Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?
2. (+) Czy n-wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?
3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.
5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po scieżce o dł. co najwyżej 2.
7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.
8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.
9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.
10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.