

## Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić  $(n + 2)$ -kąąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą  $n - 1$  nieprzecinających się przekątnych jest równa  $n$ -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających  $n$  wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie  $n$  par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy  $n \times n$  usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na  $n$  prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu  $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$ .
6. Niech  $k$  i  $m$  będą liczbami naturalnymi takimi, że  $k \leq m$ . Udowodnij, że  $\sum_{i=k}^m \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$ .
7. Udowodnij indukcyjnie, że  $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$ .
8. (a) Wykaż, że  $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$   
(b) Podaj podobną zależność dla  $F_{2n+1}$  zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.
9. Niech  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Pokaż, że  $a^3|b^2$  implikuje  $a|b$ .
10. Udowodnij, że każdy ciąg anihilowany przez  $(E - c)^k$  ma postać  $a_n = W_{k-1}(n)c^n$ , gdzie  $W_{k-1}(n)$  oznacza wielomian  $(k - 1)$ -go stopnia nad  $n$ , czyli  $\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i n^i$ .
11. (-) Pokaż, że  $n^5 - n$  jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego  $n$ .
12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.