

Zadanie 7

9 October, 2023 21:28

L1.7. 1 punkt Wykorzystując własności szeregów naprzemiennych, sprawdź, że do obliczenia wartości $\ln 2$ z błędem mniejszym niż $\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$ trzeba użyć ok. dwóch milionów wyrazów szeregu

$$\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(x-1)^k}{k}$$

dla $x = 2$. Wykaż, że zastosowanie prostego związku $\ln 2 = \ln[e(2/e)]$ może znacznie przyspieszyć obliczenia.

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{(2-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}$$

$$|(-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$1 < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot k$$

$$k > \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 10^{-6}}$$

$$k > 2000000$$

$$\ln\left(e \cdot \frac{2}{e}\right) = \ln e + \ln\left(\frac{2}{e}\right) = 1 + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$$

$$|(-1)^{k-1} \frac{\left(\frac{2}{e} - 1\right)^k}{k}| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-6}$$

$$2000000 \left(\frac{e-2}{e}\right)^k < k$$

$$< 1$$

21