L3 zad.	+1	2	3	4	5	6	+7	8	9	-10	11	12	suma
pkt.		1				1	1					1	
maxpkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	11,5

L3

21 October, 2023 11:49

1. (+) ***Nieporządkiem*** nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \dots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

    Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

+1

21 October, 2023 12:03

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2 (done)

21 October, 2023 12:03

2. Wśród liczb naturalnych 1, 2, ..., 800, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ jest $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ liczb podzielnych przez a.

Oznaczmy zbiór podzielnych przez 6 jako A, przez 8 jako B, przez 7 jako C. Wyznaczmy teraz wzór:

$$|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| - |(A \cup B) \cap C| =$$

$$|A \cup B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cup B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

to będzie nasza odp.

$$|A \cup B| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{nww(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 133 + 100 - 33 = 200$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 19$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{56} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 14$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor = 4$$

Po podstawieniu we wzór ost. wynik to $200 + 4 - 14 - 19 = 171$

3

21 October, 2023 12:03

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4

21 October, 2023 12:03

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5

21 October, 2023 12:03

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6 (done)

21 October, 2023 12:03

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy , S lub alabastrowy A. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

Rozważmy siatkę na tej płaszczyźnie zawierającą trzy wiersze. Z zasady szufladkowej Dirchleta wiemy wtedy, że w każdej kolumnie powtarza się conajmniej jeden kolor. Korzystamy z zasady szufladkowej Dirchleta.

Weźmy siatkę 9×3 na płaszczyźnie i mamy opcje

A	A	A	S	A	S	S	S
A	A	S	A	S	A	S	S
A	S	A	A	S	S	A	S

mamy 8 opcji, w każdej jeden z kolorów występuje min. 2 razy w każdej z nich. Zawsze możemy zestawić odp. kolory

+7 (done)

21 October, 2023 12:03

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

X X X X X X

Prosty sposób że albo będzie 1 albo dwie parzyste odpowie

Ładny dowód:

Każdą z liczb $n \in N$ zapisać jako $n = 2^a b_n$, gdzie b jest największym nieparzystym dzielnikiem. Istnieje n nieparzystych liczb mniejszych niż 2n. Jako że bierzemy n+1 liczb, przynajmniej dwie będą miały ten sam współczynnik b.

$a, b, c \in N^+$

$c \geqslant a$ wtedy $\frac{2^c b}{2^a b} = 2^{c-a}$; $c - a \geqslant 0$

a więc 2^{c-a} jest lb. N, a więc te dwie liczby są podzielne c.n.d.

8

21 October, 2023 12:03

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

9

21 October, 2023 12:03

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

-10

21 October, 2023 12:03

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

11

21 October, 2023 12:03

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

    Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12 (done)

21 October, 2023 12:03

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

Do obliczeń skorzystamy z zależności

$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$

* nie musimy tak ale zwykle będzie najszybciej jak przy szybkim potęgowaniu

Rozpiszmy 74^{74} rozbijając wykładnik potęgi na kolejne potęgi dwójki

$74 = 64 + 8 + 2$

$74^{74} = 74^{64+8+2}$

$74^1 \equiv 74 \bmod 100$

$74^2 \equiv 76 \bmod 100$

$74^4 \equiv 74^2 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv 5776 \bmod 100 = 76 \bmod 100$

$74^8 \equiv 74^4 \bmod 100 \cdot 74^4 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100$

zauważmy też, że nam się to „zapętliło" więc

$74^2 \equiv 74^4 \equiv 74^8 \equiv 74^{16} \equiv 74^{32} \equiv 74^{64} \pmod{100} \equiv 76 \bmod 100$

Mając te wszystkie liczby, możemy zapisać

$74^{74} \bmod 100 \equiv 74^{64+8+2} \bmod 100 \equiv$

$74^{64} \cdot 74^8 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$(((76 \bmod 100) \cdot (76 \bmod 100)) \bmod 100) \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$5776 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 5776 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv$

$\underline{76} \bmod 100$

A więc dwoma ostatnimi cyframi będzie 76.

(można obliczyć dowolną ilość biorąc odp. wartość modulo)