

## Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech  $d_n$  oznacza liczbę nieporządków utworzonych z  $n$  kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na  $d_n$  stosując zasadę włączeń-wyłączeń.
2. Wśród liczb naturalnych  $1, 2, \dots, 800$ , ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.
3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter  $a, a, a, a, b, b, b, c, c$  w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie  $a, a, a, a, b, c, b, c, b$  jest zakazane, ale ustawienie  $a, a, a, b, a, c, b, c, b$  jest dobre.
4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.
5. Udowodnij, że  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy  $(n+1) \times (n+1)$  poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.  
Czy potrafisz zwinąć tę sumę?
6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.
7. (+) Wykaż, że wśród  $n+1$  różnych liczb wybranych spośród  $2n$  kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.
8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?
9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ , jeśli dodatkowo wymagamy, aby  $x_1, x_2 < 30$  oraz  $x_3, x_4 < 40$ ?
10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby  $10^{100000}$ .

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

Liczba naturalna  $a$ , której zapis w systemie dziesiętnym to  $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$  dzieli się przez 11 wtw gdy liczba  $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$  jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby  $74^{74}$ .