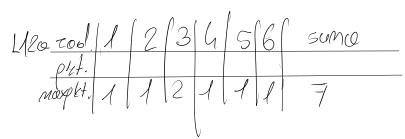
3 styczma 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r. Zaliczenie list 12a i 12b: od 6 pkt. łącznie.

Uwaga! Z list 12a i 12b nie można zdobyć łącznie więcej niż 11 punktów



L12.1. 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania PWO++ ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura Integral (f) znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-20}^{20} f(x) \mathrm{d}x$, gdzie $f \in C[-20,24]$. W jaki sposób użyć procedury Integral do obliczenia całki

$$\int_{a}^{b} g(x) dx \qquad (a < b; \ g \in C[a, b])?$$

L12.2. 1 punkt Udowodnij, że kwadratura postaci

(1)
$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k).$$

ma rząd $\geq n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

 x_0,x_1,\ldots,x_n . Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami x_0,x_1,\ldots,x_n przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_{a}^{b} f(x) dx.$$

 $I(f):=\int_a^b \! f(x)\,\mathrm{d} x.$ Jak wiadomo, współczynniki $A_k\;(0\le k\le n)$ kwadratury $Q_n,$

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int\limits_a^b \left(\prod_{i=0\atop i\neq 0}^n \frac{x-x_i}{x_k-x_i} \right) \mathrm{d}x \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Podaj efektywny algorytm obliczania współczynników A_0, A_1, \dots, A_n i określ jego

 ${\bf L12.4.}$ $\fbox{1}$ punkt Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(a+k\cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right)$$

są takie, że $A_k = A_{n-k} \ (k=0,\,1,\ldots,n).$

- L12.5. 1 punkt Podaj efektywny algorytm obliczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania L12.3-L12.4) i określ jego złożoność.
- L12.6. Włącz komputer! 1 punkt Wykorzystując własną implementację algorytmu, o którym mowa w zadaniu L12.5, oblicz $Q_n^{NC}(f)$ ($2 \le n \le 24$) dla całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1 + 25x^2}$$

Skomentuj wyniki.