L12

7 January, 2024 13:57

L12 zad.	1	+2	3	-4	5	+6	7	8	+9	10	11	12	suma
pkt.	1		1	0,5		1	1						
maxpkt	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	11,5

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?
2. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?
3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.
5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po ścieżce o dł. co najwyżej 2.
7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.
8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.
9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.
10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.
11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.
12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

1 (done)

7 January, 2024 14:10

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Zadanie podobne do tego z szachownicą.
Pomalujmy każdą kostkę na dwa kolory: czarny lub biały:
Kostki na rogach i po środkach ścian będą czarne, pozostałe białe

„rozcinając" naszą kostkę możemy zauważyć że mamy 14 czarnych i 13 białych, środkowa jest biała.

Odwracając ścieżkę (idąc od środka) mamy:

$B \to C \to B \to C \to \dots \to B \to C \to \cancel{X}$

1 1 2 2 13 13

Brakuje 14 białej kostki, a jedna czarna nie zostanie zjedzona.

Trasa jest więc niemożliwa.

+2

7 January, 2024 14:10

2. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?

3 (done)

7 January, 2024 14:10

3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Możemy skorzystać z twierdzenia z wykładu (12, cz. 1) - konkretniej tw. Diraca ↗

Aby warunek z tw. zachodził: $n > 1$ (dla $n=1$ dwa wierzchołki)

I $n=1$ Dwóch uczniów z jednym przyjacielem (sobą nawzajem) w jednej ławce, git od razu.

II $n>1$ W grafie przyjaźni - krawędź oznacza przyjaźń (gdzie wierzchołkami są uczniowie) istnieje cykl Hamiltona.

Usuwamy co drugą krawędź ⇒ otrzymujemy ławki.
Można usunąć na dwa sposoby ⇒ dwa ustawienia.

-4 (done)

7 January, 2024 14:10

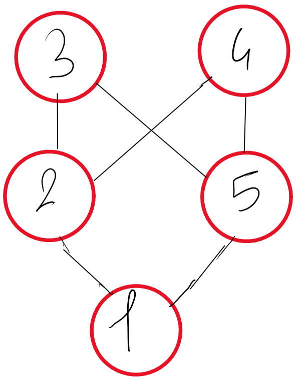
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

5 wierzchołków

$\{2, 2, 2, 3, 3\}$



Nie ma tu cyklu Hamiltona.

ew. dowód czemu

Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona

- Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.
- Jeśli graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Katarzyna Pałach (II UWR) MDL 2023 3 / 11

I korzystamy teraz z info z wykładu. Usuwamy 2 wierzchołki $\{2, 5\}$, otrzymujemy 3 spójne składowe, punkt drugi jest więc niespełniony.

5

7 January, 2024 14:10

5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

+6 (done)

7 January, 2024 14:10

6. [+] Pokaż, że każdy turniej zawiera króla. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po ścieżce o dł. co najwyżej 2.

Wierzchołek v grafu skierowanego jest królem jeśli dla każdej krawędzi u grafu istnieje ścieżka długości 1 lub 2 z v do u.

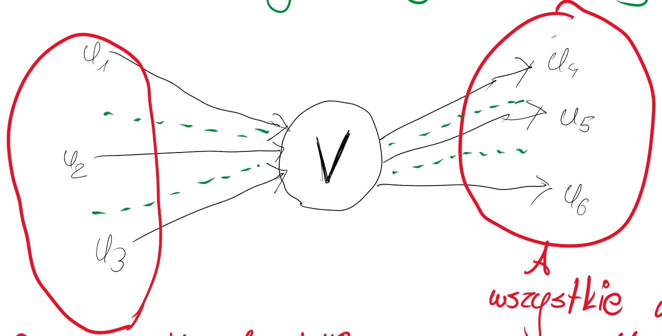
Turniej: każdy wierzchołek ma krawędź jednokierunkową z każdym innym wierzchołkiem.

Zdefiniujmy sobie jeszcze
- krawędź wchodzącą $u \to v$ u „pokonało" v
- wychodzącą $v \to u$ v „pokonało" u

A więc jeśli v jest królem to $\forall u$ v pokonało u lub v pokonało kogoś kto okonał u

właściwy dowód zaczyna się tutaj

Niech v będzie wierzchołkiem z największą w grafie ilością krawędzi wychodzących. Pokażemy, że v jest królem.



A wszystkie wierzchołki pokonane przez V

B - wszystkie wierzchołki które pokonały V

Rozważmy teraz dowolne u, i pokażmy że jest spełniony warunek:

I $u \in A$ koniec dowodu dzięki krawędzi $u \to v$

II $u \in B$ a) $\exists u' \in A$ że istnieje krawędź $u' \to u$ (a więc u ma przynajmniej jedną wchodzącą krawędź z A)

Mamy wtedy ścieżkę $v \to u' \to u$ ✓

b) w.p.p. V nie jest wtedy wierzchołkiem z największą ilością krawędzi wychodzących (bo $\exists u \in B$ z krawędziami wychodzącymi do każdego wierzchołka z A i do v)

Sprzeczność, v nie spełnia założenia

7 (done)

7 January, 2024 14:10

7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.

W poprzednim zadaniu pokazałem że każdy turniej ma przynajmniej jednego króla - wystarczy więc pokazać że turniej nie może mieć dokładnie dwóch króli.

Nie wprost:

Załóżmy że turniej ma dokładnie dwóch króli, v oraz u. Bez utraty ogólności załóżmy że v pokonuje u. $(v \to u)$.

Skoro u jest królem, musiało pokonać kogoś kto pokonał v.

Musi więc istnieć ktoś kto pokonał v. Ta potrzebujemy jeszcze lematu 1 - będzie istniał w turnieju jeszcze jeden król, inny niż v i u - sprzeczność

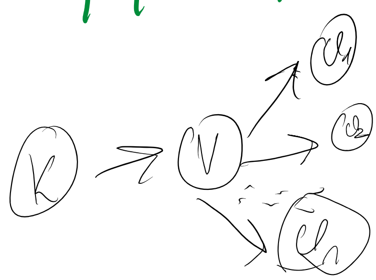
dowód jest więc gotowy

Lemat 1

Jeśli v ma conajmniej jedną krawędź wchodzącą, to będzie miał min. 1 krawędź wchodzącą od jakiegoś króla.

a) v ma dokładnie jedną wchodzącą krawędź

wówczas jest to trywialne



b) więcej niż jedna wchodząca

1. Rozważmy najpierw turniej T' zawierający tylko krawędzie wchodzące do v oraz v. Z zad. 6 wiemy że któraś z nich

1. Rozważmy [illegible] wchodzące do v oraz v. Z zad. 6 wiemy że któreś z nich będzie królem.

2. Dołóżmy resztę krawędzi powracając do bazowego T (rozwijamy resztę T_2) Wówczas dla każdego $u \in T_2$ otrzymujemy ścieżkę

$$K \to v \to u$$

Koniec dowodu.

8

7 January, 2024 14:10

8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

+9

7 January, 2024 14:10

9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.

10

7 January, 2024 14:10

10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

11

7 January, 2024 14:10

11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

12

7 January, 2024 14:10

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.