L8

24 November, 2023 23:49

L8. zad.	1	+2	-3	+4	5	-6	7	8	9	suma
pkt.			0,5	1	1			1		
maxpkt.	1	1	0,5	1	1	0,5	1	1	1	7(8)

1. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

   (a) na dowolne składniki,

   (b) na różne składniki nieparzyste,

   (c) na składniki mniejsze od m,

   (d) na różne potęgi liczby 2.

2. (+) Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1+3$ i $2+2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.

3. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.

4. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.

5. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

   (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,

   (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,

   (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,

   (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),

   (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

6. (-) Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje też ścieżka z u do v.

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i G (G jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $G = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.

1

24 November, 2023 23:49

1. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
   (a) na dowolne składniki,
   (b) na różne składniki nieparzyste,
   (c) na składniki mniejsze od m,
   (d) na różne potęgi liczby 2.

+2

24 November, 2023 23:49

2. (+) Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1+3$ i $2+2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.

-3 (done)

24 November, 2023 23:49

3. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.

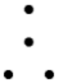
Label the vertices $1, 2, 3, 4$.

There are 11 non-Isomorphic graphs.

1. With 0 edges only 1 graph
2. with 1 edges only 1 graph: e.g $(1, 2)$ from 1 to 2
3. With 2 edges 2 graphs: e.g $(1, 2)$ and $(2, 3)$ or $(1, 2)$ and $(3, 4)$
4. With 3 edges 3 graphs: e.g $(1, 2)$, $(2, 4)$ and $(2, 3)$ or $(1, 2)$, $(2, 3)$ and $(1, 3)$ or $(1, 2)$, $(2, 3)$ and $(3, 4)$
5. with 4 edges 2 graphs: e.g $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ and $(1, 4)$ or $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$ and $(2, 4)$
6. With 5 edges only 1 graph: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 4)$ and $(1, 3)$
7. With 6 edges only 1 graph: $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 4)$, $(1, 3)$ and $(2, 4)$

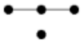
All those non-isomorphic graphs are $1 + 1 + 2 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$

$4K_1 = \overline{K_4}$



co-diamond

co-paw



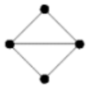
$2K_2 = \overline{C_4}$

claw = $K_{1,3}$

P_4

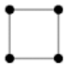
$K_4 = W_3$

diamond = K_4 - e = 2-fan



paw = 3-pan

$C_4 = K_{2,2}$



co-claw

Self complementary

+4 (done)

24 November, 2023 23:49

4. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie $O(m + n)$, czy te grafy są identyczne.

Definicja!

Graph isomorphism

21 languages

Article Talk Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

In graph theory, an **isomorphism of graphs** G and H is a bijection between the vertex sets of G and H

$$f\colon V(G) \to V(H)$$

such that any two vertices u and v of G are adjacent in G if and only if $f(u)$ and $f(v)$ are adjacent in H. This kind of bijection is commonly described as "edge-preserving bijection", in accordance with the general notion of isomorphism being a structure-preserving bijection. If an isomorphism exists between two graphs, then the graphs are called **isomorphic** and denoted as $G \simeq H$. In the case when the bijection is a mapping of a graph onto itself, i.e., when G and H are one and the same graph, the bijection is called an automorphism of G. If a graph is finite, we can prove it to be bijective by showing it is one-one/onto; no need to show both. Graph isomorphism is an equivalence relation on graphs and as such it partitions the class of all graphs into equivalence classes. A set of graphs isomorphic to each other is called an **isomorphism class** of graphs. The question of whether graph isomorphism can be determined in polynomial time is a major unsolved problem in computer science, known as the Graph Isomorphism problem.[1][2]

The two graphs shown below are isomorphic, despite their different looking drawings

An isomorphism between G and H
$f(a) = 1$
$f(b) = 6$
$f(c) = 8$
$f(d) = 3$
$f(g) = 5$
$f(h) = 2$
$f(i) = 4$
$f(j) = 7$

```
const czyRowne = (G, H) => {
    if (G.length !== H.length) return false; // Sprawdzamy czy warunek na pewno jest spełniony
    const n = G.length; // Liczba wierzchołków

    for(let i=0; i<n; ++i) {
        let visited = new Array(n).fill(false); // Tablica odwiedzonych wierzchołków
        let difference = 0; // Różnica wierzchołków
        for(vertex in G[i]) {
            visited[vertex] = true; // Oznaczamy wierzchołek jako odwiedzony
            ++difference; // Zwiększamy różnicę wierzchołków
        }
        for(vertex in H[i]) {
            if(visited[vertex]) --difference; // Jeśli wierzchołek jest odwiedzony to zmniejszamy różnicę
            else return false; // W przeciwnym wypadku zwracamy false
        }
        if(difference !== 0) return false; // Jeśli różnica wierzchołków jest różna od 0 to zwracamy false
    }
    return true; // Zwracamy true jeśli wszystkie warunki są spełnione
}
```

5. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:

(a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
(b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,
(c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,
(d) usuń z grafu G krawędź (u, v),
(e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

Macierzowa: tablica $n \times n$
Listowa: tablica z pointerami na listy (z wierzchołkami)

a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
Macierzowa: $O(n)$ - przeglądamy wiersz dla danego wierzchołka
Listowa $O(deg(q))$ - -,,-, ale wiersz zawiera tylko sąsiadów, lista długości $deg(q)$

b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,
M: $O(n^2)$ - cała tabela
L: O(lista wierzchołków + lista krawędzi) - sprawdzamy wszystkie wierzchołki

c,d,e)
(c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G
(d) usuń z grafu G krawędź (u, v),
(e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

Dla macierzowej: $O(1)$ bo mamy opcję $T[i][j]$

Dla listowej: c,d) $O(deg(q))$ e) $O(deg(q) + deg(q'))$

bo długość listy

bo dodajemy do dwóch list

-6

24 November, 2023 23:49

6. (-) Pokaż, że jeśli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

7

24 November, 2023 23:49

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny $\{G_v : v \in V\}$ są spójne, gdzie G_v jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

(wspólny wierzchołek będzie pośrodku)

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

Nie wprost:

$P_1 = \langle a_0, a_1, \ldots, a_k \rangle$ $P_2 = \langle b_0, b_1, \ldots, b_k \rangle$

gdzie P_1, P_2 to najdłuższe ścieżki w grafie (o długości k)

$a_0, a_1, \ldots$ i $b_0, b_1, \ldots$ to wierzchołki połączone krawędziami. Nie mają wspólnego wierzchołka.

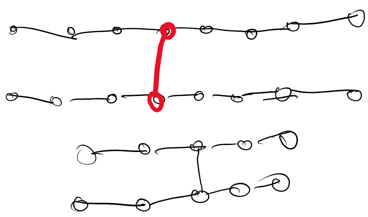
Graf spójny $\Rightarrow$ Istnieje ścieżka P' łącząca a_i i b_j (dowolne wierzchołki) $i, j \in \langle 0, k \rangle$

taka że nie ma innych wierzchołków wspólnych z P_1 i P_2 innych niż a_i i b_j.

$P' = \langle a_i, \underbrace{x_0, x_1, \ldots,}_{} b_j \rangle$ troszkę niedokładny zapis, może nie być x-sów żadnych

Bez straty ogólności: $i, j \geq \lceil \frac{k}{2} \rceil$ (bo w razie czego można odwrócić oznaczenia)

Możemy stworzyć nową ścieżkę:



$$P = \langle \underbrace{a_0, a_1, \ldots, a_i,}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \text{ krawędzi}} \underbrace{x_0, x_1, \ldots, x_n,}_{\text{może być 0, ale wciąż min. 1 krawędź } a_i - b_j} \underbrace{b_j, \ldots, b_0}_{\lceil \frac{k}{2} \rceil \text{ krawędzi}} \rangle$$

W najgorszym przypadku mamy tyle krawędzi:

$$\lceil \tfrac{k}{2} \rceil + 1 + \lceil \tfrac{k}{2} \rceil \geq k+1 > k$$

sprzeczność

9

24 November, 2023 23:49

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów $G = (V, E)$ i G (G jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie $G = (V, E')$ grafu G zdefiniowane jest jako graf (V, E') taki, że $\{u, v\} \in E' \Leftrightarrow \{u, v\} \notin E$.