

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	9,5

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech  $D$  będzie digrafem acyklicznym, tzn.  $D$  nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie  $O(m + n)$  porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli  $(i, j)$  jest krawędzią skierowaną w  $D$ , to  $i < j$ .

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki  $M$ -powiększającej w grafie dwudzielnym  $G = (A \cup B, E)$ .

Wskazówka: skieruj krawędzie z  $M$  od  $B$  do  $A$ , a pozostałe z  $A$  do  $B$ .

3. (+) Minimalnym cięciem w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozpaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozpaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach  $1, 2, \dots, n$ , w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konia) szachowego wszystkie pola szachownicy  $5 \times 5$ , każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

8. Pokaż, że graf dwudzielny  $k$ -regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień  $k$ , zawiera skojarzenie doskonałe.

Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) Kwadratem łacińskim nazywamy kwadrat  $n \times n$ , w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o  $n$  kolumnach i  $m$  wierszach,  $1 \leq m \leq n$ , w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, że w każdym wierszu każda z liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$  występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o  $m < n$  wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. Turniej to graf skierowany w którym każda para wierzchołków  $a, b$  jest połączona krawędzią z  $a$  do  $b$  albo z  $b$  do  $a$ .

+1 (done)

16 December, 2023 20:29

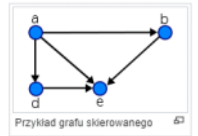
1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech  $D$  będzie digrafem acyklicznym, tzn.  $D$  nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie  $O(m + n)$  porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli  $(i, j)$  jest krawędzią skierowaną w  $D$ , to  $i < j$ .

Pomysł - usuwamy wierzchołki o stopnia wchodzącego 0 z grafu i dodajemy go do listy wynikowej.

U nas będzie to zależało od wierzchołka startowego

## Teoria

**Graf skierowany** <sup>[1]</sup>, **graf zorientowany** <sup>[2]</sup> **dirgraf** <sup>od ang.</sup> **directed graph**, **DG** – rodzaj grafu rozważanego w teorii grafów. Graf skierowany definiuje się jako uporządkowaną parę zbiorów. Pierwszy z nich zawiera wierzchołki grafu, a drugi składa się z krawędzi grafu, czyli uporządkowanych par wierzchołków. Ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez krawędzie. Graf skierowany można sobie wyobrazić jako sieć ulic, z których każda jest jednokierunkowa. Ruch pod prąd jest zakazany. Najczęściej grafy skierowane przedstawia się jako zbiór punktów reprezentujących wierzchołki połączonych strzałkami (stąd nazwa) albo łukami zakończonymi grotem (strzałką, **zwrotem**) <sup>[3]</sup>.



**Sortowanie topologiczne** skierowanego grafu acyklicznego – liniowe uporządkowanie wierzchołków, w którym jeśli istnieje krawędź skierowana prowadząca od wierzchołka  $x$  do  $y$ , to  $x$  znajduje się przed wierzchołkiem  $y$ . Innymi słowy, każdy wierzchołek poprzedza wszystkie te wierzchołki, do których prowadzi wychodzące od niego krawędzie.

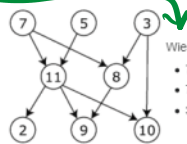
Wierzchołki w każdym grafie acyklicznym skierowanym można posortować topologicznie na jeden lub więcej sposobów.

### Zastosowanie <sup>[edytuj | edytuj kod]</sup>

Sortowanie topologiczne pozwala na ustalenie kolejności wykonywania jakichś operacji (czynności), np. służy do ustalenia poprawnej kolejności instalacji w automatycznym uzupełnianiu zależności **pakietów** w **systemach uniksopodobnych**. Prostszy przykładem może być kolejność czynności potrzebnych do upieczenia **ciasta**.

Poszczególne czynności są reprezentowane jako wierzchołki, a zależności pomiędzy nimi – jako krawędzie. Jeśli krawędź prowadzi od **A** do **B**, to znaczy, że czynność **A** musi zostać wykonana przed czynnością **B**.

Zdarza się, że wykonanie jakiegoś zadania musi być poprzedzone wykonaniem innego (np. zanim oberzemy **ziemniaki**, musimy je kupić), ale również dobrze czynności mogą zostać wykonane równocześnie lub w dowolnej kolejności (np. przed upieczeniem **ciasta** musimy kupić **mąkę** i **jajka**, choć nie ma znaczenia kolejność kupowania składników). Wynika z tego możliwość ustalenia więcej niż jednego topologicznego porządku wierzchołków dla niektórych grafów.



Wierzchołki przedstawionego na rysunku grafu można posortować topologicznie na kilka sposobów, np.

- 7,5,3,11,8,2,10,9
- 7,5,11,2,3,10,8,9
- 3,7,8,5,11,10,9,2

```
/**
 * Sortowanie topologiczne w złożoności czasowej O(V + E)
 * @param {[]} graph - graf w postaci list sąsiedztwa
 * @param {[]} zerolist - lista wierzchołków o stopniu wejściowym równym 0
 * @returns {[]} - posortowana topologicznie kolejność wierzchołków
 * lub null jeśli graf zawiera cykl (ale z założenia zadania nie zawiera)
 */
const topoSort = (graph, zerolist) => {
  const R = []; // Lista wynikowa
  const Q = [...zerolist]; // Kopia kolejki

  // Dopóki kolejka nie jest pusta
  while (Q.length > 0) {
    const v = Q.shift(); // Usuń pierwszy element z kolejki i dodaj do listy wynikowej
    R.push(v);

    // Dla każdego sąsiada wierzchołka v (krawędź v -> u)
    for (const u of graph[v]) {
      // Usuń krawędź v -> u
      graph[v] = graph[v].filter(x => x !== u);

      // Jeśli u po usunięciu krawędzi v -> u nie ma już żadnych krawędzi wchodzących
      if (graph.every(x => !x.includes(u))) {
        Q.push(u); // Dodaj u do kolejki
      }
    }
  }

  if (graph.some(x => x.length > 0)) return null; // Jeśli graf zawiera cykl, zwróć null
  return R;
}
```

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki  $M$ -powiększającej w grafie dwudzielnym  $G = (A \cup B, E)$ .

*Wskazówka:* skieruj krawędzie z  $M$  od  $B$  do  $A$ , a pozostałe z  $A$  do  $B$ .

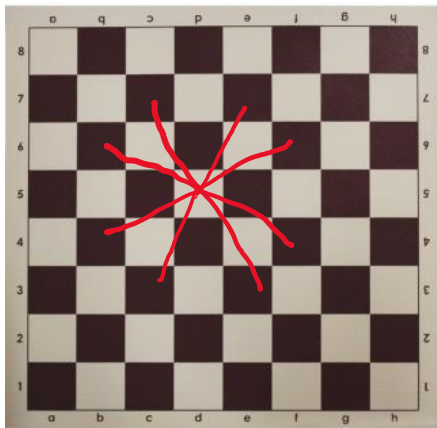
3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

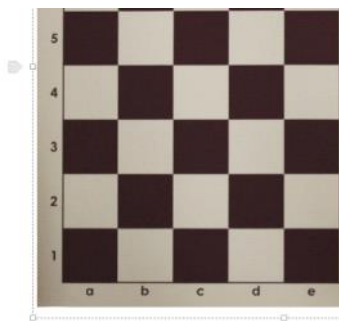
6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach  $1, 2, \dots, n$ , w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy  $5 \times 5$ , każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.



Skoczek porusza się „konik”, dwa pola w jednym kierunku i jedno w drugim.

Warto zauważyć, że skoczek skacze zawsze z białego pola na czarne, a z czarnego na białe.



Szachownica  $5 \times 5$  ma 25 pól. Jednego koloru będzie 13 pól, drugiego 12 pól. Zaczynamy od dowolnego czarnego pola (dla białych odc. analogicznie)

a) 13 czarnych pól

$C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C$

przejdziemy przez 25 pól i kończymy na czarnym. Musimy jednym ruchem przejść z czarnego pola na białe - niemożliwe

b) 12 czarnych pól

$C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B$   
1 1 2 2 12 12

i tu nam brakuje nawet 13. czarnego pola.

zakładam, że w zadaniu chodzi o cykl Hamiltona (ścieżka zamknięta, każdy wierzchołek tylko raz)



8. Pokaż, że graf dwudzielny  $k$ -regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień  $k$ , zawiera skojarzenie doskonałe.

*Wskazówka:* Warunek Halla.

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat  $n \times n$ , w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$ . *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o  $n$  kolumnach i  $m$  wierszach,  $1 \leq m \leq n$ , w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, że w każdym wierszu każda z liczb  $\{1, 2, \dots, n\}$  występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o  $m < n$  wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków  $a, b$  jest połączona krawędzią z  $a$  do  $b$  albo z  $b$  do  $a$ .