Lista nr 10 z matematyki dyskretnej

1. Niech t_i oznacza liczbę wierzchołków stopnia i w drzewie. Wyprowadź dokładny wzór na t_1, liczbę liści w dowolnym drzewie. Dlaczego ta liczba nie zależy od t_2?

2. Pokaż, że graf G jest drzewem wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej pary wiezchołków $u, v \in G$ w G istnieje dokładnie jedna ścieżka je łącząca.

3. (2 punkty) Niech $d(u, v)$ oznacza odległość wierzchołków u i v, czyli długość najkrótszej sćieżki łączącej u i v. Dla każdego wierzchołka v grafu G definiujemy $r(v) = \max\{d(v, u) : u \in V(G)\}$. Wierzchołek w, dla którego $r(w) = \min\{r(v) : v \in V(G)\}$ nazywa się *wierzchołkiem centralnym* grafu G, a liczba $r(G) = r(w)$ – *promieniem* grafu G.

   (a) (Jordan) Wykaż, że zbiór wierzchołków centralnych drzewa składa się z jednego wierzchołka albo z pary wierzchołków sąsiednich.

   (b) Podaj algorytm znajdowania wierzchołków centralnych w drzewie, działający w czasie $O(m + n)$.

4. (+) Niech $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ będzie ciągiem liczb naturalnych większych od zera. Wykaż, że d jest ciągiem stopni wierzchołków pewnego drzewa o n wierzchołkach wtedy i tylko wtedy, gdy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. *Uwaga:* w zadaniu tym trzeba pokazać implikację w obie strony.

5. (+) Pokaż, że jeśli każdy wierzcholek w grafie (prostym) $G = (V, E)$ ma stopień przynajmniej k, to G zawiera każde drzewo k-krawędziowe.

6. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

7. Uogólnij problem istnienia cyklu/drogi Eulera na grafy skierowane.

8. Niech G będzie grafem spójnym mającym k wierzchołków o nieparzystym stopniu ($k > 0$). Wykaż, że minimalna liczba dróg takich, że każda krawędź należy do dokładnie jednej drogi wynosi $k/2$.

9. Pokaż, że graf (niekoniecznie prosty), którego każdy wierzchołek ma stopień przynajmniej 2 zawiera drogę zamkniętą.