2 (done)

8 November, 2023 15:14

**L6.2.** $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie $x$, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są dane, a $T_n$ oznacza $n$-ty *wielomiany Czebyszewa.*

Wielomiany Czebyszewa $T_0(x)=1 \quad T_1(x)=x \quad T_k(x)=2x\cdot T_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$

$T_k(-x)=(-1)^kT_k(x)$

Algorytm clenshawa: u nas w postaci $\sum_{k=0}^{n}{}' c_kT_k(x)=w(x)$

**Algorytm Clenshawa**[1] – rekurencyjna metoda obliczania liniowej kombinacji wielomianów Czebyszewa. Stosuje się go do dowolnej klasy funkcji definiowalnych za pomocą trójtermowego równania rekurencyjnego[2].

## Algorytm Clenshawa [ edytuj | edytuj kod ]

Niech ciąg $\phi_k,\ k=0,1,\ldots$ spełnia liniową relację rekurencyjną

$$\phi_{k+1}(x)+\alpha_k(x)\,\phi_k(x)+\beta_k(x)\,\phi_{k-1}(x)=0,$$

gdzie współczynniki $\alpha_k$ i $\beta_k$ są znane. Dla dowolnego, skończonego ciągu $c_0,\ldots,c_n$, definiujemy funkcje $b_k$ przez „odwrócony" wzór rekurencyjny:

$$b_{n+1}(x)=b_{n+2}(x)=0,$$
$$b_k(x)=c_k-\alpha_k(x)\,b_{k+1}(x)-\beta_{k+1}(x)\,b_{k+2}(x).$$

mamy

Kombinacja liniowa $\phi_k$ spełnia

$$\sum_{k=0}^{n}c_k\phi_k(x)=b_0(x)\phi_0(x)+b_1(x)\,[\phi_1(x)+\alpha_0(x)\phi_0(x)]\,.$$

### Specjalny przypadek dla ciągu wielomianów Czebyszewa [ edytuj | edytuj kod ]

Rozważmy kombinację liniową wielomianów Czebyszewa

$$p_n(x)=\frac{a_0}{2}+a_1T_1(x)+a_2T_2(x)+\ldots+a_nT_n(x).$$

Współczynniki w postaci rekurencyjnej dla wielomianów Czebyszewa to

$$\alpha_k(x)=-2x,\quad \beta_k=1.$$

mamy

Korzystając z zależności

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=xT_0(x),$$
$$b_0(x)=a_0+2xb_1(x)-b_2(x),$$

algorytm Clenshawa redukuje się do:

$$p_n(x)=\frac{1}{2}\,[b_0(x)-b_2(x)]\,.$$

do tego chcemy doprowadzić naszą sumę

$b_{n+1}(x)=b_{n+2}(x)=0$ podstawiamy $\alpha,\beta$

$b_k(x)=c_k-\alpha_k(x)b_{k+1}(x)-\beta_{k+1}(x)b_{k+2}(x)=$

$c_k+2xb_{k+1}(x)-b_{k+2}(x)$

$b_k(x)=c_k+2xb_{k+1}(x)-b_{k+2}(x)$

$c_k=b_k(x)-2xb_{k+1}(x)+b_{k+2}(x)$

$W(x)=\sum_{k=0}^{n}{}'(b_k(x)-2xb_{k+1}(x)+b_{k+2}(x))T_k(x)=$

$\frac{1}{2}b_0(x)T_0(x)+b_1(x)T_1(x)-xb_1(x)T_0(x)+$

$\sum_{k=2}^{n}b_k(x)T_k(x)-\sum_{k=1}^{n-1}2xb_{k+1}(x)T_k(x)+\sum_{k=0}^{n-2}b_{k+2}(x)T_2(x)=$

Trzy pierwsze wyrazy bierzemy, resztę indeksów przesuwamy (rozpijając sumę)

$\frac{1}{2}b_0(x)T_0(x)+b_1(x)T_1(x)-xb_1(x)T_0(x)+\sum_{k=2}^{n}b_k(x)T_k(x)$

$-\sum_{k=2}^{n}2xb_k(x)T_{k-1}(x)+\sum_{k=2}^{n}{}'b_k(x)\cdot T_{k-2}(x)=$

$T_0(x)\cdot x=T_1(x)$ skraca się

jak $T_k(x)$ rozpiszemy to się wyzeruje

$\frac{1}{2}b_0(x)T_0(x)+b_1(x)T_1(x)-xb_1T_0(x)+b_2(x)T_2(x)-2xb_2(x)T_1(x)+\frac{1}{2}b_2(x)T_0(x)+\sum_{k=3}^{n}b_k(x)(T_k(x)-2xT_{k-1}(x)+T_{k-2}(x))=$

$\frac{1}{2}b_0(x)T_0(x)+b_2(x)T_2(x)-2xb_2(x)T_1(x)+\frac{1}{2}b_2(x)T_0(x)=$ ← rozpiszmy teraz $T_0, T_1, T_2$

$\frac{1}{2}b_0+b_2(x)2x^2-b_2(x)-2x^2b_2(x)+\frac{1}{2}b_2(x)=$

$\frac{1}{2}b_0-\frac{1}{2}b_2=\frac{1}{2}(b_0-b_2)$

## Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju [ edytuj | edytuj kod ]

### Definicja rekurencyjna [ edytuj | edytuj kod ]

Wielomiany te spełniają zależność[1]

$$T_0(x)=1$$
$$T_1(x)=x$$
$$T_k(x)=2x\cdot T_{k-1}(x)-T_{k-2}(x)$$

### Postać jawna [ edytuj | edytuj kod ]

Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest:

$$T_k(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^k+(x-\sqrt{x^2-1})^k}{2}.$$

### Parzystość wielomianów Czebyszewa [ edytuj | edytuj kod ]

Z definicji wynika, że dla $k$ parzystego wielomian Czebyszewa $k$-tego stopnia jest parzysty, dla nieparzystego $k$ – nieparzysty:

$$T_k(-x)=(-1)^kT_k(x).$$

### Postać trygonometryczna [ edytuj | edytuj kod ]

Dla $x\in[-1;1]$ podstawiając za $x=\cos t$, dla $k=0,1,2,\ldots$

$$T_k(\cos t)=\frac{(\cos t+\sqrt{\cos^2 t-1})^k+(\cos t-\sqrt{\cos^2 t-1})^k}{2}$$
$$=\frac{(\cos t+\sqrt{-\sin^2 t})^k+(\cos t-\sqrt{-\sin^2 t})^k}{2}$$
$$=\frac{(\cos t+i\cdot\sin t)^k+(\cos t-i\cdot\sin t)^k}{2}$$