Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 3

18 października 2023 r.

Zajęcia 24 października 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L3.1. **Włącz komputer!** 2 punkty Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażeń

a) $(x^3 + \sqrt{x^6 + 2023^2})^{-1}$, **b)** $\log_2 x - 2$, **c)** $x^{-3}(\pi/2 - x - \operatorname{arcctg}(x))$

może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposoby obliczenia wyniku dokładniejszego. Pokaż, że sposoby te **działają w praktyce**.

L3.2. **Włącz komputer!** 1 punkt Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie `algorytm` obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). **Przeprowadź testy** dla odpowiednio dobranych wartości a, b i c pokazujące, że Twój algorytm jest lepszy od *metody szkolnej* bazującej jedynie na dobrze znanych wzorach $x_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$.

L3.3. 1 punkt Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x.

L3.4. 2 punkty Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli:

a) $f(x) = (x + 2023)^7$, **b)** $f(x) = \cos(3x)$, **c)** $f(x) = (1 + x^6)^{-1}$.

L3.5. 2 punkty Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\mathrm{fl}(\mathrm{tg}(x)) = \mathrm{tg}(x)(1 + \varepsilon_x)$, gdzie $|\varepsilon_x| \leq 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x, że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm obiczania wartości wyrażenia $\sum_{i=1}^{4} y_i \mathrm{tg}(4^{-i}x)$ jest numerycznie poprawny:

```
S:=0;

  for i from 1 to 4
    do
      S:=S+y[i]*tg(4^(-i)*x)
    od;

Return(S)
```

L3.6. 1 punkt Sprawdź czy następujący algorytm obliczania wartości wyrażenia $w(x) := x + 4x^{-1}$ ($x \neq 0$) jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
u:=x;
v:=4/x;

Return(u+v)
```

W rozważaniach przyjmij, że x jest liczbą maszynową.

L3.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Zbadaj czy podany niżej algorytm wyznaczania iloczynu liczb maszynowych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (zakładamy zatem, że $\text{rd}(x_k) = x_k$, $1 \le k \le n$) jest algorytmem numerycznie poprawnym.

```
I:=x[n];

  for k=n-1 downto 1
    do
      I:=I*x[k]
    end;

return(I)
```

L3.8. $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne}\text{ (do 12 listopada; do 5 punktów)}}$ [1]

Sprawdź, że dla małego h

$$(1) \qquad f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + O(h), \qquad f'(t) = \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h} + O(h^2).$$

Przybliżenia pochodnej funkcji znajdują zastosowanie m.in. w numerycznym rozwiązywaniu równań różniczkowych, w tym tzw. *równań ruchu*. Znając położenie i prędkość obiektu w chwili t (w wypadku drugiego wzoru, odpowiednio, $t-h$ oraz t), jak również działające na niego siły, z użyciem powyższych wzorów można **przybliżyć** jego położenie oraz prędkość w chwili $t+h$.

Rozpatrujemy ruch układu ciał oddziałujących wzajemnie na siebie poprzez siłę grawitacji (przyda się znane ze szkoły prawo powszechnego ciążenia Newtona: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$). Celem jest określenie, na podstawie początkowego położenia ciał i ich prędkości w chwili t, jaki będzie stan układu w kolejnych ustalonych chwilach, np. $t+h, t+2h, t+3h, \ldots$

(a) Wyprowadź układ równań ruchu dla **dwóch** ciał wzajemnie się przyciągających.

(b) Sprawdź na przykładzie dwóch ciał, które z powyższych przybliżeń pochodnej lepiej sprawdza się w praktyce (dla tego samego h).

Wskazówka nr 1. Bardzo dobrze będzie to widać, jeżeli układ przypomina planetę krążącą wokół słońca.

Wskazówka nr 2. Metodę wykorzystującą pierwszy z wzorów (1) można znaleźć w literaturze pod nazwą *metody Eulera* przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych.

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.

(c) Choć dla dwóch przyciągających się ciał znane jest jawne rozwiązanie analityczne, to w wypadku trzech (tzw. **problem trzech ciał**) lub więcej obiektów — wzorów takich nie ma. Zadanie można rozwiązywać wyłącznie w sposób przybliżony stosując metody numeryczne. Korzystając z podanych możliwości aproksymowania pochodnej, znajdź przybliżone rozwiązanie problemu trzech (lub więcej) ciał dla kilku istotnie różnych układów (np. układ Słońce-Ziemia-Księżyc, planeta krążąca wokół gwiazdy podwójnej, wykorzystanie zjawiska asysty grawitacyjnej, ...).

Autor zadania: *Filip Chudy*.

L3.9. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 12 listopada; do 5 punktów)[2] Wiadomo, że suma szeregu

$$S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2+1} \tag{2}$$

wynosi $0.36398547250893341852488170816398\ldots$ Spróbuj wyznaczyć wartość tej liczby z dokładnością 10 i 16 cyfr za pomocą sum częściowych szeregu (2). Następnie zauważ, że

$$\frac{\pi^2}{12} - S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2(k^2+1)}, \qquad S_2 - \frac{\pi^2}{12} + \frac{7\pi^4}{720} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^4(k^2+1)}$$

i wykorzystaj te związki, aby przyspieszyć obliczenia. Postępując podobnie, zaproponuj efektywny sposób wyznaczania wartości szeregu

$$S_n := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^n+1} \qquad (n = 2, 4, 6, \ldots).$$

(–) Paweł Woźny

[2]Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.