

## Lista nr 3 z matematyki dyskretnej

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech  $d_n$  oznacza liczbę nieporządków utworzonych z  $n$  kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na  $d_n$  stosując zasadę włączeń-wyłączeń.
2. Wśród liczb naturalnych  $1, 2, \dots, 800$ , ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.
3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter  $a, a, a, a, b, b, b, c, c$  w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie  $a, a, a, a, b, c, b, c, b$  jest zakazane, ale ustawienie  $a, a, a, b, a, c, b, c, b$  jest dobre.
4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.
5. Udowodnij, że  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$  równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy  $(n+1) \times (n+1)$  poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.  
Czy potrafisz zwinąć tę sumę?
6. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$ ?
7. Na ile sposobów można wrzucić  $n$  (nierozróżnialnych) kulek do  $k$  (rozróżnialnych) szuflad tak, by żadna szuflada nie była pusta?
8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?
9. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby  $10^{100000}$ .
10. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci  $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .
11. Na ile sposobów można wrzucić  $2n$  kulek do  $k$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić  $2n+1$  kulek do  $2k+1$  szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

12. Ile jest permutacji  $n$  kolejnych liczb naturalnych, w których żadna liczba nieparzysta nie stoi na swoim miejscu?
13. (2p) W drodze na przyjęcie każda z  $n$  osób zostawia w szatni swoją kurtkę/płaszcz oraz torbę/plecak/torebkę. W drodze powrotnej szatniarz oddaje pozostawione rzeczy w sposób losowy. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli:
- (a) nikt nie dostanie ani swojej kurtki ani torby,
  - (b) może się zdarzyć że jakaś osoba dostanie swoją kurtkę lub torbę, ale nie obie te rzeczy (swoje) naraz?
14. (-) Wykaż, że jeśli  $2^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest liczbą pierwszą.
15. (-) Wykaż, że jeśli  $a^n - 1$  jest liczbą pierwszą, to  $a = 2$ .
16. (-) Wykaż, że jeśli  $2^n + 1$  jest liczbą pierwszą, to  $n$  jest potęgą liczby 2.