MD - Lista 1

6 October, 2023 11:50

# 1 2 (30 5) 5 6 7 8 9 10 18 12 13 14 15 16 pt 1/4 mojil 9

Lista nr 1 z matematyki dyskretnej

- 1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z melementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi  $\frac{n!}{[n-m]!}$ .
- 2 Czy wśród liczb 1, 2, . . . , 10<sup>10</sup> zapisanych w systemie dzisiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?
  - 3. (D) Ile jest podzbiorów  $n\text{-elementowego zbioru}\ A$ o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?
- 4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach.
- Jo. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian?
- 6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału [1, n] oraz (ii) suma a + b jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?
- (-) Ile jest možliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?
- 9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby |nx| = n[x], gdzie n
  jest liczbą naturalną. Podpowiedź: Warunek powinien zawierać funkcję
  część ułamkowa {x}.
- 10. Niech  $x \in R, x \ge 0$ . Czy prawdziwe jest stwierdzenie:  $|\sqrt{|x|}| = |\sqrt{x}|$ ?
  - 11. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?
- Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

- 13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?
- 14. Chcemy rozmieścić n krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych)
  palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest
  poprawnych rozłożeń?
- - 16. Dla  $k \ge 1$  wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

#### Zadanie 1

6 October, 2023 12:07

1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z  $m\!\!-\!\!$ elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi  $\frac{n!}{(n-m)!}$ 

#### Injective functions from N to X [edit]

This case is equivalent to counting sequences of n distinct elements of X, also called n-permutations of X, or sequences without repetitions; again this https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold\_way#Injective\_functions\_from\_N\_to\_X sequence is formed by the n images of the elements of N. This case differs from the one of unrestricted sequences in that there is one choice fewer for the second element, two fewer for the third element, and so on. Therefore instead of by an ordinary power of x, the value is given by a falling factorial power of  $\emph{x}$ , in which each successive factor is one fewer than the previous one. The formula is

$$x^{\underline{n}}=x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Note that if n > x then one obtains a factor zero, so in this case there are no injective functions  $N \to X$  at all; this is just a restatement of the pigeonhole principle.

Example:

$$\begin{split} X &= \{a,b,c,d\}, N = \{1,2\}, \text{then} \\ &|\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}| = 4^2 = 4 \times 3 = 12 \end{split}$$

2. Czy wśród liczb $1,2,\dots,10^{10}$ zapisanych w systemie dzisiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?

1010-910=6 513 215 599

## (D) Zadanie 3 (dopracować) 6 October, 2023 13:02

## Dla porystych i niepazystych będzie tok sono

3. (D) Ile jest podzbiorów *n*-elementowego zbioru *A* o <u>nieparzystej</u> ilości elementów? A o parzystej? Zatožne ze bedzie 2n-l pozbiordu nieporzestych. Udownonine prozinduteje T n= 1 2 n-1 = 20= 1 Ogol Inie jest 2"= 2 = 2 pozbiorów: Zbiór posty izbiór A jeden zbiot nieporzysty I Zotožny že dla | Al = n jest 2 podzbiorów niepozystych.
Volowoolnijmy że I/I = n+1 siest 2 podzbiorów niepozystych. Niech IAl-ntl, X & A  $A^{\prime\prime} = A / \langle x^2 \rangle$  $\left( \bigwedge^{i} \right) = \bigcap$ Niech BCA

ježeli X&B to BCA' tak! že B'UXXJ= A

ježeli X&B to istnieje B'CA' tak! že B'UXXJ= A

wtedy A'= A\CXJ Niech C beolzie liczlog podzbiorów A z pieporzystą liczbą elementów wtedej z zolożenia C= 2 n-1

Niech D'S A', gobie D' mo porzysta liezbe elementus

4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach.

- nie bierre volziatu w K

- obie

- nie bierre volziatu w K

- obie

- obie

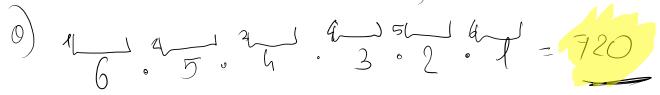
kożola osola ma do wylsoru jedną z opeji

o więc

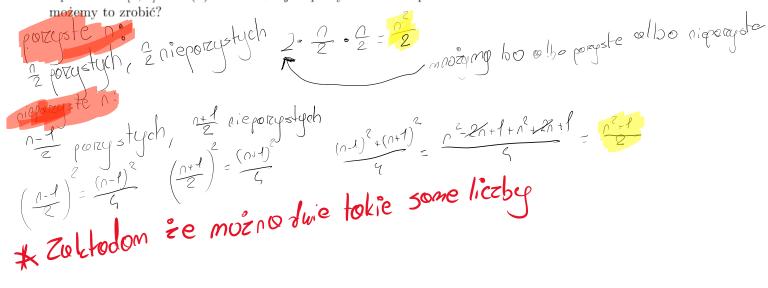
Oop.

Oop.

5. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian?



6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a,b), taką że (i) liczby a,b są z przedziału [1,n] oraz (ii) suma a+b jest parzysta. Na ile sposobów meżemy to zrobić?



70 dania 7 l	/ d a n a \
Zadanie 7 (	(aone)

6 October, 2023 12:08

Zoktodojec 26 liter &

7. (-) Ile jest możliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?

76 76 76 10 10 Mnozymy potencjolne opcje

0 do 26 3 109

## Zadanie 8 (done)

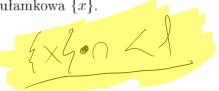
6 October, 2023

8. (-) Pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej n zachodzi [x + n] = [x] + n.  $Z = \{x\} + [n] = [x] + n$ .  $Z = \{x\} + [n] = [x] + [x] +$ 

## Zadanie 9 (done)

6 October, 2023 13:02

9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby  $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$ , gdzie n jest liczbą naturalną. Podpowiedź: Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa  $\{x\}$ .



## Definicja

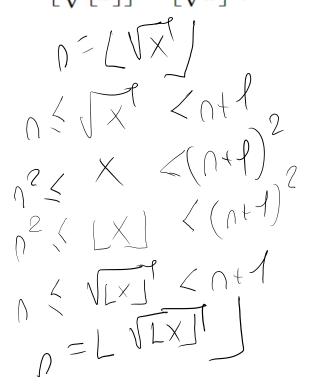
Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, to mówimy, że p jest warunkiem wystarczającym dla q, a q jest warunkiem koniecznym dla p.

Warunek wystarczający nazywany jest też warunkiem dostatecznym.

## Zadanie 10 (done)

6 October, 2023 13:02

10. Niech  $x \in R, x \ge 0$ . Czy prawdziwe jest stwierdzenie:  $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ ?



## Zadanie 11 (-)

6 October, 2023 13:02

11. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?

#### Zadanie 12 (done)

6 October, 2023 12:14

12. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

14. 17.15 = 2805

Zoktodem že, toko soma ilosé sla
dwóch olzicei to różne Zdorenia (np. dzialeo A 10 rumientów
i dzialeo b 10 rumientow to dwie sytuacyć). Wtesty
licząc ola jednego dziedca:

Zadanie 13 (done)

6 October, 2023 12:34

13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?

Mozda waspa ma 13 niezoleżnych czy 13 tokich somych. (b-rottodom że nie wysyta jednej osobie codziennie tej somej XDD)

14. Chcemy rozmieścić *n* krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych) palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest poprawnych rozłożeń?

Roczej Ojit Zaczyna my od nojwiększego potem po kolei coroz mniejsze. Za każdym rozem trzy opcje.

## Zadanie 15 (done)

6 October, 2023 13:02

1. (-) Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba
podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2<sup>n</sup>.

I n= O Momy tylko jeden podzbiór zbioru
pustego - zbiór pusty 2 = f

I zotóżny, że worunek zochoślej dla n. wtedo
B = A u (x) godzie b to zbiór Ath elementów, A to zbiór nelementów;
B = A u (x) godzie b to zbiór Ath elementów, A to zbiór nelementów;
B = A u (x) godzie b to zbiór Ath elementów, A to zbiór nelementów;
B = A u (x) godzie b to zbiór Ath elementów;
B = A u (x) godzie b to zbiór Ath elementów;
C nelementów;
D lażdego = podzbiórów zbióru A mony dwo podziory B.
C o raz C u (x) B mo wże doktodnie 2 rozy wżeg podzbiórów.

O raz C u (x) B mo wże doktodnie 2 rozy wżeg podzbiórów.

## Zadanie 16 (-)

6 October, 2023

13:02

16. Dla  $k \geq 1$  wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

## L1.5. Włącz komputer! 2 punkt Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x + 2023} dx$$
  $(n = 0, 1, ...)$ 

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

(1) 
$$I_n = \frac{1}{n} - 2023I_{n-1}$$
  $\left(n = 1, 2, ...; I_0 = \ln \frac{2024}{2023}\right)$ 

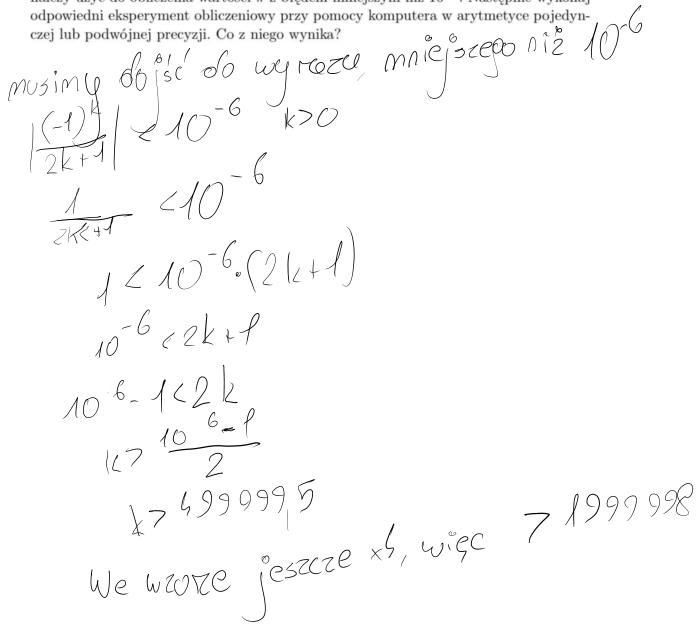
Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek  $I_1, I_2, \ldots, I_{20}$  (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli for. Rozważ osobno podciągi  $I_1, I_3, \ldots, I_{19}$  oraz  $I_2, I_4, \ldots, I_{20}$ . Czy w obu wypadkach wyniki są wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij**.

Wyniki dle ciquew nie sq wiergeodne - do n=3 jest ok, potem zoczyna odpływaci

## L1.6. Włącz komputer! 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

należy użyć do obliczenia wartości  $\pi$  z błędem mniejszym niż  $10^{-6}$ . Następnie wykonaj



L1.7. | 1 punkt | Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości ln 2 z błędem mniejszym niż  $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$  trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla x=2. Wykaż, że zastosowanie prostego związku  $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$  może znacznie przyspieszyć obliczenia.  $|A| = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (2-1)^{i} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} (2-1)^{i}$ 1(-1) 4-1. 1 < 5.10  $\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ 12 10 6 1 1 1 2000 000 1272000 (n(e, 3e)= |ne+|n(2e)= 1+|n(2e) (-1) 12-1 (2-1) (L) (2-1) (L) (2-1) 2000600(e-2)k<(c

Zadanie 8
9 October, 2023

$$21:38$$
 $0rctop(x) = \frac{11}{2} - orctop(\frac{1}{x})$ 
 $tg = x + fg = \frac{1}{2} = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = 11 = x$ 
 $tg = x + fg = x$