1b (done)

2 December, 2023 15:28

L8.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NIFS3) dla danych

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

Wzór na k-ty segment NIFS3

$$s(x) = h_k^{-1}\Big[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + (f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) + (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x - x_{k-1})\Big]$$

Gdzie $H_k := x_k - x_{k-1}$ oraz $M_k := s''(x_k)$

Momenty M_k spełniają następującą zależność $(*)$:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

Gdzie $f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ to iloraz różnicowy zdefiniowany wcześniej, natomiast współczynniki $\lambda_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$

b)

	0	1	2	3	4	5	6
x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

Wzór wymusza policzenie ilorazów różnicowych -1, 0, +1

n	x_n	y_n	$f_n[x_n, x_{n+1}]$	$f_n[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]$
0	-7	-16185	$\frac{6069}{3} = 2023$	X
1	-4	-10116	2023	0
2	-2	-6070	2023	0
3	0	-2024	2023	0
4	1	-1	2023	0
5	5	8091	2023	0
6	10	18206	X	X

$M_0 = 0$

$M_6 = 0$

$M_k := s''(x_k)$, więc $M_0 = 0$, $M_6 = 0$

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1-\lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

mamy więc 5 równań w układzie

$$\begin{cases} \lambda_1 M_0 + 2M_1 + (1-\lambda_1)M_2 = 0 \\ \lambda_2 M_1 + 2M_2 + (1-\lambda_2)M_3 = 0 \\ \lambda_3 M_2 + 2M_3 + (1-\lambda_3)M_4 = 0 \\ \lambda_4 M_3 + 2M_4 + (1-\lambda_4)M_5 = 0 \\ \lambda_5 M_4 + 2M_5 + (1-\lambda_5)M_6 = 0 \end{cases} \xRightarrow{*1,\ *2} \begin{cases} 1\quad 2M_1 + \frac{2}{5}M_2 = 0 \\ 2\quad \frac{1}{2}M_1 + 2M_2 + \frac{1}{2}M_3 = 0 \\ 3\quad \frac{2}{3}M_2 + 2M_3 + \frac{1}{3}M_4 = 0 \\ 4\quad \frac{1}{5}M_3 + 2M_4 + \frac{4}{5}M_5 = 0 \\ 5\quad \frac{4}{9}M_4 + 2M_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{same zera}$$

$*_1$ wyrazy zerowe

$*_2$ policzmy lambdy

$h_1 = -4+7 = 3 \quad \lambda_1 = \frac{3}{5}$

$h_2 = 0+2 = 2 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$h_3 = 2 \quad \lambda_3 = \frac{2}{3}$

$h_4 = 1 \quad \lambda_4 = \frac{1}{5}$

$h_5 = 4 \quad \lambda_5 = \frac{4}{9}$

$h_6 = 5$

Można się już domyślić że to liniowa

a stąd obstawić

odp. $\boxed{y = 2023x - 2024}$

$$s(x) = h_k^{-1}\Big[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + (f(x_{k-1}) - \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) + (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x - x_{k-1})\Big]$$

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

Skorzystam raz ze wzoru by się upewnić

$$s(x) = h_k^{-1}\Big[\cancel{\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3}^{\,0} + \cancel{\frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3}^{\,0} + (f(x_{k-1}) - \cancel{\frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2}^{\,0})(x_k - x) + (f(x_k) - \cancel{\frac{1}{6}M_k h_k^2}^{\,0})(x - x_{k-1})\Big]$$

$$s(x) = \frac{f(x_{k-1})(x_k - x) + f(x_k)(x - x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

dla $k=1$ się sprawdza