L8.1. [1 punkt] Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie:* NIFS3) dla danych

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

a) Z układu równań jak na wykładzie, b) ze wzoru z końcówki wykładu   - możliwe jakieś obliczeniówki

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D & x \in \langle -1; 0) \\ S_2(x) = Ex^3 + Fx^2 + Gx + H & x \in \langle 0; 2\rangle \end{cases}$$

$$S'(x) = \begin{cases} S_1'(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C & x \in \langle -1; 0) \\ S_2'(x) = 3Ex^2 + 2Fx + G & x \in \langle 0; 2\rangle \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} S_1''(x) = 6Ax + 2B & x \in \langle -1; 0) \\ S_2''(x) = 6Ex + 2F & x \in \langle 0; 2\rangle \end{cases}$$

Mamy 8 niewiadomych, będzie układ 8 równań.

$$\begin{cases} S_1(-1) = -A + B - C + D = 48 \\ S_1(0) = S_2(0) = D = H = -1 \\ S_2(2) = 8E + 4F + 2G + H = 96 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A + B - C = 47 \\ 8E + 4F + 2G = 95 \end{cases}$$

$S_1'(0) = S_2'(0) = C = G$ (z ciągłości pochodnej)

$S_1''(0) = S_2''(0) = B = F$ (z ciągłości drugiej pochodnej)

i jeszcze z naturalności:

$S_1''(-1) = -6A + 2B = 0$

$S_2''(2) = 12E + 2F = 0$

Porządkując co mamy:

$$\begin{cases} C = G \\ B = F \\ 6A = 2B \Rightarrow B = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}B \\ 12E = -2F \Rightarrow F = -6E \Rightarrow E = -\frac{1}{6}F \\ -A + B - C = 47 \Rightarrow \frac{2}{3}B - C = 47 \Rightarrow \frac{2}{3}F - G = 47 \\ 8E + 4F + 2G = 95 \Rightarrow -\frac{8}{6}F + 4F + 2G = 95 \Rightarrow \frac{16}{6}F + 2G = 95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}F - G = 47 \\ \frac{16}{6}F + 2G = 95 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{6}F - 2G = 94 \\ \frac{16}{6}F + 2G = 95 \end{cases}$$

$$\overline{4F = 1 \Rightarrow F = \frac{1}{4}}$$

$$F = -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{24}$$

$$\frac{8}{6} \cdot \frac{1}{4} - 2G = 94$$

$$\frac{1}{3} - 2G = 94 \qquad G = -\frac{281}{6}$$

$$H = -1 \quad E = -\frac{1}{24} \quad F = \frac{1}{4} \quad G = -\frac{281}{6}$$

$$D = -1 \quad A = \frac{1}{12} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = -\frac{281}{6}$$

A więc rozwiązaniem będzie

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x) = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{281x}{6} - 1 & x \in \langle -1; 0) \\ S_2(x) = -\dfrac{x^3}{24} + \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{281x}{6} - 1 & x \in \langle 0; 2\rangle \end{cases}$$