4 (done)

13 March, 2024 22:47

4. (1 pkt) 1. Pokaż, że istnieje graf G, taki, że dla dowolnego grafu G' istnieje homomorfizm z G' w G.

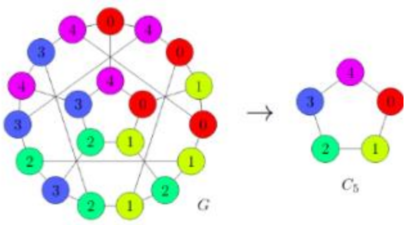
2. Udowodnij lub podaj kontrprzykład na stwierdzenie: dla dowolnych grafów G_1 i G_2 następujące warunki są równoważne:
   - istnieją homomorfizmy $h_1 : G_1 \to G_2$ oraz $h_2 : G_2 \to G_1$ (mówimy, że takie grafy są *homomorficznie równoważne*)
   - istnieje izomorfizm $f : G_1 \to G_2$.

Homomorfizm (gr. ὅμοιος, *homoios* – podobny; μορφή, *morphē* – kształt, forma) – funkcja odwzorowująca jedną algebrę ogólną (np. monoid, grupę, pierścień czy przestrzeń wektorową) w drugą, zachowująca przy tym odpowiadające sobie działania, jakie są zdefiniowane w obu algebrach[1].

Homomorfizm bijektywny, nazywa się izomorfizmem algebr i z punktu widzenia algebry oznacza ich identyczność.

Homomorfizmem grafu G' w graf G (ozn. f:G' → G) nazwiemy odwzorowanie f: V(G') → V(G) o tej własności, że jeśli (u,v) ∈ E(G'), to (f(u),f(v)) ∈ E(G). Zauważmy, że G' jest podgrafem G dokładnie wtedy, gdy pewien homomorfizm f : G' → G jest różnowartościowy.

t) 1. Pokaż, że istnieje graf G, taki, że dla dowolnego grafu G' istnieje homomorfizm z G' w G.



graf $G(V,E)$, $V=\{v_1\}$

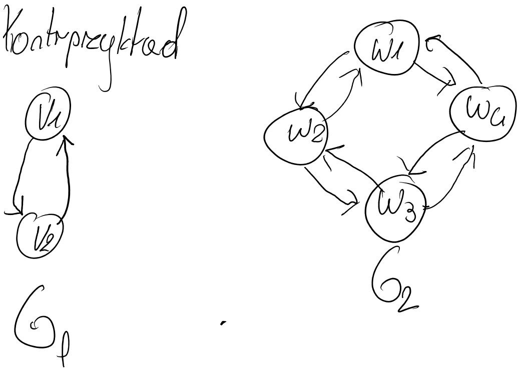
$\forall v \in V_{G'}$

Funkcja na homomorfizm $h(v)=v_1$ więc wszystkie krawędzie będą pętlami wierzchołka v_1. Graf pusty jest homomorficzny dla dowolnego grafu G.

2) Udowodnij lub podaj kontrprzykład na stwierdzenie: dla dowolnych grafów G_1 i G_2 następujące warunki są równoważne:

- istnieją homomorfizmy $h_1 : G_1 \to G_2$ oraz $h_2 : G_2 \to G_1$ (mówimy, że takie grafy są *homomorficznie równoważne*)

Kontrprzykład

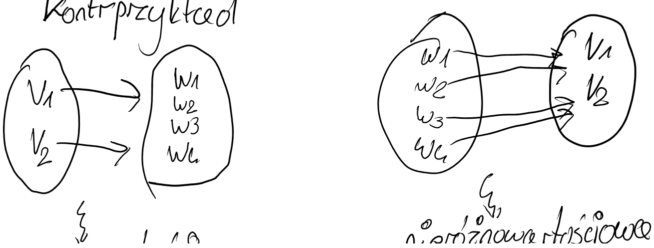


$$h_2: f(w_x) = \begin{cases} v_1, & \text{jeśli } x \text{ np} \\ v_2, & \text{jeśli } x \text{ p} \end{cases}$$

$$h_1: f(w_x) = \begin{cases} w_1, & \text{jeśli } x = 1 \\ w_2, & \text{jeśli } x = 2 \end{cases}$$

3) istnieje izomorfizm $f : G_1 \to G_2$.

Kontrprzykład



różnowartościowa
ale nie „na”

nieróżnowartościowa
funkcja „na”