

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 12a

3 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.  
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

**Uwaga!** Z list 12a i 12b **nie można**  
zdobyć łącznie więcej niż **11 punktów**.

- L12.1.** 1 punkt Jak już wiadomo, język programowania Pw0++ ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(f)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki  $\int_{-20}^{24} f(x)dx$ , gdzie  $f \in C[-20, 24]$ . W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x) dx \quad (a < b; g \in C[a, b])?$$

- L12.2.** 1 punkt Udowodnij, że kwadratura postaci

$$(1) \quad Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k).$$

ma rząd  $\geq n + 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

- L12.3.** 2 punkty Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła  $f$ , liczby  $a < b$  oraz parami różne węzły  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Niech  $Q_n(f)$  będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami  $x_0, x_1, \dots, x_n$  przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x) dx.$$

Jak wiadomo, współczynniki  $A_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) kwadratury  $Q_n$ ,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int_a^b \left( \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) dx \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników  $A_0, A_1, \dots, A_n$  i określ jego złożoność.

- L12.4.** 1 punkt Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$(2) \quad Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^n A_k f(a + k \cdot h_n) \quad \left( h_n := \frac{b-a}{n} \right)$$

są takie, że  $A_k = A_{n-k}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ).

**L12.5.** 1 punkt Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.3**–**L12.4**) i określ jego złożoność.

**L12.6.** **Włącz komputer!** 1 punkt Wykorzystując **własną implementację algorytmu**, o którym mowa w zadaniu **L12.5**, oblicz  $Q_n^{NC}(f)$  ( $2 \leq n \leq 24$ ) dla całki

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + 25x^2}.$$

**Skomentuj wyniki.**

*(–) Paweł Woźny*