L8

1 December, 2023 20:11

L8 zad.	1	2	3	4	5	6	7	max pkt.
pkt.								
max pkt.	1	1	1	1	2	1	2	9

Zajęcia 5 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy **od 4 pkt.**

L8.1. [1 punkt] Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie:* NIFS3) dla danych

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

,

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

.

L8.2. [1 punkt] Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 24x^3 + 216x^2 + 500x + 328 & \text{dla} \quad -3 \le x \le -2, \\ -17x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad -2 \le x \le 0, \\ 22x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -6x^3 + 54x^2 - 76x + 28 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-3, -2, 0, 1, 3$?

L8.3. [1 punkt] Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2023x - 2024 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2024x + 2023 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-2, -1, 1, 2$?

L8.4. [1 punkt] Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

(1) $$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

L8.5. [2 punkty] Niech dane będą wektory $\mathbf{x}{:=}[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ $(x_k < x_{k+1},\ 0 \le k \le n-1)$, $\mathbf{y}{:=}[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz $\mathbf{z}{:=}[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza NIFS3 spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor

$$\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f w przedziale $[x_0, x_{100}]$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0),\ f'(h_1), \ldots,\ f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \le h_0 < h_1 < \ldots < h_N \le x_n$, natomiast N jest **dowolną** liczbą naturalną.

L8.6. [1 punkt] Ustalmy liczby naturalne M oraz N. Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk}, gdzie $0 \le k \le N$, a $m = 1, 2, \ldots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \qquad (0 \le k \le N)$$

dla $1 \le m \le M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji $s_1, s_2, \ldots, s_M$.

L8.7. [**Włącz komputer!**] [2 punkty] Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ $(k = 0, 1, \ldots, 95)$, natomiast

$[x_0, x_1, \ldots, x_{95}] :=$ [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, 49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, 59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, 45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, 21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, 6.5, 6.5, 5.5],

$[y_0, y_1, \ldots, y_{95}] :=$ [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, 59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, 57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, 18, 14.5, 10.5, 7.50, 4, 2.50, 1.50, 2, 3.50, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, 27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.50, 10, 13, 16.5, 20.5, 25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41].

Biorąc pod uwagę zadanie **L8.6**, opracuj **własną implementację** wyznaczania NIFS3. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?

1

1 December, 2023 20:14

L8.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3) dla danych

a)

x_k	-1	0	2
y_k	48	-72	96

,

b)

x_k	-7	-4	-2	0	1	5	10
y_k	-16185	-10116	-6070	-2024	-1	8091	18206

.

2

1 December, 2023 20:14

L8.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 24x^3 + 216x^2 + 500x + 328 & \text{dla} \quad -3 \le x \le -2, \\ -17x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad -2 \le x \le 0, \\ 22x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla} \quad 0 \le x \le 1, \\ -6x^3 + 54x^2 - 76x + 28 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-3, -2, 0, 1, 3$?

3

1 December, 2023 20:14

L8.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Czy istnieją takie stałe a, b, c, d, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2023x - 2024 & \text{dla} \quad -2 \le x \le -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla} \quad -1 \le x \le 1, \\ -2024x + 2023 & \text{dla} \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-2, -1, 1, 2$?

4

1 December, 2023 20:14

L8.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolujacą funkcję f w węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b)$. Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ spełniają układ równań

$$(1) \qquad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k/(h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

5 (2pkt)

1 December, 2023 20:14

L8.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dane będą wektory x:=$[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \le k \le n-1$), y:=$[y_0, y_1, \ldots, y_n]$ oraz z:=$[z_0, z_1, \ldots, z_m]$. Niech s_n oznacza NIFS3 spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ $(0 \le k \le n)$. W języku `PWO++` procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor

$$\mathtt{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \ldots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \cdots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ $(0 \le k \le 100)$ bardzo dobrze przybliża funkcję f w przedziale $[x_0, x_{100}]$. Wywołując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0),\ f'(h_1), \ldots,\ f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \le h_0 < h_1 < \ldots < h_N \le x_n$, natomiast N jest **dowolną** liczbą naturalną.

6

1 December, 2023 20:14

L8.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ustalmy liczby naturalne M oraz N. Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk}, gdzie $0 \le k \le N$, a $m = 1, 2, \ldots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \qquad (0 \le k \le N)$$

dla $1 \le m \le M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji $s_1, s_2, \ldots, s_M$.

7 (2pkt)

1 December, 2023 20:14

L8.7. Włącz komputer! | 2 punkty | Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ $(k = 0, 1, \ldots, 95)$, natomiast

$$[x_0, x_1, \ldots, x_{95}] := [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, 49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, 59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, 45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, 21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, 6.5, 6.5, 5.5],$$

$$[y_0, y_1, \ldots, y_{95}] := [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, 59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, 57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, 18, 14.5, 10.5, 7.50, 4, 2.50, 1.50, 2, 3.50, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, 27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.50, 10, 13, 16.5, 20.5, 25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41].$$

Biorąc pod uwagę zadanie **L8.6**, opracuj **własną implementację** wyznaczania NIFS3. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \ldots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ $(k = 0, 1, \ldots, M)$, a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?