1 (done)

8 November, 2023 15:14

Przykład Hornera na lb: $(x^3-6x^2+12x-16):(x-4)$

	1	-6	12	-16
4		4	-8	16
	1	-2	4	0

x^2-2x+4

reszta

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

$W(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x + 11$

$W(x) = 3 \cdot x^3 + 3x^2 - 2x + 11 = x \cdot (3 \cdot x^2 + 3x - 2) + 11 = x \cdot (x \cdot (3 \cdot x + 3) - 2) + 11$

przykład

Algorytm:

$W_n = a_n$ ← najbardziej po środku

$W_k = W_{k+1} \cdot x + a_k$ ← kolejne $\quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$

$W_0 = x(x(\ldots x(x \cdot a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + a_{n-3}) + \ldots + a_1) + a_0$; W_0 - pełne wyrażenie zapisane schematem

α_i - błędy z dodawania

β_i - błędy z mnożenia

$W_0 = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, czyli błędy algorytmu ~~są~~ postaci:

Rozpatrzmy pierwsze wyrazy

1° $a_n(1+\beta_n)$

2° $[x \cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1}) + a_{n-1}](1+\beta_{n-1}) =$

błąd z mnożenia x z indeksem mniejszym o 1, bo przy a_0 nie pojawia się x (ew mówimy że mnożymy $\cdot x^0 = 1$ (stała))

$x \cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1})(1+\beta_{n-1}) + a_{n-1}(1+\beta_{n-1})$

3° $[x^2 a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + x a_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + a_{n-2}](1+\beta_{n-2}) =$

$x^2 a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) +$

$x a_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-2}) +$

$a_{n-2}(1+\beta_{n-2})$

i tak dalej. Uogólniając - dla dowolnego n mamy: $(n \in \mathbb{N})$

$W_0 = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i a_i \cdot \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j) \cdot \prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)\right)$ Korzystamy z tw. o kumulacji błędów:

by uprościć, przyjmijmy że $(1+\beta)$ to największy błąd z $\prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)$. $(1+\alpha)$ analogicznie

wówczas W_0 możemy ograniczyć w poniższy sposób:

$W_0 \leq \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i (1+\alpha)^i$; teraz znowu:

$(1+\varepsilon) = (1+\alpha)(1+\beta)$

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i (1+\beta)^i (1+\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n}\left((1+\beta)(1+\alpha)\right)^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n}[x(1+\varepsilon)]^i a_i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{x^i(1+\varepsilon)^i}_{= x^{\sim i}} a_i$

dostajemy więc dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych. Tak samo jak w zad. 5/L3 algorytm jest numerycznie poprawny