L12

7 January, 2024 13:57

L12 zad.	1	+2	3	-4	5	+6	7	8	+9	10	11	12	suma
pkt.	1		1	0,5									
maxpkt	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	11,5

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?
2. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?
3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.
5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po ścieżce o dł. co najwyżej 2.
7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.
8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.
9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.
10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.
12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

1 (done)

7 January, 2024 14:10

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Zadanie podobne do tego z szachownicą.
Pomalujmy każdą kostkę na dwa kolory: czarny lub biały:
Kostki na rogach i po środkach ścian będą czarne, pozostałe białe

1 2(środek) 3

„rozcinając" naszą kostkę możemy zauważyć że mamy 14 czarnych i 13 białych, środkowa jest biała.

Odwracając ścieżkę (idąc od środka) mamy:

$B \to C \to B \to C \to \ldots \ldots \to B \to C \to$ X

1 1 2 2 ... 13 13

Brakuje 14 białej kostki, a jedna czarna nie zostanie zjedzona.

Trasa jest więc niemożliwa.

+2

7 January, 2024 14:10

2. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?

3 (done)

7 January, 2024 14:10

3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Możemy skorzystać z twierdzenia z wykładu (12, cz. 1) - konkretnie tw. Diraca ↗

Aby warunek z tw. zachodził: $n > 1$ (dla $n=1$ dwa wierzchołki)

I $n=1$ Dwóch uczniów z jednym przyjacielem (sobą nawzajem) w jednej ławce, git od razu.

II $n>1$ W grafie (graf przyjaźni - krawędź oznacza przyjaźń) (gdzie wierzchołkami są uczniowie) istnieje cykl Hamiltona.

Usuwamy co drugą krawędź ⇒ otrzymujemy ławki.
Można usunąć na dwa sposoby ⇒ dwa ustawienia.

-4 (done)

7 January, 2024 14:10

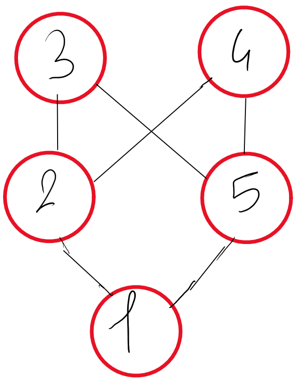
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

5 wierzchołków

$\{2, 2, 2, 3, 3\}$



Nie ma tu cyklu Hamiltona.

ew. dowód czemu

Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona

- Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.
- Jeśli graf $G = (V, E)$ zaiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Katarzyna Paluch (II UWR) MDL 2023 3 / 11

I korzystamy teraz z info z wykładu. Usuwamy 2 wierzchołki $\{2, 5\}$, otrzymujemy 3 spójne składowe, punkt drugi jest więc niespełniony.

5

7 January, 2024 14:10

5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

+6

7 January, 2024 14:10

6. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po scieżce o dł. co najwyżej 2.

7

7 January, 2024 14:10

7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.

8

7 January, 2024 14:10

8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

+9

7 January, 2024 14:10

9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.

10

7 January, 2024 14:10

10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

11

7 January, 2024 14:10

11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

12

7 January, 2024 14:10

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.