L11

16 December, 2023 20:22

zad	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	suma
pkt	1			0,5			1				
max pkt.	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	9,5

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i<j$.

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G=(A\cup B,E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1,2,\ldots,n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

8. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

   Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n\times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ tak, że w każdej kolumnie

   oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1,2,\ldots,n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1\le m\le n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1,2,\ldots,n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1,2,\ldots,n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

   Czy każdy prostokąt łaciński o $m<n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a,b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.

+1 (done)

16 December, 2023 20:29

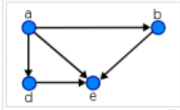
1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

Pomysł - usuwamy wierzchołki o stopniu wchodzącym 0 z grafu i dodajemy go do listy wynikowej.

U nas będzie to zależało od wierzchołka startowego

Teoria

Graf skierowany, **sgraf**[1], **graf zorientowany**[2] **digraf**, od ang. *directed graph*, **DG** – rodzaj grafu rozważanego w teorii grafów. Graf skierowany definiuje się jako uporządkowaną parę zbiorów. Pierwszy z nich zawiera wierzchołki grafu, a drugi składa się z krawędzi grafu, czyli uporządkowanych par wierzchołków. Ruch po grafie możliwy jest tylko w kierunkach wskazywanych przez krawędzie. Graf skierowany można sobie wyobrazić jako sieć ulic, z których każda jest jednokierunkowa. Ruch pod prąd jest zakazany. Najczęściej grafy skierowane przedstawia się jako zbiór punktów reprezentujących wierzchołki połączonych strzałkami (stąd nazwa) albo łukami zakończonymi grotem (strzałką, zwrotem)[3].



Przykład grafu skierowanego

Sortowanie topologiczne skierowanego grafu acyklicznego – liniowe uporządkowanie wierzchołków, w którym jeśli istnieje krawędź skierowana prowadząca od wierzchołka x do y, to x znajdzie się przed wierzchołkiem y. Innymi słowy, każdy wierzchołek poprzedza wszystkie te wierzchołki, do których prowadzą wychodzące od niego krawędzie.

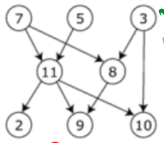
Wierzchołki w każdym grafie acyklicznym skierowanym można posortować topologicznie na jeden lub więcej sposobów.

Zastosowanie [edytuj | edytuj kod]

Sortowanie topologiczne pozwala na ustalenie kolejności wykonywania jakichś operacji (czynności), np. służy do ustalenia poprawnej kolejności instalacji w automatycznym uzupełnianiu zależności pakietów w systemach uniksopodobnych. Prostszym przykładem może być kolejność czynności potrzebnych do upieczenia ciasta.

Poszczególne czynności są reprezentowane jako wierzchołki, a zależności pomiędzy nimi – jako krawędzie. Jeśli krawędź prowadzi od **A** do **B**, to znaczy, że czynność **A** musi zostać wykonana przed czynnością **B**.

Zdarza się, że wykonanie jakiegoś zadania musi być poprzedzone wykonaniem innego (np. zanim obierzemy ziemniaki, musimy je kupić), ale równie dobrze czynności mogą zostać wykonane równocześnie lub w dowolnej kolejności (np. przed upieczeniem ciasta musimy kupić mąkę i jajka, choć nie ma znaczenia kolejność kupowania składników). Wynika z tego możliwość ustalenia więcej niż jednego topologicznego porządku wierzchołków dla niektórych grafów.



Wierzchołki przedstawionego na rysunku grafu można posortować topologicznie na kilka sposobów, np.

- 7,5,3,11,8,2,10,9
- 7,5,11,2,3,10,8,9
- 3,7,8,5,11,10,9,2

```
/**
 * Sortowanie topologiczne w złożoności czasowej O(V + E)
 * @param {[][]} graph - graf w postaci list sąsiedztwa
 * @param {[]} zerolist - lista wierzchołków o stopniu wejściowym równym 0
 * @returns {[]} - posortowana topologicznie kolejność wierzchołków
 * lub null jeśli graf zawiera cykl (ale z założenia zadania nie zawiera)
 */
const topoSort = (graph, zerolist) => {
    const R = []; // Lista wynikowa
    const Q = [...zerolist]; // Kopia kolejki

    // Dopóki kolejka nie jest pusta
    while (Q.length > 0) {
        const v = Q.shift(); // Usuń pierwszy element z kolejki i dodaj do listy wynikowej
        R.push(v);

        // Dla każdego sąsiada wierzchołka v (krawędź v -> u)
        for (const u of graph[v]) {
            // Usuń krawędź v -> u
            graph[v] = graph[v].filter(x => x !== u);

            // Jeśli u po usunięciu krawędzi v -> u nie ma już żadnych krawędzi wchodzących
            if (graph.every(x => !x.includes(u))) {
                Q.push(u); // Dodaj u do kolejki
            }
        }
    }

    if(graph.some(x => x.length > 0)) return null; // Jeśli graf zawiera cykl, zwróć null
    return R;
}
```

2

16 December, 2023 20:29

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

+3

16 December, 2023 20:29

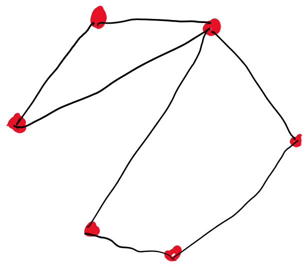
3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

-4 (done)

16 December, 2023 20:29

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

Obalamy kontrprzykładem



Jest tona kontrprzykładów, to najprostszy który wymyśliłem

Cykl Eulera [edytuj]

Artykuł Dyskusja Czytaj Edytuj Edytuj kod źródłowy

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą jego krawędź dokładnie raz. Jeżeli w danym grafie możliwe jest utworzenie takiego cyklu, to jest on nazywany grafem eulerowskim.

Osobny artykuł: Graf eulerowski.

Nazwa pochodzi od nazwiska szwajcarskiego matematyka Leonharda Eulera, który jako pierwszy zajmował się problematyką związaną z drogami w grafach. Do znajdowania cyklu Eulera w grafie można użyć algorytmu Fleury'ego. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to by spójny graf nieskierowany był eulerowski jest parzystość stopni wszystkich wierzchołków. Natomiast warunkiem w spójnym grafie skierowanym jest taka sama liczba krawędzi wchodzących i wychodzących dla każdego wierzchołka.

Zobacz też [edytuj | edytuj kod]

- Łańcuch Eulera
- Cykl Hamiltona

5

16 December, 2023 20:29

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6

16 December, 2023 20:29

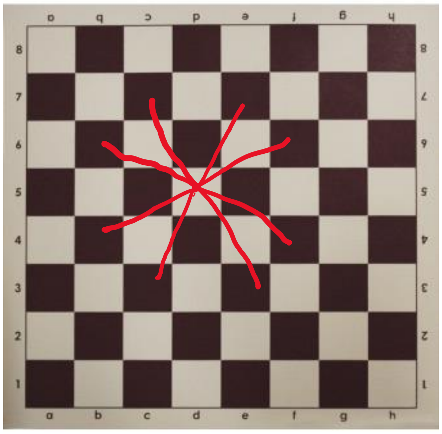
6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7 (done)

16 December, 2023 20:29

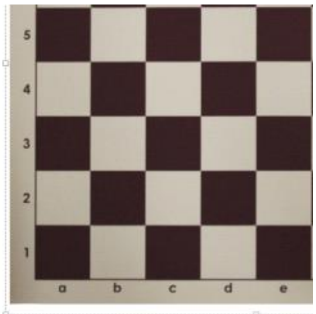
7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5 × 5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

zakładam, że w zadaniu chodzi o cykl Hamiltona (ścieżka zamknięta, każdy wierzchołek tylko raz)



Skoczek porusza się „L-kami”, dwa pola w jednym kierunku i jedno w drugim.

Warto zauważyć, że skoczek skacze zawsze z białego pola na czarne, a z czarnego na białe.



Szachownica 5x5 ma 25 pól. Jednego koloru będzie 13 pól, drugiego 12 pól. Zaczynamy od dowolnego czarnego pola (dla białych ofc. analogicznie)

a) 13 czarnych pól

C → B → C → B → ... → C

przechodzimy przez 25 pól i kończymy na czarnym. Musimy jednym ruchem przejść z czarnego pola na czarne - niemożliwe

a) 12 czarnych pól

$$\underset{1}{C} \to \underset{1}{B} \to \underset{2}{C} \to \underset{2}{B} \to \dots \to \underset{12}{C} \to \underset{12}{B}$$

i tu nam brakuje nawet 13. czarnego pola.

8

16 December, 2023 20:29

8. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołkek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

   Wskazówka: Warunek Halla.

+9

16 December, 2023 20:29

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10

16 December, 2023 20:29

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.