1 (done)

7 January, 2024 14:19

L11.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech P_k $(0 \le k \le N)$ oznacza k-ty wielomian ortogonalnym względem iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Ustalmy liczbę naturalną $1 < n \le N$. Znajdź taką największą liczbę naturalną m, że dla dowolnego wielomianu $w \in \Pi_m$ jest $\left(w^2+v, P_n\right)_N = 0$, gdzie $v(x) := -2024x + 2023$.

Chcemy, żeby stopień w^2+V był mniejszy niż stopień P_n, bo wtedy możemy zapisać go jako kombinację liniową wielomianu P_k $(k<n)$

$$(w^2+V, P_N)_N = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots \alpha_{N-1} P_{N-1}, P_N)_N =$$

$$\underbrace{\alpha_1 (P_1, P_n)_N + \alpha_2 (P_2, P_n)_N + \ldots + \alpha_{n-1}(P_{n-1}, P_n)_N}_{\text{ortogonalne}} = 0$$

Zauważmy, że $st.(V(x)) = 1$, a wtedy dla $m \geq 1$

$$\{\varphi + V : \varphi \in \Pi_m\} = \{\varphi : \varphi \in \Pi_m\}$$

więc możemy ominąć V.

Mamy więc $(w^2, P_n)_N$ stopień P_n to n, chcemy by stopień w^2 był od niego mniejszy

$$2m < n$$

$$m < \frac{n}{2}$$

a więc największe legalne m to $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$

a więc największe legalne n to $\lfloor 2 \rfloor$