

Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Ile potrzeba ruchów by przenieść wieżę składającą się z n krążków z pręta A na pręt C używając pomocniczo pręta B ,
jeśli:

- krążki są różnej wielkości, ułożone od największego do najmniejszego, największy na spodzie, najmniejszy na wierzchu,
- w jednym ruchu można przenieść jeden krążek,
- nie można kłaść krążka większego na mniejszym?

Proste na płaszczyźnie

Na ile maksymalnie obszarów można podzielić płaszczyznę przy pomocy n prostych?

Operatory działające na ciągi

$$\langle a_n \rangle = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

operator przesunięcia: $E \langle a_n \rangle = \langle a_{n+1} \rangle = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$

$$E^2 \langle a_n \rangle = E(E \langle a_n \rangle) = (a_2, a_3, \dots)$$

Operatory działające na ciągi

$$\langle a_n \rangle = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$$

$$\langle a_n \rangle + \langle b_n \rangle = \langle a_n + b_n \rangle = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n, \dots)$$

$$c \langle a_n \rangle = \langle ca_n \rangle = (ca_0, ca_1, ca_2, \dots, ca_n, \dots)$$

Operator O jest **anihilatorem** ciągu $\langle a_n \rangle$, jeśli
 $O \langle a_n \rangle = \langle 0 \rangle = (0, 0, \dots, 0, \dots)$.

Operator mnożenia przez 0 jest trywialnym annihilatorem każdego ciągu, dlatego nie jest traktowany jako annihilator.

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 1 \rangle = (1, 1, 1, \dots)$?

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 1 \rangle = (1, 1, 1, \dots)$?

$$E - 1$$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle \pi \rangle = (\pi, \pi, \pi, \dots)$?

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle \pi \rangle = (\pi, \pi, \pi, \dots)$?

$E - 1$

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 2^n \rangle = (1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots)$?

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 2^n \rangle = (1, 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots)$?

$E - 2$

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle \pi 2^n \rangle = (\pi, 2\pi, 4\pi, 8\pi, \dots, 2^n\pi, \dots)$?

Jakie ciągi anihiluje operator $E - 2$?

Jakie ciągi anihiluje operator $E - a$?

Jakie ciągi anihiluje operator $E - a$?

$\langle \alpha a^n \rangle$ dla dowolnego $\alpha \in R$

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 2^n + 3^n \rangle = (2, 5, 13, \dots, 2^n + 3^n, \dots)$?

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 2^n + 3^n \rangle = (2, 5, 13, \dots, 2^n + 3^n, \dots)$?

Operator $E - 2$ właściwie nie zmienia ciągu 3^n , tzn
 $(E - 2) \langle 3^n \rangle = \langle \alpha 3^n \rangle$ dla pewnego $\alpha \neq 0$.

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle 2^n + 3^n \rangle = (2, 5, 13, \dots, 2^n + 3^n, \dots)$?

$$(E - 2)(E - 3)$$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle n2^n \rangle$?

Jaki operator anihiluje ciąg $\langle n2^n \rangle$?

$$(E - 2)^2$$

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - 2)^2$?

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - 2)^2$?

$$\langle (\alpha n + \beta)2^n \rangle$$

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - 2)^k$?

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - 2)^k$?

$$\langle (\alpha_{k-1}n^{k-1} + \alpha_{k-2}n^{k-2} + \dots \alpha_1n + \alpha_0)2^n \rangle = \langle 2^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i \rangle$$

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - c)^k$?

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - c)^k$?

$$\langle (\alpha_{k-1}n^{k-1} + \alpha_{k-2}n^{k-2} + \dots \alpha_1n + \alpha_0)c^n \rangle = \langle c^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i \rangle$$

Znając anihilator ciągu $\langle a_n \rangle$, znamy $\langle a_n \rangle$.

Jeśli wiemy jaki operator **anihiluje** (zeruje/sprowadza do zera) ciąg $\langle a_n \rangle$, wiemy, jaką postać ma $\langle a_n \rangle$.

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Czym zanikilować $\langle a_n \rangle$?

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

$$E \langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle = \langle 7a_0, 7a_1, 7a_2, \dots \rangle = 7 \langle a_n \rangle$$

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

$$E \langle a_n \rangle = \langle a_1, a_2, a_3, \dots \rangle = \langle 7a_0, 7a_1, 7a_2, \dots \rangle = 7 \langle a_n \rangle.$$

W takim razie $E - 7$ jest **anihilatorem** $\langle a_n \rangle$.

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

W takim razie $E - 7$ jest **anihilatorem** $\langle a_n \rangle$.
 $\langle a_n \rangle = \langle \alpha 7^n \rangle$

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

W takim razie $E - 7$ jest **anihilatorem** $\langle a_n \rangle$.

$$\langle a_n \rangle = \langle \alpha 7^n \rangle$$

Aby obliczyć α , rozwiązujemy równanie $\alpha 7^0 = a_0 = \pi$. Zatem $\alpha = \pi$.

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0,$
- $F_1 = 1,$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1.$

Jaki operator anihiluje $\langle F_n \rangle$?

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Jaki operator anihiluje $\langle F_n \rangle$?

$$E^2 \langle F_n \rangle = \langle F_{n+2} \rangle = (F_2, F_3, \dots) = (F_0 + F_1, F_1 + F_2, F_2 + F_3, \dots) = (F_0, F_1, \dots) + (F_1, F_2, \dots) = \langle F_n \rangle + E \langle F_n \rangle$$

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Jaki operator anihiluje $\langle F_n \rangle$?

$$E^2 \langle F_n \rangle = \langle F_n \rangle + E \langle F_n \rangle = (1 + E) \langle F_n \rangle$$

Zatem $E^2 - E - 1$ anihiluje $\langle F_n \rangle$.

$E^2 - E - 1$ anihiluje $\langle F_n \rangle$.

$$E^2 - E - 1 = (E - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2})$$

$$F_n = \alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

Aby obliczyć α, β rozwiążemy układ równań:

$$F_0 = 0 = \alpha + \beta$$

$$F_1 = 1 = \alpha \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- $a_0 = 0$,
- $a_1 = 1$,
- $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ dla $n > 1$.

Jaki jest anihilator $\langle a_n \rangle$?

- $a_0 = 0$,
- $a_1 = 1$,
- $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}$ dla $n > 1$.