Lista05

8 November, 2024 18:04

1. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
   (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
2. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.
3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:
   (a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\right|$, $a_0 = a_1 = 1$,
   (b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\right|$, $b_0 = 8$,
   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.
5. Rozwiąż zależności rekurencyjne:
   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$
   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.
6. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$? Domino ma wymiar 1×2.
7. Rozwiąż zależność rekurencyjną
   $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.
8. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?
9. (2p) Wieża Hanoi składa się z n krążków n różnych rozmiarów, po 1 krążku każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt C, posługując się przy tym prętem B, jeśli bezpośrednie ruchy z pręta A na C są zakazane, ale ruchy w drugą stronę z pręta C na A są dozwolone?
10. Podaj i udowodnij regułę sprawdzania podzielności przez 11 liczby naturalnej zapisanej w systemie dziesiętnym.
11. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

1. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:
   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
   (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n - 1$ $a_2 = 8$ $a_3 = 16 + 27 - 1 = 42$

$(E^2 - 2E + 1)a_n = 3^n - 1$

$(E-1)^2 a_n = 3^n - 1$ ← E-1 tu się nie stakują, bo tam to było tylko na ...

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$	[if $a \neq b$]

$(E^2-2E+1)a_n=3^n-1$

$(E-1)^2 a_n = 3^n-1$ ← E-1 tu się nie stakują, bo tam to było tylko po lewej jako sposób na przepisanie części rekurencyjnej

$(E-1)^3(E-3)a_n=0$

$(\alpha n^2+\beta n+\gamma)1^n+\delta 3^n$

$a_0=0 \quad a_1=0$

$\alpha n^2+\beta n+\gamma+\delta 3^n$

$a_0: \gamma+\delta=0$

$\gamma=-\delta$

$a_1: \alpha+\beta+\gamma+3\delta=0$

$\alpha+\beta+2\delta=0 \Rightarrow \alpha=-\beta-2\delta$

$a_2: \alpha\cdot 4+\beta\cdot 2+\gamma+\cancel{2\delta}\ 9^{n+2}$

$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n+\beta b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n+\beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n+\beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n+\beta)a^b+\gamma b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1}\alpha_i n^i)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f\pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f\pm g$.

(b) $a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n+n2^{n+1}$, gdy $a_0=a_1=1$

$a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=n2^{n+1}$

$(E^2-4E+4)a_n=n2^{n+1}$

$(E-2)^2a_n=n2^{n+1}$

$(E-2)^4a_n=0$

$\alpha n^3+\beta n^2+\gamma n+\delta$

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n+\beta b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n+\beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n+\beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n+\beta)a^b+\gamma b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1}\alpha_i n^i)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f\pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f\pm g$.

$(E-2)n2^{n+1}=$

$(n+1)2^{n+2}-n2^{n+2}=$

$n2^{n+2}+2^{n+2}-n2^{n+2}=2^{n+2}$

$(E-2)=2^{n+3}-2^{n+3}=0$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(c) $a_{n+2}=\frac{1}{2^{n+1}}-2a_{n+1}-a_n$, gdy $a_0=a_1=1$.

$a_{n+2}+2a_{n+1}+a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$(E+1)^2a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$(E+1)^2(E-2)=0$

$(\alpha n+\beta)(-1)^n+\gamma\cdot 2^n$

$(E-2)2^{-n-1}=2^{-2^{-n}}=0$

2. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0,1,2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując c_0-1. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

$c_0=1$ $\quad$ 1: $\{0,1,2\}$ $\quad$ 2: $\{01,02,10,12,20,21,22\}$

$c_1=3$

$c_2=7$

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

(a) $t_n=t_{n-1}+3^n$ dla $n>1$ i $t_1=3$.

(b) $h_n=h_{n-1}+(-1)^{n+1}n$ dla $n>1$ i $h_1=1$.

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n+\beta b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k}\alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n+\beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n+\beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n+\beta)a^b+\gamma b^n$	[if $a\neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1}\alpha_i n^i)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f\pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f\pm g$.

$n=1: 3 \quad n=2: 12 \quad n=3: 39$

(a) $t_n=t_{n-1}+3^n$ dla $n>1$ i $t_1=3$.

$(E-1)t_n=3^{n+1}$

$(E-1)(E-3)t_n=0$

$\alpha\cdot 3^n+\beta$

$3\alpha+\beta=3$

$3^{n+1}(E-3)=3^{n+2}-3\cdot 3^{n+1}=0$ ✓

$(E-1)(E-3)\,t_n = 0$

$\alpha \cdot 3^n + \beta$

$\frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}$

$3\alpha + \beta = 3$

$9\alpha + \beta = 12$

$6\alpha = 9 \quad \alpha = \frac{3}{2} \quad \frac{9}{2} + \beta = \frac{6}{2} \quad \beta = -\frac{3}{2}$

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

$h_n - h_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot n \qquad (-1)^n(n+1)(E+1)(E-1)^2$

bo $n+2 \Leftrightarrow n$

$(E-1)h_n = (-1)^{n+2} \cdot (n+1) \qquad (E+1)(-1)^n = (-1)^{n+1} + 1 \cdot (-1)^n = 0$

$(E-1)^3(E+1)h_n = 0$

$\alpha n^2 + \beta n + \gamma + (-1)^n \delta$ o to się zapytać

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

(a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\,\right|$, $a_0 = a_1 = 1$,

(b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\,\right|$, $b_0 = 8$,

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

(a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\,\right|$, $a_0 = a_1 = 1$,

$a_0 = 1 \quad a_1 = 1 \quad a_2 = |\sqrt{1+1}| = \sqrt{2}$

$a_3 = |\sqrt{2+1}| = \sqrt{3} \quad a_4 = |\sqrt{3+2}| = \sqrt{5}$

$a_5 = |\sqrt{5+3}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad a_6 = \sqrt{8+5} = \sqrt{13}$

$a_n = \sqrt{F_{n+1}}$

I skorzystamy z indukcji by to udowodnić

I $a_0 = 1 = \sqrt{F_1}$ ✓

II zał. że dla $n \in \mathbb{N}^+$ $a_n = F_{n+1}$. D/o $n+1$:

$a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} = \sqrt{F_{n+1} + F_n} = \sqrt{F_{n+2}}$ $\square$

(b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\,\right|$, $b_0 = 8$

$b_0 = \sqrt{64}$

$b_1 = \sqrt{67}$

$b_2 = \sqrt{70}$

$b_3 = \sqrt{73}$

$b_n^2 = 64 + 3n$

ind

I $b_0^2 = 64$ ✓

II zał. $b_n^2 = 64+3n$, $n \in \mathbb{N}$, dla $n+1$

$b_{n+1}^2 = 64+3(n+1) = 64+3n+3 = b_n^2+3$ ✓ □

(c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2+n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

$c_0 = 0$

$c_1 = 1$

$c_2 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2$

$c_3 = 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 12$

$c_4 = 72$

$c_5 = 600$

$c_6 = 5760$ $c_n = n! \cdot Fib(n)$

Id zał.

II $c_{n+1} = (n+1)! \cdot Fib(n+1) = (n+1) Fib(n-1)\, n!\, Fib(n) = c_n \cdot (n+1) Fib(n-1)$

... jeszcze dalej rozpisać i wyjdzie

5. Rozwiąż zależności rekurencyjne:

(a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

(b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

(a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

$c_0 = 1$ $c_1 = 1$ $c_2 = 2$ $c_3 = 4$ $c_4 = 8$ $c_5 = 16$ $c_6 = 32$

$c_n = 2^{n-1}$, $n \geq 1$

Rozwiążemy za pomocą indukcji

I $c_1 = 2^{1-1} = 2^0 = 1$ ✓

II Załóżmy, że dla $n \in \mathbb{N}^+$ $c_n = 2^{n-1}$

Udowodnijmy, że $c_{n+1} = 2^n$

$c_{n+1} = c_0 + c_1 + \ldots + c_n = 1 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n$ ✓ □

(b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

$d_0 = 1$ $d_1 = 2$ $d_2 = \frac{4}{1} = 4$ $d_3 = \frac{16}{2} = 8$

$d_4 = \frac{64}{4} = 16$ Hipoteza: $d_n = 2^n$. Udowodnijmy to

$a_0 = 1$ $a_1 =$ [illegible] $a_2 =$ [illegible] $a_3 =$ [illegible]

$a_4 = \frac{64}{4} = 16$ Hipoteza: $a_n = 2^n$. Udowodnimy to korzystając z zasady indukcji

I Zał. $a_0 = 2^0 = 1$ ✓

II Załóżmy, że dla pewnego $n \in N$ $a_n = 2^n$.

Udowodnimy, że $a_{n+1} = 2^{n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_{n-1}} = \frac{2^n \cdot 2^n}{2^{n-1}} = 2^{2n-n+1} = 2^{n+1} \checkmark$$

6. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$? Domino ma wymiar 1×2.

7. Rozwiąż zależność rekurencyjną $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

$a_n^2 - 2a_{n-1}^2 = 1$ $\qquad b_n = a_n^2$

$b_n - 2b_{n-1} = 1$

$b_0 = 4$

$(E-2)b_n = 1$

$b_1 = a_1^2 = 2 \cdot 2^2 + 1 = 9$

$(E-2)(E-1)b_n = 0$

$\underline{\alpha + \beta 2^n}$

$\alpha + 2\beta = 4$

$\alpha + 4\beta = 9$

$2\beta = 5 \quad \beta = \frac{5}{2}$

$\alpha = -1$

$\frac{5}{2} 2^n - 1$

$a_n^2 = \frac{5}{2} \cdot 2^n - 1$

$a_n^2 = 5 \cdot 2^{n-1} - 1$

$a_n = \sqrt{5 \cdot 2^{n-1} - 1}$

8. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

Uogólnijmy dla dowolnego r-literowego alfabetu

$a_0 = 1$ (1 kombinacja 0-literowych)

$a_1 = r - 1$ (wszystkie litery oprócz a)

Mamy nasze base casey, teraz rekurencja:

$a_n = (r-1)a_{n-1} + r^{n-1} - a_{n-1}$

10. Podaj i udowodnij regułę sprawdzania podzielności przez 11 liczby naturalnej zapisanej w systemie dziesiętnym.

chatgpt

Reguła podzielności przez 11:

Liczba jest podzielna przez 11, jeśli różnica między sumą cyfr na miejscach nieparzystych a sumą cyfr na miejscach parzystych (licząc od prawej strony) jest podzielna przez 11 (lub jest zerem).

Inaczej mówiąc:

1. Weź cyfry liczby i oznacz je $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, gdzie a_1 to cyfra jedności, a_2 to cyfra dziesiątek, i tak dalej.
2. Oblicz różnicę:
$$S = (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots) - (a_2 + a_4 + a_6 + \ldots)$$
3. Liczba jest podzielna przez 11, jeśli S jest podzielne przez 11 (czyli $S \equiv 0 \pmod{11}$).

Dowód reguły:

Dla liczby N zapisanej w systemie dziesiętnym:

$$N = a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10 + a_1$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ to cyfry liczby N.

Zauważmy, że $10 \equiv -1 \pmod{11}$. W efekcie, w systemie modularnym modulo 11, liczba N może być przedstawiona jako:

$$N \equiv a_n \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot (-1)^1 + a_1 \cdot (-1)^0 \pmod{11}$$

Zauważmy, że $10 \equiv -1 \pmod{11}$. W efekcie, w systemie modularnym modulo 11, liczba N może być przedstawiona jako:

$$N \equiv a_n \cdot (-1)^{n-1} + a_{n-1} \cdot (-1)^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot (-1)^1 + a_1 \cdot (-1)^0 \pmod{11}$$

Dla nieparzystych miejsc (czyli $a_1, a_3, a_5, \ldots$) występuje dodatni znak, a dla parzystych (czyli $a_2, a_4, a_6, \ldots$) znak jest ujemny. Ostatecznie otrzymujemy więc różnicę pomiędzy sumą cyfr na miejscach nieparzystych a sumą cyfr na miejscach parzystych.

Zatem, jeśli różnica ta jest podzielna przez 11, to liczba N również jest podzielna przez 11.

11. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$

$9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2}}}}}}}$

$9^{8^{7^{6^{5^{4^{9}}}}}}$

$9^{8^{7^{6^{5^{262144}}}}}$

5^{262144} is too large to calculate, but we can find the last digits.

5^n ends in 25 for all $n \geq 2$ so the last 2 digits of

Powers of 6 pattern: 6, **36**, 2**16**, 12**96**, 77**76**, 466**56**, ...**36**, ...**16** etc.

A number that ends in 25 is 0 mod 5 so the last two digits of $6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}$ are 76

Powers of 7 pattern: 7, **49**, 3**43**, 24**01**, 168**07**, ...**49**, ...**43**, ...**01** etc.

A number that ends in 76 is 0 mod 4 so the last two digits of $7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}$ are 01

Powers of 8 pattern: **8**, 6**4**, 51**2**, 409**6**, 3276**8**, 26214**4**, 209715**2**, 1677721**6**, ...**8**, ...**4**, ...**2** etc.

A number that ends in 01 is 1 mod 4 so the last digit of $8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}$ is 8

9^n where $n \equiv 8 mod 10$ ends in 21.

The last two digits of $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ are 21.

Number	Cyclicity	Power Cycle
1	1	1
2	4	2,4,8,6
3	4	3,9,7,1
4	2	4,6
5	1	5
6	1	6
7	4	7,9,3,1
8	4	8,4,2,6
9	2	9,1
0	1	0