Lista02

11 October, 2024 12:54

1. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

2. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna dzieli drugą.

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

5. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

6. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)

7. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

8. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

   Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

9. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

.

10. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

11. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: zielony lub pomarańczowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

12. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą reką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

13. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

14. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

15. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

1. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

$S_k = a_1 + \ldots + a_k$ $\quad a_i + \ldots + a_j = S_j - S_{i-1}$

Szukamy $(S_j - S_{i-1}) \bmod n = 0 \Rightarrow S_j \equiv S_{i-1} \pmod n$

Mamy $n+1$ sum S_k, a tylko n wartości mod n $(0 - n-1)$

$\Rightarrow$ z PP wiemy, że conajmniej dwie przystają mod n

$\Rightarrow$ istnieje $\square$

2. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna dzieli drugą.

Dowolne $n \Rightarrow 2^k \cdot r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ nieparzystych

zał. $k_1 > k_2$

Jest dokładnie n nieparzystych w $1-2n$ $(1, 3, \ldots, 2n-1)$

$\Rightarrow$ PP ... 2 - takim samym $r \Rightarrow \frac{2^{k_1} \cdot r}{\ldots} = 2^{k_1 - k_2}$

jest dokładnie n nieparzystych w [1, 2n] (1, 3, ..., 2n−1)

Z PP min. 2 z takim samym r $\Rightarrow \frac{2^{k_1} \cdot r}{2^{k_2} \cdot r} = 2^{k_1 - k_2} \in \mathbb{Z}$ □

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

Weźmy n+1 liczb tylko z jedynek $(1, 11, \ldots, \underbrace{1\ldots1}_{n+1})$

war. a) któraś podzielna przez n $\Rightarrow$ □

war. b) w.p.p. z PP min. 2 a, b (a > b) gdzie $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a - b$ składa się tylko z 1 i 0 i jest podzielne przez n

4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10. ← 2 i 5

$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b)$

War. $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow ab \equiv 0 \lor a-b \equiv 0 \lor a+b \equiv 0$

Dowolna $a, b, c \equiv 0 \bmod 5$ to war. spełniony

w.p.p. $\{a, b, c\} \equiv_{\bmod 5} \{1,2,3\} \lor \{1,2,4\} \lor \{2,3,4\} \lor \{2,3,5\} \lor \{3,4,5\}$ lub z duplikatami

$1+4 \equiv 2+3 \equiv$ dupl. − dupl. $\equiv 0 \bmod 5$

□ dla 5, analogicznie dla 2 □

5. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

Nie wprost $\Rightarrow \neg\exists$ X, K × K $\Rightarrow$ każda osoba graniczy z mężczyzną

Optymalne rozłożenie:

$M_1 K_1 K_2 M_2 M_3 K_3 K_4 M_4 M_5 K_5 K_6 M_6 M_7 K_7 K_8 M_8 M_9 K_9 K_{10} M_{10} M_{11} K_{11} K_{12} M_{12} M_{13} K_{13}$

Dla każdej nieparzystej nie działa □

6. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n + 1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)