# L12

7 January, 2024 14:18

| L12a zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | suma |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pkt. | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 6 |
| max pkt. | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | |

1/12 max do zdobycia

3 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

**Uwaga!** Z list 12a i 12b **nie można** zdobyć łącznie więcej niż **11 punktów**.

**L12.1.** [1 punkt] Jak już wiadomo, język programowania `PWO++` ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(f)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-20}^{24} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f \in C[-20, 24]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a < b;\ g \in C[a,b])?$$

**L12.2.** [1 punkt] Udowodnij, że kwadratura postaci

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{1}$$

ma rząd $\geq n+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

**L12.3.** [2 punkty] Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła $f$, liczby $a < b$ oraz parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jak wiadomo, współczynniki $A_k$ $(0 \leq k \leq n)$ kwadratury $Q_n$,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int_a^b \left( \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników $A_0, A_1, \ldots, A_n$ i określ jego złożoność.

**L12.4.** [1 punkt] Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k \cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right) \tag{2}$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

**L12.5.** [1 punkt] Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.3**–**L12.4**) i określ jego złożoność.

**L12.6.** [**Włącz komputer!**] [1 punkt] Wykorzystując **własną implementację algorytmu**, o którym mowa w zadaniu **L12.5**, oblicz $Q_n^{NC}(f)$ $(2 \leq n \leq 24)$ dla całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 25x^2}.$$

**Skomentuj wyniki.**

## Lista nr 12b

10 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

**Uwaga!** Z list 12a i 12b **nie można** zdobyć łącznie więcej niż **12 punktów**.

**L12.7.** [1 punkt] O funkcji ciągłej $f$ wiadomo, że $\max_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 2024$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $\varepsilon$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

**L12.8.** [1 punkt] Jak należy dobrać $n$, aby stosując złożony wzór Simpsona $S_n$ obliczyć przybliżoną wartość całki $\int\limits_{-3\pi}^{\pi/6} \sin(5x - \pi/3)\,\mathrm{d}x$ z błędem względnym $\leq 10^{-10}$?

**L12.9.** [1 punkt] Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

**L12.10.** [**Włącz komputer!**] [1 punkt] Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenia $T_{m,k}$ $(0 \leq m \leq 20;\ 0 \leq k \leq 20 - m)$ następujących całek:

a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (2024x^8 - 1977x^4 - 1981)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, c) $\displaystyle\int_{-3\pi}^{\pi/6} \sin(5x - \pi/3)\,\mathrm{d}x$.

Skomentuj wyniki.

**L12.11.** [2 punkty] Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a,b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**L12.12.** [1 punkt] Korzystając z faktu podanego na wykładzie, tzn. **bez konieczności** rozwiązywania układu równań nieliniowych, dobierz węzły $x_0, x_1, x_2$ oraz współczynniki $A_0, A_1, A_2$ kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

**L12.13.** [2 punkty] W języku `PWO++` procedura `LegendreZeros(m)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe $m$-tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu $w$ stopnia mniejszego od $2n+2$ zachodzi

$$\int_{-7}^{4} w(x)\,\mathrm{d}x = Q_n(w),$$

gdzie $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.