L12a zad.	1	2	3	4	5	6	suma
pkt.							
max pkt.	1	1	2	1	1	1	7

3 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

Uwaga! Z list 12a i 12b **nie można** zdobyć łącznie więcej niż **11 punktów**.

L12.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Jak już wiadomo, język programowania PWO++ ma obszerną bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich znajduje się procedura `Integral(f)` znajdująca z dużą dokładnością wartość całki $\int_{-20}^{24} f(x)\mathrm{d}x$, gdzie $f \in C[-20, 24]$. W jaki sposób użyć procedury `Integral` do obliczenia całki

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (a < b;\ g \in C[a, b])?$$

L12.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij, że kwadratura postaci

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k). \tag{1}$$

ma rząd $\geq n + 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest kwadraturą interpolacyjną.

L12.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Załóżmy, że dane są: funkcja ciągła f, liczby $a < b$ oraz parami różne węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Niech $Q_n(f)$ będzie kwadraturą interpolacyjną z węzłami $x_0, x_1, \ldots, x_n$ przybliżającą wartość całki

$$I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jak wiadomo, współczynniki A_k $(0 \leq k \leq n)$ kwadratury Q_n,

$$Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k),$$

wyrażają się wzorem:

$$A_k = \int_a^b \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników $A_0, A_1, \ldots, A_n$ i określ jego złożoność.

L12.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

$$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k \cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right) \tag{2}$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

L12.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Podaj **efektywny algorytm** obliczania współczynników kwadratury Newtona-Cotesa (patrz też zadania **L12.3**–**L12.4**) i określ jego złożoność.

L12.6. $\boxed{\text{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykorzystując **własną implementację algorytmu**, o którym mowa w zadaniu **L12.5**, oblicz $Q_n^{NC}(f)$ $(2 \leq n \leq 24)$ dla całki

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 25x^2}.$$

Skomentuj wyniki.