Postać Newtona

26 November, 2023 13:16

Postać Newtona – jedna z metod przedstawiania wielomianu. Dla wielomianu stopnia n wybiera się $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i buduje wielomian postaci:

$$w(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1)(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)(x - x_0)$$

Wielomiany Newtona mogą być używane do interpolowania dowolnych funkcji.

Procedura interpolacji jest następująca:

$$\begin{array}{ll} x_i & f(x_i) \\ x_0 & f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

Uzupełniamy tabelkę dopisując kolejne kolumny różnicami dzielonymi:

$$\begin{array}{lll} x_i & f(x_i) & f[x_{i-1}, x_i] \\ x_0 & f(x_0) & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] \\ x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] \end{array}$$

Aż skończy się możliwość dalszego dopisywania:

$$\begin{array}{llllll} x_i & f(x_i) & f[x_{i-1}, x_i] & f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] & \ldots & f[x_0, \ldots, x_i] \\ x_0 & f(x_0) & & & & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\ x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \ldots & f[x_0, \ldots, x_n] \end{array}$$

I używamy kolejnych liczb po przekątnej jako współczynników a_i.

Warto zauważyć, że przy implementacji znajdowania kolejnych wyrazów różnicowych nie musimy korzystać z macierzy (tablicy wielowymiarowej) – wystarczy nam jedynie zwykła tablica, pod warunkiem, że wyrazy będziemy obliczać „od dołu".

> Now, see the patterns? These are called **divided differences**, if we define:
>
> $$f[x_1, x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
>
> $$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1}$$
>
> We continue write this out, we will have the following iteration equation:
>
> $$f[x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1, x_0] = \frac{f[x_k, x_{k-1}, \ldots, x_2, x_2] - f[x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_1, x_0]}{x_k - x_0}$$

Now, see the patterns? These are called **divided differences**, if we define:

$$f[x_1, x_0] = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_1}$$

We continue write this out, we will have the following iteration equation:

$$f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_k, x_{k-1}, \dots, x_2, x_2] - f[x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_1, x_0]}{x_k - x_0}$$

We can see one beauty of the method is that, once the coefficients are determined, adding new data points won't change the calculated ones, we only need to calculate higher differences continues in the same manner. The whole procedure for finding these coefficients can be summarized into a divided differences table. Let's see an example using 5 data points:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & y_0 & & & & \\
& & f[x_1, x_0] & & & \\
x_1 & y_1 & & f[x_2, x_1, x_0] & & \\
& & f[x_2, x_1] & & f[x_3, x_2, x_1, x_0] & \\
x_2 & y_2 & & f[x_3, x_2, x_1] & & f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
& & f[x_3, x_2] & & f[x_4, x_3, x_2, x_1] & \\
x_3 & y_3 & & f[x_4, x_3, x_2] & & \\
& & f[x_4, x_3] & & & \\
x_4 & y_4 & & & &
\end{array}$$

Each element in the table can be calculated using the two previous elements (to the left). In reality, we can calculate each element and store them into a diagonal matrix, that is the coefficients matrix can be write as:

$$\begin{array}{ccccc}
y_0 & f[x_1, x_0] & f[x_2, x_1, x_0] & f[x_3, x_2, x_1, x_0] & f[x_4, x_3, x_2, x_1, x_0] \\
y_1 & f[x_2, x_1] & f[x_3, x_2, x_1] & f[x_4, x_3, x_2, x_1] & 0 \\
y_2 & f[x_3, x_2] & f[x_4, x_3, x_2] & 0 & 0 \\
y_3 & f[x_4, x_3] & 0 & 0 & 0 \\
y_4 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

Przykład obliczeń

Dane są wartości funkcji: $f(0)=0, f(2)=8, f(3)=27, f(5)=125, f(6)=216$.

Tablica ilorazów różnicowych będzie następująca:

x_i	$f(x_i)$	Ilorazy różnicowe			
		Rzędu 1	Rzędu 2	Rzędu 3	Rzędu 4
$x_0=0$	$f(x_0)=0$				
		$f(x_0;x_1)=\frac{8-0}{2-0}=4$			
$x_1=2$	$f(x_1)=8$		$f(x_0;x_1;x_2)=\frac{19-4}{3-0}=5$		
		$f(x_1;x_2)=\frac{27-8}{3-2}=19$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)=\frac{10-5}{5-0}=1$	
$x_2=3$	$f(x_2)=27$		$f(x_1;x_2;x_3)=\frac{49-19}{5-2}=10$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{1-1}{6-0}=0$
		$f(x_2;x_3)=\frac{125-27}{5-3}=49$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)=\frac{14-10}{6-2}=1$	
$x_3=5$	$f(x_3)=125$		$f(x_2;x_3;x_4)=\frac{91-49}{6-3}=14$		
		$f(x_3;x_4)=\frac{216-125}{6-5}=91$			
$x_4=6$	$f(x_4)=216$				

Zatem wielomian interpolacyjny w postaci Newtona dla przykładu powyżej będzie miał postać:

$$W_n(x) = 0 + 4(x-0) + 5(x-0)(x-2) + 1(x-0)(x-2)(x-3) + 0(x-0)(x-2)(x-3)(x-5)$$

Dla sprawdzenia policzmy wartości tego wielomianu w węzłach:

$W_n(0) = 0,$

$W_n(2) = 0 + 4(2-0) = 8,$

$W_n(3) = 0 + 4(3-0) + 5(3-0)(3-2) = 12 + 15 = 27,$

$W_n(5) = 0 + 4(5-0) + 5(5-0)(5-2) + 1(5-0)(5-2)(5-3) = 20 + 75 + 30 = 125,$

$W_n(6) = 0 + 4(6-0) + 5(6-0)(6-2) + 1(6-0)(6-2)(6-3) + 0(6-0)(6-2)(6-3)(6-5) =$
$0 + 24 + 120 + 72 = 216.$