

L12 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	suma
pkt.	1	1	1	0,5	1	1	1	1	1	1	1	1	11,5
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12

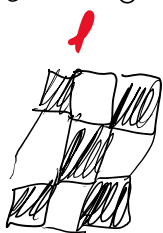
1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?
2. (+) Czy n -wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?
3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.
4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $\deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $\deg(v) \geq (n-1)/2$.
5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $\deg(u) + \deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?
6. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera króla. Król to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po ścieżce o dł. co najwyżej 2.
7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n -wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.
8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.
9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G .
10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.
11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.
12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G , czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G , a \bar{G} oznacza dopełnienie grafu G .

1 (done)

7 January, 2024 14:10

1. Dana jest kostka sera $3 \times 3 \times 3$. Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?

Zadanie podobne do tego z szachownicą.
Pomysłujemy każdą kostkę na dwa kolory: czarny lub biały.
Kostki na rogach i po środkach ścian będą czarne, pozostałe białe



„rozcinając” naszą kostkę
możemy zauważyć że mamy
14 czarnych i 13 białych, środkowa
jest biała.

Odwracając ścieżkę (idąc od środka) mamy:

$B \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \dots \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow \times$
1 1 2 2 13 13

Brakuje 14 białej^o
kostki, a jedna czarna
nie zostanie zjedzona.

Trochę jest więc niemożliwe.

+2

7 January, 2024 14:10

2. (+) Czy n -wymiarowa kostka Q_n zawiera ścieżkę Hamiltona?

3. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Możemy skorzystać z twierdzenia z wykładu (12, cz. 1) - konkretniej tw. Diraca

Aby warunek z tw. zachodził: $n > 1$ (dla $n=1$ dwa wierzchołki)

I $n=1$ Dwóch uczniów z jednym przyjacielem (sobą nawzajem) w jednej ławce, ^{po dwa}

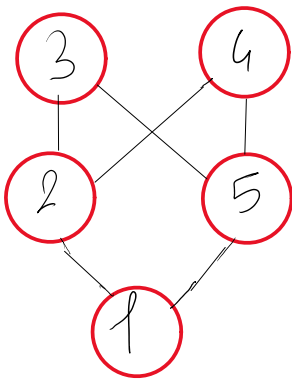
I $n > 1$ w grafie ^{graf przyjaciół - krawędzie łączą przyjaciół} (gdzie wierzchołkami są uczniowie) istnieje cykl Hamiltona.

Usuwanie co drugiego krawędzi \Rightarrow otrzymujemy ławkę
Można usunąć na dwa sposoby \Rightarrow dwa ustawienia.

-4 (done)

7 January, 2024 14:10

4. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $\deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $\deg(v) \geq (n-1)/2$.



5 wierzchołków

4, 2, 2, 3, 3

Nie ma tu cyklu Hamiltona.

✓ ew. dowód czemu

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona

- Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.
- Jeśli graf $G = (V, E)$ zawiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Katarzyna Falach (B UWIR) MDA 2023 9/11

I korzystamy teraz z info z wykładu. Usuwamy 2 wierzchołki 2, 5, otrzymujemy 3 spójne składowe, punkt drugi jest więc niespełniony.

5. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $\deg(u) + \deg(v) \geq n - 1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

6. (-) Pokaż, że każdy ranking zawiera król. Jeśli to nieudane, a lista
tego zadania jest do każdego innego po stronie a) i b) co najmniej 2.

Wierzchołek v grafu skierowanego jest królem jeśli
do każdej krawędzi u grafu istnieje ścieżka długości
1 lub 2 z v do u .

Turniej: każdy wierzchołek
ma krawędź jednokierunkową
z każdym innym wierzchołkiem.

Zdefiniujmy sobie jeszcze

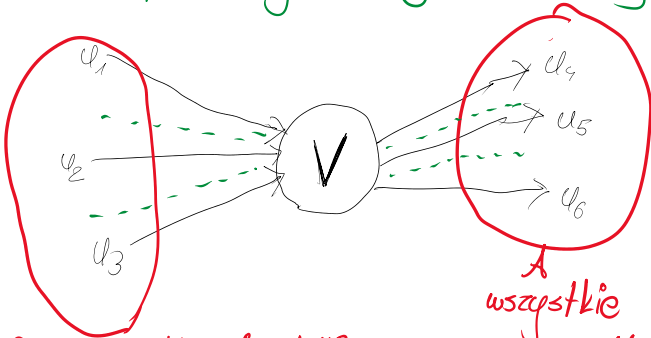
- krawędź wchodząca $u \rightarrow v$ u pokonało v

- wychodząca $v \rightarrow u$ v pokonało u

A więc jeśli v jest królem to $\forall u$ v pokonało u lub v pokonało kogoś
któ pokonał u

Niech v będzie wierzchołkiem z największą w grafie
ilością krawędzi wychodzących. Pokażemy, że v jest królem.

Właściwy dowód
zaczyna się tutaj



β - wszystkie wierzchołki
które pokonały v

wszystkie wierzchołki pokonane
przez v

które pokonały v

Rozważmy teraz dowolne u , i pokażemy że jest spełniony warunek:

I $u \in A$ koniec dowodu dzięki krawędzi $u \rightarrow v$

II $u \in B$ a) $\exists u' \in A$ że istnieje krawędź $u' \rightarrow u$ (o ile u ma przynajmniej jedną
wchodzącą krawędź z A)

Mamy wtedy ścieżkę $v \rightarrow u' \rightarrow u$

Dw.p.p. v nie jest wtedy wierzchołkiem z największą
ilością krawędzi wychodzących (bo $\exists u \in \beta$ z krawędzią wychodzącą
do każdego wierzchołka z A i do v)
Sprzeczność, v nie spełnia założenia

7. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n -wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.

8. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

9. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G) - 1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G .

10. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

11. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

12. Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G , czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G , a \bar{G} oznacza dopełnienie grafu G .