10 (done)

25 October, 2023 16:47

L5.10. $\boxed{\textbf{Włącz komputer!}}$ $\boxed{\text{1 punkt}}$ Wiadomo, że liczba G jest granicą dwóch ciągów: $\{r_n\}$ i $\{a_n\}$. To znaczy,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = G, \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = G.$$

Do tej pory wartość G znana była z dokładnością 10 cyfr dziesiętnych. Na tej podstawie obliczono:

$$|r_0 - G| \approx 0.763907023,$$
$$|r_1 - G| \approx 0.543852762,$$
$$|r_2 - G| \approx 0.196247370,$$
$$|r_3 - G| \approx 0.009220859$$

oraz

$$|a_0 - G| \approx 0.605426053,$$
$$|a_1 - G| \approx 0.055322784,$$
$$|a_2 - G| \approx 0.004819076,$$
$$|a_3 - G| \approx 0.000399783.$$

Obecnie, konieczne okazało się wyznaczenie stałej G z dokładnością 100 cyfr. Na obliczenie jednego wyrazu ciągu $\{r_n\}$ lub $\{a_n\}$ z taką precyzją potrzeba około tygodnia. Rosjanie próbują przybliżyć stałą G używając ciągu $\{r_n\}$, a Amerykanie – ciągu $\{a_n\}$. Kto szybciej wyznaczy stałą G z żądaną dokładnością i ile będzie to trwało?

$$\varepsilon_{n+1} = K\cdot\varepsilon_n^p = K(K\cdot\varepsilon_{n-p}^p)^p$$

Z zad. 8 mamy:

$$p = \frac{\log\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|}{\log\left|\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}\right|}$$

p dla $r_n \approx 3$

p dla $a_n \approx 1{,}02$

$$c \approx \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

$$\varepsilon_{n+1} \approx \overbrace{1{,}22}^{c\ r_n}\cdot\varepsilon_n^3 < 10^{-100} \text{ dla } n \approx 7$$

$$\varepsilon_{n+1} \approx \overbrace{0{,}092}^{c\ a_n}\cdot\varepsilon_n^{1{,}02} < 10^{-100} \text{ dla } n \approx 55$$

```
aliza Nume
• Dla an
  n =  55
  Dla rn
  n =  7
```