L4

25 October, 2023 16:06

zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	suma
pkt.										
max pkt	1	1	1	1	2	1	1	2	1	11

25 października 2023 r.

Zajęcia 31 października 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L4.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \ldots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $\quad (n = 0, 1, \ldots)$.

(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$ $\quad (n = 0, 1, \ldots)$?

(c) Wykaż, że

$$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \qquad (n \ge 0). \tag{1}$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą naturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

L4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

L4.3. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ $(1 \le n \le 5)$ z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

L4.4. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^4 - \ln(x + 4)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-8}. *Wskazówka*: Naszkicować wykresy funkcji $g(x) = x^4$ i $h(x) = \ln(x + 4)$.

L4.5. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{2 punkty}}$ Przybliżenie odwrotności liczby $R > 0$ można obliczać bez wykonywania dzieleń za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

dla odpowiednio dobranej wartości x_0.

(a) Sprawdź, że powyższy wzór można zinterpretować jako wykonanie kroku metody Newtona dla pewnej funkcji $f(x)$.

(b) Udowodnij, że jeśli $x_n \in (0, R^{-1})$, to $x_{n+1} \in (x_n, R^{-1})$.

(c) Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in (0, R^{-1})$ zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{R}$. Dla jakiego doboru punktów początkowych powyższa metoda jest zbieżna?

(d) Sprawdź eksperymentalnie (dla różnych wartości R oraz x_0), ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej.

L4.6. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ jedynie za pomocą operacji $+$, $-$ i $\cdot$, czyli bez wykonywania dzieleń. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać x_0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

L4.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $(*)$ $a = m\,2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. **Biorąc pod uwagę postać** $(*)$, zaproponuj efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna.

L4.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0.

L4.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ r-krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

1

25 October, 2023 16:08

L4.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1], \ldots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}] \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n] \quad (n = 0, 1, \ldots)$?

(c) Wykaż, że

(1) $$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \qquad (n \ge 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą nauturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

25 October, 2023 16:08

L4.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

3

25 October, 2023 16:08

L4.3. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ $(1 \le n \le 5)$ z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

4

25 October, 2023 16:08

L4.4. **Włącz komputer!** | 1 punkt | Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^4 - \ln(x+4)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-8}. *Wskazówka*: Naszkicować wykresy funkcji $g(x) = x^4$ i $h(x) = \ln(x+4)$.

5

25 October, 2023 16:08

L4.5. **Włącz komputer!** 2 punkty Przybliżenie odwrotności liczby $R > 0$ można obliczać bez wykonywania dzieleń za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

dla odpowiednio dobranej wartości x_0.

(a) Sprawdź, że powyższy wzór można zinterpretować jako wykonanie kroku metody Newtona dla pewnej funkcji $f(x)$.

(b) Udowodnij, że jeśli $x_n \in (0, R^{-1})$, to $x_{n+1} \in (x_n, R^{-1})$.

(c) Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in (0, R^{-1})$ zachodzi $\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{R}$. Dla jakiego doboru punktów początkowych powyższa metoda jest zbieżna?

(d) Sprawdź eksperymentalnie (dla różnych wartości R oraz x_0), ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej.

6

25 October, 2023 16:08

L4.6. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$ jedynie za pomocą operacji $+$, $-$ i $\cdot$, czyli bez wykonywania dzieleń. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobierać x_0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.

7

25 October, 2023 16:08

L4.7. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie $(*)$ $a = m\,2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. **Biorąc pod uwagę postać** $(*)$, zaproponuj efektywną metodę obliczania $\sqrt{a}$, otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f. **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna.

8

25 October, 2023 16:08

L4.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0.

9

25 October, 2023 16:08

L4.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ r-krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?