5 (done)

7 January, 2024 14:19

L11.5. [1 punkt] Dwoma podanymi na wykładzie sposobami zbuduj wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne na zbiorze $D_4 := \{-9, -6, 0, 6, 9\}$.

Wzory

$$\sum_{k=0}^{N} x_k P_{k-1}(x_k) \cdot P_{k-1}(x_k)$$

$$c_k = \frac{(xP_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-1}, P_{k-1})_N} \quad \text{dla } (1 \le k \le m)$$

$$d_k = \frac{(P_{k-1}, P_{k-1})_N}{(P_{k-2}, P_{k-2})_N} \quad \text{dla } (2 \le k \le m)$$

I sposób: ciąg wielomianów ortogonalnych P_n

$x_0 = -9 \quad x_1 = -6 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 6 \quad x_4 = 9$

$$P_0^{(x)} = 1$$

$$P_1^{(x)} = x - c_1$$

$$P_k(x) = (x - c_k) P_{k-1} - d_k (P_{k-2}) \quad (k = 2, 3, \ldots, m)$$

$$c_1 = \frac{(xP_0, P_0)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{(-9 \cdot 1) + (-6 \cdot 1) + (0 \cdot 1) + (6 \cdot 1) + (9 \cdot 1)}{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{0}{5} = 0 \Rightarrow P_1 = x$$

$$c_2 = \frac{(xP_1, P_1)_4}{(P_1, P_1)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k \cdot x_k}{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k} = \text{podobnie jak wyżej} = \frac{0}{\neq 0} = 0$$

$$d_2 = \frac{(P_1, P_1)_4}{(P_0, P_0)_4} = \frac{\sum_{k=0}^{4} x_k \cdot x_k}{\sum_{k=0}^{4} 1 \cdot 1} = \frac{81 \cdot 2 + 64 \cdot 2}{5} = \frac{290}{5} = 58$$

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = (x - c_2) P_1 - d_2 P_0 = x^2 - 58$$

Odp.

II sposób: ortogonalizacja Grama-Schmidta

Weźmy liniowo niezależne funkcje $f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = x \quad f_2(x) = x^2$, wielomiany P_0, P_1, P_2 obliczymy w następujący sposób

$$\begin{cases} P_0(x) = f_0(x) \\ P_k(x) = f_k(x) - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(f_k, P_j)_N}{(P_j, P_j)_N} \cdot P_j \end{cases}$$

$$p_k(x) = f_k(x) - \sum_{j=0} \frac{\langle f_k, p_j\rangle_N}{\langle p_j, p_j\rangle_N} \cdot p_j$$

Obliczmy więc te funkcje:

$$p_0(x) = f_0(x) = 1$$

$$p_1(x) = f_1(x) - \frac{\langle f_1, p_0\rangle_4}{\langle p_0, p_0\rangle_4} \cdot p_0 = x - \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} \cdot 1 = x - \frac{-9-6+0+6+9}{1+1+1+1+1} \cdot 1 = x - 0 = x$$

$$p_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2, p_0\rangle_4}{\langle p_0, p_0\rangle_4} p_0 - \frac{\langle f_2, p_1\rangle_4}{\langle p_1, p_1\rangle_4} p_1 = x^2 - \frac{81+64+0+64+81}{5} - \frac{-729-216+0+216+729}{5} x = x^2 - 58$$

$$\boxed{\begin{aligned} p_0 &= 1 \\ p_1 &= x \\ p_2 &= x^2 - 58 \end{aligned}}$$

Odp.