Lista 2

15 October, 2023 09:17

L	1	+2	3	4	5	6	7	8	+9	10	11	12	+13	14	suma
W	1														/14p.

za 2 pkt

Lista nr 2 z matematyki dyskretnej

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.
2. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.
3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.
4. Wybieramy 55 liczb naturalnych takich, że: $1 \leq x_1 < x_2 < \ldots x_{55} \leq 100$. Pokaż, że jakkolwiek byśmy je nie wybrali, jakieś dwie będą różnić się o 9.
5. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.
6. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.
7. (-) Na okręgu zapisujemy w dowolnej kolejności liczby naturalne od 1 do 10. Pokaż, że zawsze znajdą się trzy sąsiednie, których suma wynosi przynajmniej 18.
8. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$
.
9. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

10. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jeśli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)
11. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?
12. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^ib^{n-i}.$$
13. (2p) (+) Oblicz liczbę funkcji niemalejących postaci $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
14. Na ile sposobów można wrzucić $2n$ kulek do k szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się parzysta liczba kulek? A na ile sposobów można wrzucić $2n+1$ kulek do $2k+1$ szuflad tak, by w każdej szufladzie znalazła się nieparzysta liczba kulek?

1 (done)

15 October, 2023 09:18

1. Na kartce w kratkę zaznaczono 5 punktów kratowych (czyli punktów o obu współrzędnych całkowitoliczbowych). Wykaż, że środek odcinka łączącego pewne dwa spośród tych punktów jest także punktem kratowym.

Mamy cztery możliwości wyboru punktu (według parzystości):

(P, P) ; (N, N) ; (P, N) ; (N, P)

Wybieramy pięć punktów, w jednym „koszyku” będą więc conajmniej dwa punkty $\iff$ min. dwa punkty będą miały taką samą parzystość obu współrzędnych.

$$\frac{\text{parzysta} + \text{parzysta}}{2} = \text{całkowita} \qquad \frac{\text{nieparzysta} + \text{nieparzysta}}{2} = \text{całkowita}$$

Musimy otrzymać więc min. jeden punkt kratowy

2

15 October, 2023 09:18

3

15 October, 2023 09:18

4

15 October, 2023 09:18

5

15 October, 2023 09:18

6

15 October, 2023 09:19

7

15 October, 2023 09:19

8

15 October, 2023 09:19

9

15 October, 2023 09:19

10

15 October, 2023 09:19

11

15 October, 2023 09:19

12

15 October, 2023 09:19

13

15 October, 2023 09:19

14

15 October, 2023 09:19