Lista nr 8 z matematyki dyskretnej

1. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.

2. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.

3. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

   (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,

   (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,

   (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,

   (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),

   (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

4. (-) Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

5. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

6. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

7. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.

8. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa

wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny. Ile krawędzi i wierzchołków ma Q_k?

9. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień co najmniej $k \geq 2$, zawiera cykl o długości $k + 1$.

11. Niech $K_n = (V, E)$ oznacza n-wierzchołkowy graf pełny (klikę). Pokaż, że zbiór krawędzi K_n można podzielić na trzy części E_1, E_2, E_3 tak, by każde dwa grafy $G_i = (V, E_i)$, $G_j = (V, E_j)$ dla $1 \leq i < j \leq 3$ były izomorficzne wtw, gdy $n \equiv_3 0$ lub $n \equiv_3 1$ (n modulo 3 przystaje do 0 lub 1.)

12. Niech G będzie grafem, w którym wierzchołkami są permutacje liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ oraz dwie permutacje $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są połączone krawędzią wtw, gdy jedną można otrzymać z drugiej za pomocą jednej zamiany miejscami dwóch liczb. Pokaż, że G jest dwudzielny.