L6 zad	1	2	3	4	5	6	7	max
pkt	1	1	2	2	1	1	1	9
maxpkt	1	1	2	2	1	1	1	9

L6.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L6.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są dane, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa*.

L6.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_5.

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

(c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

L6.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

L6.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

L6.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

x_k	-10	-5	7	11
y_k	8	-3	5	0

L6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 2023x^8 + 1977x^7 - 1939x^4 + 1410x^2 - 966x + 1996$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 8 interpolujący funkcję f w punktach $-2023,\ 1977,\ -1945,\ \sin(1),\ 1989,\ -1939,\ 1791,\ 1945,\ \pi$.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1,\ 0,\ 1$.