7 (done)

8 November, 2023 15:14

L6.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $f(x) = 2023x^8 + 1977x^7 - 1939x^4 + 1410x^2 - 966x + 1996$.

$L_n(x)$ - interpolacja

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 8 interpolujący funkcję f w punktach $-2023,\ 1977,\ -1945,\ \sin(1),\ 1989,\ -1939,\ 1791,\ 1945,\ \pi$.

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1,\ 0,\ 1$.

(a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 8 interpolujący funkcję f w punktach $-2023,\ 1977,\ -1945,\ \sin(1),\ 1989,\ -1939,\ 1791,\ 1945,\ \pi$.

Z jednoznaczności interpolacji

$L_n(x) = f(x)$

Jednoznaczność interpolacji wielomianowej [edytuj | edytuj kod]

Dowód

Zakłada się, że istnieją dwa różne wielomiany $W_1(x)$ i $W_2(x)$ stopnia n, przyjmujące w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takie same wartości.

Niech

$$W_3(x) = W_1(x) - W_2(x).$$

$W_3(x)$ jest wielomianem stopnia co najwyżej n (co wynika z własności odejmowania wielomianów).

Ponieważ $W_1(x)$ i $W_2(x)$ w węzłach $x_i,\ i \in 0, 1, \ldots, n$ interpolują tę samą funkcję, to $W_1(x_i) = W_2(x_i)$, a więc $W_3(x_i) = 0$ (węzły interpolacji są pierwiastkami $W_3(x)$). (*)

Ale każdy **niezerowy** wielomian stopnia n ma co najwyżej n pierwiastków rzeczywistych, a ponieważ z (*) wiadomo, że $W_3(x)$ ma $n+1$ pierwiastków, to $W_3(x)$ musi być wielomianem tożsamościowo równym zeru, a ponieważ:

$$W_3(x) = W_1(x) - W_2(x) = 0$$

to

$$W_1(x) = W_2(x),$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $W_1(x)$ i $W_2(x)$ są różne.

$f(x) = 2023x^8 + 1977x^7 - 1939x^4 + 1410x^2 - 966x + 1996$

(b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1,\ 0,\ 1$.

$x_0 = -1 \quad x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad y_0 = 2479 \quad y_1 = 1996 \quad y_2 = 4501$

$L_2(x) = y_0 \lambda_0(x) + y_1 \lambda_1(x) + y_2 \lambda_2(x)$

$\lambda_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}$

$\lambda_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$

$\lambda_2 = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$

$L_2(x) = 2479 \frac{x(x-1)}{-1 \cdot (-2)} + 1996 \frac{(x-1)(x+1)}{1 \cdot (-1)} + 4501 \frac{x(x+1)}{2 \cdot 1} =$

$4958x^2 - 4958x - 1996x^2 + 1996 + 9002x^2 + 9002x = 11964x^2 + 4044x + 1996$