Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$.

   Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór k-elementowy ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej r?

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

9. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:

   (a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,
   (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,
   (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

10. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n)$.

11. (3p) Przestrzeń R^n to zbiór wszystkich punktów $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ o n rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.