

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 10

13 grudnia 2023 r.

Zajęcia 19 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

- L10.1.** 1 punkt Niech danę będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^N p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym \mathcal{X} .

- L10.2.** 1 punkt Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x+a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \hline y_k & y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array}.$$

- L10.3.** 1 punkt Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^r \frac{e^{2x_k}}{2 + \sin(2023x)} \left[y_k - a (\ln(2022x_k^4 + 3) + 4x_k^5) \right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

- L10.4.** 1 punkt Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T :

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

| | | | | | | | | |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| T | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 80 | 90 | 95 |
| S | 68.0 | 67.1 | 66.4 | 65.6 | 64.6 | 61.8 | 61.0 | 60.0 |

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b .

- L10.5.** 1 punkt Pomiary (t_k, C_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k, C_k > 0$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin(1977t^4) + 2}{A \cos(2t-1) + Be^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B .

L10.6. 1 punkt Punkty (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, r$) otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z *siatką półlogarytmiczną*¹ okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b .

L10.7. 1 punkt Poziom wody w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. *pływu* M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12} \quad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

| | | | | | | | |
|--------|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| t | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | godz. |
| $H(t)$ | 1 | 1.6 | 1.4 | 0.6 | 0.2 | 0.8 | m |

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0 , a_1 , a_2 .

L10.8. 2 punkty Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq N$) oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^n A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj **jawną postać** układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \dots, A_n^*$, aby zachodziło

$$\|f - w_n^*\|_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \dots, N$, natomiast

$$\|g\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^N (g(x_k))^2}.$$

L10.9. 1 punkt Niech dane będą parami różne liczby x_0, x_1, \dots, x_N . Niech $y_0, y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^* \in \Pi_N$, dla którego

$$\|f - w_N^*\|_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} \|f - w_N\|_2$$

(f oraz $\|\cdot\|_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?

(-) Paweł Woźny

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Semi-log_plot