https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=561

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 7

22 listopada 2023 r.

Zajęcia 28 listopada 2023 r.
Zaliczenie listy **od 6 pkt.**

L7.1. 1 punkt Niech dane będa parami różne liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j\neq k}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \qquad (k = 0, 1, ..., n)$$

zachodzi

a) $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(x) \equiv 1,$ **b)** $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(2023) \prod_{i=0}^{j-1}(x_k - f(i)) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n),$

gdzie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek $f(0) = 2023$.

L7.2. 1 punkt Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

a)

x_k	-3	0	3	4
y_k	2	2	38	142

,

b)

x_k	3	4	-3	-1	0
y_k	38	142	2	62	2

,

c)

x_k	-4	-3	-2	2	3	4
y_k	9	7	5	-3	-5	1977

.

Uwaga. Na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty **b)** oraz **c)** nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n) \qquad (n = 4, 5, \ldots, 20)$$

dla x_k $(0 \le k \le n)$ będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla *węzłów Czebyszewa*. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakie i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.4. 1 punkt Niech $t_{nk}^{[a,b]}$ $(0 \le k \le n;\ n \in \mathbb{N})$ oznacza węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ $(a < b)$. Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$\max_{x\in[a,b]} \left|\left(x - t_{n0}^{[a,b]}\right)\left(x - t_{n1}^{[a,b]}\right) \cdot \ldots \cdot \left(x - t_{nn}^{[a,b]}\right)\right|?$$

Odpowiedź uzasadnij.

L7.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Funkcję $f(x) = \cos(x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[-3, -2]$. Znajdź wartość n, dla której

$$\max_{x\in[-3,-2]} |f(x) - L_n(x)| \le 10^{-12}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi $[-3, -2]$?

L7.6. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Jak wiadomo, język programowania `PWO++` ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich jest m.in. procedura `DD_Table(x,f)` znajdująca z dokładnością bliską maszynowej **ilorazy różnicowe** $f[x_0],\ f[x_0, x_1],\ \ldots,\ f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$, gdzie `x`$:= [x_0, x_1, \ldots, x_n]$ jest wektorem parami różnych liczb rzeczywistych, a `f` – daną funkcją. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n **musi być mniejsze** niż 21. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `DD_Table` **tylko raz**, można **szybko** wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[z_0],\ f[z_0, z_1],\ \ldots,\ f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}],\ f[z_0, z_1, \ldots, z_{20}, z_{21}]$, gdzie $z_i \ne z_j$ dla $i \ne j$, $0 \le i, j \le 21$.

Uwagi. Rozwiązania, w których **dwukrotnie** używa się procedury `DD_Table` lub wykorzystuje się **jawny wzór** na iloraz różnicowy **nie wchodzą w grę**.

L7.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0,\ x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\le n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$M(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0,\ x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

L7.8. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech p_n będzie wielomianem stopnia $n > 1$ interpolującym daną funkcję f w węzłach $t_{nj} := \cos\dfrac{\pi j}{n}$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$. Udowodnij, że

$$p_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}'' b_k^n \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k jest k-tym wielomianem Czebyszewa, a

$$b_k^n := \frac{2}{n} {\sum_{j=0}^{n}}'' f(t_{nj})\, T_k(t_{nj}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Jak użyć algorytmu Clenshawa do obliczenia współczynników b_k^n $(k = 0, 1, \ldots, n)$? Ile to kosztuje?

Uwaga. Jeśli potrafisz podać i uzasadnić algorytm wyznaczania współczynników b_k^n $(0 \le k \le n)$ w czasie $O(n \log n)$, to przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu LaTeX i dostarcz je prowadzącemu — być może dostaniesz dodatkowe punkty.

(–) Paweł Woźny