Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2024

Przepływ w sieci

Sieć to graf skierowany (digraf) $D = (V, E)$ z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami $s, t \in V$ zwanymi *źródłem* i *ujściem* i funkcją przepustowości $c : E \to R \geq 0$ na krawędziach.

Niech $f : E \to R$.
dla $v \in V$ definiujemy $f^+(v) = \sum_{e=(v,w):e\in E, w\in V} f(v, w)$ oraz $f^-(v) = \sum_{e=(w,v):e\in E, w\in V} f(w, v)$

Funkcja f jest przepływem, jeśli

- spełnia warunki przepustowości $\forall_{e\in E}\ 0 \leq f(e) \leq c(e)$, oraz
- jeśli spełnia warunek zachowania przepływu:
  $\forall_{v\in V\{s,t\}}\ f^+(v) = f^-(v)$.

Wartość przepływu f, oznaczana jako $|f|$ to $f^-(t) - f^+(t)$.

Ścieżka powiększająca

Ścieżka powiększająca P dla przepływu f to ścieżka postaci $(s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ taka, że:

- $\forall 0 \leq i \leq k \;\; e_{i+1} \in E \wedge (\; e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \;\vee\; e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i))$
- $\forall 0 \leq i \leq k \;\; e_{i+1} = (v_i, v_{i+1}) \;\Rightarrow f(e_{i+1}) < c(e_{i+1})$ (krawędź w przód)
- $\forall 0 \leq i \leq k \;\; e_{i+1} = (v_{i+1}, v_i)) \;\Rightarrow f(e_{i+1}) > 0$ (krawędź wsteczna).

Luz ścieżki powiększjącej P to minimum z dwóch minimów: $\min\{c(e) - f(e)\}$ po wszystkich krawędziach w przód ścieżki oraz $\min\{f(e)\}$ po wszystkich krawędziach wstecznych.

Zastosowanie ścieżki powiększającej

Niech $P = (s = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k, e_{k+1}, t = v_{k+1})$ to ścieżka powiększająca dla przepływu f o luzie ϵ.

Zastosować P do przepływu f oznacza funkcję f' taką, że

- dla $e \in E \setminus P$: $f'(e) = f(e)$,
- dla $e \in P$ w przód: $f'(e) = f(e) + \epsilon$,
- dla $e \in P$ wstecznej: $f'(e) = f(e) - \epsilon$

Lemat

f' jest przepływem takim, że $|f'| = |f| + \epsilon$.

Algorytm Forda-Fulkersona

$D = (V, E)$ - digraf spójny; $c : E \to R \geq 0$ $s, t \in V$

$\forall_{e \in E}\ f(e) \leftarrow 0$

dopóki istnieje ścieżka powiększająca P dla f **wykonaj:**

  zastosuj P do f, otrzymując f'

  $f \leftarrow f'$

Znajdowanie ścieżki powiększającej:

$R \leftarrow \{s\}$
dopóki można ***wykonaj:***

jeśli istnieje krawędź $e = (u, v) : u \in R, v \notin R, f(e) < c(e)$,

to dodaj v do R,

jeśli istnieje krawędź $e = (v, u) : u \in R, v \notin R, f(e) > 0$,

to dodaj v do R,

Jeśli R zawiera t, to znaczy, że istnieje ścieżka pow. P dla f.

Algorytm F-F

- Czy algorytm F-F zawsze się kończy?
- Czy znajduje maksymalny przepływ?

Przepustowość przekroju

$[S, T]$ to $s - t$ przekrój, jeśli $s \in S,\ t \in T,\ S \cup T = V,\ S \cap T = \emptyset$.
przepustowość przekroju $c([S, T]) = \sum_{e=(u,v) \in E: u \in S, v \in T} c(e)$.

Lemat

Niech $U \subset V$. Wtedy $f^+(U) - f^-(U) = \sum_{v \in U} f^+(v) - f^-(v)$.
Dla dowolnego $s - t$ przekroju $[S, T]$ zachodzi $|f| \leq c([S, T])$.

Maksymalny przepływ-minimalne cięcie

Twierdzenie

Przepływ f obliczony przez algorytm Forda-Fulkersona ma wartość równą przepustowości pewnego $s - t$ przekroju. Zatem jest maksymalny.

Przepływ całkowitoliczbowy

Jeśli przepustowość każdej krawędzi w sieci jest liczbą całkowitą, to istnieje przepływ f maksymalny, który jest całkowitoliczbowy.

- znajdowanie największego skojarzenia w grafach dwudzielnych
- znajdowanie największego b-skojarzenia w grafach dwudzielnych

Niech $b : V \to N$. Wtedy $M \subseteq E$ jest b-skojarzeniem, jeśli $\forall_{v \in V}\ deg_M(v) \leq b(v)$ (liczba krawędzi z M incydentna do v nie przekracza $b(v)$).

Zastosowania przepływów

n studentów lat $I - III$ należy do k różnych kół. Każdy student może należeć do dowolnej liczby kół. Rektor chciałby wyznaczyć reprezentację, w której każde koło reprezentowane jest przez jednego ze studentów oraz liczba studentów w reprezentacji z każdego roku jest taka sama i wynosi $\lceil \frac{k}{3} \rceil$. Skonstruuj algorytm, który taką reprezentację znajduje.

Zastosowania przepływów

Organizowany jest turniej n osób, w którym każdy gra z każdym. Każda rozgrywka kończy się wygraną dokładnie jednej z osób - nie ma remisów. Wynik turnieju to graf pełny skierowany na n wierzchołkach, w którym krawędź skierowana z u do v oznacza wygraną wierzchołka u w meczu z v. Czy możliwy jest wynik turnieju, w którym różnica liczby wygranych dowolnych dwóch osób jest niewiększa od 1?
Ogólniej, czy dla każdego ciągu n liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ takiego, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = \binom{n}{2}$ istnieje wynik turnieju taki, że osoba i wygrała dokładnie a_i pojedynków?
W obu przypadkach pokaż algorytm znajdowania takiego rozkładu, o ile istnieje.