Lista 1

10 October, 2024 19:26

Lista nr 1 z matematyki dyskretnej

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
2. Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.
3. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m-elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.
4. Czy wśród liczb $1, 2, \ldots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dziesiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?
5. Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?
6. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach. $\rightarrow 4^n$, bo każda osoba ma 4 opcje
7. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?
8. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną. *Podpowiedź:* Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$. $\rightarrow n \cdot \{x\} < 1$
9. Niech $x \in R, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$?
10. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

11. Ania, Basia, Cyryl i Daniel zamierzają popłynąć w rejs. Muszą wybrać kto jest kapitanem, kto sternikiem i kto kucharzem. Nikt nie może pełnić dwóch funkcji. Ania nie może być kapitanem, a kucharzem musi być Cyryl lub Daniel. Na ile sposobów mogą się podzielić funkcjami?
12. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl? $(n-1)!$
13. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami? $11 \cdot 17 \cdot 15$
14. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdeg dnia zwiedza inną wyspę i każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu? Na permutacje milion interpretacji
15. Chcemy rozmieścić n krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych) palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest poprawnych rozłożeń? 3^n
16. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

Rozwiązania

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Pidgeonhole principle

$5 \times (x; y)$; $x, y \in \mathbb{Z}$

4 opcje z ... nieparzysta, 2 parzysta)

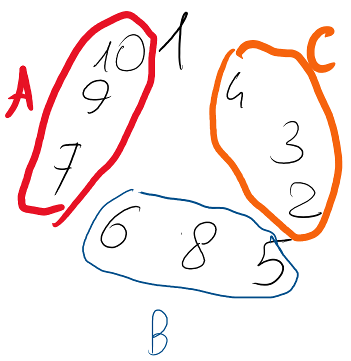
$x\,(x, y);\ x, y \in \mathbb{Z}$

4 opcje $\Rightarrow$ NN, NP, PN, NP (np. 1 współrzędna nieparzysta, 2 parzysta)

Więc minimum dwie w jednej z tych szuflad

$N+N=P \quad P+P=P \quad \frac{P}{2}=\mathbb{Z}$ c.n.w.

2. Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.



$S_{10}=55 \rightarrow$ Wywalmy jedynkę

$55-1=54 \rightarrow$ Wyznaczmy A, B, C

$A+B+C=54 \Rightarrow$ Nie wprost

$A<18 \quad B<18 \quad C<18 \Rightarrow$ sprzeczność z $A+B+C=54$

3. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m-elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.

I $m=1 \Rightarrow$ powinno być n przypisań

$\frac{n!}{(n-1)!}=n$ git

II Zał. dla m $\frac{n!}{(n-m)!}$ ✓

III Dla $m+1$:

Wybieramy najpierw dla pierwszych m elementów

Dla $m+1$ wybieramy el. z $n-m$

$\frac{n!}{(n-m)!}\cdot(n-m)=\frac{n!}{(n-(m+1))!}$ $\square$

4. Czy wśród liczb $1, 2, \ldots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dziesiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?

10^{10} - wszystkie

9^{10} - bez 9

$10^{10}-9^{10} > 9^{10}$ więc więcej z 9

5. Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k}=(1+1)^n=\boxed{2^n}$$ podzb. ogólnie

$\sum_{k=0} \binom{n}{k} = \sum_{k=0} \binom{n}{k} 1^k 1 \quad = (1+1)$

$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots \pm \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$ $NP - P = 0 \rightarrow$ równoliczne

2^{n-1}

7. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?

I) n parzyste

$|N| = |P| = \frac{n}{2}$

$\frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} \cdot 2 = \frac{n^2}{2}$

(bo parzyste z parzystymi i parzyste z nieparzystymi)

II n nieparzyste

analogicznie, tylko

$|N| = \frac{n+1}{2}$ $|P| = \frac{n-1}{2}$

9. Niech $x \in R, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie: $\lfloor\sqrt{\lfloor x \rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$?

$n = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$

$n \leq \sqrt{x} \leq n+1 \quad |^2$

$n^2 \leq x \leq (n+1)^2$

$n^2 \leq \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$

$n \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} \leq n+1$

$n = \sqrt{\lfloor x \rfloor}$

10. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \dots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

6 szufladek size 18 (ostatnia mniejsza)

zapełniamy 9 pierwszych slotów, 9 kolejnych wolne by nie stackować, $6 \cdot 9 = 54$, a więc jedna się zestackuje (piolgeonhole pr.) c.n.w.

11. Ania, Basia, Cyryl i Daniel zamierzają popłynąć w rejs. Muszą wybrać kto jest kapitanem, kto sternikiem i kto kucharzem. Nikt nie może pełnić dwóch funkcji. Ania nie może być kapitanem, a kucharzem musi być Cyryl lub Daniel. Na ile sposobów mogą się podzielić funkcjami?

Ku: 2opcje

Ka: $3-1 \Rightarrow 2$ opcje

St: $4-2 \Rightarrow 2$ opcje

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ opcji

16. Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

I $n=0$ $2^0 = 1$ czyli git

II Zał. dla n tw. jest git

III Dla $n+1$ 2^{n+1} podzbiorów ← do udowodnienia

Mamy zbiór n elementowy $|A|$ i jakiś x; $x \notin A$

$|A|$ ma 2^n podzbiorów (II)

Mamy zbiór n elementowy $|A|$ i jakiś x; $x \notin A$

$|A|$ ma 2^n podzbiorów ($\underline{II}$)

Do każdego z tych podzbiorów można dodać x

$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ $|A \cup x| = n+1$ $\Rightarrow$ $\overline{\underline{III}}$ git. $\square$