5 (done)

25 October, 2023 16:47

L5.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Załóżmy, że metoda iteracyjna postaci

$$x_0 \text{ – dane}, \quad x_{k+1} = F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots; \ F \text{ – ustalona, } \textit{gładka} \text{ funkcja})$$

(metody takie nazywamy *metodami jednokrokowymi*; np. metodą taką jest metoda Newtona, dla której $F(x) := x - f(x)/f'(x)$) jest zbieżna do pierwiastka α równania $f(x) = 0$. Wykaż, że jeśli

$$F(\alpha) = \alpha, \quad F'(\alpha) = F''(\alpha) = \ldots = F^{(p-1)}(\alpha) = 0, \quad F^{(p)}(\alpha) \neq 0,$$

to rząd metody jest równy p, tzn.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = C \neq 0.$$

Jakim wzorem wyraża się stała asymptotyczna C?

Weźmy $F(x_k) = x_{k+1}$ i odejmijmy obustronnie α, otrzymamy wtedy:

$F(x_k) - \alpha = x_{k+1} - \alpha \Rightarrow \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - \alpha$ (błąd) wtedy:

$F(\alpha + \varepsilon_k) - \alpha = \varepsilon_{k+1}$. Rozpiszmy teraz w szereg Taylora:

$$F(\alpha+\varepsilon_k) = F(\alpha) + \frac{F'(\alpha)}{1!}\cdot\varepsilon_k + \frac{F''(\alpha)}{2!}\cdot\varepsilon_k^2 + \ldots + \frac{F^{(p-1)}(\alpha)}{(p-1)!}\varepsilon_k^{p-1} + \frac{F^{p}(\alpha)}{p!}\cdot\varepsilon_k^p =$$

$$F(\alpha) + \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!}\cdot\varepsilon_k^p = \underbrace{\alpha + \frac{F^p(\gamma)}{p!}\cdot\varepsilon_k^p}$$

α odejmiemy bo szukamy $F(\alpha+\varepsilon_k) - \alpha$

$$F(\alpha+\varepsilon_k) - \alpha = \frac{F^p(\gamma)}{p!}\cdot\varepsilon_k^p = \varepsilon_{k+1}$$

czyli $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k^p \frac{F^p(\gamma)}{p!}$, wtedy biorąc $C = \frac{F^{(p)}(\gamma)}{p!}$

Wykazaliśmy że p to rząd zbieżności

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = \frac{|F^{(p)}(\alpha)|!}{p!}$$