

17	200	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	7																								

1. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej  $\frac{1}{1-x}$ .

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

(a)  $a_n = n^2$

(b)  $a_n = n^3$

Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca  $\frac{1}{1-x}$ .

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciąg:  $\binom{n+k}{k}$ .

Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji  $\frac{1}{1-x}$ .

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

(a)  $a_n = n$  dla parzystych  $n$  i  $a_n = 1/n$  dla nieparzystych  $n$

(b)  $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$  ( $H_0 = 0$ ).

5. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $a_n$ . Znajdź funkcję tworzącą ciąg  $b_n$  postaci  $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \dots)$ , czyli takiego, że dla każdego naturalnego  $k$ :  $b_{3k} = a_{3k}$  oraz  $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$ .

Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciąg  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

$(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ . Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu  $\langle b_n \rangle = E^k \langle a_n \rangle$ .

7. Na ile sposobów można wybrać zbiór  $k$ -elementowy ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej  $r$ ?

8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

$n^2 \in O(n^3)$ ;  $n^3 \in O(n^{2.99})$ ;  $2^{n+1} \in O(2^n)$ ;  $(n+1)! \in O(n!)$ ;  $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$ ;  $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$ .

9. Niech  $f, g, h: N \rightarrow R$ . Pokaż, że:

(a) jeśli  $f(n) = O(g(n))$  i  $g(n) = O(h(n))$ , to  $f(n) = O(h(n))$ ,

(b)  $f(n) = O(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Omega(f(n))$ ,

(c)  $f(n) = \Theta(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Theta(f(n))$ .

10. Niech  $f$  i  $g$  będą dowolnymi wielomianami o stopniach  $k$  i  $l$  takimi, że  $k < l$ .

Pokaż, że wówczas  $f(n) = o(g(n))$ .

11. (3p) Przestrzeń  $R^n$  to zbiór wszystkich punktów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o  $n$  rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w  $R^n$  zadana jest wzorem  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , gdzie przynajmniej jedno  $a_i$  jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić  $n$ -wymiarową przestrzeń  $R^n$  za pomocą  $m$  hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

# 1 (done)

17 November, 2023 10:34

Niech  $\langle a_n \rangle$  będzie pewnym ciągiem a

$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$  jego funkcją tworzącą.

1. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciągu  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej  $\frac{1}{1-x}$ .

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k$ , co możemy podstawić pod wzór na funkcję tworzącą

rozbijamy na dwie sumy

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k x^k \cdot x^{n-k} \right) =$$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n \right) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x}$$

$$a_0 x^0 + a_0 x^0 \cdot x^1 + a_1 x^1 \cdot x^0 + \dots$$

więc zapisz nadal olizka

## 2 (done)

17 November, 2023 10:34

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:

(a)  $a_n = n^2$

(b)  $a_n = n^3$

Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca  $\frac{1}{1-x}$ .

Funkcje tworzące

Niech  $\langle a_n \rangle$  będzie pewnym ciągiem a  
 $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$  jego funkcją  
 tworzącą.

$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \dots + i a_i x^{i-1} + \dots$

Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu:  
 $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots, i a_i, \dots)$ ?

$A'(x)x$

Katarzyna Paluch (II UWIR) MDL 2023 33 / 46

przekształcenia z wykładu

(a)  $a_n = n^2 \langle 0, 1, 4, 9, 16, 25, \dots \rangle$   
 pochodna  
 $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$

przesunięcie  $\cdot x$   
 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \langle 0, 1, 2, 3, \dots \rangle$

znów pochodna

$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

znów przesunięcie  $\cdot x$

$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

Mamy funkcję tworzącą dla  $n^2$ :  $A(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

(b)  $a_n = n^3$  Mamy już funkcję tworzącą dla  $n^2$ , pozostaje policzenie jeszcze jednej pochodnej  
 $A'(x) \cdot x = \frac{x^3 + 4x^2 + x}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$

+3 (done)

17 November, 2023 10:34

$$\langle 1, \binom{n+1}{k}, \binom{n+2}{k}, \binom{n+3}{k}, \dots \rangle$$

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciąg:  $\binom{n+k}{k}$ .

Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji  $\frac{1}{1-x}$ .

$$\text{Szukamy wzoru } A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$$

**P**W dowodzie skorzystamy z dwóch wzorów:

$$\binom{z}{n} = (-1)^n \binom{n-z-1}{n} \quad \binom{n+k}{k} = (-1)^k \binom{-n-1}{k} = (-1)^k \binom{-n-1}{-k} \quad \leftarrow y = -(n+1)$$

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol\\_Newtona#Uog%C3%B3lnienie\\_na\\_liczby\\_rzeczywiste\\_i\\_zesp%C3%B3lne](https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Newtona#Uog%C3%B3lnienie_na_liczby_rzeczywiste_i_zesp%C3%B3lne)

**P**W szczególności dla  $x = 1$  lub  $y = 1$  dostaniemy wzór na tzw. **szereg Newtona**  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ .

[https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwumian\\_Newtona](https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwumian_Newtona)

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-n-1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n-1}{-k} (-x)^k = (1-x)^{-(n+1)} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:

(a)  $a_n = n$  dla parzystych  $n$  i  $a_n = 1/n$  dla nieparzystych  $n$

(b)  $H_n = 1 + 1/2 + \dots + 1/n$  ( $H_0 = 0$ ).

5. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciągu  $a_n$ . Znajdź funkcję tworzącą ciągu  $b_n$  postaci  $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \dots)$ , czyli takiego, że dla każdego naturalnego  $k$ ,  $b_{3k} = a_{3k}$  oraz  $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$ .

*Wskazówka:* Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.

6. Niech  $A(x)$  będzie funkcją tworzącą ciągu  $a_n$ . Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu  $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$ . Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu  $\langle b_n \rangle = E^k \langle a_n \rangle$ .

7. Na ile sposobów można wybrać  $k$ -elementowy ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  tak, by różnica dowolnych dwóch wybranych liczb wynosiła przynajmniej  $r$ ?

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} - k\text{-elementowy zbiór bez powyższego warunku}$$



8. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:

 $n^2 \in O(n^3); n^3 \in O(n^{2.99}); 2^{n+1} \in O(2^n); (n+1)! \in O(n!); \log_2 n \in O(\sqrt{n}); \sqrt{n} \in O(\log_2 n).$ 

a)  $n^2 \in O(n^3)$

$$n^2 \leq c \cdot n^3 \quad \checkmark \quad n > 1 \quad c > 0$$

b)  $n^3 \in O(n^{2.99})$  **F** al/bo dowolnego  $c$  znajdziemy  $n^3 > c \cdot n^{2.99}$  bo takie  $n$   $n^3 > c \cdot n^{2.99}$

c)  $2^{n+1} \in O(2^n)$

$$2^{n+1} \Rightarrow 2 \cdot 2^n$$

$$2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n \quad \checkmark \quad \text{dow. n.o.} \quad c \gg 2$$

d)  $(n+1)! \in O(n!)$

$$(n+1)! \Rightarrow (n+1) \cdot n!$$

$$(n+1) \cdot n! \leq c \cdot n! \quad \text{F bo musi zachodzić } c \geq n+1$$

e)  $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$   $\log_2 n = x \Rightarrow 2^x = n \Leftrightarrow \log_2(n) \leq x \Rightarrow 2^x \leq n$

$$\log_2(n) \leq c \cdot \sqrt{n}$$

$$2^{c\sqrt{n}} \leq n$$

chyba nie?

$$2^c \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq n$$

f)  $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$

$$\sqrt{n} \leq c \cdot \log_2(n)$$

$$\log_2(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{c}$$

$$2^{\frac{\sqrt{n}}{c}} \geq n$$

$$2^{\frac{1}{c}} \cdot 2^{\sqrt{n}} \geq n \quad \text{i podobnie do e}$$

## Funkcja duże O

Niech  $f, g : N \rightarrow R \geq 0$ .

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 f(n) \leq cg(n)$$

## Duże O

Niech  $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$ .

- $\forall \alpha, \beta \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall a > 1 n^C = O(a^n)$
- $\forall \alpha > 0 (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:

Jeśli  $f(n)$  i  $g(n)$  dążą do nieskończoności, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$ .

## 9 (done)

17 November, 2023 10:34

9. Niech  $f, g, h : N \rightarrow R$ . Pokaż, że:

- (a) jeśli  $f(n) = O(g(n))$  i  $g(n) = O(h(n))$ , to  $f(n) = O(h(n))$ ,
- (b)  $f(n) = O(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Omega(f(n))$ ,
- (c)  $f(n) = \Theta(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Theta(f(n))$ .

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 f(n) \leq cg(n)$$

- (a) jeśli  $f(n) = O(g(n))$  i  $g(n) = O(h(n))$ , to  $f(n) = O(h(n))$ ,

Z definicji funkcji  $O$  wiemy, że funkcja  $f(n)$  jest zdominowana przez  $g(n)$ . Oznaczmy rząd funkcji  $f(n)$  jako  $r_f$ ,  $g(n)$  jako  $r_g$ . Możemy zapisać wtedy  $r_f \leq r_g$ . Zapisując drugie równanie analogicznie mamy  $r_g \leq r_h$ .

$$r_f \leq r_g \leq r_h \Rightarrow r_f \leq r_h \Rightarrow f(n) = O(h(n))$$

- (b)  $f(n) = O(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Omega(f(n))$  •  $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 f(n) \geq cg(n)$

$$\begin{aligned} &\downarrow \\ &f(n) \leq c_1 g(n) \\ &f(n) \cdot \frac{1}{c_1} \leq g(n) \\ &\text{i wiado od razu że prawdziwe} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\downarrow \\ &g(n) \geq c_2 \cdot f(n) \end{aligned}$$

- (c)  $f(n) = \Theta(g(n))$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $g(n) = \Theta(f(n))$

Widac to tez wprost z definicji - funkcja  $a$  jest dokładnie rzędu  $b \Leftrightarrow$  funkcja  $b$  jest dokładnie rzędu  $a$ .

$$\bullet f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$$

## 10 (done)

17 November, 2023 10:34

10. Niech  $f$  i  $g$  będą dowolnymi wielomianami o stopniach  $k$  i  $l$  takimi, że  $k < l$ .

\* Pokaż, że wówczas  $f(n) = o(g(n))$ .

### Funkcja mała o

Niech  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \geq 0$ .

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

z definicji:

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

z treści zadania wiemy że  $g(n)$  jest wielomianem wyższego stopnia z def. \* prawdziwe.

## 11(3p)

17 November, 2023

10:34

11. (3p) Przestrzeń  $R^n$  to zbiór wszystkich punktów  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  o  $n$  rzeczywistych współrzędnych. Hiperpłaszczyzna w  $R^n$  zadana jest wzorem  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ , gdzie przynajmniej jedno  $a_i$  jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić  $n$ -wymiarową przestrzeń  $R^n$  za pomocą  $m$  hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

<https://mathoverflow.net/questions/349547/division-of-space-by-hyper-planes>

Def. z wykładu:

## Funkcja duże O

Niech  $f, g : N \rightarrow R \geq 0$ .

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 f(n) \leq cg(n)$$

## Funkcja małe o

Niech  $f, g : N \rightarrow R \geq 0$ .

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

## Duże O

Niech  $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$ .

- $\forall \alpha, \beta \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall a > 1 n^C = O(a^n)$
- $\forall \alpha > 0 (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:

Jeśli  $f(n)$  i  $g(n)$  dążą do nieskończoności, to  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$ .

## Inne funkcje

Niech  $f, g : N \rightarrow R \geq 0$ .

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0 \exists n_0 \in N \forall n \geq n_0 f(n) \geq cg(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Omega  
Theta  
mała  
omega