

(+) Dany jest ciąg liczb naturalnych a₁, a₂,..., a_n. Pokaż, że istnieją takie i oraz $j,\ i \leq j,$ że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez

2. (+) Wykaż, że wśród n+1 różnych liczb wybranych spośród 2n kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna



93. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.



4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.



- $^{\prime}$ 5. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny
- Spośród liczb naturalnych z przedziału [1,2n] wybrano n + 1. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli NWD(a, b) = 1.)
- Udowodnij, że wśród dowolnych n + 2 liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 2n.
- Dla k ≥ 1 wykaż tożsamość absorbcyjna:



 $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

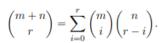
Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:



 $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$



(+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:



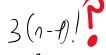
Czy potrafisz udowodnić ja kombinatorycznie?



 K ażdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: zielony lub pomarańczowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.



niaste? (Dwie formacje są różne jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą reką w obu układach lub kogo innego prawa roka) 12. Na ile sposobów 3n dzieci może uformować trzy równoliczne koła gra-





13. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować $\rho: \binom{n^2}{2}$ pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by o więcej niż 1?



Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$



 (-) W każde pole szachownicy n × n wpisujemy jedną z liczb: -1,0,1 Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

1. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych a_1,a_2,\ldots,a_n . Pokaż, że istnieją takie i oraz $j,\ i\leq j,$ że suma $a_i+a_{i+1}+\ldots+a_j$ jest podzielna przez n

 $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_k$ $0; + ... + 0_0 = 5; -5; -1$ $S_k = 0_4 + ... + 0_5$ $S_k =$

 (+) Wykaż, że wśród n + 1 różnych liczb wybranych spośród 2n kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna dzieli druga.

Dowolne $n = 2^{l_0}$ p $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ niepo zystych $\frac{2k}{k_1 r k_2}$ Tost doktodnie n niepozystych w 1-2n (1,3...,2n-1) $= 2^{l_0}$ $= 2^{l_0}$

 Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

Wesney n+1 liczb tylko z jeolynek (1, 11, ..., 1.....)

VOT- 0) Horoś podzielna prez n=>1]

Varb) w.p. z PP min. l ab (orb) odzie a=b mod n => 0-b

sktada się tylko z 1:0 i jest podzie he prez n

4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że a^3b-ab^3 jest podzielne przez 10. – 2 i 5

 $0^{3}b - 0b^{3} = 0b(0^{2}-b^{2}) = 0b(0-b)(0+b)$ [Wer. 0b(0-b)(0+b) = 0 mad 5 = 0 0 = 0 0 = 0 0 = 0 [War. ab(a-b)(a+b) = 0 mod 5 = 0 ab = 0 va-b=0 va+b=0]

[Downha a,b,c = 0 mod 5 to war. spehiony

[N.P.P. 6a,b,c4 = 5 41,2,344,2,44 42,3,44 42,3,44 42,3,54 434,54 lub = 0 duplikatami

[1+4=2+3= dupl-dupl.=0 mod 5[Idla 5, analogicalie of ab=0]

 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

Nie wprost > 13x, K × K > koédo osobo proviezy z režezyzną
Optymulæ roztoženie o

M1 K1 K2 M2 M3 K3 K4 M2 M5 K5 K6 M6 M- K- K9 Mg M9 K9 K10 M0 M11 K1, K12 U12 M13 K13

Dla kazdej niepozystý nie działa II

6. Spośród liczb naturalnych z przedziału [1,2n] wybrano n+1. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli NWD(a,b)=1.)

 Udowodnij, że wśród dowolnych n + 2 liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez 2n. Dla k ≥ 1 wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?
$$P = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{k-1}{k-1}} = \frac{n}{k} \cdot \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-k}{k}} = \frac{n}{k} \cdot \frac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-k}{k}} = \binom{n}{k} = \boxed{n}$$

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{dla } 0 < k < n \end{cases}$$
 Bo whedy many wyighty 1 is summing open to also we give the summing of the summing o

9. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

LiZ n procowników II kierowników, z k kierowników m menodżerów
P: Z n procowników m meno dżerów, z reszty k-m menodżerów
Otzymujemy tyk somo kodry
kożdepo szczebla, mamy tyle
somo s posobów

(+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

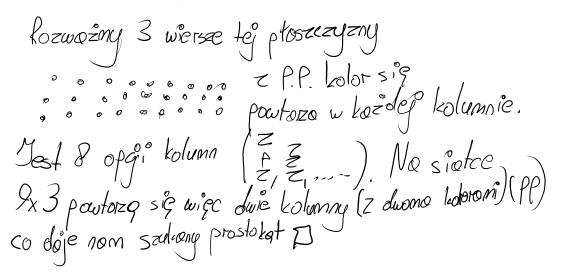
Kombino torucznico

Library (nie (wzokobem m)

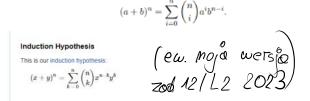
I meo (nie (wzokobem m)

I zel. (min) = $\frac{1}{2}$ (nie (nie) = $\frac{1}{2}$ (nie) ξ^ν(m)(n) + ξ^ν(m)(n) = $\binom{m+n}{r}+\sum_{i=1}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i-1}=$ $\binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-1} = \binom{m+n+1}{r} = \square$

 K ażdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: zielony lub pomarańczowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.



14. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:



Induction Step

This is our induction step

$$\begin{split} &(x+y)^{n+1} \ = \ (x+y) \, (x+y)^n \\ &= \ x \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \\ &= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k \end{split}$$
 Pascal's Rule
$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

The result follows by the Principle of Mathematical Induction.

15. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: -1,0,1. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zakres wortość: n — n: Entl możliwość, n wierszy, n kdumn, 2 preliptre: 2n+2 sum stol. P.P.J