MD - Lista 1

6 October, 2023 11:50

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	1		1	,5	1	,5	,5	1 ?	1		1	1		,5	

pkt.	14
moji	9

Lista nr 1 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m-elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.
2. Czy wśród liczb $1, 2, \ldots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dziesiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?
3. (D) Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?
4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach.
5. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian?
6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?
7. (-) Ile jest możliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?
8. (-) Pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej n zachodzi $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$.
9. ? Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną. *Podpowiedź:* Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$.
10. Niech $x \in R, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie: $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$?
11. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?
12. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?
13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?
14. ? Chcemy rozmieścić n krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych) palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest poprawnych rozłożeń?
15. (-) Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.
16. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

Zadanie 1

6 October, 2023 12:07

1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m-elementowego zbioru A w n-elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.

Injective functions from *N* to *X* [edit]

https://en.wikipedia.org/wiki/Twelvefold_way#Injective_functions_from_N_to_X

This case is equivalent to counting sequences of *n distinct* elements of *X*, also called ***n*-permutations** of *X*, or **sequences without repetitions**; again this sequence is formed by the *n* images of the elements of *N*. This case differs from the one of unrestricted sequences in that there is one choice fewer for the second element, two fewer for the third element, and so on. Therefore instead of by an ordinary power of *x*, the value is given by a falling factorial power of *x*, in which each successive factor is one fewer than the previous one. The formula is

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1).$$

Note that if $n > x$ then one obtains a factor zero, so in this case there are no injective functions $N \to X$ at all; this is just a restatement of the pigeonhole principle.

Example:

$X = \{a, b, c, d\}, N = \{1, 2\}$, then

$|\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,c),(b,d),(c,a),(c,b),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c)\}| = 4^{\underline{2}} = 4 \times 3 = 12$

Zadanie 2 (done)

6 October, 2023 13:02

2. Czy wśród liczb $1, 2, \ldots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dziesiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?

10^{10} - wszystkich liczb w przedziale

9^{10} - bez dziewiątek

$\shortparallel$

3 486 784 401 → więcej zawierających 9

$10^{10} - 9^{10} = 6\ 513\ 215\ 599$

(D) Zadanie 3 (dopracować)

6 October, 2023 13:02

Dla parzystych i nieparzystych będzie tak samo

3. (D) Ile jest podzbiorów n-elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?

gdy $|A| = n$

Załóżmy że będzie 2^{n-1} pozbiorów nieparzystych. Udowodnimy przez indukcję

I $n=1$ $2^{n-1} = 2^0 = 1$

Ogólnie jest $2^n = 2^1 = 2$ pozbiorów: zbiór pusty i zbiór A

jeden zbiór nieparzysty

II Załóżmy że dla $|A| = n$ jest 2^{n-1} podzbiorów nieparzystych.

Udowodnijmy że dla $|A| = n+1$ jest 2^n podzbiorów nieparzystych.

Niech $|A| = n+1$, $x \in A$

$A' = A \setminus \{x\}$

$|A'| = n$

Niech $B \subset A$

jeżeli $x \notin B$ to $B \subseteq A'$

jeżeli $x \in B$ to istnieje $B' \subseteq A'$ taki że $B' \cup \{x\} = A$

wtedy $A' = A \setminus \{x\}$

Niech C będzie liczbą podzbiorów A' z nieparzystą liczbą elementów

wtedy z założenia $C = 2^{n-1}$

Niech $D' \subseteq A'$, gdzie D' ma parzystą liczbę elementów

Zadanie 4 (done)

6 October, 2023 12:53

4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K, drugą nad wodospad W. Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach.

cztery grupy:

- nie bierze udziału w K
- -||- w W
- -||- w żadnej
- obie

każda osoba ma do wyboru jedną z opcji

a więc 4^n

Odp: 4^n

Zadanie 5 (done)

6 October, 2023 12:57

5. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? a)
A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian? b)

a) $\underbrace{6}_{1} \cdot \underbrace{5}_{2} \cdot \underbrace{4}_{3} \cdot \underbrace{3}_{4} \cdot \underbrace{2}_{5} \cdot \underbrace{1}_{6} = \boxed{720}$

b) $\underbrace{3}_{1} \cdot \underbrace{3}_{2} \cdot \underbrace{2}_{3} \cdot \underbrace{2}_{4} \cdot \underbrace{1}_{5} \cdot \underbrace{1}_{6} = 36$

i to $\cdot$ 2 (bo albo start od k albo od m) $\cdot 2 = \boxed{72}$

Zadanie 6 (done)

6 October, 2023 13:01

6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b), taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?

parzyste n:

$\frac{n}{2}$ parzystych, $\frac{n}{2}$ nieparzystych $\quad 2 \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{n}{2} = \frac{n^2}{2}$

mnożymy bo albo parzyste albo nieparzyste

nieparzyste n:

$\frac{n-1}{2}$ parzystych, $\frac{n+1}{2}$ nieparzystych $\quad \frac{(n-1)^2+(n+1)^2}{4} = \frac{n^2 \cancel{-2n} + 1 + n^2 \cancel{+2n} + 1}{4} = \frac{n^2+1}{2}$

$\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 = \frac{(n-1)^2}{4} \qquad \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{(n+1)^2}{4}$

* Zakładam że można dwie takie same liczby

Zadanie 7 (done)

6 October, 2023 12:08

7. (-) Ile jest możliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?

Zakładając 26 liter

$\overline{26}\ \overline{26}\ \overline{26}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}$

Mnożymy potencjalne opcje

Odp. $26^3 \cdot 10^4$

Zadanie 8 (done)

6 October, 2023 13:02

8. (-) Pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej n zachodzi $\lceil x+n \rceil = \lceil x \rceil + n$.

Z def. $\lceil n \rceil = n$ (no bo całkowita nie ma części ułamkowej)

$$\lceil x+n \rceil = \lfloor x \rfloor + \lfloor n \rfloor + \lceil \{x\} + \{n\} \rceil = \underbrace{\lfloor x \rfloor + \lceil \{x\} \rceil}_{\lceil x \rceil} + n = \lceil x \rceil + n$$

Zadanie 9 (done)

6 October, 2023 13:02

9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną. *Podpowiedź:* Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkowa $\{x\}$.

$\{x\} \cdot n < 1$

Definicja

Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, to mówimy, że p jest **warunkiem wystarczającym** dla q, a q jest **warunkiem koniecznym** dla p.

Warunek **wystarczający** nazywany jest też warunkiem **dostatecznym**.

Zadanie 10 (done)

6 October, 2023 13:02

10. Niech $x \in R, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie: $\lfloor\sqrt{\lfloor x \rfloor}\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor$?

$n = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$

$n \leq \sqrt{x} < n+1$

$n^2 \leq x < (n+1)^2$

$n^2 \leq \lfloor x \rfloor < (n+1)^2$

$n \leq \sqrt{\lfloor x \rfloor} < n+1$

$n = \lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$

Zadanie 11 (-)

6 October, 2023 13:02

11. Ile jest n-elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?

Zadanie 12 (done)

6 October, 2023 12:14

12. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

$11 \cdot 17 \cdot 15 = 2805$

Założyłem że, taka sama ilość dla dwóch dzieci to różne zdarzenia (np. dziecko A 10 rumianków i dziecko B 10 rumianków to dwie sytuacje). Wtedy licząc dla jednego dziecka.

Zadanie 13 (done)

6 October, 2023 12:34

usunąłem ojednak git więc screen

Zadanie 13 (done)

6 October, 2023 12:34

13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?

a) Każda wyspa ma 13 niezależnych czy b) 13 takich samych? (b - zakładam że nie wysyła jednej osobie codziennie tej samej XDD)

a) $7 \cdot 13^7$ (każdego dnia ma $13 \cdot 13 \cdot 13 \ldots 13$ opcji)

b) $13^7 \cdot 12^7 \cdot 11^7 \cdot 10^7 \cdot 9^7 \cdot 8^7 \cdot 7^7 = 8648640^7$
(pierwszy dzień $13 \cdot 13 \cdot 13 \ldots 13$,
potem $12 \cdot 12 \ldots$)

Zadanie 14 (raczej git)

6 October, 2023 13:02

14. Chcemy rozmieścić n krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych) palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest poprawnych rozłożeń?

3^n

Raczej git

Zaczynamy od największego, potem po kolei coraz mniejsze. Za każdym razem trzy opcje.

Zadanie 15 (done)

6 October, 2023 13:02

15. (-) Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n-elementowego wynosi 2^n.

I $n=0$ Mamy tylko jeden podzbiór zbioru pustego - zbiór pusty $2^0 = 1$

II Załóżmy, że warunek zachodzi dla n. Udowodnimy że zachodzi dla $n+1$. Wtedy A to zbiór n elementów, B to zbiór $n+1$ elementów, $B = A \cup \{x\}$, gdzie A ma n a x nie należy do A. Z założenia II wiemy, że A ma 2^n podzbiorów. Do każdego $C \subseteq A$ podzbiorów zbioru A mamy dwa podziory B: C oraz $C \cup \{x\}$. B ma więc dokładnie 2 razy więcej podzbiorów.

$2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ - udowodnione

Zadanie 16 (-)

6 October, 2023 13:02

16. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

Zadanie 5

9 October, 2023 20:27

L1.5. **Włącz komputer!** 2 punkt Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+2023} dx \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$(1) \qquad I_n = \frac{1}{n} - 2023 I_{n-1} \qquad \left(n = 1, 2, \ldots;\ I_0 = \ln \frac{2024}{2023}\right).$$

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek $I_1, I_2, \ldots, I_{20}$ (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli `for`. Rozważ osobno podciągi $I_1, I_3, \ldots, I_{19}$ oraz $I_2, I_4, \ldots, I_{20}$. Czy w obu wypadkach wyniki są wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij**.

$$I_n = \frac{1}{n} - 2023 I_{n-1}$$

$$I_n + 2023 I_{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$L = I_n + 2023 I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2023} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+2023} dx \cdot 2023 =$$

$$\int_0^1 \frac{x^n + 2023x^{n-1}}{x+2023} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+2023)}{x+2023} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$$

$$\left.\frac{x^n}{n}\right|_0^1 = \frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} = \frac{1}{n} = P \quad \text{c.n.u.}$$

Wyniki dla ciągów nie są wiarygodne - do n=3 jest ok, potem zaczyna odpływać

Zadanie 6

9 October, 2023 21:06

L1.6. **Włącz komputer!** 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, ustal ilu teoretycznie wyrazów szeregu

$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

należy użyć do obliczenia wartości π z błędem mniejszym niż 10^{-6}. Następnie wykonaj odpowiedni eksperyment obliczeniowy przy pomocy komputera w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji. Co z niego wynika?

musimy dojść do wyrazu mniejszego niż 10^{-6}

$$\left|\frac{(-1)^k}{2k+1}\right| < 10^{-6} \quad k>0$$

$$\frac{1}{2k+1} < 10^{-6}$$

$$1 < 10^{-6}\cdot(2k+1)$$

$$10^{-6} < 2k+1$$

$$10^{6}-1 < 2k$$

$$k > \frac{10^{6}-1}{2}$$

$$k > 499999{,}5$$

We wzorze jeszcze $\times 4$, więc > 1999998

Zadanie 7

9 October, 2023 21:28

L1.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$\left| (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$1 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot k$$

$$k > \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}}$$

$$k > 2000000$$

$$\ln\left(e \cdot \frac{2}{e}\right) = \ln e + \ln\left(\frac{2}{e}\right) = 1 + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$\left| (-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{e} - 1\right)^k}{k} \right| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$2000000 \underbrace{\left(\frac{e-2}{e}\right)^k}_{<1} < k$$

21

Zadanie 8

9 October, 2023 21:38

$arctg(x) = \frac{\pi}{2} - arctg\left(\frac{1}{x}\right)$

$tg\,\alpha = x \quad tg\,\beta = \frac{1}{x}$

$\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi \Rightarrow tg^{-1}x + tg^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$arctg(x)$:

Jeśli $|x| \leq 1$ zwróć $ATG(x)$

Jeśli $x < 0$ $-\frac{\pi}{2} - ATG\left(\frac{1}{x}\right)$

w.p.p. $\frac{\pi}{2} - ATG\left(\frac{1}{x}\right)$