# Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2024

# Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha.

Ile osób jest w tym klubie?

# Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona, lub w tenisa.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha,
- 30 gra w tenisa,
- 5 w tenisa i badmintona,
- 7 w tenisa i squasha,
- 3 we wszystkie trzy sporty.

Ile osób jest w tym klubie?

# Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona, lub w tenisa, lub w ping-ponga.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha,
- 30 gra w tenisa,
- 5 w tenisa i badmintona,
- 7 w tenisa i squasha,
- 3 w tenisa, badmintona i squasha,
- . . . .

Ile osób jest w tym klubie?

# Wzór włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

# Wzór włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}|\bigcap_{i\in I} A_i|$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\}}(-1)^{|I|-1}|\bigcap_{i\in I} A_i|$$

# Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}|\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy $e$ jest policzony po prawej stronie wzoru?

# Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k} |\bigcap_{i\in I} A_i|$$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy $e$ jest policzony po prawej stronie wzoru?

$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots$

# Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy $e$ jest policzony po prawej stronie wzoru?

$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots$
$(-1+1)^p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} (1)^{p-i}$
$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots = -(-1+1)^p + 1 = 1$
$e$ jest policzony raz!

# Szczególne sito

Ile liczb spośród $\{1, 2, \ldots, 100\}$ nie jest podzielnych przez żadną z liczb $6, 8, 15$?

# Surjekcje

Ile jest różnych surjekcji z $n$-elem. zbioru $A$ na $m$-elem. zbiór $B$?

# Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić $n$ kulek do $k$ szuflad?

Zakodujmy każdy rozrzut za pomocą zer i jedynek, tzn. jako ciąg zerojedynkowy.
Użyjemy $n$ zer - reprezentują kulki i $k-1$ jedynek, które są oddzielaczami.
Interpretacja: ilość zer między $(i-1)$szą i $i$-tą jedynką to ilość kulek w $i$-tej szufladzie.
Przykład: 0011000 oznacza 2-kulki w pierwszej, 0 kulek w drugiej, 3 kulki w trzeciej.

# Kulki i szufladki

Na ile sposobów można wrzucić $n$ kulek do $k$ szuflad?
Na tyle, ile jest ciągów złożonych z $n$ zer i $k-1$ jedynek.

Każdy taki ciąg ma długość $n+k-1$.
Trzeba wybrać $k-1$ miejsc spośród $n+k-1$, na których postawimy jedynkę.

Odpowiedź: $\binom{n+k-1}{k-1}$

# Dwumian Newtona

## Wzór dwumienny Newtona

Dla $n \in N$ zachodzi:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

# Dwumian Newtona

## Wzór dwumienny Newtona

Dla $n \in N$ zachodzi:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Dowód kombinatoryczny:
$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i y^{n-i}$
$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\cdots(x+y) = x^n + y^n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x^i y^{n-i}$

Mamy $2^n$ mnożeń.
$\alpha_i$ to liczba sposobów, na jakie możemy wybrać $i$ spośród $n$ nawiasów, w których w mnożeniu uczestniczyć będzie $x$ ( a nie $y$)

# Trójmian

Jak rozwinąć sumę $(x+y+z)^n$?
Ile wynosi współczynnik przy składniku $x^i y^j z^{n-i-j}$?