Lista04

8 November, 2024 18:04

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Opisz rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej oraz rozwiąż ją. Wymagane jest uzasadnienie, że tę maksymalną liczbę obszarów można osiągnąć.

2. Czy można narysować na płaszczyźnie diagram Venna dla 4 zbiorów A_1, A_2, A_3, A_4 za pomocą 4 okręgów, jeśli zbiory A_1, A_2, A_3, A_4 są w najb. ogólnej konfiguracji tzn. każdy przekrój podzbioru różnych tych zbiorów lub ich dopełnień jest niepusty i inny od innego przekroju?

3. (-) Podwójna wieża Hanoi składa się z $2n$ krążków n różnych rozmiarów, po 2 krążki każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt C, posługując się przy tym prętem B?

4. Wieża Hanoi składa się z n krążków n różnych rozmiarów, po 1 krążku każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt C, posługując się przy tym prętem B, jeśli bezpośrednie ruchy z pręta A na C są zakazane, ale ruchy w drugą stronę z pręta C na A są dozwolone?

5. (2p) Na ile maksymalnie obszarów można podzielić trójwymiarową przestrzeń za pomocą n płaszczyzn? Wyprowadź odpowiednią zależność rekurencyjną oraz ją rozwiąż. Wymagane jest uzasadnienie, że tę maksymalną liczbę obszarów można osiągnąć.

6. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k liczb naturalnych ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, jeśli różnica bezwzgledna dwóch dowolnych liczb z tego zbioru powinna wynosić co najmniej r?

8. (+) Wyprowadź zależność rekurencyjną dla liczby nieporządków: $d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$. Jakie należy przyjąć warunki początkowe dla tej zależności? W zadaniu tym nie można korzystać ze wzoru wyprowadzonego na jednej z poprzednich list.

9. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

10. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
    (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
    (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

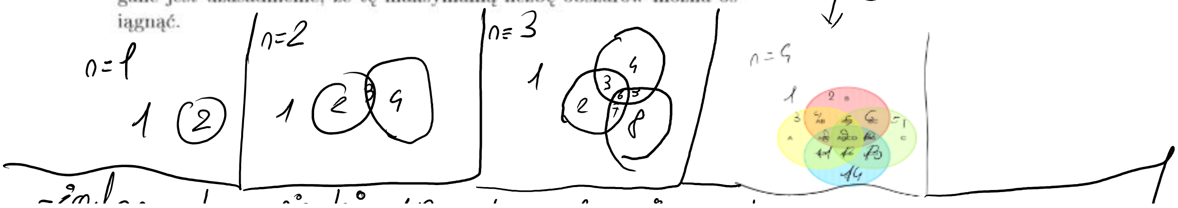
11. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

12. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina (o wymiarach 1×2) ?

13. Na ile sposobów można rozdać n różnych nagród wśród czterech osób A, B, C, D tak, aby:
    (a) A dostała przynajmniej jedną nagrodę?
    (b) A lub B nie dostała nic?
    (c) Zarówno A jak i B dostała przynajmniej jedną nagrodę?
    (d) Przynajmniej jedna spośród A, B, C nic nie dostała?
    (e) Każda z 4 osób coś dostała?

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Opisz rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej oraz rozwiąż ją. Wymagane jest uzasadnienie, że tę maksymalną liczbę obszarów można osiągnąć.

Ważne. To nie jest Venn.
To nie jest zadanie o Vennie



- żaden okrąg nie leży wewnątrz żadnego innego okręgu
- jedyne legalne przecięcie - dokładnie dwa okręgi
- każdy okrąg powinien przecinać się z każdym innym okręgiem w dokładnie dwóch miejscach

Zauważmy, że każdy kolejny okrąg przecina się z poprzednim w dwóch punktach.

$r_1 = 2 \quad r_2 = 4 \quad r_3 = 8 \quad r_4 = 14$

$$r_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ r_{n-1} + 2(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

wzorem podstawieniowym (sprzed roku)

$r_n = r_{n-1} + 2(n-1) = r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots =$

$r_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)}_{} = 2 + 2\underbrace{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}_{} = n^2 - n + 2$

wzorem na sumę ciągu arytmetycznego

Odp. $n^2 - n + 2$, $n \in N^+$

Spróbujmy też anihilatorami

$r_n = r_{n-1} + 2(n-1) \qquad r_n - r_{n-1} = 2n - 2$

$(E-1)r_n = 2(n+1) - 2 \qquad (E-1)r_n = 2n + 2 - 2 \qquad (E-1)r_n = 2n$

$(E-1)^3 r_n = 0 \qquad r_1 = 2 \quad r_2 = 4 \quad r_3 = 8$

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$\left(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i\right)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

$\alpha n^2 + \beta n + \gamma$

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 2 \\ 4\alpha + 2\beta + \gamma = 4 \\ 9\alpha + 3\beta + \gamma = 8 \end{cases}$$

$3\alpha + \beta = 2 \qquad \beta = 2 - 3\alpha$

$\alpha + 2 - 3\alpha + \gamma = 2$

$-2\alpha + \gamma = 0 \qquad \gamma = 2\alpha$

$9\alpha + 3(2 - 3\alpha) + 2\alpha = 8$

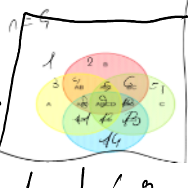
$\cancel{9\alpha} + 6 - \cancel{9\alpha} + 2\alpha = 8$

$2\alpha = 2 \quad \alpha = 1 \qquad \beta = 2 - 3 = -1 \qquad \gamma = 2$

$x^2 - x + 2$ czyli to też działa

2. Czy można narysować na płaszczyźnie diagram Venna dla 4 zbiorów A_1, A_2, A_3, A_4 za pomocą 4 okręgów, jeśli zbiory A_1, A_2, A_3, A_4 są w najb. ogólnej konfiguracji tzn. każdy przekrój podzbioru różnych tych zbiorów lub ich dopełnień jest niepusty i inny od innego przekroju?

Wyżej wyliczyliśmy że się nie da. Maksymalizujemy liczbę obszarów przy $2(n-1)$ przecięciach $\rightarrow$ dla 4 mamy 14 obszarów, a potrzebujemy 16 (na przykładzie nie ma AD i BD).



Można narysować Venny dla dowolnych ilości, ale nie będą to okręgi.

6. Wykaż, że iloczyn dowolnych kolejnych k liczb naturalnych jest podzielny przez $k!$.

Zapiszmy od góry w dół:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \quad \square$$

9. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

Skorzystamy z algorytmu Euklidesa. Wiemy dzięki niemu, że $NWD(a+b,b) = NWD(a,b)$ (*)

Zadanie rozwiążemy zasadą indukcji

I $NWD(1,1) = 1$ $\quad F_1 = 1 \quad F_2 = 1 \quad \checkmark$

II Załóżmy, że $NWD(F_N, F_{N+1}) = 1$ dla jakiegoś N. Udowodnijmy, że $NWD(F_{N+1}, F_{N+2}) = 1$

$$NWD(F_{N+2}, F_{N+1}) = NWD(F_{N+1}+F_N, F_{N+1}) \overset{*}{=} NWD(F_{N+1}, F_N) \overset{II}{=} 1 \quad \square$$

$$NWD(F_{N+2}, F_{N+1}) = NWD(F_{N+1}+F_N, F_{N+1}) \overset{*}{=} NWD(F_{N+1}, F_N) \overset{\text{II}}{=} 1 \quad \square$$

10. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

$t_1 = 3 \quad t_2 = 12 \quad t_3 = 39 \quad t_4 = 120$

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

$$(E-3)3^{n+1} = 3^{n+2} - 3 \cdot 3^{n+1} = 0 \quad ✓$$

$$t_n - t_{n-1} = 3^n$$

$$(E-1)t_n = 3^{n+1}$$

Operator	Functions annihilated
$E-1$	α
$E-a$	αa^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$ [if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.
If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

$$(E-1)(E-3)t_n = 0$$

$$\alpha 3^n + \beta$$

$$3\alpha + \beta = 3$$
$$9\alpha + \beta = 12$$
$$6\alpha = 9 \quad \alpha = \frac{3}{2} \qquad \beta = \frac{6}{2} - \frac{9}{2} = -\frac{3}{2}$$
$$\frac{3}{2} \cdot 3^n - \frac{3}{2}$$

11. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

$r_0 = 0 \quad r_1 = 1 \quad r_n = r_{n-1} + r_{n-2},\ n > 1$

Czyli Fibbonaci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \qquad (E^2 - E - 1)F_n = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5 \quad \sqrt{\Delta} = \sqrt{5} \quad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\left(E - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(E - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)F_n = 0$$

Operator	Functions annihilated
$E-1$	α
$E-a$	αa^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$ [if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.
If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

$$\alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha = -\beta$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\beta = 1$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}\alpha - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha = 1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha = 1$$

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\alpha = 1$$

$$\alpha = \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$