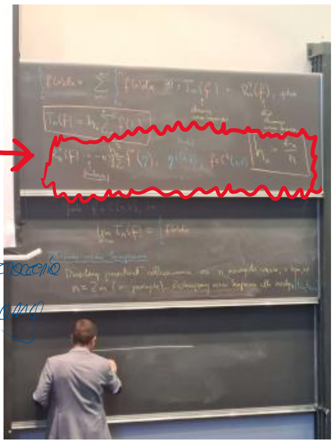
7 (done)

10 January, 2024 17:05

L12.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ O funkcji ciągłej f wiadomo, że $\max_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 2024$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)dx$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym ε, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

Wzór na błąd



Zaczynamy od wyznaczenia n dla którego otrzymamy ≤ błąd

n to będzie ilość „kroków" przejściowych, widać to we wzorze

$$R(f) = -n\frac{h_n^3}{12} f''(\eta)$$

$$|R| < \varepsilon$$

$$\left|-n\frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^3}{12} f''(\eta)\right| < \varepsilon$$

wychodzimy z modułu gubiąc minus n^3 z licznika do mianownika i wymnażamy z n

$$\frac{(b-a)^3}{3\cancel{12}n^2}\cdot \overset{506}{\cancel{2024}} < \varepsilon$$

$$(b-a)^3 \cdot \frac{506}{3} < \varepsilon n^2$$

$$n^2 > (b-a)^3 \cdot \frac{506}{3\varepsilon}$$

$$n > \sqrt{(b-a)^3 \frac{506}{3\varepsilon}}$$

mamy szukane n gwarantujące dobry błąd

teraz algorytm ze złożonym wzorem trapezu dla takiego n

Dane:

a, b, ε, f

n ← wyliczone h ← $\frac{b-a}{n}$ wynik ← 0 f_a ← f(a) f_b ← 0

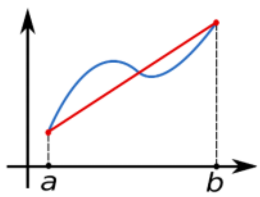
```
for i in range (1, n+1)
    f_b = f(a+h·i)
    wynik += (f_a + f_b)·1/2·h
    f_a = f_b
return wynik
```

algorytm pola n trapezów tak jak tutaj

6.6 Wzór trapezów, złożony wzór trapezów

Wzór trapezów jest jednym ze wzorów do przybliżonego obliczania całek oznaczonych. Dla danej funkcji f na przedziale $x \in [a, b]$ możemy oszacować wartość całki $\int_a^b f(x)dx$ za pomocą kwadratury

$$Q_1(f) := \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$



Rysunek 6: Zasada działania wzoru trapezów