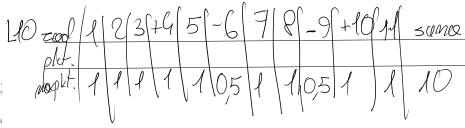
- 1. Załóżmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo rozpinające.
- 2. Niech Tbędzie MSTgrafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu Cgrafu Gdrzewo Tnie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi zC.
- 3. Czy poniższy algorytm zawsze znajduje MST w grafie spójnym G?

Załóżmy, że krawędzie grafu są posortowane w<br/>g wag:  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$ . Dla każdej krawędzi o indeksie <br/> i w kolejności od m do 1 wykonaj następujące: jeśli wyrzucenie  $e_i$  nie rozspaj<br/>aG, wyrzuć  $e_i$  z

- (+) Udowodnij, że algorytm Prima znajdowania MST działa poprawnie.
- Załóżmy, że wszystkie krawędzie w grafie mają różne wagi. Udowodnij, że algorytm Boruvki rzeczywiście znajduje drzewo rozpinające, tzn. pokaż, że w żadnej iteracji nie powstaje cykl.
- 6. (-) Jak zmodyfikować algorytm Boruvki, by działał również w grafach, w których krawędzie mogą mieć takie same wagi?
- 7. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne, tzn. zawierające krawędź każdego koloru?
- 8. Krawędzie pewnego prostego grafu spójnego G pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierał<br/>by drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

- 9. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.
- 10. (+) Niech  $G=(A\cup B,E)$  będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek  $a\in A$  skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek  $b\in B$  skojarzony w N jest również skojarzony w M'.
- 11. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie  $T_{\cdot}$



1. Załóżmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo rozpinające.

2. Niech T będzie MST grafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu C grafu G drzewo T nie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi z C.

3. Czy poniższy algorytm zawsze znajduje MST w grafie spójnym G?

Załóżmy, że krawędzie grafu są posortowane wg wag:  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$ . Dla każdej krawędzi o indeksie i w kolejności od m do 1 wykonaj następujące: jeśli wyrzucenie  $e_i$  nie rozspaja G, wyrzuć  $e_i$  z G.

4. (+) Udowodnij, że algorytm Prima znajdowania MST działa poprawnie.

 Załóżmy, że wszystkie krawędzie w grafie mają różne wagi. Udowodnij, że algorytm Boruvki rzeczywiście znajduje drzewo rozpinające, tzn. pokaż, że w żadnej iteracji nie powstaje cykl. 7 December, 2023

14:31

6. (-) Jak zmodyfikować algorytm Boruvki, by działał również w grafach, w których krawędzie mogą mieć takie same wagi?

7. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne, tzn. zawierające krawędź każdego koloru?

8. Krawędzie pewnego prostego grafu spójnego G pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

9. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

10. (+) Niech  $G=(A\cup B,E)$  będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek  $a\in A$  skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek  $b\in B$  skojarzony w N jest również skojarzony w M'.

11. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie  ${\cal T}.$