Zadania dodatkowe

1 December, 2023 20:21

L8.8. **Dodatkowe zadanie programistyczne** (do 17 grudnia 2023 r.; do 6 punktów) [1]

Jest rok 2284. Autonomiczny latający dron *Floty Naukowej* został wysłany na misję do puszczy na odległej planecie, aby zbierać dokumentację o lokalnej faunie i florze. Na polanach tej puszczy żyje rdzenna ludność o mniej zaawansowanym poziomie rozwoju kulturalnego i technologicznego. *Podstawowa Zasada Badawcza Floty Naukowej* (nazywana dalej *PZB*) zakazuje zakłócania ewolucji kulturowej innych gatunków. Takim zakłóceniem niewątpliwie byłoby pojawienie się drona na niebie nad polaną. Dlatego drony zaprogramowano tak, aby nie zostały zauważone, a dokładniej – aby unikały obszarów w kształcie koła, w których znajdują się polany.

Pewnego dnia odnaleziono krytyczny błąd oprogramowania drona, przez który nie ma pewności, że wybrana trasa faktycznie unikała zakazanych obszarów. Jedyne wiarygodne informacje o położeniu i ruchu drona to zapisywane w określonych odstępach czasu położenie i prędkość. Zespół operatorek i operatorów drona próbuje ustalić, czy doszło do złamania *PZB*.

Analizując sytuację, jedna z osób przypomniała sobie, że wielomian interpolacyjny można konstruować nie tylko w oparciu o wartości funkcji w węzłach, ale również wykorzystując informacje o wartościach jej pierwszej i kolejnych pochodnych w tych węzłach.

Taki rodzaj interpolacji nazywamy *interpolacją Hermite'a*. Zobacz np. [1, §4.3.1], [2, §2.4].

(a) Sformułuj zadanie interpolacji wielomianowej Hermite'a i udowodnij, że ma ono zawsze jednoznaczne rozwiązanie.

(b) Zapoznaj się z oszczędnymi algorytmami wyznaczania *postaci Newtona* wielomianu interpolacyjnego Hermite'a i potrzebnych do tego tzw. *uogólnionych ilorazów różnicowych*.

(c) Trajektorię ruchu drona w czasie można opisać na płaszczyźnie (dla uproszczenia przyjmujemy, że dron przeprowadza badania na stałej wysokości) przy pomocy krzywej parametrycznej

$$\gamma(t) := [(x(t), y(t)) \ : \ t \geq 0] \qquad (t - \text{czas}).$$

Dla zadanych: liczb rzeczywistych $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ (czas), wartości funkcji $x(t_0), y(t_0), x(t_1), y(t_1), \ldots, x(t_n), y(t_n)$ (położenie drona) oraz ich pochodnych $x'(t_0), y'(t_0), x'(t_1), y'(t_1), \ldots, x'(t_n), y'(t_n)$ (prędkość drona), opracuj algorytm konstrukcji postaci Newtona wielomianów Hermite'a $H_x, H_y \in \Pi_{2n+1}$ spełniających następujące warunki:

$$H_x(t_k) = x(t_k), \quad H_x'(t_k) = x'(t_k), \quad H_y(t_k) = y(t_k), \quad H_y'(t_k) = y'(t_k)$$

$(k = 0, 1, \ldots, n)$. Sprawdź **dla wielu doborów** interpolowanych funkcji x, y oraz węzłów t_k działanie tego rodzaju interpolacji w praktyce.

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) $(0 \leq i \leq n)$ oraz *obszarów zakazanych*

(d) Pora przekonać się, czy doszło do złamania *PZB*. Dla zadanych $t_i := t_0 + ih$ ($i = 0, 1, \ldots, n$; $h, t_0 > 0$ – ustalone), położenia drona (wartości $x(t_i), y(t_i)$) i jego prędkości (wartości $x'(t_i), y'(t_i)$) ($0 \leq i \leq n$) oraz *obszarów zakazanych* $K_0, K_1, \ldots, K_m$ ($m \in \mathbb{N}$) będących kołami o środkach odpowiednio w punkach $z_j := (z_j^x, z_j^y)$ i promieniach $r_j > 0$ ($j = 0, 1, \ldots, m$), określ – wykorzystując interpolację wielomianową Hermite'a – czy dron złamał *PZB*.

Wykonaj szczegółowe testy dla różnych trajektorii drona i różnych zestawów obszarów zakazanych.

Literatura

[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.

[2] J. i M. Jankowscy, *Przegląd metod i algorytmów numerycznych*, cz. 1., WNT, 1988.

Autor zadania: *Filip Chudy*.

2

1 December, 2023 20:21

L8.9. $\boxed{\text{Dodatkowe zadanie programistyczne (do 17 grudnia 2023 r.; do 6 punktów)}}$ [2] Metodę Newtona można stosować także do znajdowania rozwiązań równania nieliniowego $f(z) = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Np. dla $f(z) := z^4 + 1$ i $z_0 := 0.5 + 0.5i$ otrzymujemy $z_{10} = 0.7071067812 + 0.7071067812i$ – czyli bardzo dobre przybliżenie liczby $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, będącej jednym z rozwiązań równania $z^4 + 1 = 0$.

Niech c_{n+1} oznacza kolor czarny. Niech $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ będą rozwiązaniami równania $z^n + 1 = 0$ w dziedzinie liczb zespolonych. Przypiszmy każdemu z tych rozwiązań inny, ale różny od czarnego, kolor; powiedźmy odpowiednio $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Niech M będzie liczbą parzystą, a W_M następującym zbiorem punktów płaszczyzny zespolonej:

$$W_M := \left\{ -1 + 2\frac{k}{M} + \left(-1 + 2\frac{l}{M} \right) i \; : \; k, l = 0, 1 \ldots, M \right\}.$$

Dla wybranych n i M (np. $n = 3, 4, 5, 6$; $M = 400, 800$), wykonaj rysunek, na którym każdy z punktów w zbioru W_M zostanie narysowany kolorem $c(w)$ ustalonym na podstawie poniższej procedury:

(a) $z_0 := w; \qquad z_{k+1} := z_k - \dfrac{f(z_k)}{f'(z_k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1;$ np. $N = 10, 20, 35)$;

(b) jeśli istnieje takie k, że z_N jest *blisko* liczby ζ_k (jak należy to rozumieć w wypadku liczb zespolonych?), to przyjmujemy $c(w) := c_k$, w przeciwnym razie $c(w) := c_{n+1}$.

Jaki charakter ma otrzymamy w ten sposób obraz? Spróbuj przeanalizować zaobserwowane zjawisko i wyciągnąć wnioski. Następnie przeprowadź podobny eksperyment dla *metody Halleya*, która wyraża się wzorem

$$z_{k+1} := z_k - 1 \Big/ \left[\frac{f'(z_k)}{f(z_k)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(z_k)}{f'(z_k)} \right].$$

Czy metoda ta zachowuje się podobnie?