3ab (2p) (done)

8 November, 2023 15:14

L6.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_5.

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

$T_k = 2x\,T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)\,,\ k \geq 2$

$T_0(x) = 1$

$T_1(x) = x$

(a) Podaj postać potęgową wielomianu T_5.

$T_2(x) = 2x \cdot x - 1 = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 2x(2x^2 - 1) - x = 4x^3 - 2x - x = 4x^3 - 3x$

$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) =$

$8x^4 - 6x^2 - 2x^2 + 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) =$

$16x^5 - 16x^3 + 2x - 4x^3 + 3x = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

(b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1}?

Możemy zaobserwować że jest to

$0, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$, a więc 2^{n-1}. Udowodnijmy to indukcyjnie.

1) dla $n=1$ mamy $T_1(x) = x = 2^{1-1}x = x$ ✓

2) Załóżmy że zachodzi dla n, udowodnijmy dla $n+1$:

$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) =$

$2x(2^{n-1}x^{n-2} + \ldots) - (2^{n-2}x^{n-3} + \ldots) =$

$2^n x^{n-1} + \ldots$ (gdzie będą już tylko wyrazy niższego stopnia) ✓

- Dla x^{n-1} działa to analogicznie