4a indukcja

13 November, 2023 20:22

L6.4. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

0)

I dowolne l, $k=0$

$T_{l \cdot 0}(x) = T_0(T_l(x)) = 1$ ✓

II załóżmy, że dla k, l zachodzi. Pokażmy, że dla $l, k+1$ zachodzi $T_{(k+1) l}(x) = T_{k+1}(T_l(x))$

$L = T_{k+1}(T_l(x)) =$

$2T_l(x) T_k(T_l(x)) - T_{k-1}(T_l(x)) \overset{zał}{=} 2 \cdot T_l(x) T_{kl}(x) - T_{(k-1)l}(x) =$

$2T_l(x) T_{kl}(x) \overset{*}{=} - T_{kl-l}(x) = T_{kl-l}(x) + T_{kl+l}(x) - T_{kl-l}(x) = T_{kl+l}(x) = T_{(k+1)l}(x) = P$

✓

* Dla $k \geq l$

$$T_l(x) T_k(x) = \frac{T_{l+k}(x) + T_{k-l}(x)}{2}$$

Dowód:

$T_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$

$\alpha = \arccos(x)$

$2T_m(x) T_n(x) = 2T_m(\cos\alpha) T_n(\cos\alpha) = 2\cos(m\alpha)\cos(n\alpha) =$

$\cos((m+n)\alpha) + \cos((m-n)\alpha) = T_{m+n}(\cos\alpha) + T_{m-n}(\cos\alpha) = T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)$

$\notin (-1;1)$? analogicznie do 5b