ANL L2

15 October, 2023 18:38

zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	cał.
roz	1	2	1	1	1	1	1	1	1	10/10

Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 2

11 października 2023 r.

Zajęcia 17 października 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L2.1. 1 punkt Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

L2.2. 2 punkty Udowodnij, że **a)** $|m_t - m_t^*| \le 2^{-t}$, **b)** $|m_t - m_t^*| \le \frac{1}{2} \cdot 2^{-t}$.

L2.3. **Włącz komputer!** 1 punkt Napisz program (np. w języku PWO++ 🙂) znajdujący wartości dziesiętne, **zapisane jako liczby mieszane**, wszystkich liczb zmiennopozycyjnych, które można przedstawić w postaci

$$x = \pm(0.1e_{-2}e_{-3}e_{-4}e_{-5})_2 \cdot 2^{\pm c}, \qquad e_{-2}, e_{-3}, e_{-4}, e_{-5}, c \in \{0, 1\}, \tag{1}$$

gdzie $(\ldots)_2$ oznacza zapis dwójkowy. Jaki jest najmniejszy przedział $[A, B]$, zawierający te liczby? Jak liczby (1) rozkładają się w $[A, B]$? Wykonaj odpowiedni rysunek. Co z niego wynika?

L2.4. 1 punkt Przeczytaj tekst dostępny pod adresem http://www-users.math.umn.edu/~arnold//disasters/patriot.html mówiący o tym, że niefrasobliwe używanie arytmetyki zmiennopozycyjnej może prowadzić do prawdziwej tragedii (szczegóły patrz raport GAO/IMTEC-92-26). Streść, własnymi słowami, opisane tam zdarzenie i przedstaw istotę opisanego problemu.

Jeśli znasz inne, podobne przykłady, to przygotuj krótką, ale ciekawą notatkę na ten temat używając systemu LaTeX i przekaż wykładowcy[1] — być może dostaniesz dodatkowe punkty 🙂

L2.5. 1 punkt Zapoznaj się ze standardem IEEE 754[2] reprezentacji liczb zmiennopozycyjnych. Omów go krótko i podaj główne różnice w stosunku do modelu teoretycznego reprezentacji liczb maszynowych przedstawionego na wykładzie.

L2.6. 1 punkt Załóżmy, że x, y są liczbami maszynowymi. Podaj przykład pokazujący, że przy obliczaniu wartości $d := \sqrt{x^2 + y^2}$ algorytmem postaci

```
u:=x*x;
u:=u+y*y;
d:=sqrt(u)
```

może wystąpić zjawisko nadmiaru, mimo tego, że szukana wielkość d należy do zbioru X_{fl}. Następnie zaproponuj `algorytm` wyznaczania d pozwalający unikać zjawiska nadmiaru, jeśli $\mathrm{rd}\left(\sqrt{2}\max(|x|, |y|)\right) \in X_{\mathrm{fl}}$. Na koniec podaj skuteczną metodę wyznaczania długości euklidesowej wektora $v \in \mathbb{R}^n$.

L2.7. **Włącz komputer!** 1 punkt Niech będzie $f(x) = 4046\dfrac{\sqrt{x^{14}+1}-1}{x^{14}}$. Jak już wiadomo z zadania **L1.2**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb podwójnej precyzji) wartości $f(0.001)$ daje niewiarygodny wynik. Wytłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.8. **Włącz komputer!** 1 punkt Niech dana będzie funkcja $f(x) := 14\dfrac{1-\cos(17x)}{x^2}$. Jak wynika z zadania **L1.3**, obliczanie przy pomocy komputera (tryb pojedynczej lub podwójnej precyzji) wartości $f(10^{-i})$ dla $i = 11, 12, \ldots, 20$ daje niewiarygodne wyniki. Wytłumacz dlaczego tak się dzieje i zaproponuj sposób obliczenia wyników dokładniejszych. **Przeprowadź odpowiednie eksperymenty** numeryczne.

L2.9. **Włącz komputer!** 1 punkt Można wykazać[3], że przy $x_1 = 2$ ciąg

$$x_{k+1} = 2^k\sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - (x_k/2^k)^2}\right)} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

jest zbieżny do π. Czy podczas obliczania kolejnych wyrazów tego ciągu przy pomocy komputera może wystąpić zjawisko utraty cyfr znaczących? Jeśli tak, to zaproponuj inny sposób wyznaczania wyrazów ciągu (2) pozwalający uniknąć wspomnianego zjawiska. Przeprowadź odpowiednie **testy obliczeniowe**.

(-) Paweł Woźny