Lista09

31 December, 2024 12:18

1. Ile jest nieidentycznych digrafów (grafów skierowanych) o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

$$!n = n!\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

2. Ile jest nieidentycznych grafów nieskierowanych niekoniecznie prostych na n wierzchołkach, które zawierają dokładnie m krawędzi?
3. Dla każdego $n \geq 2$ opisz jak wygląda graf nieskierowany prosty n-wierzchołkowy niespójny o maksymalnej liczbie krawędzi.
4. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$, gdzie m to liczba krawędzi a n wierzchołków.

two-colouring grafa

5. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

Tylko od niektórych pól

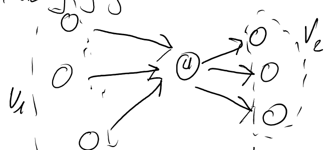
6. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Kolorujemy kostki czarny/biały
jest 13 kostek o kolorze środkowej, 14 drugich
więc nie

7. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki garfu. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.
8. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po sicieżce o dł. co najwyżej 2.
9. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.
10. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?
11. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

8. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po sicieżce o dł. co najwyżej 2.

Weźmy wierzchołek o największej ilości wychodzących krawędzi.
Nazwijmy go u.



Jeśli u nie ma żadnych krawędzi wchodzących, obv.

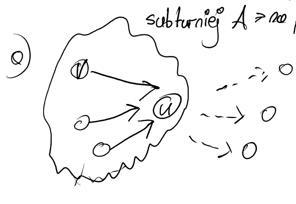
W przeciwnym wypadku, udowodnimy to nie wprost:
Załóżmy że wierzchołek v wchodzący w u nie jest osiągalny z u w dwóch krokach
Oznacza to że v ma krawędź wychodzącą do każdego wierzchołka z V_2 oraz do u, mamy więc sprzeczność z założeniem.

9. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.

I Ma krawędź wchodzącą ⇒ ma wchodzącą od króla

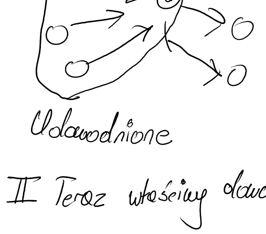
subturniej A ⇒ na pewno ma króla, dowód z zad 8

a)



Jest to V (bez utraty ogólności)

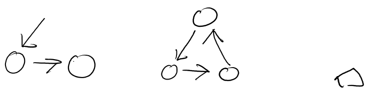
b)



Nadal jest królem dla subturnieju A, jest też królem dla pozostałych za pośrednictwem u

Udowodnione

II Teraz właściwy dowód



7. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki garfu. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.

Można to bardzo łatwo udowodnić
za pomocą indukcji

I $n=2$ obvious

II Załóżmy że dla n działa

III Udowodnijmy dla $n+1$

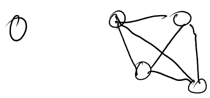
Wybierzmy losowe v, pozostałe n wierzchołków
podzielmy na wierzchołki wchodzące do i
wychodzące z v. Obydwie grupy są
wielkości co najwyżej n, a więc założenie
indukcyjne zapewnia istnienie ścieżki Hamiltona
wewnątrz tych grup. Weźmy te dwie ścieżki
i połączmy w następujący sposób
(ścieżka z wchodzących) → v → (ścieżka z wychodzących)
otrzymujemy ścieżkę Hamiltona długości $n+1$ ☐

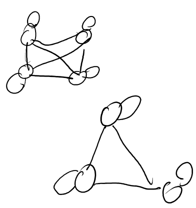
3. Dla każdego $n \geq 2$ opisz jak wygląda graf nieskierowany prosty n-wierzchołkowy niespójny o maksymalnej liczbie krawędzi.

Zbiór wierzchołków mających maksymalną
możliwą ilość krawędzi nazywamy kliką.
Klika maksymalizuje ilość krawędzi dla
danej ilości wierzchołków. Maksymalna ilość
krawędzi dla grafu niespójnego będzie przy
podziale na dwie części.

n-wierzchołkowa klika ma $\frac{n(n-1)}{2}$ krawędzi

Zmaksymalizujemy ilość krawędzi dla n wierzchołków
gdy będzie to graf dwudzielny gdzie będziemy
mieli $n-1$ wierzchołkową klikę i 1 osobny wierzchołek





2. Ile jest nieidentycznych grafów nieskierowanych niekoniecznie prostych na n wierzchołkach, które zawierają dokładnie m krawędzi?

Chcemy dokładnie m krawędzi, graf może
być nieprosty, więc możemy dowolną ilość krawędzi
od każdego wierzchołka → n opcji startu i n opcji końca,
ale nie rozróżniamy kierunku → $n!$ opcji → $n! \cdot m$

11. Digraf D jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy D zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

I row=0 index=1

II

I sprawdzamy pole row, index
if(r, i)==1 index+1 jest wykluczone, bo krawędź wchodząca
index+=1

if(r, i)==0 row wykluczony, idziemy do kolejnego [illegible] wierzchołków w D. Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.

I row=0 index=1

$$\begin{matrix} 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

II

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & \underline{0} & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

III

$$\begin{array}{c|cccc} M & 0 & 1 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 1 & 0 & \underline{1} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

IV

$$\begin{array}{c|ccccc} M & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

if(r, i)==1 index+1 jest wykluczone, bo krawędź wchodząca index+=1

II (r, i)==0 row wykluczony, idziemy do kolejnego piemorked
row=2 index+=1

III wyklucza row=4

w 4 pozostaje tylko jedna potencjalna wersja do sprawdzenia

Jak dodamy wiersz/kolumnę zer to znowu się wykluczy wszystko oprócz jednego

Dostajemy prosty algorytm o złożoności liniowej. Sprawdzamy n-1 pól by wykluczyć n-1 potencjalnych wierszy. Na koniec dostajemy 1 wiersz, gdzie jeszcze sprawdzimy czy każde pole jest poprawne (1 wszędzie oprócz przekątnej)

10. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?

1. Definicja grafu Q_n:

Graf Q_n (n-wymiarowa hiperkostka) to:

- **Wierzchołki:** Wszystkie możliwe ciągi bitowe długości n (np. dla $n = 3$, mamy $000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111$).
- **Krawędzie:** łączą dwa wierzchołki, jeśli różnią się dokładnie jednym bitem. Np. 000 i 001 są połączone, ale 000 i 011 nie są.

Zakładamy, że Q_{n-1} ma ścieżkę Hamiltona, i pokażemy, że Q_n również ją ma:

1. **Struktura Q_n:** Graf Q_n można podzielić na dwa podgrafy Q_{n-1}, odpowiadające ciągom bitowym z początkowym bitem 0 (lewa połowa) i 1 (prawa połowa).
   - Każdy podgraf Q_{n-1} jest izomorficzny do Q_{n-1} i zawiera ścieżkę Hamiltona (z założenia indukcyjnego).
2. **Łączenie podgrafów:** Łączymy te dwa Q_{n-1}, dodając jedną krawędź pomiędzy końcem ścieżki Hamiltona w jednym podgrafie a początkiem ścieżki w drugim. W rezultacie powstaje ścieżka Hamiltona dla Q_n.