

## Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 11

20 grudnia 2023 r.

Zajęcia 9 stycznia 2024 r.

Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L11.1.** 1 punkt Niech  $P_k$  ( $0 \leq k \leq N$ ) oznacza  $k$ -ty wielomian ortogonalnym względem iloczynu skalarnego  $(\cdot, \cdot)_N$ . Ustalmy liczbę naturalną  $1 < n \leq N$ . Znajdź taką największą liczbę naturalną  $m$ , że dla dowolnego wielomianu  $w \in \Pi_m$  jest  $(w^2 + v, P_n)_N = 0$ , gdzie  $v(x) := -2024x + 2023$ .
- L11.2.** 2 punkty Niech  $P_0, P_1, \dots, P_N$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego  $(\cdot, \cdot)_N$ . Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.
- L11.3.** 2 punkty Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego  $(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k)$ , gdzie  $x_0, x_1, \dots, x_N$  są parami różnymi punktami. Ustalmy  $x \in \mathbb{R}$  oraz liczbę naturalną  $n < N$ . Ile i jakich operacji arytmetycznych **wystarczy** wykonać, aby obliczyć wartości  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ ? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.
- L11.4.** 1 punkt Niech  $\{Q_k\}$  będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, & Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) & (k = 2, 3, \dots), \end{cases}$$

gdzie wielkości  $c_k, d_k$  są znane dla wszystkich  $k \in \mathbb{N}$ . Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$

$$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \quad (k = m, m-1, \dots, 0),$$

$$\text{wynik} := B_0,$$

oblicza wartość sumy  $\sum_{k=0}^m a_k Q_k(x)$ . Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości  $Q_m(x)$ ?

- L11.5.** 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany  $P_0, P_1, P_2$  ortogonalne na zbiorze  $D_4 := \{-9, -6, 0, 6, 9\}$ .
- L11.6.** 1 punkt O funkcji  $h$  wiadomo, że  $h(-9) = -3$ ,  $h(-6) = 4$ ,  $h(0) = -2$ ,  $h(6) = 4$ ,  $h(9) = -3$ . Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian  $w_2^* \in \Pi_2$ , aby wyrażenie

$$\sum_{x_j \in D_4} [w_2^*(x_j) - h(x_j)]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość ( $D_4$  ma znaczenia takie, jak w poprzednim zadaniu).

- L11.7.** **Włącz komputer!** **2 punkty** W pliku `punkty.csv`<sup>1</sup> znajduje się zbiór 81 par liczb ze zbioru  $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i) : 0 \leq i \leq 80\}$ . Wartość te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną  $f$  zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = (t - 1.2)(t + 4.7)(t - 2.3).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z błędem wyrażonym rozkładem normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym  $\pm 0.2$ , czyli

$$y_i = f(t_i) + N(0, 0.2^2) \quad (0 \leq i \leq 80).$$

- (a) Narysuj wykres funkcji  $f$  i zbiór  $\mathcal{X}$ .
  - (b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?
  - (c) Korzystając z **własnej implementacji** (**koniecznie** uwzględnij zadanie **L11.3**; działaj **wyłącznie numerycznie**, a nie symbolicznie) skonstruuuj i narysuj wielomiany optymalne  $w_n^*$  w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru  $\mathcal{X}$  o stopniach  $2 \leq n \leq 15$ . Skomentuj wyniki.
- L11.8.** **Włącz komputer!** **do 6 punktów** Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.) czy liczbę zgonów. Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależy tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Testy numeryczne przeprowadź przy pomocy **programów własnego autorstwa**. Jeśli **liczysz na więcej niż 2 punkty** przygotuj przy pomocy systemu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X odpowiednią **notatkę** opisującą m.in. **i)** teorię związaną z problemem; **ii)** zaproponowany przez Ciebie model **iii)** oraz przebieg eksperymentów. Notatkę **dostarcz** swojemu ćwiczeniowcowi (z kopią do wykładowcy).

Wskazówki. **1.** Wiele dobrze opracowanych danych na temat pandemii koronawirusa w Polsce znajdziesz **pod tym adresem** (autor zbioru danych: Michał Rogalski). **2.** Jeśli zdecydujesz się modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu  $\exp(f(x))$ , gdzie  $f$  jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.6**). **3.** Osoby zainteresowane *matematyką koronawirusa* powinny odwiedzić m.in. **stronę PTM**.

(–) Paweł Woźny

---

<sup>1</sup>Patrz **SKOS**.