9 (podobne na egzaminie ma być)

21 October, 2023 12:03

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1+x_2+x_3+x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

Dwa typy zadań równocześnie: metoda włączeń/wyłączeń i stars&bars. Obliczymy najpierw bez ograniczeń, potem łamiące jedno/dwa/trzy/cztery ograniczenia.

1° Brak ograniczeń

$x_1+x_2+x_3+x_4=100$

$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{103}{3}$

2° Ograniczenia złamane

a) $|A_1|$ $x_1 > 30$

$x_1' = x_1 - 30$

$30 + x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 100 \Rightarrow x_1' + x_2 + x_3 + x_4 = 70$

$\binom{73}{3}$

i analogicznie b) $|A_2|$ $\binom{73}{3}$ c) $|A_3|$ $\binom{63}{3}$ d) $|A_4|$ $\binom{63}{3}$

3° Łączymy ograniczenia

a) $|A_1 \cap A_2| = \binom{43}{3}$

b) $|A_1 \cap A_3| = \binom{33}{3}$

c) $|A_1 \cap A_4| = \binom{33}{3}$

d) $|A_2 \cap A_3| = \binom{33}{3}$

e) $|A_2 \cap A_4| = \binom{33}{3}$

f) $|A_3 \cap A_4| = \binom{23}{3}$

g) $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$

h) $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 1$

i) $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

j) $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

k) $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 0$

4° Liczymy ostateczny wynik zasadą włączeń/wyłączeń

$S = \binom{103}{3} - 2\cdot\binom{73}{3} - 2\cdot\binom{63}{3} + \binom{43}{3} + 4\cdot\binom{33}{3} + \binom{23}{3} - 1 - 1 + 0 + 0 + 0 =$ jakaś duża lb.