Lista06

8 November, 2024 18:04

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n-tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.
6. Niech k i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq m$. Udowodnij, że $\sum_{i=k}^{m} \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.
7. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.
8. (a) Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$
   (b) Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.
9. Niech $a, b \in Z$. Pokaż, że $a^3 | b^2$ implikuje $a|b$.
10. Udowodnij, że każdy ciąg anihilowany przez $(E-c)^k$ ma postać $a_n = W_{k-1}(n)c^n$, gdzie $W_{k-1}(n)$ oznacza wielomian $(k-1)$-go stopnia nad n, czyli $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i$.
11. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n.
12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$

Widzimy, że n-ty wyraz to $2^n - 1$

$1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ $\quad a_n = \langle 2^n - 1 \rangle \quad b_n = \langle 2^n \rangle \quad c_n = \langle 1 \rangle$

$A(x) = B(x) - C(x) \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = \frac{1}{1-2x} \qquad C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

$$A(x) = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{(1-2x)(1-x)} - \frac{1-2x}{(1-2x)(1-x)} = \frac{x}{(1-2x)(1-x)}$$

$\frac{b^2}{a^3} \in \mathbb{Z}$ Zał.   Ud: $\frac{b}{a} \in \mathbb{Z}$

9. Niech $a, b \in Z$. Pokaż, że $\underbrace{a^3|b^2}_{\text{zał.}}$ implikuje $\underbrace{a|b}_{\text{ud.}}$.

$b^2 = a^3 k$ $e, f \in \mathbb{N}$

$a = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_n^{e_n}$ gdzie p_n to odpowiednie liczby pierwsze.

$b = p_1^{f_1} p_2^{f_2} \ldots p_n^{f_n}$ Wiemy, że $a^3 | b^2$. Oznacza to, że dla każdego n, $2f_n \geq 3e_n$ $f_n \geq \frac{3}{2} e_n$

Czyli każdy wykładnik każdego czynnika b jest $\geq$ do tego w a $\Rightarrow \frac{b}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a|b$ ☐

10. Udowodnij, że każdy ciąg anihilowany przez $(E-c)^k$ ma postać $a_n = W_{k-1}(n)c^n$, gdzie $W_{k-1}(n)$ oznacza wielomian $(k-1)$-go stopnia nad n, czyli $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i$.

11. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n.

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1^2)(n^2 + 1^2) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$

Musi być podzielne przez 2, 3, 5

2, 3 $\to$ mamy trzy liczby oddalone od siebie po 1

Dla 5:

Step 3: Divisibility by 5

Now we check $n^5 - n \pmod 5$ with five cases: $n \equiv 0, 1, 2, 3,$ and $4 \pmod 5$.

1. If $n \equiv 0 \pmod 5$, then $n^5 - n \equiv 0^5 - 0 \equiv 0 \pmod 5$.
2. If $n \equiv 1 \pmod 5$, then $n^5 - n \equiv 1^5 - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5$.
3. If $n \equiv 2 \pmod 5$, then $n^5 - n \equiv 2^5 - 2 \equiv 32 - 2 \equiv 0 \pmod 5$.
4. If $n \equiv 3 \pmod 5$, then $n^5 - n \equiv 3^5 - 3 \equiv 243 - 3 \equiv 0 \pmod 5$.
5. If $n \equiv 4 \pmod 5$, then $n^5 - n \equiv 4^5 - 4 \equiv 1024 - 4 \equiv 0 \pmod 5$.

In each case, $n^5 - n \equiv 0 \pmod 5$, so $n^5 - n$ is divisible by 5.

12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

Różnice o jednakowych cyfrach: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

$11n$, $n \in \mathbb{N}$ 1–9 Jest 11 liczb mod 11.

$14-3=11$ $27-5=22$ Jeśli a i b $\equiv$ mod 11 to $b-a$ jest liczbą o tych samych cyfrach. Mamy same dwucyfrowe liczby - z pidgeonhole principle wiemy, że conajmniej dwie są w tej samej grupie modulo. Zał. bez utraty ogólności $b>a$. Wiemy, że $b \geq a+11 \Rightarrow b-a \geq 11$ więc dostaniemy lb. dwucyfrową $\square$