Lista nr 8 z matematyki dyskretnej

1. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
   (a) na dowolne składniki,
   (b) na różne składniki nieparzyste,
   (c) na składniki mniejsze od m,
   (d) na różne potęgi liczby 2.
2. (+) Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1 + 3$ i $2 + 2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.
3. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.
4. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.
5. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:
   (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
   (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,
   (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,
   (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),
   (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).
6. (-) Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i $\bar{G}$ ($\bar{G}$ jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $\bar{G} = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.