Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Ścieżka i cykl Hamiltona

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem spójnym nieskierowanym.
Ścieżka Hamiltona grafu G to ścieżka, która zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.
Cykl Hamiltona grafu G to cykl, który zawiera każdy wierzchołek $v \in V$.

Ścieżka/cykl Hamiltona

Sprawdzenie, czy graf $G = (V, E)$ zawiera ścieżkę lub cykl Hamiltona jest problemem trudnym obliczeniowo - jest to problem NP-trudny.

Warunki konieczne na istnienie cyklu Hamiltona

- Jeśli graf $G = (A \cup B, E)$ jest dwudzielny, to warunkiem koniecznym na istnienie cyklu Hamiltona jest: $|A| = |B|$.
- Jeśli graf $G = (V, E)$ zaiera cykl Hamiltona, to dla dowolnego zbioru $S \subseteq V$, graf $G - S$ (powstały po usunięciu wierzchołków z S wraz z incydentnymi krawędziami) zawiera co najwyżej $|S|$ spójnych składowych.

Warunki dostateczne na istnienie cyklu Hamiltona

Twierdzenie Diraca

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i minimalnym stopniu wierzchołka $\delta(G) \geq |V|/2$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Warunki dostateczne na istnienie cyklu Hamiltona

Twierdzenie Ore'a

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym o co najmniej trzech wierzchołkach i takim, że dla każdych dwóch wierzchołków u i v niepołączonych krawędzią zachodzi $deg(u) + deg(v) \geq |V|$, to G zawiera cykl Hamiltona.

Kolorowanie grafu

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem prostym.
Kolorowaniem wierzchołkowym grafu G nazywamy funkcję
$f : V \rightarrow$ *Kolory* taką, że $\forall_{(u,v) \in E} f(u) \neq f(v)$.
$\chi(G)$ - liczba chromatyczna G to najmniejsza liczba kolorów, jaką można pokolorować graf G.

Ile wynosi $\chi(G)$, jeśli G jest:

- grafem dwudzielnym?
- kliką n- wierzchołkową?
- cyklem o długości $2n + 1$?

Liczba chromatyczna - własności

$\omega(G)$ to wielkość największej kliki zawartej w G.

Zauważamy, że $\chi(G) \geq \omega(G)$.
Czy istnieją grafy, dla których zachodzi: $\chi(G) > \omega(G)$?

Algorytm sekwencyjny kolorowania grafu

Niech $Kolory = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
$G = (V, E)$
Algorytm sekwencyjny:

1. Ustaw wierzchołki z V w pewien ciąg.
2. Dla każdego wierzchołka v w kolejności dyktowanej przez ciąg wykonaj:
   przypisz wierzchołkowi v najmniejszą liczbę naturalną spośród takich, które nie są przypisane żadnemu sąsiadowi v.

$\Delta(G)$ to największy stopień wierzchołka w G.

$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Twierdzenie Brooksa

Twierdzenie Brooksa

Jeśli G nie jest kliką ani nieparzystym cyklem, to $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Kolorowanie grafów przedziałowych

Zbiór wierzchołków to odcinki na prostej. Dwa odcinki są połączone krawędzią, jeśli się przecinają.