Postać Newtona

26 November, 2023 13:16

Postać Newtona – jedna z metod przedstawiania wielomianu. Dla wielomianu stopnia n wybiera się $n+1$ punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i buduje wielomian postaci:

$$w(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_1)(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_{n-1}) \cdots (x - x_1)(x - x_0)$$

Wielomiany Newtona mogą być używane do interpolowania dowolnych funkcji.

Procedura interpolacji jest następująca:

$$\begin{array}{ll} x_i & f(x_i) \\ x_0 & f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) \\ x_2 & f(x_2) \\ \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

Uzupełniamy tabelkę dopisując kolejne kolumny różnicami dzielonymi:

$$\begin{array}{lll} x_i & f(x_i) & f[x_{i-1}, x_i] \\ x_0 & f(x_0) & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] \\ x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] \end{array}$$

Aż skończy się możliwość dalszego dopisywania:

$$\begin{array}{llllll} x_i & f(x_i) & f[x_{i-1}, x_i] & f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i] & \ldots & f[x_0, \ldots, x_i] \\ x_0 & f(x_0) & & & & \\ x_1 & f(x_1) & f[x_0, x_1] & & & \\ x_2 & f(x_2) & f[x_1, x_2] & f[x_0, x_1, x_2] & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_n & f(x_n) & f[x_{n-1}, x_n] & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & \ldots & f[x_0, \ldots, x_n] \end{array}$$

I używamy kolejnych liczb po przekątnej jako współczynników a_i.

Warto zauważyć, że przy implementacji znajdowania kolejnych wyrazów różnicowych nie musimy korzystać z macierzy (tablicy wielowymiarowej) – wystarczy nam jedynie zwykła tablica, pod warunkiem, że wyrazy będziemy obliczać „od dołu".