L11

7 January, 2024 14:18

L11 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	suma
pkt.									
max pkt	1	2	2	1	1	1	2	6	10+6

/ min. 5pkt.

L11.1. 1 punkt Niech P_k $(0 \le k \le N)$ oznacza k-ty wielomian ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Ustalmy liczbę naturalną $1 < n \le N$. Znajdź taką największą liczbę naturalną m, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_m$ jest $\left(w^2 + v, P_n\right)_N = 0$, gdzie $v(x) := -2024x + 2023$.

L11.2. 2 punkty Niech $P_0, P_1, \ldots, P_N$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Udowodnij podaną na wykładzie zależność rekurencyjną spełnianą przez te wielomiany.

L11.3. 2 punkty Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem wielomianów ortogonalnych względem iloczynu skalarnego $(f,g)_N := \sum_{k=0}^{N} f(x_k)g(x_k)$, gdzie $x_0, x_1, \ldots, x_N$ są parami różnymi punktami. Ustalmy $x \in \mathbb{R}$ oraz liczbę naturalną $n < N$. Ile i jakich operacji arytmetycznych **wystarczy** wykonać, aby obliczyć wartości $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$? Uwzględnij **wszystkie** szczegóły obliczeń.

L11.4. 1 punkt Niech $\{Q_k\}$ będzie ciągiem wielomianów określonych w następujący sposób:

$$\begin{cases} Q_0(x) = 1, \qquad Q_1(x) = x - c_1, \\ Q_k(x) = (x - c_k)Q_{k-1}(x) - d_k Q_{k-2}(x) \qquad (k = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

gdzie wielkości c_k, d_k są znane dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że następujący *algorytm Clenshawa*:

$$B_{m+2} := B_{m+1} := 0,$$
$$B_k := a_k + (x - c_{k+1})B_{k+1} - d_{k+2}B_{k+2} \qquad (k = m, m-1, \ldots, 0),$$
$$\texttt{wynik} := B_0,$$

oblicza wartość sumy $\sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(x)$. Jak wykorzystać powyższy algorytm do obliczenia wartości $Q_m(x)$?

L11.5. 1 punkt Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 := \{-9, -6, 0, 6, 9\}$.

L11.6. 1 punkt O funkcji h wiadomo, że $h(-9) = -3$, $h(-6) = 4$, $h(0) = -2$ $h(6) = 4$, $h(9) = -3$ Wykorzystując ortogonalność wielomianów **skonstruowanych w poprzednim zadaniu**, wyznacz taki wielomian $w_2^* \in \Pi_2$, aby wyrażenie

$$\sum_{x_j \in D_4} \left[w_2^*(x_j) - h(x_j)\right]^2$$

przyjmowało najmniejszą możliwą wartość (D_4 ma znaczenia takie, jak w poprzednim zadaniu).

L11.7. Włącz komputer! 2 punkty W pliku `punkty.csv`[1] znajduje się zbiór 81 par liczb ze zbioru $\mathcal{X} := \{(t_i, y_i) \ : \ 0 \le i \le 80\}$. Wartość te są odczytami z aparatury mierzącej pewną wielkość fizyczną f zachowującą się – jak mówi teoria – zgodnie ze wzorem

$$f(t) = (t - 1.2)(t + 4.7)(t - 2.3).$$

Z tym jednak, że aparatura dokonuje pomiarów z błędem wyrażonym rozkładem normalnym o średniej 0 i odchyleniu standardowym ± 0.2, czyli

$$y_i = f(t_i) + N(0, 0.2^2) \qquad (0 \le i \le 80).$$

(a) Narysuj wykres funkcji f i zbiór $\mathcal{X}$.

(b) Wyznacz i narysuj wielomian interpolacyjny dla danych z pliku `punkty.csv`. Co obserwujemy?

(c) Korzystając z **własnej implementacji** (**koniecznie** uwzględnij zadanie **L11.3**; działaj **wyłącznie numerycznie**, a nie symbolicznie) skonstruuj i narysuj wielomiany optymalne w_n^* w sensie aproksymacji średniokwadratowej dla danych ze zbioru $\mathcal{X}$ o stopniach $2 \le n \le 15$. Skomentuj wyniki.

L11.8. Włącz komputer! do 6 punktów Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do opracowania modelu opisującego przebieg pandemii koronawirusa w Polsce. Możesz rozważyć i modelować różne dane i wskaźniki. Na przykład liczbę aktywnych przypadków od wykrycia pierwszego zakażenia (4 marca 2020 r.) czy liczbę zgonów. Zadanie to ma charakter *badawczy* — wiele zależ tu od Ciebie i Twojej pomysłowości.

Testy numeryczne przeprowadź przy pomocy **programów własnego autorstwa**. Jeśli **liczysz na więcej niż 2 punkty** przygotuj przy pomocy systemu LaTeX odpowiednią **notatkę** opisującą m.in. **i)** teorię związaną z problemem; **ii)** zaproponowany przez Ciebie model **iii)** oraz przebieg eksperymentów. Notatkę **dostarcz** swojemu ćwiczeniowcowi (z kopią do wykładowcy).

Wskazówki. **1.** Wiele dobrze opracowanych danych na temat pandemii koronawirusa w Polsce znajdziesz pod tym adresem (autor zbioru danych: Michał Rogalski). **2.** Jeśli zdecydujesz sie modelować liczbę aktywnych przypadków, to warto rozpocząć od próby dopasowania danych do modelu typu $\exp(f(x))$, gdzie f jest odpowiednio dobraną funkcją, np. wielomianem niewysokiego stopnia (porównaj z zadaniem **L10.6**). **3.** Osoby zainteresowane *matematyką koronawirusa* powinny odwiedzić m.in. stronę PTM.