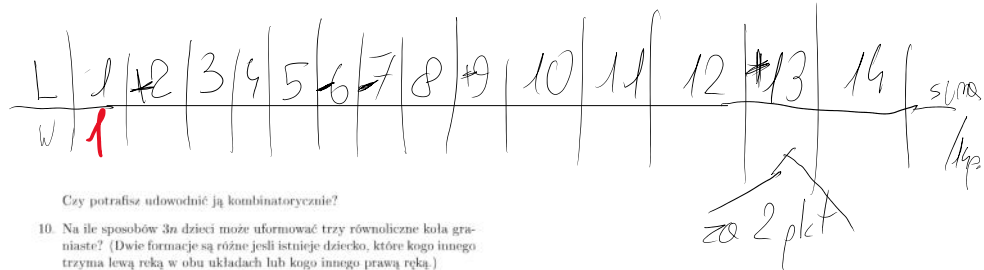


## Lista nr 2 z matematyki dyskretnej



Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

10. Na ile sposobów  $3n$  dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)
11. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy  $n \times n$  na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?
12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego  $n$  zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci  $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .
14. Na ile sposobów można wrzucić  $2n$  kulek do  $k$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić  $2n+1$  kulek do  $2k+1$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Pokaż, że istnieją takie  $i$  oraz  $j$ ,  $i \leq j$ , że suma  $a_i + a_{i+1} + \dots + a_j$  jest podzielna przez  $n$ .
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  istnieje liczba podzielna przez  $n$ , której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.
4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że:  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{55} \leq 100$ . Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.
5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie  $a$  i  $b$  takie, że  $a^3b - ab^3$  jest podzielne przez 10.
6. (-) W każde pole szachownicy  $n \times n$  wpisujemy jedną z liczb:  $-1, 0, 1$ . Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.
7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.
8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \binom{n-m}{k-m}$$

9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru punktu (według parzystości):  
 $(P, P)$ ;  $(N, N)$ ;  $(P, N)$ ;  $(N, P)$

Wybieramy pięć punktów, w jednym „koszyku” będą więc co najmniej dwa punkty  $\Leftrightarrow$  dwa punkty będą miały taką samą parzystość obu współrzędnych.

$$\frac{\text{parzysta} + \text{parzysta}}{2} = \text{całkowita}$$

$$\frac{\text{nieparzysta} + \text{nieparzysta}}{2} = \text{całkowita}$$

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy



























