

L6.5. 1 punkt Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

b) Jednoznaczność

Dowód będzie nie wprost  
załóżmy, że istnieją dwa różne wielomiany  $W_1(x)$  i  $W_2(x)$  stopnia  $n$ , przyjmującego w węzłach  $x_0, x_1, \dots, x_n$  takie same wartości.

Niech  $W_3(x) = W_1(x) - W_2(x)$  (który musi być stopnia co najwyżej  $n$ )  
Ponieważ  $W_1$  i  $W_2$  interpolują w węzłach  $x_i, i \in 0, 1, \dots, n$  tą samą funkcję, to  $W_1(x_i) = W_2(x_i)$ .  
Wynika stąd że  $W_3(x_i) = 0$ .

Wiemy że każdy niezerowy wielomian stopnia  $n$  ma co najwyżej  $n$  pierwiastków. Skoro  $W_3$  ma  $n+1$  to musi być tożsamościowo równy zero, a ponieważ  
 $W_3(x) = W_1(x) - W_2(x) = 0$

to

$W_1(x) = W_2(x)$  ← wielomiany nie są różne, sprzeczność!

Nie istnieją dwa różne  $\Rightarrow$  jednoznaczność