

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.
2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \dots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.
3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, b, c, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.
4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.
5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo. Czy potrafisz zwinąć tę sumę?
6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.
7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.
8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?
9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?
10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000} .
11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:
Liczba naturalna a , której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 w tw. gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.
12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74} .

L3 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	suma
pkt.						1	1						
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	11,5

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \dots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

1, 5

Rozważmy siatkę na tej płaszczyźnie zawierającą trzy wiersze. Z zasady szufladkowej Dirchleta wiemy wtedy, że w każdej kolumnie powtórzy się co najmniej jeden kolor. Korzystamy z zasady szufladkowej Dirchleta.

Weźmy siatkę 9×3 na płaszczyźnie i mamy opcje

A	A	A	S	A	S	S	S
A	A	S	A	S	A	S	S
A	S	A	A	S	S	A	S

mamy 8 opcji, w każdej jeden z kolorów występuje min. 2 razy w każdej z nich. Zawsze możemy zestawiać odp. kolory

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
 X X X X X X X

prosty sposób że albo będzie 1 albo dwie parzyste odpada

Kładny dowód:

Każdą z liczb $n \in \mathbb{N}$ zapisać jako $n = 2^a b$, gdzie b jest największym nieparzystym dzielnikiem. Istnieje n nieparzystych liczb mniejszych niż $2n$. Jeśli że bierzemy $n+1$ liczb, przynajmniej dwie będą miały ten sam współczynnik b .

$a, b, c \in \mathbb{N}^+$

$c > a$ wtedy $\frac{2^c b}{2^a b} = 2^{c-a}$; $c-a > 0$

a więc 2^{c-a} jest l.b. \mathbb{N} , a więc te dwie liczby są podzielne c.n.d.

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

10. (-) Określ liczbę podzieloną przez 7, która leży najbliżej liczby $10^{1000000}$.

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

Liczba naturalna a , której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74} .