Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Królewiec XVIII wiek

Święty Mikołaj jest w Królewcu w XVIII wieku, gdzie układ mostów jest taki jak na tablicy. Chciałby zaplanować przejażdżkę saniami, w której na każdym moście znalazłby się dokładnie raz. Punkt startu i zakończenia jest taki sam, ale może go sobie wybrać.

Czy jego zamierzenie jest wykonalne?

Królewiec XVIII wiek

Święty Mikołaj jest w Królewcu w XVIII wieku, gdzie układ mostów jest taki jak na tablicy. Chciałby zaplanować przejażdżkę saniami, w której na każdym moście znalazłby się dokładnie raz. Punkt startu i zakończenia jest taki sam, ale może go sobie wybrać.

Czy jego zamierzenie jest wykonalne?
A jeśli punkty startu i końcowy nie muszą być takie same?

Święty Mikołaj w mieście M

Święty Mikołaj jest w mieście M, którego rozkład ulic da się przedstawić za pomocą grafu spójnego $G = (V, E)$, nieskierowanego, gdyż każda ulica jest dwukierunkowa. Chciałby rozwieźć prezenty mieszkańcom wszystkich ulic (przy każdej ktoś mieszka) tak, by każdą ulicą przejechać dokładnie raz. Od czego zależy to, czy mu się to uda? Punkt startu i zakończenia może być taki sam, może być też różny.

Droga i cykl Eulera

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym, niekoniecznie prostym.
Droga Eulera grafu G to droga (krawędzie się nie powtarzają, wierzchołki mogą), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.
Cykl Eulera grafu G to droga zamknięta (wierzchołek startowy jest taki sam jak końcowy), która zawiera każdą krawędź $e \in E$.

Warunki istnienia drogi/cyklu Eulera

Spójny graf G posiada drogę Eulera wtw, gdy zawiera 0 lub 2 wierzchołki o stopniu nieparzystym. Spójny graf G posiada cykl Eulera wtw, gdy wszystkie jego wierzchołki mają stopień parzysty.

Święty Mikołaj w Finlandii

Święty Mikołaj jest w Finlandii i rozkład osad, do których chciałby przyjechać da się przedstawić za pomocą grafu spójnego $G = (V, E)$ nieskierowanego. Chciałby rozwieźć prezenty mieszkańcom wszystkich osad odwiedzając każdą osadę dokładnie raz. Od czego zależy to, czy mu się to uda? Punkt startu i zakończenia może być taki sam, może być też różny.

Ścieżka i cykl Hamiltona

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym.
Ścieżka Hamiltona grafu G to ścieżka (wierzchołki się nie powtarzają), która zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.
Cykl Hamiltona grafu G to cykl (wierzchołki się nie powtarzają), który zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

Ścieżka/cykl Hamiltona

Sprawdzenie, czy graf $G = (V, E)$ zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona jest problemem trudnym obliczeniowo - jest to problem NP-trudny.

Święty Mikołaj w Finlandii

Święty Mikołaj jest w Finlandii i rozkład osad, do których chciałby przyjechać da się przedstawić za pomocą nieskierowanego grafu spójnego. (Każde dwie osady są bezpośrednio połączone.) Odległości między osadami są zapisane jako funkcja wagi $c : E \to R \geq 0$. Chciałby objechać wszystkie osady pokonując w sumie jak najmniejszą odległość.
Dodatkowo:

1. punkt startu = punkt końcowy,
2. skrót zawsze się opłaca - $\forall_{u,v,w \in V} c(u,v) \leq c(u,w) + c(w,v)$.

Innymi słowy, Św. Mikołaj chciałby obliczyć najmniejszy wagowo cykl Hamiltona.

Święty Mikołaj w Finlandii

Święty Mikołaj jest w Finlandii i rozkład osad, do których chciałby przyjechać da się przedstawić za pomocą nieskierowanego grafu spójnego. (Każde dwie osady są bezpośrednio połączone.) Odległości między osadami są zapisane jako funkcja wagi $c : E \to R \geq 0$. Chciałby objechać wszystkie osady pokonując w sumie jak najmniejszą odległość.
Dodatkowo:

1. punkt startu $=$ punkt końcowy,
2. skrót zawsze się opłaca - $\forall_{u,v,w \in V} c(u,v) \leq c(u,w) + c(w,v)$.

Niech OPT oznacza sumaryczną długość optymalnej trasy Św. Mikołaja. Jak się ma $MST(G)$ do OPT?

Święty Mikołaj w Finlandii

Święty Mikołaj jest w Finlandii i rozkład osad, do których chciałby przyjechać da się przedstawić za pomocą nieskierowanego grafu spójnego. (Każde dwie osady są bezpośrednio połączone.) Odległości między osadami są zapisane jako funkcja wagi $c : E \to R \geq 0$. Chciałby objechać wszystkie osady pokonując w sumie jak najmniejszą odległość. Dodatkowo:

1. punkt startu = punkt końcowy,
2. skrót zawsze się opłaca - $\forall_{u,v,w \in V} c(u, v) \leq c(u, w) + c(w, v)$.

Niech OPT oznacza sumaryczną długość optymalnej trasy Św. Mikołaja. Jak się ma waga $MST(G)$ do OPT?

$c(MST(G)) \leq OPT$

Święty Mikołaj w Finlandii - trasa

Algorytm znajdujący trasę Św. Mikołaja:

1. Oblicz $MST(G)$.
2. Podwój $MST(G)$ otrzymując T^2.
3. Znajdź cykl Eulera C_E podwojonego $MST(G)$, czyli T^2.
4. Skróć C_E do cyklu Hamiltona.

Święty Mikołaj w Finlandii - trasa

Algorytm znajdujący trasę Św. Mikołaja:

1. Oblicz $MST(G)$.
2. Podwój $MST(G)$ otrzymując.
3. Znajdź cykl Eulera C_E podwojonego $MST(G)$.
4. Skróć C_E do cyklu Hamiltona.

Obliczona trasa ma wagę $\leq 2OPT$.

Święty Mikołaj w Finlandii - trasa

Algorytm Christofidesa znajdujący trasę Św. Mikołaja:

1. Oblicz $MST(G)$.
2. Oblicz najmniejsze wagowo skojarzenie pełne M na podgrafie zawierającym wierzchołki V^-, które mają st. nieparzysty w $MST(G)$.
3. Znajdź cykl Eulera C_E multigrafu $MST(G) + M$.
4. Skróć C_E do cyklu Hamiltona.

Obliczona trasa ma wagę $\leq \frac{3}{2} OPT$.

Warunek Halla

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem a $W \subseteq V$ podzbiorem wierzchołków. Sąsiedztwo W oznaczane jako $N(W)$ definujemy jako zbiór $\{v \in V : \exists_{w \in W} \{v, w\} \in E\}$.

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Warunek Halla

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym.

Warunek Halla

Dla każdego $A' \subseteq A$ zachodzi $|N(A')| \geq |A'|$ oraz dla każdego $B' \subseteq B$ zachodzi $|N(B')| \geq |B'|$.

Skojarzenie doskonałe w grafie dwudzielnym

Graf dwudzielny G zawiera skojarzenie doskonałe wtw, gdy spełniony jest w nim warunek Halla.