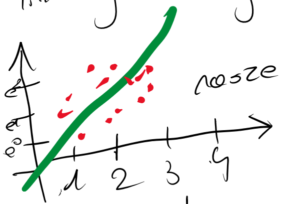
6 (done)

16 December, 2023 20:23

L10.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Punkty (x_k, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, r)$ otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*[1] okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b.

Siatka półlogarytmiczna - wykres, w którym jedna oś jest w skali liniowej, a druga w skali logarytmicznej



$$\begin{cases} f_1 = x \\ f_2 = 1 \\ y = \ln y \end{cases}$$

$y \approx e^{ax+b}$ $\quad \ln y \approx ax+b$

$$E(a,b) = \sum_{k=0}^{r} \left[\ln(y_k) - (ax_k+b)\right]^2$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial a} = \sum_{k=0}^{r} 2\cdot\left[\ln(x_k) - (ax_k+b)\right](-x_k) = 0$$

$$\sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)x_k - ax_k^2 + bx_k = 0$$

$$a\sum_{k=0}^{r} x_k^2 + b\sum_{k=0}^{r} x_k = \sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)x_k$$

$$\underset{r_1}{\langle x,x\rangle} \quad \underset{r_2}{\langle x,1\rangle} \quad \underset{w_1}{\langle \ln(y),x\rangle}$$

$$\frac{\partial E(a,b)}{\partial b} = \sum_{k=0}^{r} 2(\ln(y_k) - (ax_k+b))(-1) = 0$$

$$a\sum_{k=0}^{r} x_k + b\sum_{k=0}^{r} 1 = \sum_{k=0}^{r} \ln(y_k)$$

$$\underset{r_2}{\langle x,1\rangle} \quad \underset{r_3}{\langle 1,1\rangle} \quad \underset{w_2}{\langle 1,\ln(y)\rangle}$$

$$\begin{bmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,1\rangle \\ \langle 1,x\rangle & \langle 1,1\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle x,\ln(y)\rangle \\ \langle 1,\ln(y)\rangle \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{w_2 - r_2 a}{r_3} \qquad a = \frac{w_1 - r_2 b}{r_1}$$

$$b = \frac{\langle 1,\ln(y)\rangle - a\langle 1,x\rangle}{\langle 1,1\rangle}$$

$$a = \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1,x\rangle b}{\langle x,x\rangle}$$

$$a = \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1, x\rangle b}{\langle x, x\rangle}$$

$$b = \frac{\langle 1, \ln(y)\rangle - \frac{\langle w_1, \ln(y)\rangle - \langle 1, x\rangle b}{\langle x, x\rangle}}{\langle 1, 1\rangle} \quad \Big| \cdot \langle x, x\rangle \langle 1, 1\rangle$$

$$b\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle = \langle 1, \ln(y)\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln(y)\rangle + \langle 1, x\rangle b$$

$$b\left(\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle\right) = \langle 1, \ln(y)\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln y\rangle$$

$$b = \frac{\langle 1, \ln y\rangle\langle x, x\rangle - \langle w_1, \ln y\rangle}{\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle}$$

a liczymy analogicznie i dostajemy:

$$a = \frac{\langle 1, 1\rangle\langle x, \ln y\rangle - \langle x, 1\rangle\langle 1, \ln y\rangle}{\langle x, x\rangle\langle 1, 1\rangle - \langle 1, x\rangle^2}$$