L7

17 November, 2023 10:33

L7 zad	1	2	+3	4	5	6	7	8	9	10	11	suma
pkt								~	1	1		
max	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	14

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.

   Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

~ 8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:

   (a) jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$.

   (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$.

   (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

11. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

1

17 November, 2023 10:34

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2

17 November, 2023 10:34

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

+3

17 November, 2023 10:34

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.
   Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

4

17 November, 2023 10:34

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ ($H_0 = 0$).

5

17 November, 2023 10:34

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6

17 November, 2023 10:34

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.

7

17 November, 2023 10:34

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

8 (wip)

17 November, 2023 10:34

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:
$n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

a) $n^2 \in O(n^3)$

$n^2 \leq c \cdot n^3$ ✓ $n_0 > 1$ $c > 0$

b) $n^3 \in O(n^{2.99})$ **F** dla dowolnego c znajdziemy

$n^3 \leq c \cdot n^{2,99}$ n_0 takie że $n_0^3 > c \cdot n_0^{2,99}$

c) $2^{n+1} \in O(2^n)$

$2^{n+1} \Rightarrow 2 \cdot 2^n$

$2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$ ✓ dow. n_0, $c \geq 2$

d) $(n+1)! \in O(n!)$

$(n+1)! \Rightarrow (n+1) \cdot n!$

$(n+1)\, n! \leq c \cdot n!$ **F** bo musi zachodzić $c \geq n+1$

e) $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$ $\log_2 n = x \Rightarrow 2^x = n$ $\Leftrightarrow$ $\log_2(n) \leq x \Rightarrow 2^x \leq n$

$\log_2(n) \leq c \cdot \sqrt{n}$

$2^{c\sqrt{n}} \leq n$ chyba nie?

$2^c \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq n$

f) $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$

$\sqrt{n} \leq c \cdot \log_2(n)$

$\log_2(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{c}$

$2^{\frac{\sqrt{n}}{c}} \geq n$

$2^{\frac{1}{c}} \cdot 2^{\sqrt{n}} \geq n$ i podobnie do e

9 (done)

17 November, 2023 10:34

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż, że:

(a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

(b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,

(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$

(a) jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

Z definicji funkcji O wiemy, że funkcja f(n) jest rzędu co najwyżej g(n). Oznaczmy rząd funkcji F(n) jako r_F, g(n) jako r_g. Możemy zapisać wtedy $r_F \leq r_g$. Zapisując drugie równanie analogicznie mamy $r_g \leq r_h$.

$$r_F \leq r_g \leq r_h \Rightarrow r_F \leq r_h \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

(b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$

$F(n) \leq c_1 \cdot g(n)$

$g(n) \geq C_2 \cdot F(n)$

$F(n) \cdot \frac{1}{c_1} \leq g(n)$

i widać od razu że prawda

(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \land f(n) = O(g(n))$

Widać to też wprost z definicji - funkcja a jest dokładnie rzędu b $\Leftrightarrow$ funkcja b jest dokładnie rzędu a.

10 (done)

17 November, 2023 10:34

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

* Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Z definicji:

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

a z treści zadania wiemy że $g(n)$ jest wielomianem wyższego stopnia z def. * prawdziwe.

11(3p)

17 November, 2023 10:34

11. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Asymptotyka - skrót

17 November, 2023 11:02

Def. z wykładu:

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Inne funkcje

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

- omega $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0}\exists_{n_0 \in N}\forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$
- theta $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- mała omega $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$