5a (done)

8 November, 2023 15:14

L6.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

a) b)

a) $\boxed{\text{Istnienie:}}$ Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będą węzłami interpolacji funkcji f takimi, że znane są wartości $f(x_0)=y_0$, $f(x_1)=y_1$, $f(x_2)=y_2, \ldots, f(x_n)=y_n$.

Można zdefiniować funkcję:

$L_i(x) = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, $i \in 0,1,\ldots,n$

taką, że dla $x \notin \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ $L_i(x)$ jest wielomianem stopnia n (mianownik jest liczbą, a licznik iloczynem n wyrazów postaci $(x-x_j)$)

Gdy $x_k \in \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ i $k=i$

$L_i(x_k) = L_i(x_i) = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \left(\frac{x_i-x_j}{x_i-x_j}\right) = 1$

Gdy $x_k \in \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ i $k \neq i$

$L_i(x_k) = \prod_{j=0 \wedge j\neq i}^{n} \left(\frac{x_k-x_j}{x_i-x_j}\right) = \frac{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdot\ldots\cdot\overset{0}{\overbrace{(x_k-x_k)}}\cdot\ldots(x_k-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})\cdot\ldots(x_i-x_n)} = 0$

Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia co najwyżej n:

$W(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) + \ldots + y_nL_n(x)$

Dla $x_i \in \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$

$W(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + \ldots + y_nL_n(x_i)$

Wszystkie składniki o indeksach różnych od i są równe zeru (ponieważ dla $j\neq i$ $L_i(x_j)=0$), a składnik o indeksie i jest równy $L_i(x_i)y_i = 1\cdot y_i = y_i$

a więc

$W(x_i) = y_i$

z czego wynika że $W(x)$ jest wielomianem interpolującym funkcję $f(x)$ na zbiorze punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$