2 (done)

15 October, 2023 18:49

nieskończone rozwinięcie mantysy

błędy bezwzględne

L2.2. [2 punkty] Udowodnij, że **a)** $|m_t - m_t^c| \le 2^{-t}$, **b)** $|m_t - m_t^r| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$.

Wzory z wykładu:

$m = \sum_{i=1} e_{-i} \cdot 2^{-i}$

$m_t^c = \sum_{i=1}^{t} e_{-i} \cdot 2^{-t}$

$m_t^r = \sum_{i=1}^{t} e_{-i} \cdot 2^{-i} + e_{-(t+1)} \cdot 2^{-t}$

a) $|m_t - m_t^c| \le 2^{-t}$ obcięcie mantysy

$\left|\sum_{i=1}^{\infty} e_{-i}\, 2^{-i} - \sum_{i=1}^{t} e_{-i}\, 2^{-i}\right| \le 2^{-t}$

Weźmy max. lewej strony

$\left|\sum_{i=t+1}^{\infty} e_{-i} \cdot 2^{-i}\right| \le 2^{-t} \quad \forall e_i = 1$

$\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-(t+1)} + 2^{-(t+2)} + 2^{-(t+3)} + \dots =$

$2^{-(t+1)}\left(2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots\right)$ zmierza do 2

$a_1 = 1 \quad q = \frac{1}{2}$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$\sum_{t=1}^{\infty} 2^{-i} = 2^{-(t+1)} \cdot 2 = 2^{-t}$

skoro max. lewej strony jest równy prawej to nierówność jest prawdziwa c.n.d.

b) $|m_t - m_t^r| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$

$\left|\sum_{i=1}^{\infty} e_{-i}\, 2^{-i} - \left(\sum_{i=1}^{t} e_{-i} \cdot 2^{-i} + e_{-(t+1)} \cdot 2^{-t}\right)\right| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$

$\left|\sum_{i=t+1}^{\infty} e_{-i}\, 2^{-i} - e_{-(t+1)}\, 2^{-t}\right| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$

max. występuje dla $e_{(t+1)} = 0$, reszty $e = 1$

$\sum_{i=t+2}^{\infty} e_{-i} \cdot 2^{-i} = 2^{-(t+2)} + 2^{-(t+3)} + 2^{-(t+4)} + \dots = 2^{-(t+2)} \cdot 2 =$

to samo co w a)

$2^{-t-1} = 2^{-t} \cdot 2^{-1} = 2^{-t} \cdot \frac{1}{2}$

ten sam wniosek.