

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 4

25 października 2023 r.

Zajęcia 31 października 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L4.1. 1 punkt Niech $[a_0, b_0], [a_1, b_1], \dots$ będzie ciągiem przedziałów zbudowanym za pomocą metody bisekcji zastosowanej do lokalizacji zer funkcji f ciągłej w przedziale $[a_0, b_0]$, niech ponadto $m_{n+1} := \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$ oraz $e_n := \alpha - m_{n+1}$.

(a) Wykaż, że $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ($n = 0, 1, \dots$).

(b) Ile wynosi długość przedziału $[a_n, b_n]$ ($n = 0, 1, \dots$)?

(c) Wykaż, że

$$(1) \quad |e_n| \leq 2^{-n-1}(b_0 - a_0) \quad (n \geq 0).$$

(d) Czy może zdarzyć się, że $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_N$, gdzie N jest dowolną ustaloną liczbą naturalną? Jeśli tak, to podaj odpowiedni przykład.

L4.2. 1 punkt Ile kroków według metody bisekcji należy wykonać, żeby wyznaczyć zero α z błędem bezwzględnym mniejszym niż zadana liczba $\varepsilon > 0$?

L4.3. Włącz komputer! 1 punkt Wykonaj 5 pierwszych kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x - 0.49$ i wartości początkowych $a_0 = 0$, $b_0 = 1$. Porównaj wartości błędów $|e_n|$ ($1 \leq n \leq 5$) z ich oszacowaniami (1) (oznaczenia – jak w zadaniu **L4.1**). Skomentuj wyniki.

L4.4. Włącz komputer! 1 punkt Stosując metodę bisekcji, wyznaczyć wszystkie zera funkcji $f(x) = x^4 - \ln(x + 4)$ z błędem bezwzględnym nie większym niż 10^{-8} . *Wskazówka:* Naskicować wykresy funkcji $g(x) = x^4$ i $h(x) = \ln(x + 4)$.

L4.5. Włącz komputer! 2 punkty Przybliżenie odwrotności liczby $R > 0$ można obliczać bez wykonywania dzielenia za pomocą wzoru

$$x_{n+1} := x_n(2 - x_n R) \quad (n = 0, 1, \dots)$$

dla odpowiednio dobranej wartości x_0 .

(a) Sprawdź, że powyższy wzór można zinterpretować jako wykonanie kroku metody Newtona dla pewnej funkcji $f(x)$.

(b) Udowodnij, że jeśli $x_n \in (0, R^{-1})$, to $x_{n+1} \in (x_n, R^{-1})$.

- (c) Udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in (0, R^{-1})$ zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{R}$. Dla jakiego doboru punktów początkowych powyższa metoda jest zbieżna?
- (d) Sprawdź eksperymentalnie (dla różnych wartości R oraz x_0), ile średnio iteracji trzeba wykonać, aby uzyskać dokładność bliską maszynowej.
- L4.6.** Włącz komputer! 1 punkt Stosując metodę Newtona, zaproponuj algorytm numerycznego obliczania $\frac{1}{\sqrt{a}}$ ($a > 0$) jedynie za pomocą operacji $+$, $-$ i \cdot , czyli bez wykonywania dzielenia. Opracowaną metodę **sprawdź eksperymentalnie**, w tym zbadaj m.in. jak warto dobrać x_0 oraz ile średnio iteracji wystarczy do osiągnięcia satysfakcjonujących wyników.
- L4.7.** Włącz komputer! 1 punkt Niech będzie $(*) a = m 2^c$, gdzie c jest liczbą całkowitą, a m – ułamkiem z przedziału $[\frac{1}{2}, 1)$. **Biorąc pod uwagę postać $(*)$** , zaproponuj efektywną metodę obliczania \sqrt{a} , otrzymaną przez zastosowanie metody Newtona do wyznaczania zera pewnej funkcji f . **Ustal eksperymentalnie** dla jakich wartości x_0 metoda jest zbieżna.
- L4.8.** 2 punkty Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$. Załóżmy, że $f'(x) > 0$ i $f''(x) > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$. Ponadto, niech α będzie pierwiastkiem równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jest to jedyny pierwiastek, a metoda Newtona daje ciąg do niego zbieżny dla dowolnego przybliżenia początkowego x_0 .
- L4.9.** Włącz komputer! 1 punkt r -krotne zero α funkcji $f(x)$ jest pojedynczym zerem funkcji $g(x) := \sqrt[r]{f(x)}$. Jaką postać ma wzór opisujący metodę Newtona zastosowaną do funkcji $g(x)$? **Wykonując odpowiednie testy numeryczne**, sprawdź otrzymaną w ten sposób metodę. Czy jest ona warta polecenia?

(–) Paweł Woźny