Lista 2

15 October, 2023 09:17

L	1	+2	3	4	5	-6	-7	8	+9	10	11	12	+13	14	suma
W	1			1	1	0,5	0,5					1			/14p.

za 2 pkt

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.
4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.
5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.
6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.
7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.
8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

.

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

10. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą reką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)
11. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?
12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
14. Na ile sposobów można wrzucić $2n$ kulek do k szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić $2n+1$ kulek do $2k+1$ szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

1 (done)

15 October, 2023 09:18

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru punktu (według parzystości):
(P, P); (N, N); (P, N); (N, P)

Wybieramy pięć punktów, w jednym „koszyku" będą więc conajmniej dwa punkty $\iff$ min. dwa punkty będą miały taką samą parzystość obu współrzędnych.

$$\frac{\text{parzysta} + \text{parzysta}}{2} = \text{całkowita} \qquad \frac{\text{nieparzysta} + \text{nieparzysta}}{2} = \text{całkowita}$$

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy

+2

15 October, 2023 09:18

3

15 October, 2023 09:18

4 (done)

15 October, 2023 09:18

4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \dots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.

Dziewięć grup modulo (0 - 8)

1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73, 82, 91, 100

2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92

9, ... 99

w każdej z grup mamy 11 lub 12 elementów (w 8 11, w 1 12)

Do rozdzielenia 55 liczb (55-1)/9 = 6

w jednej 7, reszta 6

7 cyfr na 12 miejsc = przynajmniej dwie będą ze sobą „graniczyć"

a więc będą oddalone o 9

5 (done)

15 October, 2023 09:18

(podzielność przez 2 i 5)

5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

$$a^3b - ab^3 = ab(a^2-b^2) = ab(a-b)(a+b)$$

War.: $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \pmod 5$

jeśli którykolwiek jest mod 0 lub są równe to war. spełniony. Pozostałe opcje:

$\{a,b,c\} = \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}$

Dla każdego przypadku mamy $1+4$ lub $2+3 \equiv 0 \pmod 5$

Jest więc podzielne przez 5

dla podz. przez 2 analogicznie

Podz. przez 2 i 5 $\Leftrightarrow$ podz. przez 10 c.n.u.

-6 (done)

15 October, 2023 09:19

6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+1$ sum (pudełek)
(n w każdą stronę i zero)

$\forall n \in \mathbb{N}$ mamy $2n+2$ sumy
(n kolumn, n wierszy, 2 przekątne)

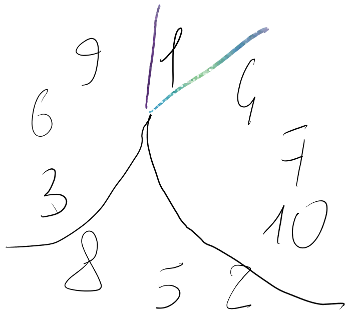
wkładamy $2n+2$ do $2n+1$ $\Rightarrow$ min. 1 podwojone (równe) c.n.u.

-7 (done)

15 October, 2023 09:19

7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.

wykreślamy jedynkę - zostają nam 3 grupy po trzy liczby



$1+2+\dots+10=55$

$55-1=54$

$54/3=\underline{18}$ ← jeśli podzielimy po równo, to mamy 3×18

jeśli jakakolwiek grupa będzie mniejsza, to inne „przejmie nadmiar"

8

15 October, 2023 09:19

+9

15 October, 2023 09:19

10

15 October, 2023 09:19

11

15 October, 2023 09:19

12 (done)

15 October, 2023 09:19

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

$\binom{n}{k} = 1$ dla $k=0 \vee k=n$

I $n=1$

$\sum_0^1 \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = b+a = a+b = (a+b)^1$ ✓

II zał. dla n, ud. dla $n+1$:

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} =$ wychodzimy od lewej i rozpisujemy

$a\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} + b\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i} =$ rozbijamy sumy z a i b

$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} =$ +1 do odpowiednich potęg

$\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}a^{i+1}b^{n-i} + \binom{n}{n}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n}{0}b^{n+1} =$ wyjmujemy po wyrazie z newtona i sum

$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i-1}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ przesuwamy pierwszą sumę a i b i symbole Newtona przy samotnych

$\binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ łączymy sumy

$\binom{n+1}{n+1}a^{i+1} + \sum_{i=1}^{n}\binom{n+1}{i}a^i b^{n-i+1} + \binom{n+1}{0}b^{n+1} =$ zwijamy symbol Newtona przy sumie

$\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}a^i b^{n+1-i}$ suma start o jeden w dół i odp. potęga przy b

Doprowadzone do postaci z prawej strony. Dowód skończony

+13

15 October, 2023 09:19

14

15 October, 2023 09:19