6 (done)

1 December, 2023 20:14

L8.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ustalmy liczby naturalne M oraz N. Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk}, gdzie $0 \le k \le N$, a $m = 1, 2, \ldots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \qquad (0 \le k \le N)$$

dla $1 \le m \le M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji $s_1, s_2, \ldots, s_M$.

Mamy $n+1$ węzłów i $(n+1)\cdot m$ wartości - osobne dla każdej NIFS3.
Wynikiem naszego algorytmu ma być m różnych NIFS3.
Nasz algorytm:

Najpierw wspólne zmienne na potrzeby wszystkich funkcji

1) Wyliczamy lambdy i h ze wzorów
2) Wyliczamy w pętli listy p i q

I teraz dla każdego $m = 1, 2, 3, \ldots, M$

3) Wyliczamy listę d_m (wartościami y_m)
4) Wyliczamy listę u_m korzystając z d_m
5) Wyliczamy listę M_m korzystając z u_m q_m
6) Możemy teraz wyliczyć z jawnego wzoru wszystkie fragmenty $S_m(x)$

Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$q_0 := u_0 := 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} p_k := \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k := (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k := (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{array}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Wówczas

$$M_{n-1} = u_{n-1},$$
$$M_k = u_k + q_k M_{k+1} \qquad (k = n-2, n-3, \ldots, 1).$$

Twierdzenie

Dla danych $n \in N$, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ i danej funkcji f określonej w tych węzłach $(y_k = f(x_k))$ zawsze istnieje dokładnie jedna NIFS3.

Niech $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $(1 \le k \le n)$, wtedy:

$$s(x) = h_k^{-1}\Big[\frac{1}{6}M_{k-1}(x_k - x)^3 + \frac{1}{6}M_k(x - x_{k-1})^3 + (f(x_{k-1}) -$$
$$- \frac{1}{6}M_{k-1}h_k^2)(x_k - x) + (f(x_k) - \frac{1}{6}M_k h_k^2)(x - x_{k-1})\Big]$$

Gdzie $H_k := x_k - x_{k-1}$ oraz $M_k := s''(x_k)$

Momenty M_k spełniają następującą zależność $(*)$:

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

Gdzie $f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ to iloraz różnicowy zdefiniowany wcześniej, natomiast współczynniki $\lambda_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$