

Zadanie 5

9 October, 2023 20:27

L1.5. **Włącz komputer!** 2 punkt Sprawdź, że całki

$$I_n := \int_0^1 \frac{x^n}{x+2023} dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$(1) \quad I_n = \frac{1}{n} - 2023 I_{n-1} \quad \left(n = 1, 2, \dots; I_0 = \ln \frac{2024}{2023} \right).$$

Następnie wykorzystaj związek (1) do wyznaczenia wartości całek I_1, I_2, \dots, I_{20} (w takiej właśnie kolejności) wykonując obliczenia w arytmetyce pojedynczej lub podwójnej precyzji używając pętli **for**. Rozważ osobno podciągi I_1, I_3, \dots, I_{19} oraz I_2, I_4, \dots, I_{20} . Czy w obu przypadkach wyniki są wiarygodne? **Odpowiedź uzasadnij.**

$$I_n = \frac{1}{n} - 2023 I_{n-1}$$

$$I_n + 2023 I_{n-1} = \frac{1}{n}$$

$$I = I_n + 2023 I_{n-1} = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2023} dx + \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x+2023} \cdot 2023 dx =$$

$$\int_0^1 \frac{x^n + 2023 x^{n-1}}{x+2023} dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+2023)}{x+2023} dx = \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n} dx$$

$$\frac{x^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1^n}{n} - \frac{0^n}{n} = \frac{1}{n} = I \quad \text{c.n.v.}$$

Wyniki dla ciągów nie są wiarygodne - do $n=3$ jest ok,
potem zaczyna odpytywać