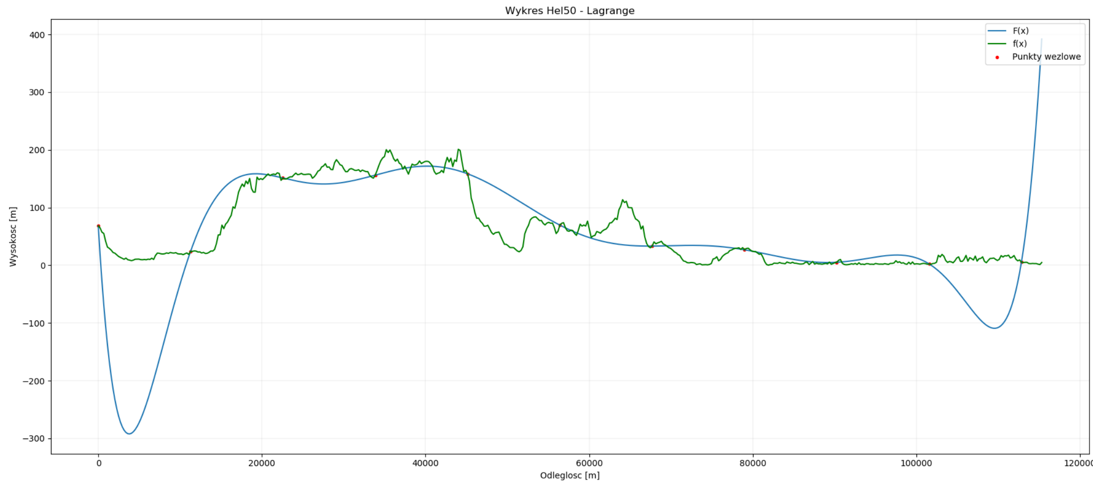




Przybliżenia są oczywiście bardzo niedokładne i takie wyniki nas nie satysfakcjonują. Zwiększmy więc stopień wielomianu:

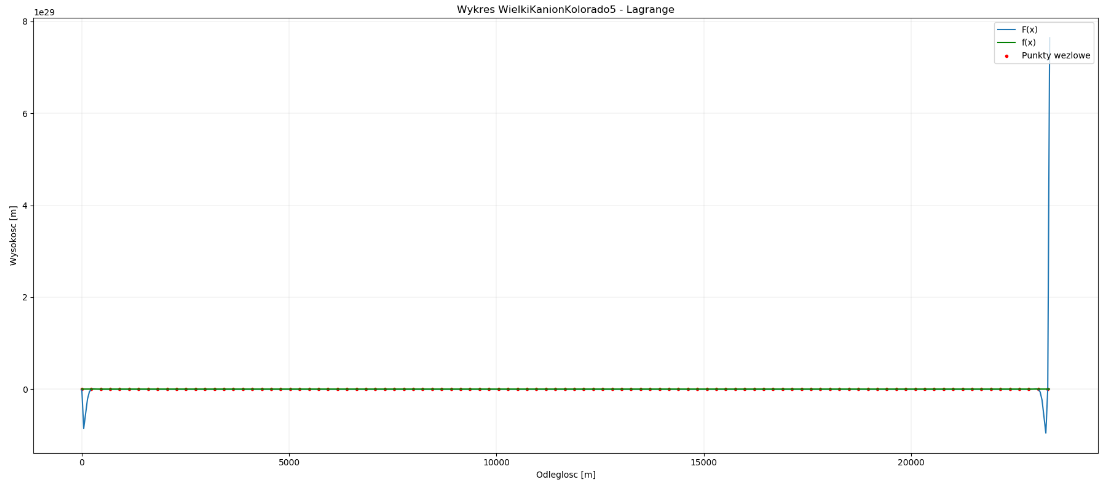


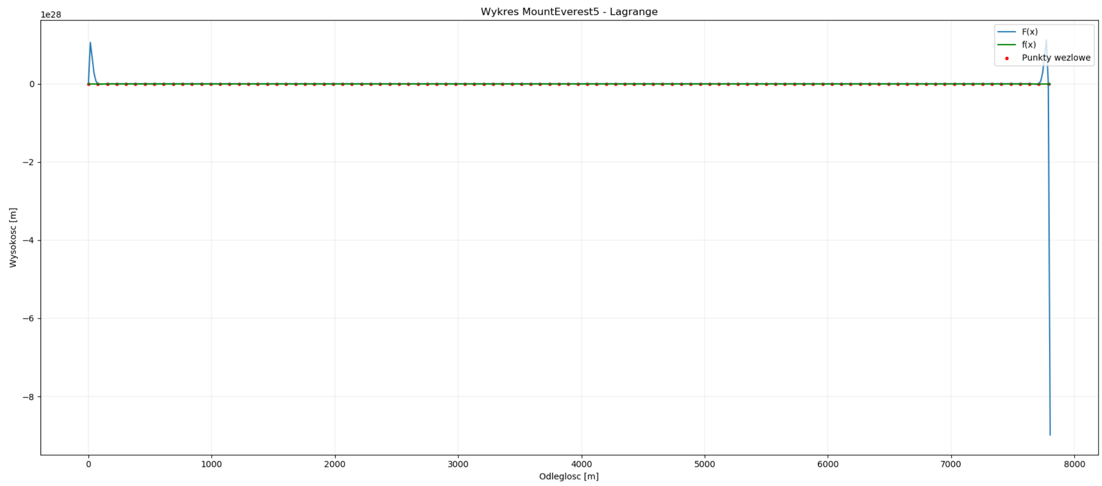


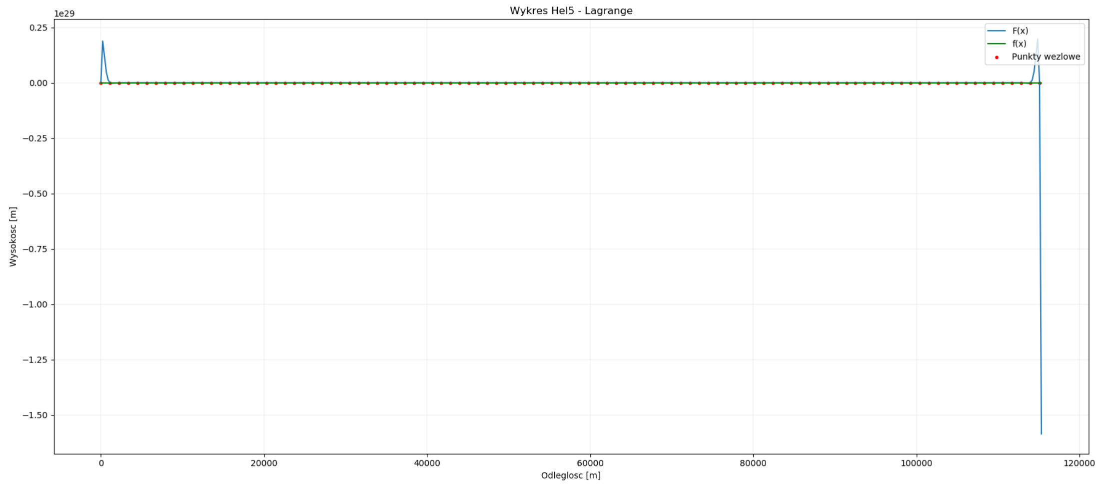


Interpolacje w tym przypadku, co prawda niewiele, ale bardziej pokrywają się z rzeczywistym wykresem. Jednak w granicach przedziałów możemy zauważyć już efekt Rungego, czyli pogorszenie jakości interpolacji. Efekt ten jest charakterystyczny dla metody Lagrange'a, gdy korzysta ona z wielomianów o większym stopniu.

Poniżej możemy zauważyć jak efekt Rungego potrafi narastać wraz ze wzrostem stopnia wielomianu. Przybliżenie funkcji w skrajnych momentach potrafi osiągnąć nawet nierealne wartości: ponad 8×10^{29} m lub prawie -8×10^{29} m, dla odpowiednio Mount Everestu i Wielkiego Kanionu. Abyśmy byli w stanie zaobserwować te wartości na wykresie musimy zmniejszyć wykres do tego stopnia, że nie widać żadnych szczegółów w środku wykresu





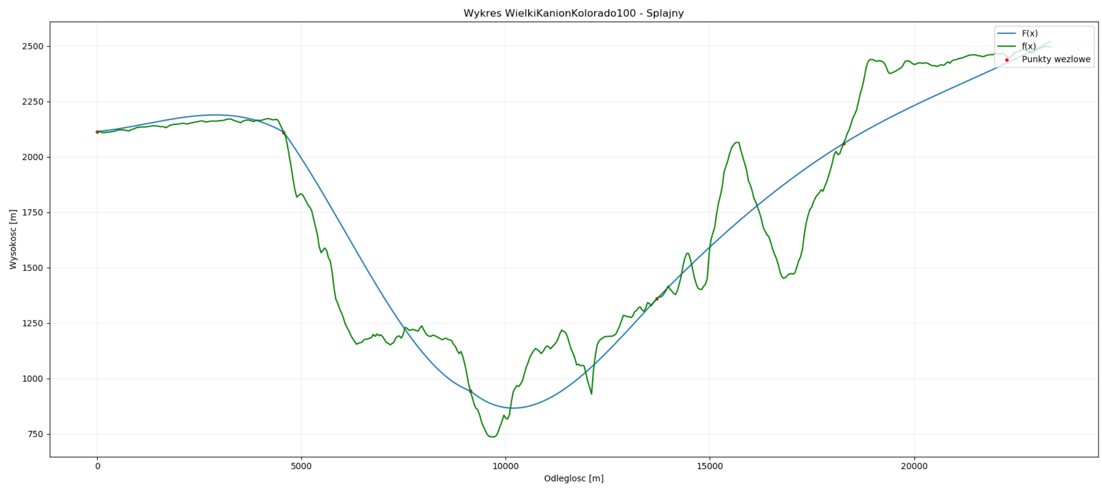


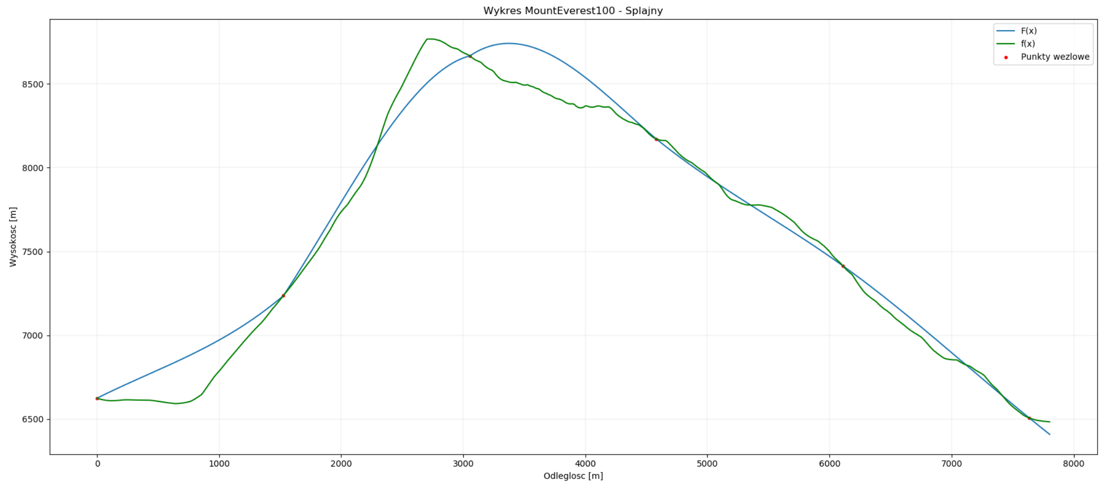
4 Interpolacja Splajnami

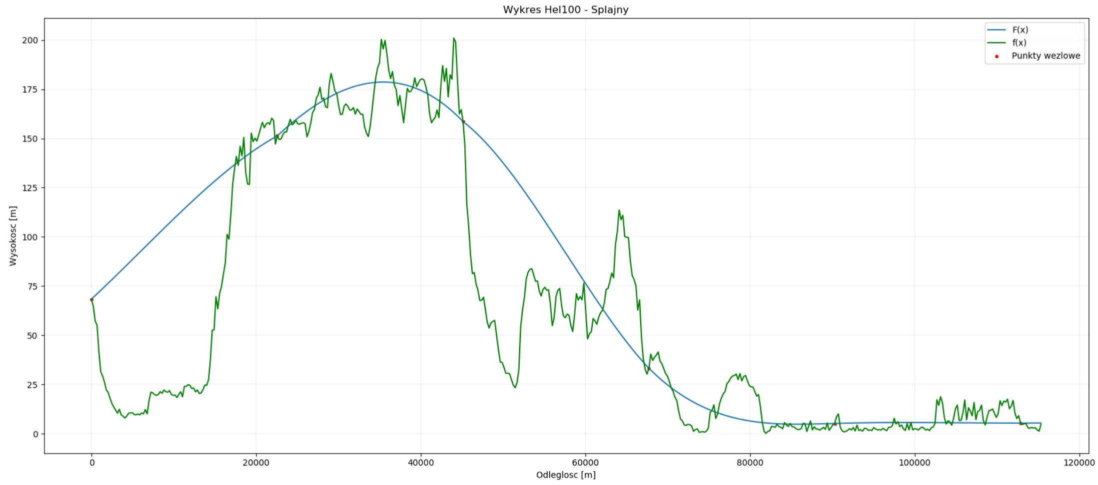
Ta metoda wyróżnia się tym, że zamiast wyznaczać jeden wielomian wysokiego stopnia należy wyznaczyć serię wielomianów stopnia trzeciego, które zostaną następnie śklejone"w jedną funkcję. W tym celu należy stworzyć macierzowy układ równań wynikających m. in. z wartości węzłów w punkcie oraz równości pierwszych i drugich pochodnych, a następnie wyznaczyć z niego współczynniki sklejanych funkcji przy pomocy standardowej metody rozwiązywania macierzy

W przypadku tej metody efekt Rungego nie występuje, a większa liczba węzłów daje nam dokładniejsze przybliżenie.

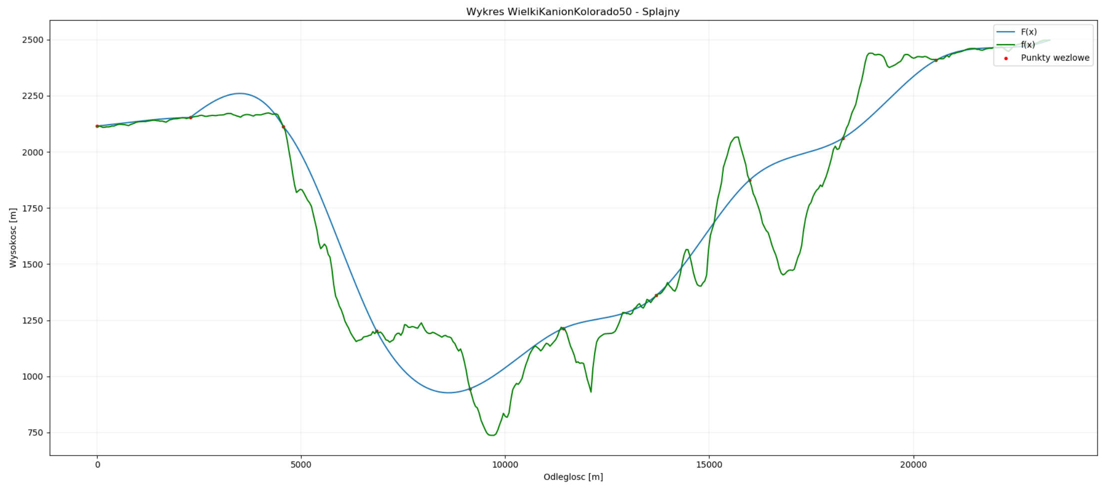
Na poniższych wykresach widzimy przybliżenie dla 6 punktów węzłowych.

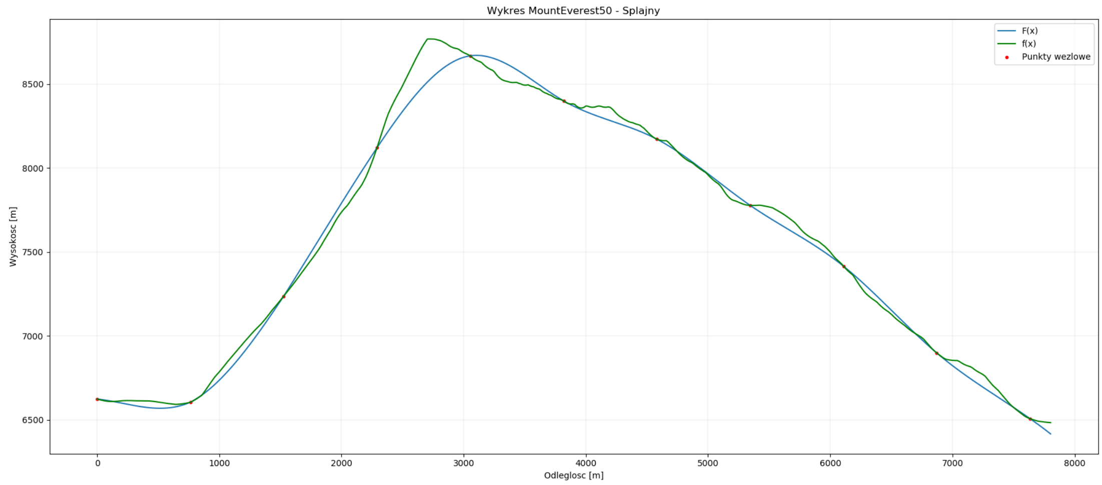


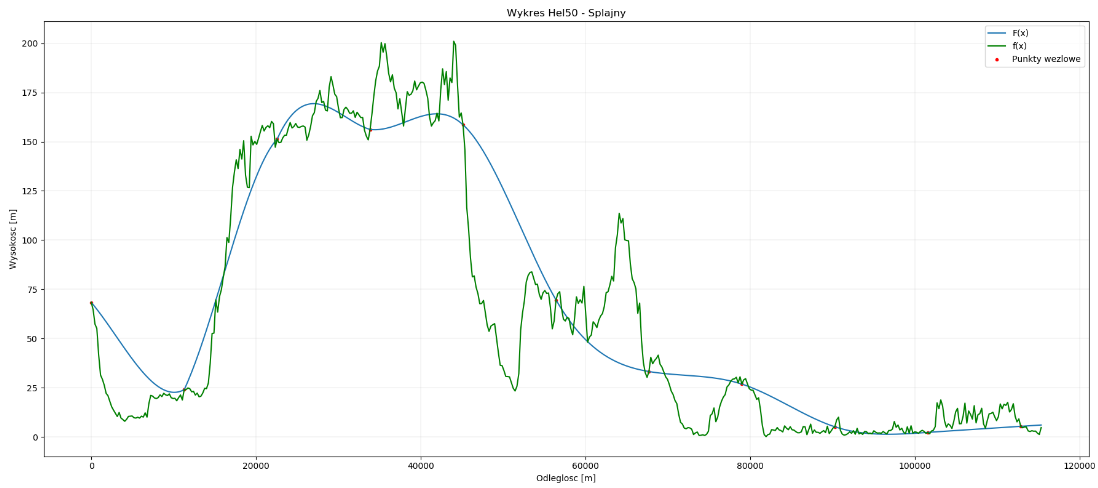




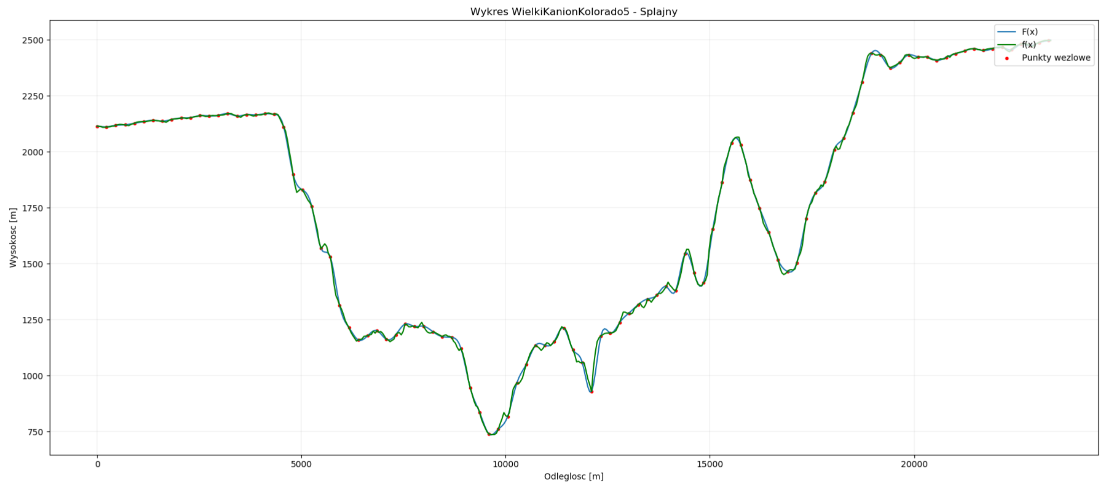
Tutaj podobnie jak dla metody Lagrange'a, przybliżenie jest bardzo niedokładne, a wynik niesatysfakcjonujący. Na poniższych wykresach możemy zauważyć tę samą liczbę węzłów dla których w przypadku Lagrange'a zaczynał występować efekt Rungego

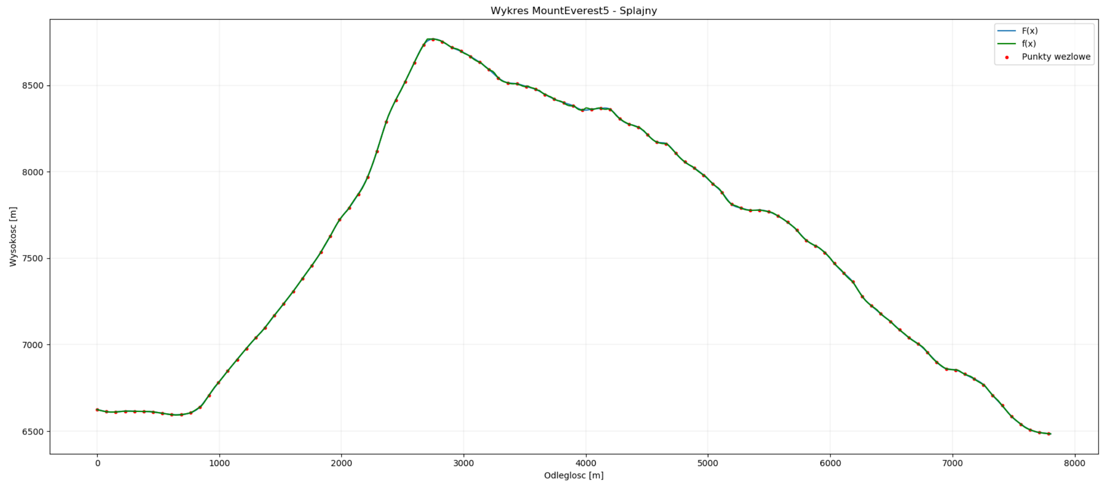


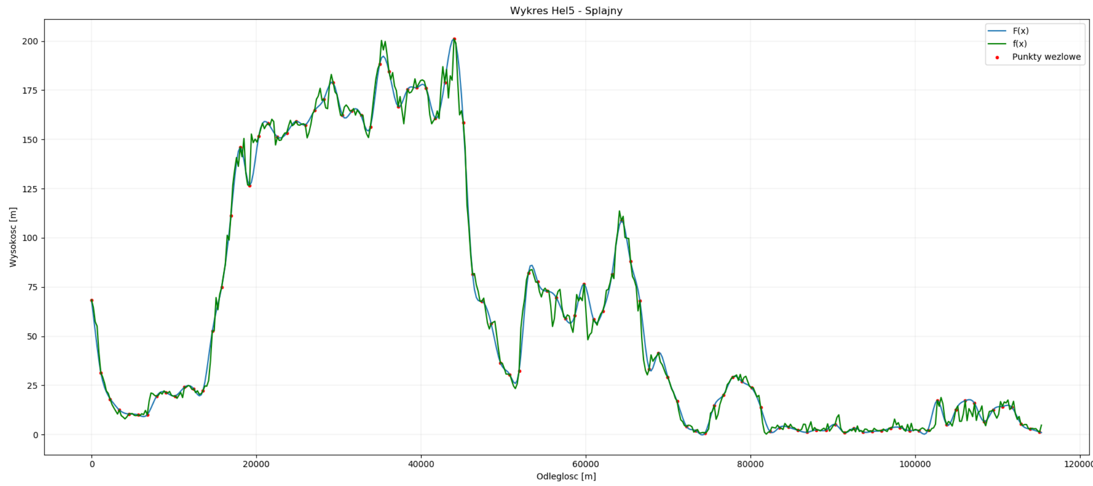




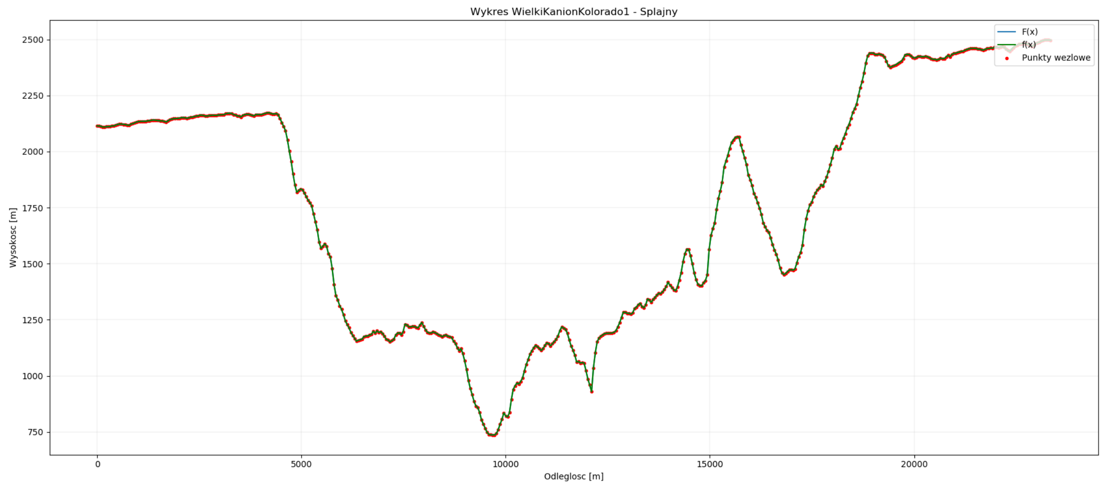
Na poniższych wykresach możemy zauważyć, że interpolacja funkcjami sklejanymi bardzo dobrze sobie poradziła z przybliżeniem funkcji. Możemy jednak odnotować niewielkie różnice w przypadku bardzo zróżnicowanego terenu jakim jest wykres przedstawiający teren Helu.

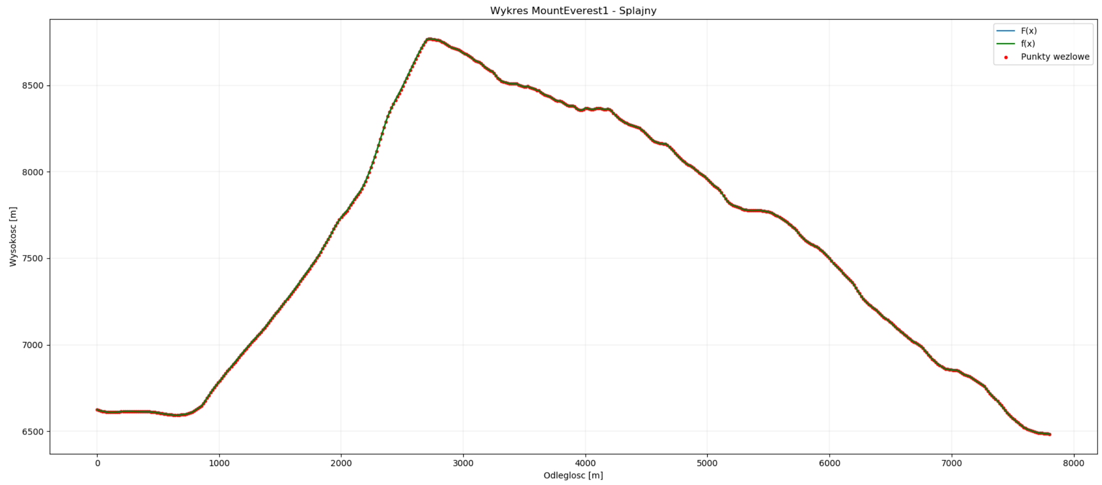


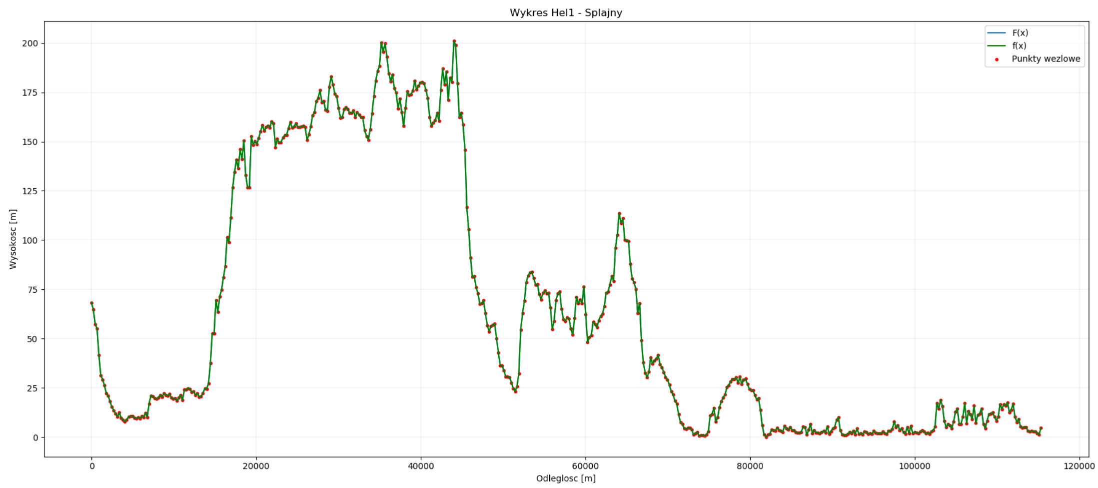




W przypadku maksymalnej możliwej liczby punktów węzłowych, wykresy interpolacyjne i rzeczywiste praktycznie się pokrywają







5 Wnioski

Metoda Lagrange'a jest szybsza oraz dużo łatwiejsza w implementacji oraz sprawdza się gdy mamy niewiele danych wejściowych. Może się przydać gdy potrzebujemy algorytmu ńa szybkołub nie interesują nas wartości brzegowe funkcji. Jednak nie nadaje się ona przy dokładniejszych obliczeniach oraz pracy na zbiorach rzeczywistych gdzie punktów węzłowych jest bardzo dużo, gdyż występuje efekt Rungego, który wprowadza olbrzymie przekłamanie wyniku na końcach przedziałów.

Interpolacja funkcjami sklejanymi, mimo że jest bardziej skomplikowana w implementacji oraz jest mniej wydajna przydaje się o wiele bardziej gdyż doskonale radzi sobie z interpolacją funkcji w przypadku wielu punktów węzłowych. Im więcej danych wejściowych tym wynik jest dokładniejszy. Mimo wszystko algorytm nieco gorzej radzi sobie z bardziej zróżnicowanymi trasami, do dokładnej interpolacji potrzebuje więcej punktów.