Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2024

Operatory działające na ciągi

$< a_n >= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

operator przesunięcia: $E < a_n >=< a_{n+1} >= (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

$E^2 < a_n >= E(E < a_n >) = (a_2, a_3, \ldots)$

Operatory działające na ciągi

$$< a_n >= (a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$$

$$< a_n > + < b_n >=< a_n + b_n >= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n, \ldots)$$

$$c < a_n >=< ca_n >= (ca_0, ca_1, ca_2, \ldots, ca_n, \ldots)$$

Anihilator ciągu

Operator O jest anihilatorem ciągu $< a_n >$, jeśli
$O < a_n >=< 0 >= (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Operator mnożenia przez 0 jest trywialnym anihilatorem każdego ciągu, dlatego nie jest traktowany jako anihilator.

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 1 >= (1, 1, 1, \ldots)$?

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 1 >= (1, 1, 1, \ldots)$?

$E - 1$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< \pi >= (\pi, \pi, \pi, \ldots)$?

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< \pi >= (\pi, \pi, \pi, \ldots)$?

$E - 1$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 2^n >= (1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$?

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 2^n >= (1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots)$?

$E - 2$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< \pi 2^n >= (\pi, 2\pi, 4\pi, 8\pi, \ldots, 2^n\pi, \ldots)$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $E - 2$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $E - a$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $E - a$?

$< \alpha a^n >$ dla dowolnego $\alpha \in R$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 2^n + 3^n >= (2, 5, 13, \ldots, 2^n + 3^n, \ldots)$?

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 2^n + 3^n >= (2, 5, 13, \ldots, 2^n + 3^n, \ldots)$?

Operator $E - 2$ własciwie nie zmienia ciągu 3^n, tzn
$(E - 2) < 3^n >=< \alpha 3^n >$ dla pewnego $\alpha \neq 0$.

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< 2^n + 3^n >= (2, 5, 13, \ldots, 2^n + 3^n, \ldots)$?

$(E - 2)(E - 3)$

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< n2^n >$?

Anihilator ciągu

Jaki operator anihiluje ciąg $< n2^n >$?

$(E - 2)^2$

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E-2)^2$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E-2)^2$?

$< (\alpha n + \beta)2^n >$

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - 2)^k$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E-2)^k$?

$$< (\alpha_{k-1} n^{k-1} + \alpha_{k-2} n^{k-2} + \ldots \alpha_1 n + \alpha_0) 2^n > = < 2^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i >$$

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - c)^k$?

Anihilator ciągu

Jakie ciągi anihiluje operator $(E - c)^k$?

$$< (\alpha_{k-1} n^{k-1} + \alpha_{k-2} n^{k-2} + \ldots \alpha_1 n + \alpha_0) c^n > = < c^n \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i >$$

Zastosowanie anihilatora

Znając anihilator ciągu $< a_n >$, znamy $< a_n >$.

Jeśli wiemy jaki operator anihiluje (zeruje/sprowadza do zera) ciąg $< a_n >$, wiemy, jaką postać ma $< a_n >$.

Ciąg a_n

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

Czym zanihilować $< a_n >$?

Ciąg a_n

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

$$E < a_n > = < a_1, a_2, a_3, \ldots > = < 7a_0, 7a_1, 7a_2, \ldots > = 7 < a_n >$$

Ciąg a_n

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

$E < a_n >=< a_1, a_2, a_3, \ldots >=< 7a_0, 7a_1, 7a_2, \ldots >= 7 < a_n >$.
W takim razie $E - 7$ jest anihilatorem $< a_n >$.

Ciąg a_n

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

W takim razie $E - 7$ jest anihilatorem $< a_n >$.
$< a_n > = < \alpha 7^n >$

Ciąg a_n

- $a_0 = \pi$,
- $a_n = 7a_{n-1}$ dla $n \geq 1$.

W takim razie $E - 7$ jest anihilatorem $< a_n >$.
$< a_n > = < \alpha 7^n >$
Aby obliczyć α, rozwiązujemy równanie $\alpha 7^0 = a_0 = \pi$. Zatem $\alpha = \pi$.

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Jaki operator anihiluje $< F_n >$?

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Jaki operator anihiluje $< F_n >$?
$E^2 < F_n >=< F_{n+2} >= (F_2, F_3, \ldots) = (F_0 + F_1, F_1 + F_2, F_2 + F_3, \ldots) =$
$(F_0, F_1, \ldots) + (F_1, F_2, \ldots) =< F_n > +E < F_n >$

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Jaki operator anihiluje $< F_n >$?
$E^2 < F_n > = < F_n > + E < F_n > = (1 + E) < F_n >$
Zatem $E^2 - E - 1$ anihiluje $< F_n >$.

Liczby Fibonacciego

$E^2 - E - 1$ anihiluje $< F_n >$.
$E^2 - E - 1 = (E - \frac{1-\sqrt{5}}{2})(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2})$

$F_n = \alpha(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + \beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
Aby obliczyć α, β rozwiązujemy układ równań:

$F_0 = 0 = \alpha + \beta$
$F_1 = 1 = \alpha\frac{1-\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ciąg a_n

- $a_0 = 0$,
- $a_1 = 1$,
- $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n2^n$ dla $n > 1$.

Jaki jest anihilator $< a_n >$?

Ciąg a_n

- $a_0 = 0$,
- $a_1 = 1$,
- $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}$ dla $n > 1$.

Podłoga w równaniach

Ile rozwiązań dla parametru c ma równanie $(n+1)x - \lfloor nx \rfloor = c$?

Podłoga własności

Czy dla każdego $x > 0$ zachodzi:
$\lfloor \log_3(x) \rfloor = \lfloor \log_3(\lfloor x \rfloor) \rfloor$?

Podzielność przez 3

Podzielność przez 3

Liczba naturalna x dzieli się przez 3 wtw, gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym dzieli się przez 3.

Ostatnia cyfra

Jaka jest ostatnia cyfra liczby 77^{77} zapisanej w systemie dziesiętnym?

Dwie ostatnie cyfry

Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby 77^{77} zapisanej w systemie dziesiętnym?