L7

24 November, 2023 23:46

| L7 zad. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | suma |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| pkt. | | 1 | 1 | : | 1 | 2 | 2 | | 7 |
| max pkt. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 11 |

Lista nr 7

22 listopada 2023 r.

Zajęcia 28 listopada 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

**L7.1.** 1 punkt Niech dane będą parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

zachodzi

**a)** $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1,$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(2023) \prod_{i=0}^{j-1} (x_k - f(i)) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$

gdzie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek $f(0) = 2023$.

**L7.2.** 1 punkt Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

**a)** $\begin{array}{c||c|c|c|c} x_k & -3 & 0 & 3 & 4 \\ \hline y_k & 2 & 2 & 38 & 142 \end{array}$, **b)** $\begin{array}{c||c|c|c|c|c} x_k & 3 & 4 & -3 & -1 & 0 \\ \hline y_k & 38 & 142 & 2 & 62 & 2 \end{array}$,

**c)** $\begin{array}{c||c|c|c|c|c|c} x_k & -4 & -3 & -2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y_k & 9 & 7 & 5 & -3 & -5 & 1977 \end{array}$.

**Uwaga.** Na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty **b)** oraz **c)** nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

**L7.3.** **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla $x_k$ $(0 \le k \le n)$ będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

**L7.4.** 1 punkt Niech $t_{nk}^{[a,b]}$ $(0 \le k \le n;\ n \in \mathbb{N})$ oznacza węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ $(a < b)$. Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$\max_{x\in[a,b]} \left| \left(x - t_{n0}^{[a,b]}\right) \left(x - t_{n1}^{[a,b]}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - t_{nn}^{[a,b]}\right) \right|?$$

Odpowiedź uzasadnij.

**L7.5.** 1 punkt Funkcję $f(x) = \cos(x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n + 1$ różnych punktach przedziału $[-3, -2]$. Znajdź wartość $n$, dla której

$$\max_{x\in[-3,-2]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-12}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi $[-3, -2]$?

**L7.6.** 2 punkty Jak wiadomo, język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich jest m.in. procedura `DD_Table(x,f)` znajdująca z dokładnością bliską maszynowej **ilorazy różnicowe** $f[x_0]$, $f[x_0, x_1]$, $\ldots$, $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, gdzie `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ jest wektorem parami różnych liczb rzeczywistych, a `f` – daną funkcją. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie $n$ **musi być mniejsze** niż 21. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `DD_Table` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[z_0]$, $f[z_0, z_1]$, $\ldots$, $f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}]$, $f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}, z_{21}]$, gdzie $z_i \neq z_j$ dla $i \neq j$, $0 \le i, j \le 21$.

**Uwagi.** Rozwiązania, w których **dwukrotnie** używa się procedury `DD_Table` lub wykorzystuje się **jawny wzór** na iloraz różnicowy **nie wchodzą w grę**.

**L7.7.** 2 punkty Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja $f$, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$. Niech $L$ i $M$ będą takimi wielomianami stopnia $\le n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$M(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n + 1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

**L7.8.** 2 punkty Niech $p_n$ będzie wielomianem stopnia $n > 1$ interpolującym daną funkcję $f$ w węzłach $t_{nj} := \cos \frac{\pi j}{n}$ $(j = 0, 1, , \ldots, n)$. Udowodnij, że

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n}{}'' b_k^n \cdot T_k(x),$$

gdzie $T_k$ jest $k$-tym wielomianem Czebyszewa, a

$$b_k^n := \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n}{}'' f(t_{nj})\, T_k(t_{nj}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Jak użyć algorytmu Clenshawa do obliczenia współczynników $b_k^n$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$? Ile to kosztuje?

**Uwaga.** Jeśli potrafisz podać i uzasadnić algorytm wyznaczania współczynników $b_k^n$ $(0 \le k \le n)$ w czasie $O(n \log n)$, to przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu LaTeX i dostarcz je prowadzącemu — być może dostaniesz dodatkowe punkty.