Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 5

24 października 2023 r.

Zajęcia 6 listopada 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L5.1. 1 punkt Metodę siecznych definiuje wzór iteracyjny

$$x_{n+1} := x_n - f_n \frac{x_n - x_{n-1}}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0,\ x_1 - \text{dane}),$$

gdzie $f_m := f(x_m)$ $(m = 0, 1, \ldots)$. Wykaż, że wzór ten można również zapisać w postaci

$$x_{n+1} := \frac{f_n x_{n-1} - f_{n-1} x_n}{f_n - f_{n-1}} \qquad (f_n \neq f_{n-1};\ n = 1, 2, \ldots;\ x_0,\ x_1 - \text{dane}),$$

a następnie wyjaśnij, który z wzorów jest przydatniejszy w praktyce numerycznej (tak naprawdę to jest **główe zadanie**).

L5.2. 1 punkt Zapoznaj się z opisem metody *regula falsi* – będącej pewnym wariantem metody siecznych – przedstawionym w paragrafie 6.2.1. książki G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical methods in scientific computing*, Vol. I, SIAM, 2008. Przedstaw jej ideę (rysunek i przykłady są tu wskazane), a następnie wyjaśnij czym różni się ona od metody siecznych. Co jest główną zaletą tej metody? *Wskazówka*: W tym wypadku **nie warto** zaglądać do polskiej Wikipedii.

L5.3. 1 punkt Podać przykład funkcji ciągłej, dla której metoda regula-falsi jest zbieżna liniowo.

L5.4. 1 punkt Które z ciągów: $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{2^{2^n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{e^n}, \frac{1}{n^n}$ są zbieżne kwadratowo? Odpowiedź uzasadnij.

L5.5. 1 punkt Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 - \text{dane}, \quad x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots;\ F - \text{ustalona, } \textit{gładka} \text{ funkcja})$$

(metody takie nazywamy *metodami jednokrokowymi*; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) := x - f(x)/f'(x)$) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C?

L5.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech α będzie pojedynczym zerem funkcji f (tzn. $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Wykaż, że metoda Newtona jest wówczas zbieżna kwadratowo. *Wskazówka*: Wykorzystaj zadanie **L5.5**.

L5.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Określ wykładnik zbieżności *metody Steffensena* zadanej następującym wzorem:

$$x_{n+1} := x_n - f(x_n)/g(x_n), \qquad g(x) := \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)},$$

której używa się do znajdowania przybliżonych wartości pierwiastków równania nieliniowego $f(x) = 0$.

L5.8. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponuj **numeryczną metodę** wyznaczania wykładnika zbieżności jednokrokowej metody iteracyjnej (por. zadanie **L5.5**) rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.

L5.9. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Wykonując **wiele** odpowienich testów numerycznych, **ustal eksperymentalnie** (patrz zadanie poprzednie) jaki jest rząd następującej *metody Olvera*:

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{1}{2}\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)}\left[\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right]^2 \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

przybliżonego rozwiązywania równania nieliniowego postaci $f(x) = 0$. Przeprowadzając testy możesz użyć arytmetyki dużej precyzji (np. działającej z dokładnością 128 czy 256 cyfr dziesiętnych po przecinku).

L5.10. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że liczba G jest granicą dwóch ciągów: $\{r_n\}$ i $\{a_n\}$. To znaczy,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = G, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = G.$$

Do tej pory wartość G znana była z dokładnością 10 cyfr dziesiętnych. Na tej podstawie obliczono:

$$\begin{aligned} |r_0 - G| &\approx 0.763907023, \\ |r_1 - G| &\approx 0.543852762, \\ |r_2 - G| &\approx 0.196247370, \\ |r_3 - G| &\approx 0.009220859 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} |a_0 - G| &\approx 0.605426053, \\ |a_1 - G| &\approx 0.055322784, \\ |a_2 - G| &\approx 0.004819076, \\ |a_3 - G| &\approx 0.000399783. \end{aligned}$$

Obecnie, konieczne okazało się wyznaczenie stałej G z dokładnością 100 cyfr. Na obliczenie jednego wyrazu ciągu $\{r_n\}$ lub $\{a_n\}$ z taką precyzją potrzeba około tygodnia. Rosjanie próbują przybliżyć stałą G używając ciągu $\{r_n\}$, a Amerykanie – ciągu $\{a_n\}$. Kto szybciej wyznaczy stałą G z żądaną dokładnością i ile będzie to trwało?

(–) Paweł Woźny