L10

16 December, 2023 20:22

L10 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	suma
pkt.										
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	2	1	10

Zajęcia 19 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L10.1. 1 punkt Niech danę będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$||f|| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

L10.2. 1 punkt Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x + a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

.

L10.3. 1 punkt Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k}}{2 + \sin(2023x)} \left[y_k - a\left(\ln(2022x_k^4 + 3) + 4x_k^5\right) \right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

L10.4. 1 punkt Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

L10.5. 1 punkt Pomiary (t_k, C_k) $(0 \le k \le N;\ t_k, C_k > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin(1977t^4) + 2}{A\cos(2t-1) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

L10.6. 1 punkt Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

L10.7. 1 punkt Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin\frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos\frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

.

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

L10.8. 2 punkty Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ $(0 \le k \le N)$ oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$, aby zachodziło

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$, natomiast

$$||g||_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (g(x_k))^2}.$$

L10.9. 1 punkt Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_N$. Niech $y_0, y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^* \in \Pi_N$, dla którego

$$||f - w_N^*||_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} ||f - w_N||_2$$

(f oraz $||\cdot||_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?

(–) Paweł Woźny

1

16 December, 2023 20:23

L10.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech danę będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$||f|| := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym $\mathcal{X}$.

2

16 December, 2023 20:23

L10.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x + a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
y_k	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

.

3

16 December, 2023 20:23

L10.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^{r} \frac{e^{2x_k}}{2+\sin(2023x)} \left[y_k - a\left(\ln(2022x_k^4+3)+4x_k^5\right) \right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

4

16 December, 2023 20:23

L10.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T:

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

T	0	10	20	30	40	80	90	95
S	68.0	67.1	66.4	65.6	64.6	61.8	61.0	60.0

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b.

L10.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Pomiary (t_k, C_k) $(0 \le k \le N;\ t_k, C_k > 0)$ pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin(1977t^4) + 2}{A\cos(2t-1) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B.

6

16 December, 2023 20:23

L10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

L10.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12} \qquad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

t	0	2	4	6	8	10	godz.
$H(t)$	1	1.6	1.4	0.6	0.2	0.8	m

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0, a_1, a_2.

8

16 December, 2023 20:23

L10.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ $(0 \le k \le N)$ oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^{n} A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \ldots, A_n^*$, aby zachodziło

$$||f - w_n^*||_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} ||f - w_n||_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, N$, natomiast

$$||g||_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (g(x_k))^2}.$$

9

16 December, 2023 20:23

L10.9. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \dots, x_N$. Niech $y_0, y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^\star \in \Pi_N$, dla którego

$$||f - w_N^\star||_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} ||f - w_N||_2$$

(f oraz $|| \cdot ||_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?