9 (done)

10 January, 2024 17:05

L12.9. 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

Σ'' - pierwszy i ostatni wyraz mnożymy $* \frac{1}{2}$

$$T_{2n} = \frac{1}{2}(T_n + M_n) \qquad t_k = a + h_n k$$

6.8 Metoda Romberga

Niech $n = 2^k$ dla $k \in \mathbb{N}$, $h_k := \frac{b-a}{2^k}$, $x_i^{(k)} := a + ih_k$ dla $i = 0, 1, \ldots, 2^k$. Zdefiniujmy $T_{0k} := T_{2^k}(f) = h_k \sum_{i=0}^{2^k}{}'' f(x_i^{(k)})$ (złożone wzory trapezów). Kolejne elementy T_{mk} dla $k = 0, 1, \ldots$ oraz $m = 1, 2, \ldots$ definiujemy rekurencyjnie za pomocą wzoru

$$T_{m,k} := \frac{4^m T_{m-1,k+1} - T_{m-1,k}}{4^m - 1}$$

wzorek z wykładu - przekształcamy

$$\boxed{T_n = h_n \sum_{n=0}^{n}{}'' f(t_k)} = \frac{1}{2} h_n \cdot f(a + h_n \cdot 0) + h_n \cdot f(a + h_n \cdot 1) +$$

$$h_n f(a + h_n \cdot 2) + h_n f(a + h_n \cdot 3) + \ldots + \frac{1}{2} f(a + h_n \cdot n) =$$

$$\frac{1}{2} h_n f\left(a + \frac{0}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{2}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{4}{2} h_n\right) +$$

$$h_n f\left(a + \frac{6}{2} h_n\right) + \ldots + \frac{1}{2} f\left(a + \frac{2n}{2} h_n\right)$$

wzorek z treści

$$M_n = h_n \cdot f\left(a + \frac{1}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{3}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{5}{2} h_n\right) + \ldots + h_n f\left(a + \frac{2n-1}{2} h_n\right)$$

Teraz możemy zapisać: łączymy - przeplatamy

$$\frac{1}{2} h_n = h_{2n}$$

$$T_n + M_n = \frac{1}{2} h_n \cdot f\left(a + \frac{0}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{1}{2} h_n\right) + h_n f\left(a + \frac{2}{2} h_n\right) +$$

$$\ldots + h_n f\left(a + \frac{2n-1}{2} h_n\right) + h_n \left(a + \frac{2n}{2} h_n\right)$$

korzystamy z tej obserwacji wychodząc z prawej strony równania do sprawdzenia:

$$\frac{1}{2}(T_n + M_n) = \frac{1}{2} h_n \sum_{k=0}^{2n}{}'' f(a + k \cdot h_{2n}) = h_{2n} \sum_{k=0}^{2n}{}'' f(a + k \cdot h_{2n}) = T_{2n}$$

Udowodnione

Algorytm $T_2 = T_{0,1}$ $T_4 = T_{0,2}$ $T_8 = T_{0,3}$ $T_{16} = T_{0,4}$ $T_{2^n} = T_{0,n}$

Algorytm

$T_2 = T_{0,1}$ $T_4 = T_{0,2}$ $T_8 = T_{0,3}$ $T_{16} = T_{0,4}$ $T_{2^n} = T_{0,n}$

Liczymy kolejne $T_{0,k}$ licząc T_{2^n} używając T_n. Doliczamy wówczas tylko M_n, zaoszczędzony dzięki temu o połowę wyrazów mniej.