

Ćwiczenia  
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2  
11 października 2023r.

Zapoczątkuj 17 października 2023r.  
Zaliczenie listy od 5 pkt.

zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	cof.
roz	1		1	1	1	1	1	1	1	8/10

L2.1. [1 punkt] Ustalmy liczbę  $B \in \{2, 3, 4, \dots\}$ . Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista  $x$  ma jednoznaczne przedstawienie w postaci  $x = mB^e$ , gdzie  $s = \text{sgn } x$ ,  $e \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in [\frac{1}{B}, 1)$ .

L2.2. [2 punkty] Udowodnij, że a)  $|m_1 - m_2| \leq 2^{-e}$ , b)  $|m_1 - m_2| \leq \frac{1}{2} \cdot 2^{-e}$ .

L2.3. [Włącz komputer!] [1 punkt] Napisz program (np. w języku P40++) znajdujący wartości dziesiętne, zapisane jako liczby mieszane, wszystkich liczb zmiennopoczątkowych, które można przedstawić w postaci

$$(1) \quad x = \pm(0.1c_1c_2 \dots c_{2^e-1})_2 \cdot 2^{1-e}, \quad c_1, c_2, \dots, c_{2^e-1} \in \{0, 1\},$$

gdzie  $(\dots)_2$  oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział  $[A, B]$ , zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w  $[A, B]$ ? Wykonaj odpowiedni rysunek. Co z niego wynika?

L2.4. [1 punkt] Przeczytaj tekst dostępny pod adresem <http://www-users.math.umn.edu/~seefeld/disastrors/patriot.html> mówiący o tym, że niefortunne używanie arytmetyki zmiennopoczątkowej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegółowo patrz raport GAO/ITTC-95-26). Stenś, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.

Jeśli znasz inne, podobne przykłady, to przygotuj krótką, ale ciekawą notatkę na ten temat używając systemu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X i prześlij wykładowcy! — być może dostaniesz dodatkowy punkt!

L2.5. [1 punkt] Zapoznaj się ze standardem IEEE 754<sup>2</sup> reprezentacji liczb zmiennopoczątkowych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. [1 punkt] Zakładamy, że  $x, y$  są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości  $d := \sqrt{x^2 + y^2}$  algorytmem postaci

```
u:=x*x;  
v:=y*y;  
d:=sqrt(u+v)
```

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość  $d$  należy do zbioru  $X_B$ . Następnie zaproponuj algorytm wyznaczania  $d$  pozwalający uniknąć zjawiska nadmiaru, jeśli  $\text{rel}(\sqrt{2} \max(|x|, |y|)) \in X_B$ . Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora  $v \in \mathbb{R}^n$ .

L2.7. [Włącz komputer!] [1 punkt] Niech będzie  $f(x) = 4046 \frac{\sqrt{x^{11} + 1} - 1}{x^{11}}$ . Jak już wiadomo z zadania L1.2, obliczanie przy pomocy komputera (tryb podwójnej precyzji) wartości  $f(0.001)$  daje niewiarygodny wynik. Wyłuszczonego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. Przeprowadź odpowiednie eksperymenty numeryczne.

L2.8. [Włącz komputer!] [1 punkt] Niech dana będzie funkcja  $f(x) := 14 \frac{1 - \cos(17x)}{x^2}$ . Jak wynika z zadania L1.3, obliczanie przy pomocy komputera (tryb pojedynczej lub podwójnej precyzji) wartości  $f(10^{-4})$  dla  $i = 1, 12, \dots, 20$  daje niewiarygodne wyniki. Wyłuszczonego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyników dokładniejszych. Przeprowadź odpowiednie eksperymenty numeryczne.

L2.9. [Włącz komputer!] [1 punkt] Można wykazać<sup>3</sup>, że przy  $x_1 = 2$  ciąg

$$(2) \quad x_{k+1} = 2^k \sqrt{2 \left( 1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2} \right)} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

jest zbieżny do  $\pi$ . Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie testy obliczeniowe.

(-) Paweł Woźny