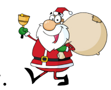
https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=561

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 9



6 grudnia 2023 r.

Zajęcia 12 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L9.1. 1 punkt Wytłumacz na przykładzie, dlaczego – z geometrycznego punktu widzenia – operacja dodawania punktów *po współrzędnych* nie jest dobrym pomysłem.

L9.2. 2 punkty Sprawdź, że wielomiany Bernsteina B_i^n mają następujące własności:

(a) B_i^n jest nieujemny w przedziale $[0,\,1]$ i osiąga w nim dokładnie jedno maksimum,

(b) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} B_i^n(u) \equiv 1$,

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{i}{n} B_i^n(t) = t$,

(d) $\displaystyle B_i^n(u) = \frac{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(u) + \frac{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(u) \quad (0 \le i \le n)$.

L9.3. 1 punkt Udowodnij, że wielomiany $B_0^n, B_1^n, \ldots, B_n^n$ tworzą bazę przestrzeni Π_n.

L9.4. 1 punkt Sformułuj i **udowodnij** *algorytm de Casteljau* wyznaczania punktu na krzywej Béziera. Jaka jest jego interpretacja geometryczna?

L9.5. 1 punkt Niech dane będą krzywe Béziera P_{n+1} stopnia $n+1$ oraz Q_{n-1} stopnia $n-1$ o znanych punktach kontrolnych. Dla danego $\alpha \in [0,1]$ krzywą parametryczną S_α definiujemy następującym wzorem:

$$S_\alpha(t) := (1-\alpha)P_{n+1}(t) + \alpha Q_{n-1}(t) \qquad (0 \le t \le 1).$$

Udowodnij, że S_α jest krzywą Béziera stopnia $n+1$. Podaj jej punkty kontrolne.

L9.6. 1 punkt Wykorzystaj schemat Hornera do opracowania algorytmu obliczania punktu na krzywej Béziera, który działa w czasie liniowym względem liczby jej punktów kontrolnych.

L9.7. 2 punkty Niech dany będzie wielomian w o następującej *postaci Béziera*:

$$w(x) := \sum_{k=0}^{n} c_k B_k^n(x),$$

gdzie współczynniki $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są znane. **Sformułuj i uzasadnij** efektywny `algorytm` znajdowania stopnia wielomianu w, tj. takiej liczby naturalnej $d \le n$, dla której $w \in \Pi_d \setminus \Pi_{d-1}$. Określ **złożoność** zaproponowanego algorytmu.

Wymierną krzywą Béziera R_n stopnia $n \in \mathbb{N}$ definiujemy wzorem

$$R_n(t) := \frac{\sum_{i=0}^{n} w_i W_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^{n} w_i B_i^n(t)} \qquad (0 \le t \le 1), \tag{1}$$

gdzie $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ są danymi *punktami kontrolnymi*, a $w_0, w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{R}_+$ — odpowiadającymi im *wagami*.

L9.8. 1 punkt Wykaż, że dla każdego $t \in [0,1]$ $R_n(t)$ jest punktem na płaszczyźnie będącym kombinacją barycentryczną punktów kontrolnych $W_0, W_1, \ldots, W_n \in \mathbb{E}^2$ (patrz (1)).

L9.9. **Włącz komputer!** 1 punkt Używając komputera, narysuj wykres wymiernej krzywej Béziera dla punktów kontrolnych

$$(0,0),\ (3.5,36),\ (25,25),\ (25,1.5),\ (-5,3),\ (-5,33),$$
$$(15,11),\ (-0.5,35),\ (19.5,15.5),\ (7,0),\ (1.5,10.5)$$

i odpowiadającego im układu wag $1, 6, 4, 2, 3, 4, 2, 1, 5, 4, 1$. Co ona przedstawia? Zmieniając wartości wag, postaraj się ustalić eksperymentalnie jakie mają one znaczenie dla kształtu wymiernej krzywej Béziera.

(–) Paweł Woźny