3c (2p) (done)

9 November, 2023 02:00

L6.3. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech T_n $(n = 0, 1, \ldots)$ oznacza n-ty wielomian Czebyszewa.

(c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n-ty $(n \geq 0)$ wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:

i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

I) sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1;\ n \geq 0)$;

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ZW cosinusa to $\langle -1; 1 \rangle$

II) wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n-tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$|\cos(\alpha)| = 1$ dla $\alpha = k \cdot \pi$

Wiemy, że $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ czyli mamy równanie:

$$\cos(\alpha) = \cos(n \arccos(x))$$
$$\alpha = n \arccos(x)$$
$$k\pi = n \arccos(x)$$
$$\frac{k\pi}{n} = \arccos(x)$$
$$\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cos(\arccos(x))$$
$$x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

III) udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} $(n \geq 0)$ ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$\cos((n+1)\arccos x) = 0$, $\cos\alpha = 0$ dla $\alpha = k\pi + \frac{\pi}{2}$, więc:

$$(n+1)\arccos x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos x = \frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{n+1}$$
$$x = \cos\left(\frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{n+1}\right) \quad \text{dla } \underbrace{k = 0, \ldots, n}_{n+1} \Rightarrow T_{n+1} \text{ ma } n+1 \text{ miejsc zerowych}$$