5 (done)

24 November, 2023 23:46

L7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcję $f(x) = \cos(x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[-3,-2]$. Znajdź wartość n, dla której

$$\max_{x\in[-3,-2]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-12}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi $[-3,-2]$?

Wiemy że zachodzi wzór:

$$|f(x)-L_n(x)| \le \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \cdot \max_{x\in(a,b)} |p_{n+1}|$$

Podstawmy informacje z naszego zadania

$x, x_i \in [-3;-2]$

$$|f(x)-L_n(x)| \underset{\max}{\le} \left(\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}\right|\right) \cdot \max_{x\in[-3;-2]} |p_{n+1}(x)|$$

$\max(|(x-x_i)|) = 1$

$p_{n+1} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$

Rozważmy jeszcze jak wyglądać będzie pochodna $f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x = \cos(\frac{\pi}{2}+x)$

$f''(x) = (\cos(\frac{\pi}{2}+x))' = -\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(2\cdot\frac{\pi}{2}+x)$

$f'''(x) = -\sin(2\cdot\frac{\pi}{2}+x) = \cos(3\cdot\frac{\pi}{2}+x)$

$f''''(x) = -\sin(3\cdot\frac{\pi}{2}+x) = \cos(4\cdot\frac{\pi}{2}+x)$

w uogólnieniu

$f^{(n+1)}(x) = \cos((n+1)\cdot\frac{\pi}{2}+x)$

Maximum cosinusa to 1

$$\max_{x\in[-3,-2]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-12}.$$

$\frac{1}{(n+1)!} \le 10^{-12}$

$(n+1)! \geq 10^{12}$

$n = 14$

Teraz jeszcze węzły Czebyszewa $[a,b] = [-3,-2]$

Z zad. 4

$(a-b)^{n+1}$

Z zad. 4

$$M \leq \frac{(a-b)^{n+1}}{2^{2n+1}}$$

$$\alpha \leq \left| \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \right|$$

$$\frac{1}{(n+1)! \cdot 2^{2n+1}} \leq 10^{-12}$$

$$(n+1)! \cdot 2^{2n+1} \geq 10^{12}$$

$n=8: \sim 4{,}75 \cdot 10^{10}$ X

$n=9: \sim 1{,}9 \cdot 10^{12}$ V