# Lista nr 7 z matematyki dyskretnej

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $a_n$. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

   *Wskazówka:* Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n^2$

   (b) $a_n = n^3$

   *Wskazówka:* Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$ .

   *Wskazówka:* Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

   (a) $a_n = n$ dla parzystych $n$ i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych $n$

   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ $(H_0 = 0)$.

5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $a_n$. Znajdź funkcję tworzącą ciągu $b_n$ postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego $k$, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.

   *Wskazówka:* Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu $a_n$. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.

7. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej $n$ (czyli rozkładów liczby $n$ na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):

   (a) na dowolne składniki,

   (b) na różne składniki nieparzyste,

(c) na składniki mniejsze od $m$,

(d) na różne potęgi liczby 2.

8. (+) Niech $p_n$ oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej $n$, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1 + 3$ i $2 + 2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu $p_n$.

9. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

10. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:

    (a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

    (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,

    (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

11. Niech $f$ i $g$ będą dowolnymi wielomianami o stopniach $k$ i $l$ takimi, że $k < l$.

    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n)$.

    Hiperpłaszczyzna w $R^n$ zadana jest wzorem $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno $a_i$ jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić $n$-wymiarową przestrzeń $R^n$ za pomocą $m$ hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.