# 1 (done)

8 November, 2023 15:14

Przykład Hornera na lb.: $(x^3-6x^2+12x-16):(x-4)$

| | 1 | −6 | 12 | −16 |
|---|---|---|---|---|
| 4 | | 4 | −8 | 16 |
| | 1 | −2 | 4 | 0 |

$x^2-2x+4$

0 – reszta

**L6.1.** 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

$W(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x + 11$

$W(x) = 3\cdot x^3 + 3x^2 - 2x + 11 = x\cdot(3\cdot x^2 + 3x - 2) + 11 = x\cdot(x\cdot(3\cdot x + 3) - 2) + 11$

przykład

Algorytm:

$W_0 = x(x(\ldots x(x\cdot a_n + a_{n-1}) + a_{n-2}) + a_{n-3}) + \ldots + a_1) + a_0$

$W_0$ – pełne wyrażenie zapisane schematem

$W_n = a_n$ ← najbardziej po środku

$W_k = W_{k+1}\cdot x + a_k \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 0)$ ← kolejne

$\alpha_i$ – błędy z dodawania

$\beta_i$ – błędy z mnożenia

$W_0 = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, czyli błędy algorytmu są postaci:

Rozpatrzmy pierwsze wyrazy

1° $a_n(1+\beta_n)$

2° $[x\cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1}) + a_{n-1}](1+\beta_{n-1}) =$

błąd z mnożenia x z indeksem mniejszym o 1, bo przy $a_0$ nie pojawia się x (ew mówimy że mnożymy $\cdot x^0 = 1$ (stała))

$x\cdot a_n(1+\beta_n)(1+\alpha_{n-1})(1+\beta_{n-1}) + a_{n-1}(1+\beta_{n-1})$

3° $[x^2a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + xa_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) + a_{n-2}](1+\beta_{n-2}) =$

$x^2a_n(1+\beta_n)(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-1})(1+\alpha_{n-2}) +$
$xa_{n-1}(1+\beta_{n-1})(1+\beta_{n-2})(1+\alpha_{n-2}) +$
$a_{n-2}(1+\beta_{n-1})$

i tak dalej. Uogólniając – dla dowolnego n mamy: $(n \in N)$

$W_0 = \sum_{i=0}^{n}\left(x^i a_i \cdot \prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)\cdot\prod_{j=1}^{i}(1+\alpha_j)\right)$

Korzystamy z tw. o kumulacji błędów:

$|1+\beta| \lesssim i\cdot 2^{-t}$

$|1+\alpha| \lesssim (i-1)\cdot 2^{-t}$

$|1+\varepsilon| \lesssim (2i-1)\cdot 2^{-t}$

by uprościć, przyjmijmy że $(1+\beta)$ to największy błąd z $\prod_{j=0}^{i}(1+\beta_j)$. $(1+\alpha)$ analogicznie

wówczas $W_0$ możemy ograniczyć w poniższy sposób:

$W_0 \leq \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\beta)^i(1+\alpha)^i$ ; teraz znowu:

$(1+\varepsilon) = (1+\alpha)(1+\beta)$

$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i (1+\beta)^i(1+\alpha)^i = \sum_{i=0}^{n}((1+\beta)(1+\alpha))^i = \sum_{i=0}^{n} x^i a_i (1+\varepsilon)^i = \sum_{i=0}^{n}[x(1+\varepsilon)]^i a_i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{x^i(1+\varepsilon)^i}_{= x^{\sim i}} a_i$

dostajemy więc dokładny wynik dla lekko zaburzonych danych. Tak samo jak w zad. 5/L3 algorytm jest numerycznie poprawny