numeryczna repo teoria

12 October, 2023 12:15

$X > 0 \quad x = m \cdot 2^c \quad m \in \langle \frac{1}{2}; 1)$ t – t cyfr mantysy

$rd(x) = m_t \cdot 2^c \equiv$ zaokr. x = ~~t~~ cyfr mantysy $\cdot\, 2^{\text{cecha}}$

$m = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 2^{-k} \quad m_t = \sum_{k=1}^{t} c_k 2^{-k} + c_{t+1} 2^{-t}$

~~zad~~ 2.2

$|m - m_t| \le ?$ 1° $c_{t+1} = 0$

$|m - m_t| = \left|\sum_{k+2}^{\infty} c_k 2^{-k}\right| \le \sum_{k=t+2}^{\infty} 2^{-k} = \frac{2^{-t-2}}{1-\frac{1}{2}} = 2^{-t-1}$

2° $c_{t+1} = 1$

$|m - m_t| = \left| c_{t+1} 2^{-t-1} + \sum_{k=t+2}^{\infty} c_k 2^{-k} - 2^{-t}\right| = \left|\sum_{k=t+2}^{\infty} c_k 2^{-k} - 2^{-t-1}\right| =$

$2^{-t-1} - \sum_{k=t+2}^{\infty} c_k 2^{-k} \le 2^{-t-1}$

$|m - m_t| \le 2^{-t-1}$

$\left|\frac{rd(x) - x}{x}\right| = \left|\frac{m_t 2^c - m 2^c}{m \cdot 2^c}\right| = \left|\frac{m_t - m}{m}\right| \le \frac{2^{-t-1}}{m} \le 2 \cdot 2^{-t-1} = 2^{-t}$

$\frac{1}{2} \le m < 1$

$1 \le \frac{1}{m} \le 2$

$\tilde{x} = x(1 + \varepsilon)$

$\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| = |\varepsilon|$

$\frac{fl(x * y) - x * y}{x * y} \le 2^{-t}$ ← jakiekolwiek działanie

$fl(x * y) = (x * y)(1 + \varepsilon) \quad |\varepsilon| \le 2^{-t} \qquad * \in \{+, -, \cdot, \div\}$

$s = x^2 - y^2 \qquad |\varepsilon_i| \le 2^{-t}$

1° $fl(s) = (x^2(1 + \varepsilon_1) - y^2(1 + \varepsilon_2))(1 + \varepsilon_3)$

2° $fl(s) = (x - y)(1 + \varepsilon_4) \cdot (x + y)(1 + \varepsilon_5)(1 + \varepsilon_6)$

$\ldots (1+\varepsilon_4)(1 + \varepsilon_5)(1 + \varepsilon_6)$

2° $fl(s) = (x-y)(1+\varepsilon_4) \cdot (x+y)(1+\varepsilon_5)(1+\varepsilon_6)$

1° $x^2(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3) + \dots$ $\qquad 2^\circ$ $(x-y)(x+y)(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_3)(1+\varepsilon_5)$

$(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2) = 1+E$ ilości też działa

$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2$ ← dla większej

$|E| \leq 2 \cdot 2^{-t} + 2^{-2t}$

$2^{-2t} \leq 2^{-t}$

$|E| \lessapprox 2 \cdot 2^{-t}$ ← błąd względny całości

$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) = 1+F$ $\quad |\alpha_1| \leq K \cdot 2^{-t}$ $\quad |\alpha_2| \leq L \cdot 2^{-t}$

$|F| \leq (K+L) \cdot 2 \cdot 2^{-t}$

$x^2 - y^2$ $\quad \tilde{s} = x^2(1+E_x) - y^2(1+E_y)$ $\qquad |1-s| \leq 2 \cdot 2^{t}$

$s \in \{x; y\}$

$\tilde{s} = x^2(1+E_x) - y^2(1+E_y)$

$\bar{s} = (x^2 - y^2)(1+F)$

$|F| \leq 3 \cdot 2^{-t}$

$|||$

$\bar{s} = s(1+F)$

Kumulacja błędów

1) $\prod_{i=1}^{k} (1+\varepsilon_i) = 1+E$ $\qquad |\varepsilon_i| \leq 2^{-t}$ $\qquad \frac{a \cdot b}{c \cdot d}$

T: $|E| \leq k \cdot 2^{-t}$

2) $\frac{1}{1+\varepsilon} = 1+\alpha$

$\overline{1+\varepsilon}$

$1-\varepsilon+\varepsilon^2-\varepsilon^3+\dots=1+\alpha$

$|\alpha| \lesssim 2^{-t}$

alfa szacuje się w przybliżeniu

pomijamy $\eta \cdot \beta^2$ bo mamy po podstawieniu

$x^{2\cdot -2t}$ - niższy rząd, zaokrąglamy

3) $\sqrt{1+\varepsilon} = 1+\beta$ $\quad |\varepsilon| \le 2^{-t}$

z.

$1+\varepsilon = 1+2\beta+\beta^2$

T. $|\beta| \le \frac{1}{2}\cdot 2^{-t}$

błąd $\frac{7}{2}\cdot 2^{-t}$

pod pierwiastkiem mamy

$\sqrt{\frac{(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}{(1+\varepsilon_3)\dots(1+\varepsilon_7)}}(1+\varepsilon_8)(1+\varepsilon_9) = 1+E$

błąd wychodzi spod pierwiastka więc dzielimy go przez 2

(a 7 bo 7 nawiasów)

(można wszystko do licznika jak w 2.)

$\frac{7}{2}+2=\frac{11}{2}$

$|E| \le \frac{11}{2}\cdot 2^{-t}$

$y=f(x)$ $\quad |\varepsilon| \le k\cdot 2^{-t}$

$f(x(1+\varepsilon))(1+\alpha)$ $\quad |\alpha| \le L\cdot 2^{-t}$

zakładamy tutaj optymalną sytuację

$\left|\frac{\tilde{y}-y}{y}\right| = \left|\frac{f(x(1+\varepsilon))-f(x)-f(x(1+\varepsilon))}{f(x)}\right|$

Wniosek: nawet jeśli mamy idealny algorytm to może się zdarzyć że przez same zaokrąglenia danych i funkcji możemy nie móc wyznaczyć błędu względnego