L9

1 December, 2023 20:05

L9 zad.	1	2	3	4	+5	+6	7	8	+9	10	suma
pkt.			1	1				1			
maxpkt.	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	11

1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

2. Udowodnij następujące twierdzenie:

   Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wówczas G zawiera scieżkę o długości k. Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m+n)$.

6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

7. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.

1

1 December, 2023 20:06

1. Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje marszruta z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

2

1 December, 2023 20:06

2. Udowodnij następujące twierdzenie:

   Niech G będzie grafem prostym, w którym każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej k. Wówczas G zawiera scieżkę o długości k. Jeśli $k \geq 2$, to G zawiera cykl o długości przynajmniej $k+1$.

3 (done)

1 December, 2023 20:06

3. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

Mamy wyprowadzić wzór na liczbę wierzchołków stopnia 1 (z jedną krawędzią incydentną) i pokazać że nie zależy ona od wierzchołków stopnia 2.

Pomysł - przyrównajmy dwa wzory na ilość krawędzi i rozpiszmy sumę

I) Z lematu o uściskach dłoni

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m = \sum_{i=1}^{\infty}(i \cdot t_i) \Rightarrow m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(i \cdot t_i)$$

II) Z wykładu: $m = n - 1 = \sum_{i=1}^{\infty}(t_i) - 1$

Przyrównajmy

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t_i = \sum_{i=1}^{\infty} t_i - 1 \qquad \text{// na jedną stronę}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t_i - \sum_{i=1}^{\infty} t_i + 1 = 0 \qquad | \cdot 2$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} i \cdot t_i - \sum_{i=1}^{\infty} 2t_i + 2 = 0 \qquad \text{// w jedną sumę}$$

// wyjmujemy dwa pierwsze wyrazy

$$\sum_{i=1}^{\infty}(i-2)t_i + 2 = 0$$

$$(1-2)t_1 + (2-2)t_2 + \sum_{i=3}^{\infty}(i-2)t_i + 2 = 0 \qquad \text{// } t_2 \text{ się zeruje}$$

$$-t_1 + \sum_{i=3}^{\infty}(i-2)t_i + 2 = 0 \qquad \text{// wyznaczamy } t_1$$

$$\boxed{t_1 = \sum_{i=3}^{\infty}(i-2)t_i + 2}$$

Wyznaczyliśmy wzór na t_1, jak widać nie zależy on od t_2.

Kilka wzorów z wikipedii i jeden z wykładu

Graf prosty - graf bez pętli własnych i krawędzi wielokrotnych. Często określenie *graf* (bez przymiotników) oznacza graf prosty.

Dany jest graf prosty G o n wierzchołkach $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i m krawędziach. Na mocy **lematu o uściskach dłoni** spełniona jest następująca własność:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2m. = \sum_{i=1}^{\infty}(i \cdot t_i)$$ (ilość krawędzi · ilość wierzchołków tego stopnia)

Powyższą własność nietrudno jest zrozumieć intuicyjnie: każda krawędź łączy dwa wierzchołki, a zatem dodając do siebie stopnie sąsiadujących wierzchołków (czyli liczby krawędzi wychodzących z nich), liczymy każdą z krawędzi dwukrotnie, co potwierdza prawdziwość powyższej własności. Wynika z tego również fakt, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków o nieparzystych stopniach jest parzysta.

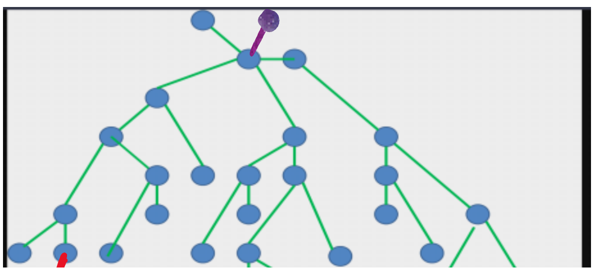
The **degree sum formula** states that, given a graph $G = (V, E)$,

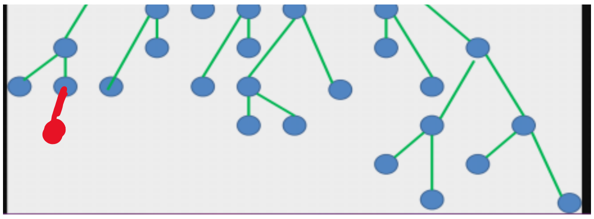
$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Charakteryzacja drzewa

Niech $G = (V, E)$ będzie n-wierzchołkowym grafem nieskierowanym ($n \geq 1$). Wówczas następujące stwierdzenia są równoważne:

1. G jest spójny i acykliczny (G jest drzewem),
2. G jest spójny i ma $n - 1$ krawędzi.
3. G jest acykliczny i ma $n - 1$ krawedzi.
4. $\forall_{u,v \in V}$ G zawiera dokładnie jedną $u - v$-ścieżkę.





Jak to interpretujemy?
Jedyny sposób na zwiększenie t_2 to dodanie wierzch-~~krawędzi~~ do t_1 - wówczas "przedłużamy" t_1 tworząc t_2, ale powstaje nowe t_1 $\Rightarrow$ i ilość t_1 się nie zmienia

4 (done)

1 December, 2023 20:06

4. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wierzchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

Musimy udowodnić implikację w obydwie strony

G to drzewo ⇔ jest dokładnie jedna ścieżka między dowolnymi w. u i v w G

a) L ⇒ P

Zakładamy że G jest drzewem, więc prawa strona implikacji wynika z definicji drzewa - nie ma żadnych cykli, więc może istnieć tylko jedna ścieżka

b) P ⇒ L

Z założenia wynika że graf jest spójny.

Dodatkowo:

I) Jeśli istnieje więcej niż jedna ścieżka między u i v to można połączyć je w cykl ⇒ nie drzewo

II) Jeśli nie istnieje chociaż jedna ścieżka między u i v to graf nie jest spójny - sprzeczność z założeniem

Oprócz tego bardzo łatwo pokazać równoważne definicje

Definicja i przykłady

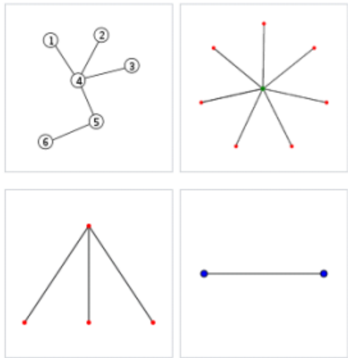
Drzewo – graf nieskierowany, który jest acykliczny[1] i spójny[2][1], czyli taki graf, że z każdego wierzchołka drzewa można dotrzeć do każdego innego wierzchołka (spójność) i tylko jednym sposobem (acykliczność, brak możliwości chodzenia „w kółko")[3].

Równoważne definicje [edytuj | edytuj kod]

Graf prosty **G** jest **drzewem** jedynie, jeśli spełnia jeden z warunków[3]:

- dowolne dwa wierzchołki łączy dokładnie jedna ścieżka prosta
- **G** jest acykliczny i dodanie krawędzi łączącej dowolne dwa wierzchołki utworzy cykl
- **G** jest spójny i usunięcie dowolnej krawędzi spowoduje, że **G** przestanie być spójny

Przykłady drzew [edytuj | edytuj kod]



+5 (2pkt)

1 December, 2023 20:06

łączącą.

5. (+) (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej ścieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.

+6

1 December, 2023 20:06

6. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

7

1 December, 2023 20:06

7. Niech Q_k oznacza graf k-wymiarowej kostki, tzn. zbiór wierzchołków tego grafu tworzą wszystkie k-elementowe ciągi zer i jedynek i dwa wierzchołki są sąsiednie wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadające im ciągi różnią się dokładnie jedną współrzędną. Wykaż, że jest to graf dwudzielny.

8 (done)

1 December, 2023 20:06

8. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być $O(m+n)$.

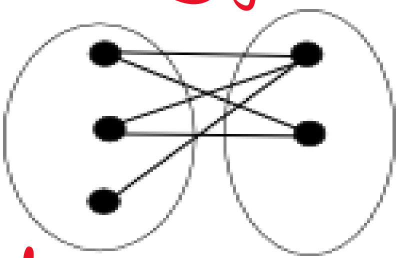
Najpierw definicja grafu dwudzielnego

Graf dwudzielny to graf którego wierzchołki można podzielić na dwa rozłączne zbiory, tak by żadna krawędź nie łączyła dwóch wierzchołków z tej samej grupy

lub równoważnie

Graf który nie zawiera cykli nieparzystej długości

Przykładowy graf dwudzielny



Idea: Pomalujmy wierzchołki na dwa kolory podczas przemierzania grafu DFSem. Jeśli wierzchołek jest pomalowany na zły kolor, to nie będzie dwudzielny.

```javascript
/**
 * Funkcja isBipaartite sprawdza czy graf jest dwudzielny
 * @param {Array[]} graph - Graf w postaci tablicy list sąsiedztwa
 * @param {number} v - Wierzchołek startowy - może być dowolny
 * @param {boolean[]} visited - Tablica odwiedzonych wierzchołków
 * @param {number[]} color - Tablica kolorów wierzchołków
 * @returns {boolean} - Zwraca true jeśli graf jest dwudzielny, false w przeciwnym wypadku
 */
const isBipartite = (graph, v, visited, color) => {
    visited[v] = true; // Oznaczamy wierzchołek jako odwiedzony
    // Przeglądamy wszystkie wierzchołki sąsiadujące z wierzchołkiem v
    for (const u of graph[v]) {
        // Jeśli wierzchołek nie był odwiedzony to go odwiedzamy i nadajemy mu przeciwny kolor
        // po czym wywołujemy rekurencyjnie funkcję isBipartite dla wierzchołka u (DFS)
        if (!visited[u]) {
            color[u] = !color[v];
            if (!isBipartite(graph, u, visited, color)) {
                return false;
            }
        // Jeśli wierzchołek był odwiedzony to sprawdzamy czy ma przeciwny kolor
        // Jeśli nie ma to zwracamy false
        } else if (color[u] === color[v]) {
            return false;
        }
    }
    return true;
}
```

+9

1 December, 2023 20:06

9. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

10

1 December, 2023 20:06

10. Pokaż, że graf $G = (V, E)$, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3 zawiera cykl o parzystej długości.