Lista05

8 November, 2024 18:04

1. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

   (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

2. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

   (a) $a_{n+1} = \left\lceil \sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2} \right\rceil$, $a_0 = a_1 = 1$,

   (b) $b_{n+1} = \left\lceil \sqrt{b_n^2 + 3} \right\rceil$, $b_0 = 8$,

   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1}$, $c_0 = 0$, $c_1 = 1$.

5. Rozwiąż zależności rekurencyjne:

   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2/d_{n-2}$.

6. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$? Domino ma wymiar 1×2.

7. Rozwiąż zależność rekurencyjną $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

8. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

9. (2p) Wieża Hanoi składa się z n krążków n różnych rozmiarów, po 1 krążku każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokładnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt C, posługując się przy tym prętem B, jeśli bezpośrednie ruchy z pręta A na C są zakazane, ale ruchy w drugą stronę z pręta C na A są dozwolone?

10. Podaj i udowodnij regułę sprawdzania podzielności przez 11 liczby naturalnej zapisanej w systemie dziesiętnym.

11. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

1. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.
   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.
   (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

(a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n - 1$ $\qquad a_2 = 8 \quad a_3 = 16 + 27 - 1 = 42$

Operator	Functions annihilated
$E-1$	α
$E-a$	αa^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$ [if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

$(E^2 - 2E + 1)a_n = 3^n - 1$

$(E-1)^2 a_n = 3^n - 1$ ← E-1 tu się nie stosuje, bo tam to było tylko po lewej jako sposób na przepisanie części rekurencyjnej

$(E-1)^3(E-3)a_n = 0$

$(\alpha n^2 + \beta n + \gamma)1^n + \delta 3^n$

$a_0 = 0 \quad a_1 = 0$

$\alpha n^2 + \beta n + \gamma + \delta 3^n$

$a_0: \gamma + \delta = 0$
$\gamma = -\delta$

$a_1: \alpha + \beta + \gamma + 3\delta = 0$
$\alpha + \beta + 2\delta = 0 \Rightarrow \alpha = -\beta - 2\delta$

$a_2: \alpha \cdot 4 + \beta \cdot 2 + \gamma + 9\delta$

(b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = n2^{n+1}$

Operator	Functions annihilated
$E-1$	α
$E-a$	αa^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$ [if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

$(E^2 - 4E + 4)a_n = n2^{n+1}$

$(E-2)^2 a_n = n2^{n+1}$

$(E-2)^4 a_n = 0$

$\alpha n^3 + \beta n^2 + \gamma n + \delta$

$(E-2)n2^{n+1} =$
$(n+1)2^{n+2} - n2^{n+2} =$
$n2^{n+2} + 2^{n+2} - n2^{n+2} = 2^{n+2}$
$(E-2) = 2^{n+3} - 2^{n+3} = 0$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

(c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

$a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$(E-2)2^{-n-1} = 2^{-2^{-n}} = 0$

$(E+1)^2 a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$(E+1)^2(E-2) = 0$

$(\alpha n + \beta)(-1)^n + \gamma \cdot 2^n$

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

Operator	Functions annihilated
$E-1$	α
$E-a$	αa^n
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$ [if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$ [if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.

cyjne

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

(b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

Operator	Functions annihilated	
$E-1$	α	
$E-a$	αa^n	
$(E-a)(E-b)$	$\alpha a^n + \beta b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a_0)(E-a_1)\cdots(E-a_k)$	$\sum_{i=0}^{k} \alpha_i a_i^n$	[if a_i distinct]
$(E-1)^2$	$\alpha n + \beta$	
$(E-a)^2$	$(\alpha n + \beta)a^n$	
$(E-a)^2(E-b)$	$(\alpha n + \beta)a^b + \gamma b^n$	[if $a \neq b$]
$(E-a)^d$	$(\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i n^i)a^n$	

If X annihilates f, then X also annihilates Ef.
If X annihilates both f and g, then X also annihilates $f \pm g$.
If X annihilates f, then X also annihilates αf, for any constant α.

If X annihilates f and Y annihilates g, then XY annihilates $f \pm g$.

(a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

$(E-1)\,t_n = 3^{n+1}$

$3^{n+1}(E-3) = 3^{n+2} - 3 \cdot 3^{n+1} = 0$ ✓

$(E-1)(E-3)\,t_n = 0$

$\alpha \cdot 3^n + \beta$