L11

16 December, 2023 20:22

zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
pkt	1			0,5			1			1	
max pkt.	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	9,5

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

8. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

   Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

   Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.

+1 (done)

16 December, 2023 20:29

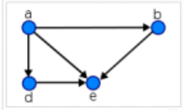
1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

Pomysł - usuwamy wierzchołki o stopniu wchodzącym 0 z grafu i dodajemy go do listy wynikowej.

U nas będzie to zależało od wierzchołka startowego

Teoria

Graf skierowany, **sgraf**[1], **graf zorientowany**[2] **digraf**, od ang. *directed graph*, **DG** – rodzaj grafu rozważanego w teorii grafów. Graf skierowany definiuje się jako uporządkowaną parę zbiorów. Pierwszy z nich zawiera wierzchołki grafu, a drugi składa się z krawędzi grafu, czyli uporządkowanych par wierzchołków. Ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez krawędzie. Graf skierowany można sobie wyobrazić jako sieć ulic, z których każda jest jednokierunkowa. Ruch pod prąd jest zakazany. Najczęściej grafy skierowane przedstawia się jako zbiór punktów reprezentujących wierzchołki połączonych strzałkami (stąd nazwa) albo łukami zakończonymi grotem (strzałką, zwrotem)[3].



Przykład grafu skierowanego

Sortowanie topologiczne skierowanego grafu acyklicznego – liniowe uporządkowanie wierzchołków, w którym jeśli istnieje krawędź skierowana prowadząca od wierzchołka x do y, to x znajdzie się przed wierzchołkiem y. Innymi słowy, każdy wierzchołek poprzedza wszystkie te wierzchołki, do których prowadzą wychodzące od niego krawędzie.

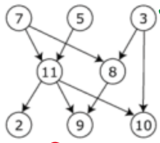
Wierzchołki w każdym grafie acyklicznym skierowanym można posortować topologicznie na jeden lub więcej sposobów.

Zastosowanie [edytuj | edytuj kod]

Sortowanie topologiczne pozwala na ustalenie kolejności wykonywania jakichś operacji (czynności), np. służy do ustalenia poprawnej kolejności instalacji w automatycznym uzupełnianiu zależności pakietów w systemach uniksopodobnych. Prostszym przykładem może być kolejność czynności potrzebnych do upieczenia ciasta.

Poszczególne czynności są reprezentowane jako wierzchołki, a zależności pomiędzy nimi – jako krawędzie. Jeśli krawędź prowadzi od **A** do **B**, to znaczy, że czynność **A** musi zostać wykonana przed czynnością **B**.

Zdarza się, że wykonanie jakiegoś zadania musi być poprzedzone wykonaniem innego (np. zanim obierzemy ziemniaki, musimy je kupić), ale równie dobrze czynności mogą zostać wykonane równocześnie lub w dowolnej kolejności (np. przed upieczeniem ciasta musimy kupić mąkę i jajka, choć nie ma znaczenia kolejność kupowania składników). Wynika z tego możliwość ustalenia więcej niż jednego topologicznego porządku wierzchołków dla niektórych grafów.



Wierzchołki przedstawionego na rysunku grafu można posortować topologicznie na kilka sposobów, np.

- 7,5,3,11,8,2,10,9
- 7,5,11,2,3,10,8,9
- 3,7,8,5,11,10,9,2

```
/**
 * Sortowanie topologiczne w złożoności czasowej O(V + E)
 * @param {[][]} graph - graf w postaci list sąsiedztwa
 * @param {[]} zerolist - lista wierzchołków o stopniu wejściowym równym 0
 * @returns {[]} - posortowana topologicznie kolejność wierzchołków
 * lub null jeśli graf zawiera cykl (ale z założenia zadania nie zawiera)
 */
const topoSort = (graph, zerolist) => {
    const R = []; // Lista wynikowa
    const Q = [...zerolist]; // Kopia kolejki

    // Dopóki kolejka nie jest pusta
    while (Q.length > 0) {
        const v = Q.shift(); // Usuń pierwszy element z kolejki i dodaj do listy wynikowej
        R.push(v);

        // Dla każdego sąsiada wierzchołka v (krawędź v → u)
        for (const u of graph[v]) {
            // Usuń krawędź v → u
            graph[v] = graph[v].filter(x => x !== u);

            // Jeśli u po usunięciu krawędzi v → u nie ma już żadnych krawędzi wchodzących
            if (graph.every(x => !x.includes(u))) {
                Q.push(u); // Dodaj u do kolejki
            }
        }
    }

    if(graph.some(x => x.length > 0)) return null; // Jeśli graf zawiera cykl, zwróć null
    return R;
}
```

2

16 December, 2023 20:29

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

+3

16 December, 2023 20:29

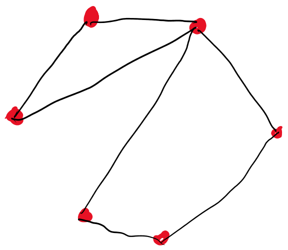
3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

-4 (done)

16 December, 2023 20:29

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

Obalamy kontrprzykładem



Jest tona kontrprzykładów, t.o najprostszy który wymyśliłem

Teoria

Cykl Eulera [edytuj]

Artykuł Dyskusja Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy W

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz. Jeżeli w danym grafie możliwe jest utworzenie takiego cyklu, to jest on nazywany grafem eulerowskim.

Osobny artykuł: Graf eulerowski.

Nazwa pochodzi od nazwiska szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera, który jako pierwszy zajmował się problematyką związaną z drogami w grafach. Do znajdowania cyklu Eulera w grafie można użyć algorytmu Fleury'ego. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by spójny graf nieskierowany był eulerowski jest parzystość stopni wszystkich wierzchołków. Natomiast warunkiem w spójnym grafie skierowanym jest taka sama liczba krawędzi wchodzących i wychodzących dla każdego wierzchołka.

Zobacz też [edytuj | edytuj kod]

- Łańcuch Eulera
- Cykl Hamiltona

5

16 December, 2023 20:29

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6

16 December, 2023 20:29

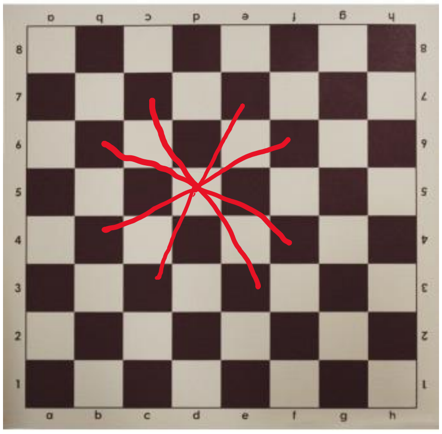
6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7 (done)

16 December, 2023 20:29

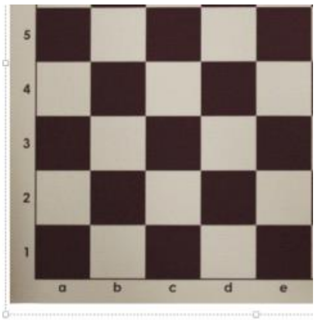
7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5 × 5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

zakładam, że w zadaniu chodzi o cykl Hamiltona (ścieżka zamknięta, każdy wierzchołek tylko raz)



Skoczek porusza się „L-kami", dwa pola w jednym kierunku i jedno w drugim.

Warto zauważyć, że skoczek skacze zawsze z białego pola na czarne, a z czarnego na białe.



Szachownica 5x5 ma 25 pól. Jednego koloru będzie 13 pól, drugiego 12 pól. Zaczynamy od dowolnego czarnego pola (dla białych etc. analogicznie)

a) 13 czarnych pól

C → B → C → B → ... → C

przechodzimy przez 25 pól i kończymy na czarnym. Musimy jednym ruchem przejść z czarnego pola na czarne - niemożliwe

a) 12 czarnych pól

C → B → C → B → ... → C → B

1 1 2 2 ... 12 12

i tu nam brakuje nawet 13. czarnego pola.

8

16 December, 2023 20:29

8. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołkek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

Wskazówka: Warunek Halla.

+9

16 December, 2023 20:29

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10 (done)

16 December, 2023 20:29

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.

Teoria

Tournament (graph theory)

10 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

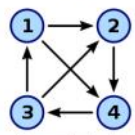
From Wikipedia, the free encyclopedia

A **tournament** is a directed graph (digraph) obtained by assigning a direction for each edge in an undirected complete graph. That is, it is an orientation of a complete graph, or equivalently a directed graph in which every pair of distinct vertices is connected by a directed edge (often, called an **arc**) with any one of the two possible orientations.

Many of the important properties of tournaments were first investigated by H. G. Landau in Landau (1953) to model dominance relations in flocks of chickens. Current applications of tournaments include the study of voting theory and social choice theory among other things.

The name *tournament* originates from such a graph's interpretation as the outcome of a round-robin tournament in which every player encounters every other player exactly once, and in which no draws occur. In the tournament digraph, the vertices correspond to the players. The edge between each pair of players is oriented from the winner to the loser. If player a beats player b, then it is said that a *dominates* b. If every player beats the same number of other players (*indegree = outdegree*), the tournament is called *regular*.

Tournament



A tournament on 4 vertices

Vertices n

Edges $\binom{n}{2}$

raphs and parameters

Cykl Hamiltona [edytuj]

Artykuł Dyskusja Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy

Cykl Hamiltona to taki cykl w grafie, w którym każdy wierzchołek grafu odwiedzany jest dokładnie raz (oprócz pierwszego wierzchołka). Analogicznie, ścieżka Hamiltona to taka ścieżka w której każdy wierzchołek odwiedzony jest dokładnie raz. Nazwa cyklu i ścieżki pochodzi od irlandzkiego matematyka Hamiltona.

Znalezienie cyklu Hamiltona o minimalnej sumie wag krawędzi jest równoważne rozwiązaniu problemu komiwojażera. Grafy zawierające cykl Hamiltona nazywamy hamiltonowskimi[1].

Zobacz też [edytuj | edytuj kod]

Turniej (matematyka) [edytuj]

10 języków

Artykuł Dyskusja Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy Wyświetl historię Narzędzia

Turniej – graf skierowany w którym każde dwa wierzchołki są połączone dokładnie jedną skierowaną krawędzią. Jest to skierowany odpowiednik grafu pełnego.

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.

(analogicznie do roz. z poprzednich list)

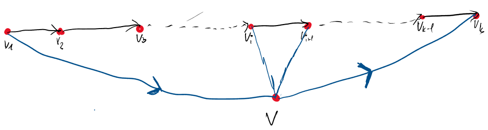
Weźmy najdłuższą ścieżkę w grafie. Nazwijmy ją P.

$P = (V_1, V_2, \dots, V_{k-1}, V_k)$

Jeżeli ta ścieżka zawiera wszystkie wierzchołki to jest ścieżką Hamiltona (i byłby to koniec dowodu). Załóżmy więc że nie jest.

dowód nie wprost
chcemy dojść do sprzeczności z P - najdłuższą ścieżką

Istnieje więc jakiś wierzchołek V poza tą ścieżką:

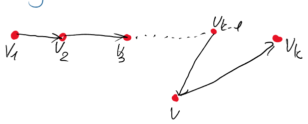


Konieczniе istnieją $V_1 \to V$ i $V \to V_k$
(muszą bo to turniej, a w drugą stronę powstałaby dłuższa ścieżka)

Oprócz tego muszą istnieć też krawędzie między V_2 — V_{k-1} a V (turniej). (oznaczmy jako X)

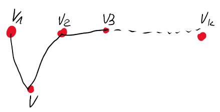
Oznacza to że zajdzie 1 z 4 przypadków

1) Wszystkie krawędzie idą z X do V



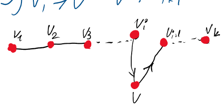
Dłuższa ścieżka, sprzeczność

2) z V do X



–"–

3) $V_i \to V$ $V \to V_{i+1}$



–"–

4) $V \to V_i$ $V_{i+1} \to V$

Alternatywnie można to też udowodnić indukcyjnie, przykładowy dowód:

Sumon Kkhan · Follow
Studied Mathematics at Indian Institute of Technology, Dhanbad · Aug 11

The statement that every tournament has a Hamiltonian cycle is known as the "Tournament Hamiltonian Theorem." A tournament is a directed graph in which there is exactly one directed edge between every pair of distinct vertices. A Hamiltonian cycle in a directed graph is a cycle that visits every vertex exactly once and returns to the starting vertex.

The proof of the Tournament Hamiltonian Theorem involves using mathematical induction on the number of vertices in the tournament. The induction argument goes as follows:

Base Case: For a tournament with 2 vertices, there is a single directed edge between them, so it forms a Hamiltonian cycle.

Inductive Step: Assume that the theorem is true for all tournaments with k vertices, where $k \geq 2$. Now, consider a tournament with $k + 1$ vertices.

Choose an arbitrary vertex v in the tournament. Now, divide the remaining k vertices into two sets: one set A contains vertices that have a directed edge from v to them, and the other set B contains vertices that have a directed edge from them to v.

Since there are a total of $k + 1$ vertices and k vertices in sets A and B, respectively, by the Pigeonhole Principle, at least one of these sets, say A, must contain at least $k / 2 + 1$ vertices.

Now, consider the sub-tournament induced by the vertices in set A. Since there are at least $k / 2 + 1$ vertices in this sub-tournament, by the induction hypothesis, it contains a Hamiltonian cycle, let's call it C.

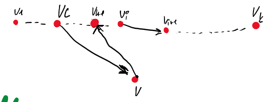
Now, consider the directed edges from the vertices in set B to the vertices in set A. Since there are at least $k / 2 + 1$ vertices in set A and at most $k / 2$ vertices in set B, by the Pigeonhole Principle, there must exist a vertex w in set A that receives directed edges from two or more vertices in set B.

By adding the directed edges from these vertices in set B to the Hamiltonian cycle C, and then adding the directed edge from v to w, we obtain a Hamiltonian cycle for the entire tournament.

This completes the proof by mathematical induction. The base case shows that the theorem holds for tournaments with 2 vertices, and the inductive step shows that if it holds for any tournament with k vertices, it also holds for a tournament with $k + 1$ vertices. Therefore, by induction, the theorem holds for all tournaments.

4) $v \to v_i \quad v_{i+1} \to v$

W takim przypadku gdzieś na lewo od v_i (w najgorszym przypadku jest to v_1) mamy sytuację jak punkt wyżej.



– // –

Mamy więc sprzeczność w każdym przypadku

Najdłuższa ścieżka w turnieju zawiera ścieżkę Hamiltona