4 (done)

7 January, 2024 14:28

L12.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sprawdź, że współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

(2) $$Q_n^{NC}(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k f(a + k \cdot h_n) \qquad \left(h_n := \frac{b-a}{n}\right)$$

są takie, że $A_k = A_{n-k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$.

6.5.1 Współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa

Jawnym wzorem na współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa jest

$$A_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k} h}{k!(n-k)!} \int_0^n \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (t-j) \right] dt$$

gdzie t jest taką zmienną, że $x = a + th$.

$$(-1)^{n-k} = \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{n-2k}}{(-1)^n}$$

$$t = \begin{cases} s = n - t \\ ds = -dt \end{cases}$$

$$A_k = \frac{(-1)^{n-k} \cdot h_n}{k!(n-k)!} \cdot \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (t-j)\, dt$$ ze wzoru

$$A_{n-k} = \frac{(-1)^{n-(n-k)} \cdot h_n}{(n-k)!(n-(n-k))!} \cdot \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-k}}^{n} (t-j)\, dt =$$ ze wzoru z podst. $n-k$ za k

$$\frac{(-1)^k h_n}{(n-k)!\,k!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-k}}^{n} (t-j)\, dt$$

$t-j \quad n-s-j \quad -n+s+j$

$$A_k = \left\{ \begin{matrix} s = n-t \Rightarrow t = n-s \\ ds = -dt \Rightarrow dt = -ds \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{n-k} \cdot h_n}{k!(n-k)!(-1)^n} \cdot \int_n^0 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (n-s-j)\, ds =$$

ta na repetach podziała się magia. Wychodzimy ze wzoru z $(s-j)$. Za s podstawiamy $n-t$, czyt. przez podst. Obracamy całkę na od n do 0, ale mamy $-ds$ więc się to zeruje i mamy znów od 0 do n.

$$\frac{(-1)^{2n-k} \cdot h_n}{n!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n-k}}^{n} (s-(n-j))\, ds = \frac{(-1)^{2n-k} \cdot h_n}{n!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n-k}}^{n} (s-i)\, ds =$$

$$\frac{(-1)^k \cdot h_n}{n!(n-k)!} \int_0^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq n-k}}^{n} (s-i)\, ds = A_{n-k}$$

Parzystość $2n-k$ równa parzystości k. Gubimy jeden minus, ale możemy to zignorować!