Lista nr 5 z matematyki dyskretnej

1. (-) Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt B, posługując się przy tym prętem C?

2. (2p) Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą n płaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

   (a) $a_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rfloor, \ a_0 = a_1 = 1,$

   (b) $b_{n+1} = \left\lfloor \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rfloor, \ b_0 = 8,$

   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}, \ c_0 = 0, \ c_1 = 1.$

5. (-) Rozwiąż zależności rekurencyjne:

   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.

6. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

7. (+) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? W zadaniu tym nie można korzystać ze wzoru wyprowadzonego na jednej z poprzednich list.

8. Rozwiąż zależność rekurencyjną

   $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

9. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

10. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

    (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

    (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

    (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

11. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

12. Na ile sposobów można rozdać n różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:

    (a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (b) A lub B nie dostała nic?

    (c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę?

    (d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała?

    (e) Każda z 4 osób coś dostała?