Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym.

Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do t?
Jak znaleźć najkrótszą ścieżkę z s do v dla każdego wierzchołka $v \in V$?

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \to R \geq 0$.
Waga ścieżki P to suma wag krawędzi leżących na P.
Najlżejsza / najkrótsza (względem c) ścieżka z s do t to ta ze ścieżek z s do t, która ma najmniejszą wagę.

Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. c) ścieżkę z s do t?
Jak znaleźć najkrótszą (wzgl. c) ścieżkę z s do v dla każdego wierzchołka $v \in V$?

Najkrótsze ścieżki

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym o nieujemnych wagach na krawędziach $c : E \to R \geq 0$,
a s ustalonym wierzchołkiem z V.

Niech $S \subseteq V$. Ścieżka P z s do v jest prawie S-owa / osiągalna bezpośrednio z S jeśli wszystkie wierzchołki na P oprócz v są w S.
$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z s do v
$t(v)$ - waga najkrótszej prawie S-owej ścieżki z s do v; jeśli takiej scieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

Algorytm Dijkstry

$G = (V, E)$ - graf spójny; $c : E \rightarrow R \geq 0$, $s \in V$

$d(v)$ - waga najkrótszej ścieżki z s do v
$t(v)$ - waga najkrótszej prawie S-owej ścieżki z s do v; jeśli takiej scieżki nie ma, to $t(v) = \infty$

$S \leftarrow \{s\},\ d(s) \leftarrow 0$
dla każdego sąsiada v wierzchołka s: $t(v) \leftarrow c(s, v)$
dla pozostałych wierzchołków: $t(v) \leftarrow \infty$
dopóki $S \neq V$ wykonaj:

  $u \leftarrow \ argmin\{t(u) : u \notin S\}$
  dodaj u do S
  zaktualizuj wartości $t(v)$:
  dla każdego sąsiada $v \notin S$ wierzchołka u:
  $t(v) \leftarrow \min\{t(v), d(u) + c(u, v)\}$

Algorytm Dijkstry

Jak zmodyfikować algorytm Dijkstry, by znajdować najkrótsze ścieżki a nie tylko wagi najkrótszych ścieżek?

Czy algorytm ten działa również:

- w grafach skierowanych?
- gdy wagi krawędzi mogą być ujemne?

Pokrycie wierzchołkowe

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Pokrycie wierzchołkowe grafu G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że kaażda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V'.

Najmniejsze pokrycie wierzchołkowe grafu G to to spośród pokryć wierzchołkowych G, które zawiera najmniej wierzchołków.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Pokrycie wierzchołkowe grafu G to dowolny podzbiór $V' \subseteq V$ taki, że kaażda krawędź z E ma przynajmniej jeden z końców w V'.

Niech M będzie jakimś skojarzeniem G a W jakimś pokryciem wierzchołkowym.
Czy możemy jakoś porównać $|M|$ i $|W|$? $|M| \leq |W|$? $|M| \geq |W|$

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Niech M będzie jakimś skojarzeniem G a W jakimś pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M| \leq |W|$.

Pokrycie wierzchołkowe a skojarzenie

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem.
Niech M_{max} będzie największym skojarzeniem G a W_{min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym.

Wtedy $|M_{max}| \leq |W_{min}|$.
A może zachodzi równość?

Twierdzenie Koeniga

Niech $G = (V, E)$ bedzie grafem dwudzielnym, M_{max} największym skojarzeniem G a W_{min} najmniejszym pokryciem wierzchołkowym. Wtedy $|M_{max}| = |W_{min}|$.