L7

17 November, 2023 10:33

L7

zad	1	2	+3	4	5	6	7	8	9	10	11	suma
pkt	1	1	1					w	1	1		
max	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	14

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.

   Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n > = E^k < a_n >$.

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż, że:

   (a) jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$.

   (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$.

   (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

11. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

1 (done)

17 November, 2023 10:34

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, co możemy podstawić pod wzór na funkcję tworzącą

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \cdot x^{n-k} \right) =$$

rozbijamy na dwie sumy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n \right) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

$a_0 x^0 + \underbrace{a_0 x^0 \cdot x^1}_{a_0 x^1} + \underbrace{a_1 x^1 \cdot x^0}_{a_1 x^1} \ldots$

więc zapis nadal działa

2 (done)

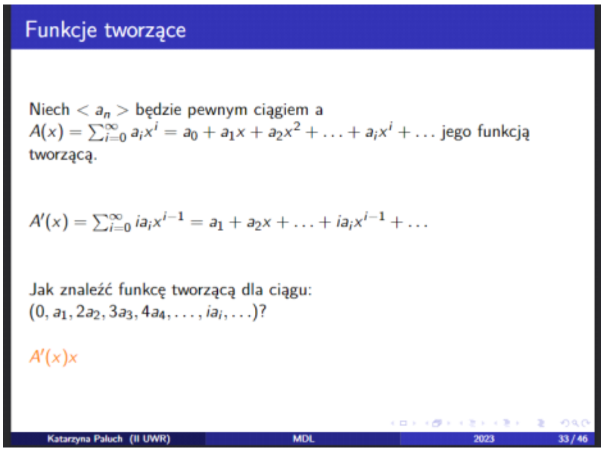
17 November, 2023 10:34

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.



(a) $a_n = n^2$ $\langle 0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots \rangle$

pochodna

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

przesunięcie $\cdot x$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \quad \langle 0, 1, 2, 3, \ldots \rangle$$

przekształcenia z wykładu

znów pochodna

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

znów przesunięcie $\cdot x$

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

Mamy funkcję tworzącą dla n^2: $A(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

(b) $a_n = n^3$ Mamy już funkcję tworzącą dla n^2, pozostaje policzenie jeszcze jednej pochodnej

$$A'(x) \cdot x = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} \cdot x = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

+3 (done)

17 November, 2023 10:34

$\langle 1, \binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \binom{k+3}{k}, \ldots \rangle$

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.
Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

Szukamy wzoru $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$

1° W dowodzie skorzystamy z dwóch wzorów:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Newtona#Uog%C3%B3lnienie_na_liczby_rzeczywiste_i_zespolone

$$\binom{z}{n} = (-1)^n \binom{n-z-1}{n}$$

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \Rightarrow \binom{n+k}{k} = (-1)^k \binom{-n-1}{k} = (-1)^k \binom{-(n+1)}{k} = (-1)^k \binom{y}{k} \leftarrow y = -(n+1)$$

2° W szczególności dla $x = 1$ lub $y = 1$ dostaniemy wzór na tzw. szereg Newtona $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwumian_Newtona

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \overset{1^\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{y}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} (-x)^k \overset{2^\circ}{=} (1+(-x))^y = (1-x)^{-(n+1)} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

4

17 November, 2023 10:34

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5

17 November, 2023 10:34

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6

17 November, 2023 10:34

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.

7

17 November, 2023 10:34

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$ - k-elementowy zbiór bez powyższego warunku

8 (wip)

17 November, 2023 10:34

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:
$n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

a) $n^2 \in O(n^3)$

$n^2 \leq c \cdot n^3$ ✓ $n_0 > 1$ $c > 0$

b) $n^3 \in O(n^{2.99})$ F dla dowolnego c znajdziemy n_0 takie że $n_0^3 > c \cdot n_0^{2,99}$

$n^3 \leq c \cdot n^{2,99}$

c) $2^{n+1} \in O(2^n)$

$2^{n+1} \Rightarrow 2 \cdot 2^n$

$2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$ ✓ dow. n_0, $c \geq 2$

d) $(n+1)! \in O(n!)$

$(n+1)! \Rightarrow (n+1) \cdot n!$

$(n+1) n! \leq c \cdot n!$ F bo musi zachodzić $c \geq n+1$

e) $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$ $\log_2 n = x \Rightarrow 2^x = n \Leftrightarrow \log_2(n) \leq x \Rightarrow 2^x \leq n$

$\log_2(n) \leq c \cdot \sqrt{n}$

$2^{c\sqrt{n}} \leq n$ chyba nie?

$2^c \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq n$

f) $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$

$\sqrt{n} \leq c \cdot \log_2(n)$

$\log_2(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{c}$

$2^{\frac{\sqrt{n}}{c}} \geq n$

$2^{\frac{1}{c}} \cdot 2^{\sqrt{n}} \geq n$ i podobnie do e

9 (done)

17 November, 2023 10:34

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż, że:

(a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

(b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,

(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$

(a) jeśli $f(n) = O(g(n))$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

Z definicji funkcji O wiemy, że funkcja f(n) jest rzędu co najwyżej g(n). Oznaczmy rząd funkcji F(n) jako r_F, g(n) jako r_g. Możemy zapisać wtedy $r_F \leq r_g$. Zapisując drugie równanie analogicznie mamy $r_g \leq r_h$.

$$r_F \leq r_g \leq r_h \Rightarrow r_F \leq r_h \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

(b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$

$F(n) \leq c_1 \cdot g(n)$

$g(n) \geq c_2 \cdot F(n)$

$F(n) \cdot \frac{1}{c_1} \leq g(n)$

i widać od razu że prawda

(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$

- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$

Widać to też wprost z definicji - funkcja a jest dokładnie rzędu b $\Leftrightarrow$ funkcja b jest dokładnie rzędu a.

10 (done)

17 November, 2023 10:34

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

* Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Z definicji:

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

a z treści zadania wiemy że $g(n)$ jest wielomianem wyższego stopnia z def. * prawdziwe.

11(3p)

17 November, 2023 10:34

11. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

https://mathoverflow.net/questions/349547/division-of-space-by-hyper-planes

Asymptotyka - skrót

17 November, 2023 11:02

Def. z wykładu:

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończości, to $\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Inne funkcje

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

- omega $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$
- theta $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- mała omega $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$