

Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. **Drzewo rozpinające** grafu G to podgraf $T = (V, E')$, który jest drzewem. T zawiera wszystkie wierzchołki G .

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem niekoniecznie spójnym. **Las rozpinający** grafu G to podgraf $F = (V, E')$, który jest lasem o liczbie spójnych składowych równej liczbie spójnych składowych G .

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Drzewo rozpinające grafu G to podgraf $T = (V, E')$, który jest drzewem.

Waga drzewa rozpinającego $c(T) = \sum_{e \in E'} c(e)$.

Minimalne drzewo rozpinające (MST) grafu G to drzewo rozpinające G o minimalnej wadze.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Algorytm Kruskala:

$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$ (sortujemy krawędzie względem wagi)
 $T \leftarrow \emptyset$

kolejno dla każdego $i, 1 \leq i \leq m$ wykonaj następujące:

jeśli dodanie e_i do T nie tworzy cyklu w T , dodaj e_i do T
(w p.p. nie dodawaj e_i do T)

Znajdowanie MST

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Algorytm Kruskala:

$c(e_1) \leq c(e_2) \leq \dots \leq c(e_m)$ (sortujemy krawędzie względem wagi)
 $T \leftarrow \emptyset$

kolejno dla każdego $i, 1 \leq i \leq m$ wykonaj następujące:

jeśli dodanie e_i do T nie tworzy cyklu w T , dodaj e_i do T
(w p.p. nie dodawaj e_i do T)

Zarys implementacji.

Algorytm Prima

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Algorytm Prima:

$T \leftarrow$ dowolny wierzchołek $u \in V$

Dopóki T nie jest drzewem rozpinającym wykonaj następujące:
spośród krawędzi o jednym wierzchołku w T a drugim poza
wybierz tę o najmniejszej wadze i dodaj ją do T

Algorytm Boruvki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \rightarrow R \geq 0$.

Algorytm Boruvki:

$T \leftarrow V$ (wszystkie wierzchołki z V , zero krawędzi)

Dopóki T nie jest drzewem rozpinającym wykonaj następujące:

dla każdej spójnej składowej C_i grafu T wykonaj następujące:

spośród krawędzi o jednym wierzchołku w C_i a drugim poza

wybierz tę o najmniejszej wadze i oznacz ją jako $e(C_i)$

dodaj wszystkie krawędzie $e(C_i)$ do T

Skojarzenie (matching)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym. **Skojarzenie** grafu G to dowolny podzbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca.

Zastosowania:

- rozlokowanie osób w pokojach 2-osobowych,
- przydział zadań pracownikom,
- przydział zadań maszynom.

Skojarzenie (matching)

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem. **Skojarzenie** grafu G to dowolny podzbiór krawędzi $M \subseteq E$ taki, że żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca.

Skojarzenie największe grafu G to skojarzenie o maksymalnej liczbie krawędzi.

Ścieżka alternująca

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a M jakimś skojarzeniem w G . Wierzchołek $v \in V$ jest **skojarzony** w M , jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z M .

Wierzchołek $v \in V$ jest **nieskojarzony/ wolny** w M , jeśli żadna krawędź z M nie jest z nim incydentna.

Ścieżka P w grafie G jest **alternująca (względem M)** jeśli krawędzie na P na przemian należą i nie należą do M .

Ścieżka P w grafie G jest **powiększająca (względem M)**, jeśli jest alternująca (wzgl. M) i jej końce są nieskojarzone (w M).

Ścieżka alternująca

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym, a M jakimś skojarzeniem w G . Wierzchołek $v \in V$ jest **skojarzony** w M , jeśli jest końcem jakiejś krawędzi z M .

Wierzchołek $v \in V$ jest **nieskojarzony**/ **wolny** w M , jeśli żadna krawędź z M nie jest z nim incydentna.

Ścieżka P w grafie G jest **alternująca (względem M)** jeśli krawędzie na P na przemian należą i nie należą do M .

Ścieżka P w grafie G jest **powiększająca (względem M)**, jeśli jest alternująca (wzgl. M) i jej końce są nieskojarzone (w M).

Skojarzenie doskonałe/ pełne grafu G to skojarzenie, w którym każdy wierzchołek z V jest skojarzony.

Cykl C w grafie G jest **alternujący** (względem M) jeśli krawędzie na C na przemian należą i nie należą do M .

Jaką długość ma cykl alternujący?

Skojarzenie największe

Skojarzenie M grafu G jest największe wtw, gdy G nie zawiera ścieżki powiększającej względem M .