

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
stopień wchodzący	1			0,5			1				
stopień wychodzący	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	9,5

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m + n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D , to $i < j$.

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M -powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A , a pozostałe z A do B .

3. (+) Minimalnym cięciem w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozpaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozpaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \dots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konia) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5 , każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

8. Pokaż, że graf dwudzielny k -regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień k , zawiera skojarzenie doskonałe.

Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) Kwadratem łacińskim nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$. Prostokątem łacińskim nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. Turniej to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a .

+1 (done)

16 December, 2023 20:29

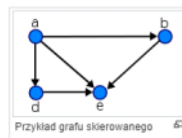
- (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m + n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D , to $i < j$.

Pomysł - usuwamy wierzchołki o stopnia wchodzącego 0 z grafu i dodajemy go do listy wynikowej.

U nas będzie to zależało od wierzchołka startowego

Teoria

Graf skierowany ^[1], **graf zorientowany** ^[2] **dirgraf** ^{od ang.} directed graph, **DG** – rodzaj grafu rozważanego w teorii grafów. Graf skierowany definiuje się jako uporządkowaną parę zbiorów. Pierwszy z nich zawiera wierzchołki grafu, a drugi składa się z krawędzi grafu, czyli uporządkowanych par wierzchołków. Ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez krawędzie. Graf skierowany można sobie wyobrazić jako sieć ulic, z których każda jest jednokierunkowa. Ruch pod prąd jest zakazany. Najczęściej grafy skierowane przedstawia się jako zbiór punktów reprezentujących wierzchołki połączonych strzałkami (stąd nazwa) albo łukami zakończonymi grotem (strzałką, **zwrotem**) ^[3].



Sortowanie topologiczne skierowanego grafu acyklicznego – liniowe uporządkowanie wierzchołków, w którym jeśli istnieje krawędź skierowana prowadząca od wierzchołka x do y , to x znajdzie się przed wierzchołkiem y . Innymi słowy, każdy wierzchołek poprzedza wszystkie te wierzchołki, do których prowadzi wychodzące od niego krawędzie.

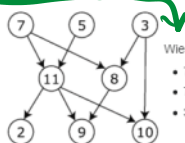
Wierzchołki w każdym grafie acyklicznym skierowanym można posortować topologicznie na jeden lub więcej sposobów.

Zastosowanie [edytuj | edytuj kod]

Sortowanie topologiczne pozwala na ustalenie kolejności wykonywania jakichś operacji (czynności), np. służy do ustalenia poprawnej kolejności instalacji w automatycznym uzupełnianiu zależności **pakietów** w **systemach uniksopodobnych**. Prostszy przykładem może być kolejność czynności potrzebnych do upieczenia **ciasta**.

Poszczególne czynności są reprezentowane jako wierzchołki, a zależności pomiędzy nimi – jako krawędzie. Jeśli krawędź prowadzi od **A** do **B**, to znaczy, że czynność **A** musi zostać wykonana przed czynnością **B**.

Zdarza się, że wykonanie jakiegoś zadania musi być poprzedzone wykonaniem innego (np. zanim oberzemy **ziemniaki**, musimy je kupić), ale również dobrze czynności mogą zostać wykonane równocześnie lub w dowolnej kolejności (np. przed upieczeniem **ciasta** musimy kupić **mąkę** i **jajka**, choć nie ma znaczenia kolejność kupowania składników). Wynika z tego możliwość ustalenia więcej niż jednego topologicznego porządku wierzchołków dla niektórych grafów.



Wierzchołki przedstawionego na rysunku grafu można posortować topologicznie na kilka sposobów, np.

- 7, 5, 3, 11, 8, 2, 10, 9
- 7, 5, 11, 2, 3, 10, 8, 9
- 3, 7, 8, 5, 11, 10, 9, 2

```
/**
 * Sortowanie topologiczne w złożoności czasowej O(V + E)
 * @param {[]} graph - graf w postaci list sąsiedztwa
 * @param {[]} zerolist - lista wierzchołków o stopniu wejściowym równym 0
 * @returns {[]} - posortowana topologicznie kolejność wierzchołków
 * lub null jeśli graf zawiera cykl (ale z założenia zadania nie zawiera)
 */
const topoSort = (graph, zerolist) => {
  const R = []; // Lista wynikowa
  const Q = [...zerolist]; // Kopia kolejki

  // Dopóki kolejka nie jest pusta
  while (Q.length > 0) {
    const v = Q.shift(); // Usuń pierwszy element z kolejki i dodaj do listy wynikowej
    R.push(v);

    // Dla każdego sąsiada wierzchołka v (krawędź v -> u)
    for (const u of graph[v]) {
      // Usuń krawędź v -> u
      graph[v] = graph[v].filter(x => x !== u);

      // Jeśli u po usunięciu krawędzi v -> u nie ma już żadnych krawędzi wchodzących
      if (graph.every(x => !x.includes(u))) {
        Q.push(u); // Dodaj u do kolejki
      }
    }
  }

  if (graph.some(x => x.length > 0)) return null; // Jeśli graf zawiera cykl, zwróć null
  return R;
}
```

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M -powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A , a pozostałe z A do B .

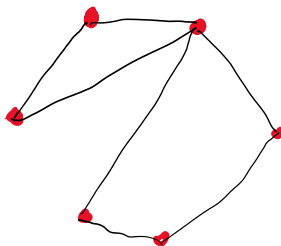
3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

-4 (done)

16 December, 2023 20:29

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

Obokamy kontrprzykładem



Jest ten kontrprzykład, to najprostszy który wymyśliłem

Teoria

Cykl Eulera [\[edytuj\]](#)

[Artykuł](#) [Dyskusja](#)

[Czytaj](#) [Edytuj](#) [Edytuj kod źródłowy](#) [V](#)

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz. Jeżeli w danym grafie możliwe jest utworzenie takiego cyklu, to jest on nazywany **grafem eulerowskim**.

[Osobny artykuł: Graf eulerowski.](#)

Nazwa pochodzi od nazwiska szwajcarskiego matematyka **Leonharda Eulera**, który jako pierwszy zajmował się problematyką związaną z drogami w grafach. Do znajdowania cyklu Eulera w grafie można użyć **algorytmu Fleury'ego**. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by spójny graf nieskierowany był eulerowski jest parzystość stopni wszystkich wierzchołków. Natomiast warunkiem w spójnym grafie skierowanym jest taka sama liczba krawędzi wchodzących i wychodzących dla każdego wierzchołka.

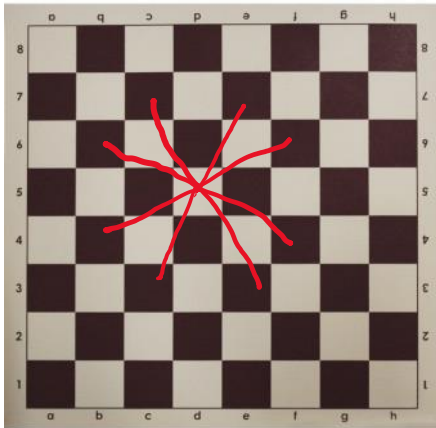
Zobacz też [\[edytuj | edytuj kod \]](#)

- [Łańcuch Eulera](#)
- [Cykl Hamiltona](#)

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

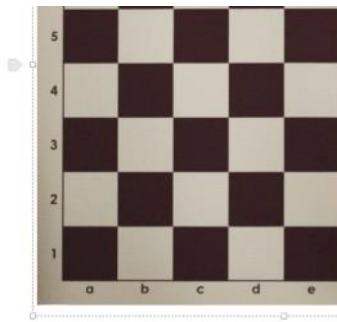
6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \dots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1 ?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5 , każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.



Skoczek porusza się „konik”, dwa pola w jednym kierunku i jedno w drugim.

Warto zauważyć, że skoczek skacze zawsze z białego pola na czarne, a z czarnego na białe.



Szachownica 5×5 ma 25 pól. Jednego koloru będzie 13 pól, drugiego 12 pól. Zaczynamy od dowolnego czarnego pola (dla białych odc. analogicznie)

a) 13 czarnych pól

$C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C$

przejdziemy przez 25 pól i kończymy na czarnym. Musimy jednym ruchem przejść z czarnego pola na białe - niemożliwe

b) 12 czarnych pól

$C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C \rightarrow B$
1 1 2 2 12 12

i tu nam brakuje nawet 13. czarnego pola.

zakładam, że w zadaniu chodzi o cykl Hamiltona (ścieżka zamknięta, każdy wierzchołek tylko raz)

8. Pokaż, że graf dwudzielny k -regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień k , zawiera skojarzenie doskonałe.

Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \dots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a .

Teoria

Tournament (graph theory)

🌐 10 languages

Article Talk

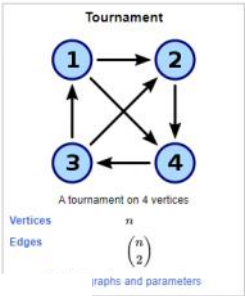
Read Edit View history Tools

From Wikipedia, the free encyclopedia

A **tournament** is a **directed graph** (digraph) obtained by assigning a direction for each edge in an **undirected complete graph**. That is, it is an **orientation** of a complete graph, or equivalently a directed graph in which every pair of distinct **vertices** is connected by a directed edge (often, called an **arc**) with any one of the two possible orientations.

Many of the important properties of tournaments were first investigated by **H. G. Landau** in **Landau (1953)** to model dominance relations in flocks of chickens. Current applications of tournaments include the study of voting theory and **social choice theory** among other things.

The name *tournament* originates from such a graph's interpretation as the outcome of a **round-robin tournament** in which every player encounters every other player exactly once, and in which no draws occur. In the tournament digraph, the vertices correspond to the players. The edge between each pair of players is oriented from the winner to the loser. If player ***a*** beats player ***b***, then it is said that ***a*** *dominates* ***b***. If every player beats the same number of other players (*indegree* = *outdegree*), the tournament is called *regular*.



Cykl Hamiltona [edytuj]

Artykuł Dyskusja

Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy

Cykl Hamiltona to taki cykl w grafie, w którym każdy **wierzchołek grafu** odwiedzany jest dokładnie raz (oprócz pierwszego wierzchołka). Analogicznie, ścieżka Hamiltona to taka ścieżka w której każdy wierzchołek odwiedzony jest dokładnie raz. Nazwa cyklu i ścieżki pochodzi od irlandzkiego matematyka **Hamiltona**.

Znalezienie cyklu Hamiltona o minimalnej sumie wag krawędzi jest równoważne rozwiązaniu **problemu komiwojagera**. Grafy zawierające cykl Hamiltona nazywamy **hamiltonowskimi**^[1].

Zobacz też [edytuj] [edytuj kod]