Funkcje tworzące

11 November, 2024 15:39

Jeśli $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = A(x)$ dla pewnej funkcji $A(x)$, to $A(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $\langle a_n \rangle$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 1 \rangle = (1, 1, \ldots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$$

Dla wygody załóżmy, że $|x| < 1$. Zauważając, że to jest ciąg potęgowy

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$$

$\frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $\langle 1 \rangle$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 7 \rangle = (7, 7, 7, \ldots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = 7 + 7x + 7x^2 + \ldots + 7x^i + \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = \frac{7}{1-x}$$

$\frac{7}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $\langle 7 \rangle$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 2^n \rangle = (1, 2, 4, \ldots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^i x^i + \ldots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x}$$

$\frac{1}{1-2x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $\langle 2^n \rangle$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^i x^i + \ldots$$

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

$\frac{1}{1+x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $\langle (-1)^n \rangle$

Ogólnie:

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a

$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jest jego funkcją tworzącą

$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ $1+x$ jest ...

Ogólnie:

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a

$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots + a_i x^i + \ldots$ jest jego funkcją tworzącą

Dla ciągu:

- $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \ldots \infty)$
- $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots = A(x^2)$

Dla ciągu:

- $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \ldots)$
- $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \ldots + a_i x^{3i} + \ldots = A(x^3)$

Dla ciągu:

$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

Bierzemy dwie takie że parzyste się wyzerują

$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$

$B(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_i (-x)^i + \ldots$

$A(x) = \frac{B(x) + B(-x)}{2}$

A dla $(0, a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$?

$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$

$B(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

$A(x) = \frac{B(x) - B(-x)}{0}$

$$A(x) = \frac{B(x) - B(-x)}{2}$$

A dla $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots, ia_i, \ldots)$?

$$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + i a_i x^{i-1} + \ldots$$

$$A'(x) \cdot x = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + i a_i x^i + \ldots$$

A dla ciągu $(0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_i}{i}, \ldots)$

$$\int A(x)\,dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C \qquad \int_0^x \frac{A(t) - a_0}{t}\,dt$$