Aproksymacja średniokwadratowa - teoria

18 December, 2023 12:05

Dla ustalonych $x_0, x_1, \ldots, x_n$:
Mamy funkcję f określoną na tych punktach.
Normę dyskretną śr□ funkcji f oznaczamy $\|f\|_2$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k))^2}$$

Własności:

1° $\|f\|_2 \geq 0$, $\|f\|_2 = 0 \Leftrightarrow \forall_k \; f(x_k) = 0$

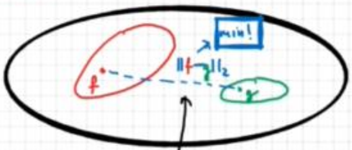
2° $\|\alpha f\|_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_2$ $(\alpha \in \mathbb{R})$

3° $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ (nierówność trójkąta)

Odległość dwóch funkcji:

$$\|f - g\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - g(x_k))^2}$$

Intuicja aproksymacji śrkw



F - zbiór funkcji zawierający m.in. funkcje „trudne" oraz „proste"

te funkcje są najbliżej siebie w sensie odległości śrkw
f - ustalona
g - tak dobrana, aby $\|f - g\|_2$ było jak najmniejsze

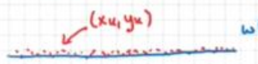
Zadanie aproksymacji śrkw

Dla danej (ustalonej) funkcji f („trudna") określonej w punktach $x_0 < x_1 < \ldots < x_N$ i dla ustalonego zbioru $\mathcal{X}$ („proste") znaleźć taki element $w^* \in \mathcal{X}$, dla którego

$$\|f - w^*\|_2 = \min_{w \in \mathcal{X}} \|f - w\|_2 \equiv \min_{w \in \mathcal{X}} \sqrt{\sum_{k=0}^{N} (f(x_k) - w(x_k))^2}$$

w^* – „najlepsza" z „prostych" funkcji (tzn. najlepiej dopasowana w sensie aproksymacji śrkw)

Model postaci $\mathcal{X} := \{a : a \in \mathbb{R}\}$ (funkcje stałe, Π_0)



$w(x) = a$ $(a = \text{const.})$

$$\|f - w^*\|_2 = \min_{w \in \Pi_0} \|f - w\|_2 = \min_{a \in \mathbb{R}} \underbrace{\sqrt{\sum_{k=0}^{N} (\underset{y_k}{f(x_k)} - \underset{a}{w(x_k)})^2}}_{E(a)\text{ - funkcja błędu}}$$

Szukamy minimum funkcji błędu E (ze względu na parametr a):

$$E'(a) = 0 \quad \leftarrow \text{warunek konieczny ekstremum}$$

$$\sum_{k=0}^{N} 2(f(x_k) - a)^1 \cdot (-1) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum^{N} f(x_k) - \sum^{N} a = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N} f(x_k) - \underbrace{\sum_{k=0}^{N} a}_{(N+1)a} = 0$$

$$a = \frac{\sum_{k=0}^{N} f(x_k)}{N+1} = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k}{N+1} \leftarrow \text{średnia arytmetyczna obserwacji}$$

$y_0, y_1, \dots, y_N$

$w^* \in \Pi_0 \equiv \mathcal{X}$

Element optymalny (najlepiej dopasowany) w sensie aproksymacji się do danych postaci

x_0	x_1	x_2	...	x_N
y_0	y_1	y_2	...	y_N
$= f(x_0)$	$= f(x_1)$	$= f(x_2)$		$= f(x_N)$

$(x_k, f(x_k))$, $f(x_k) = y_k$ – wartości pomiarów

jest element

$$\boxed{w^*(x) = \frac{\sum_{k=0}^{N} y_k}{N+1}}$$