https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=561

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 8

29 listopada 2023 r.

Zajęcia 5 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) dla danych

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

,

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

.

L8.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 24x^3 + 216x^2 + 500x + 328 & \text{dla} \quad -3 \le x \le -2, \\ -17x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad -2 \le x \le 0, \\ 22x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -6x^3 + 54x^2 - 76x + 28 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-3, -2, 0, 1, 3$?

L8.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2023x - 2024 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2024x + 2023 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-2, -1, 1, 2$?

L8.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{1}$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą wektory $\mathtt{x}:=[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_k < x_{k+1},\ 0 \le k \le n-1)$, $\mathtt{y}:=[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathtt{z}:=[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza NIFS3 spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor

$$\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f w przedziale $[x_0, x_{100}]$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0),\ f'(h_1), \ldots,\ f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \le h_0 < h_1 < \ldots < h_N \le x_n$, natomiast N jest **dowolną** liczbą naturalną.

L8.6. 1 punkt Ustalmy liczby naturalne M oraz N. Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk}, gdzie $0 \le k \le N$, a $m = 1, 2, \ldots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \qquad (0 \le k \le N)$$

dla $1 \le m \le M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji $s_1, s_2, \ldots, s_M$.

L8.7. **Włącz komputer!** 2 punkty Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ $(k = 0, 1, \ldots, 95)$, natomiast

$[x_0, x_1, \ldots, x_{95}] := [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, 49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, 59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, 45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, 21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, 6.5, 6.5, 5.5]$,

$[y_0, y_1, \ldots, y_{95}] := [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, 59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, 57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, 18, 14.5, 10.5, 7.50, 4, 2.50, 1.50, 2, 3.50, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, 27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.50, 10, 13, 16.5, 20.5, 25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41]$.

Biorąc pod uwagę zadanie **L8.6**, opracuj **własną implementację** wyznaczania NIFS3. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

Konkurs

Stosując podejście podobne do opisanego w zadaniu **L8.7**, wykorzystaj NIFS3 do odtworzenia następującego napisu:

Rozwiązanie można nadsyłać do **31 grudnia 2023 r.** na adres pwo@cs.uni.wroc.pl (temat listu: *AN: konkurs*). Powinno ono **zawierać**:

- plik `jpg/jpeg` z odtworzonym napisem,
- kod źródłowy przygotowanego programu,
- plik tekstowy z danymi dla każdej z użytych NIFS3 (np. w zadaniu **L8.7**, gdzie użyto jednej krzywej NIFS3 danymi tymi są wektory $[x_0, x_1, \ldots, x_{95}]$, $[y_0, y_1, \ldots, y_{95}]$, $[t_0, t_1, \ldots, t_{95}]$ oraz $[u_0, u_1, \ldots, u_M]$).

Każda osoba wyróżniona w konkursie **otrzyma do 7 dodatkowych punktów na egzaminie końcowym**. Komisja konkursowa[a] **bierze pod uwagę m.in.** efekt wizualny, liczbę użytych NIFS3 oraz łączny rozmiar danych (im mniej tym lepiej).

[a] Sami baaardzo ważni ludzie 😎

L8.8. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 17 grudnia 2023 r.; do 6 punktów) [1]

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorek i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach.

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite'a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

(a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite'a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite'a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.

(c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := [(x(t), y(t)) \ : \ t \geq 0] \qquad (t - \text{czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \ldots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \ldots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite'a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H_x'(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H_y'(t_k) = y'(t_k)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji x, y oraz węzłów t_k działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) $(0 \leq i \leq n)$ oraz *obszarów zakazanych* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ $(m \in \mathbb{N})$ będących kołami o środkach odpowiednio w punkach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$, określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite'a – czy dron złamał *PZB*.

Wykonaj szczegółowe testy dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.

Autor zadania: *Filip Chudy*.

L8.9. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 17 grudnia 2023 r.; do 6 punktów) [2] Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

[2] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{-1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M}\right) i \;:\; k, l = 0, 1 \ldots, M\right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

(a) $z_0 := w; \qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1;$ np. $N = 10, 20, 35)$;

(b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)}\right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?

(–) Paweł Woźny