1 (done)

25 October, 2023 16:08

L4.1. [1 punkt] Niech $[a_0, b_0]$, $[a_1, b_1]$, ... będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n\to\infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$?

(c) Wykaż, że
(1) $$|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \qquad (n \ge 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą nauturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

a) Bisekcja - bierzemy przedział, dzielimy go cały czas na dwa. Mamy pokazać że każdy kolejny przedział jest podzbiorem poprzedniego.
Wynika to z definicji, możemy zapisać

$[a_n, b_n]$ $\quad m_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ → punkt kolejnego podziału zawiera się w poprzednim

I teraz jeśli $f(m_{k+1}) = 0$ to kończymy, w.p.p.

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, m_{k+1}], & f(m_{k+1}) > 0 \\ [m_{k+1}, b_k], & f(m_{k+1}) < 0 \end{cases}$$

każdy podprzedział zawiera się więc w poprzednim c.n.u.

b) (b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$ $(n = 0, 1, \ldots)$?

Można to od razu zauważyć: na początku mamy $|b_n - a_n|$ (dla $n=0$)
z każdym kolejnym n bierzemy połowę przedziału. Mamy więc po kolei

$$\underset{n=0}{|b_n - a_n|}\ ;\ \underset{n=1}{\frac{|b_n - a_n|}{2}}\ ;\ \underset{n=2}{\frac{|b_n - a_n|}{4}}\ ;\ \ldots$$

i w ogólności

$$\left|\frac{b_0 - a_0}{2^n}\right|$$

c) (c) Wykaż, że
(1) $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$ $(n \ge 0)$.

T: $|e_n| \le 2^{-n-1}(b_0 - a_0)$
$-(n+1)$

- α - szukany pierwiastek
- m_{n+1} - środek następnego przedziału
- e_n - błąd przybliżenia

z treści zadania:
$e_n = \alpha - m_{n+1}$

... widzimy już podobieństwo

$|\delta e_n| \leq 2^{-(n+1)} (b_0 - a_0)$

$2^{-n-1}(b_0 - a_0) = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$

po jednym przekształceniu widzimy już podobieństwo ze wzorem na długość.

$|e_n| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$

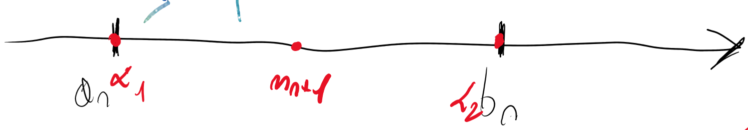
chcemy udowodnić, że dla n-tego kroku bisekcji błąd przybliżenia pierwiastka jest co najwyżej równy połowie długości przedziału

podstawiamy wzór za e_n

$|\alpha - m_{n+1}| \leq \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$

zauważmy, że lewa strona będzie miała maksymalną wartość dla pierwiastka na krawędzi przedziału

$(\alpha = a_n \cup \alpha = b_n)$



Rozważmy jeden z tych przypadków (drugi działa analogicznie)

Dla $\alpha = a_n$

Zauważmy, że bierzemy przedział o długości którą możemy określić wzorem z ppk. a

Lewa strona stanie się więc

$|a_n - m_{n+1}| = \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}$ $L = P$. Udowodnione

d)

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą nauturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

Tak → pierwiastek musi być bardzo blisko b_0

wówczas cały czas będziemy brali prawy przedział.