Lista07

29 November, 2024 20:21

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu
   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.
2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:
   (a) $a_n = n^2$
   (b) $a_n = n^3$
   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.
3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$. z 23'
   Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$.
4. Oblicz funkcje tworzące ciągów:
   (a) $a_n = n$ dla parzystych n i $a_n = 1/n$ dla nieparzystych n
   (b) $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ ($H_0 = 0$).
5. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Znajdź funkcję tworzącą ciągu b_n postaci $(a_0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_6, \ldots)$, czyli takiego, że dla każdego naturalnego k, $b_{3k} = a_{3k}$ oraz $b_{3k+1} = b_{3k+2} = 0$.
   Wskazówka: Użyj zespolonych pierwiastków stopnia 3 z 1.
6. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu
   $(a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots)$. Tzn. szukamy funkcji tworzącej dla ciągu $< b_n >= E^k < a_n >$.
7. Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
   (a) na dowolne składniki,
   (b) na różne składniki nieparzyste,
   (c) na składniki mniejsze od m,
   (d) na różne potęgi liczby 2.
8. (+) Niech p_n oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np. $p_4 = 2$, bo interesujące nas podziały to $1+3$ i $2+2$. Podaj funkcję tworząca dla ciągu p_n.
9. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:
   $n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.
10. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż,że:
    (a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,
    (b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,
    (c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.
11. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.
    Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.
    Hiperpłaszczyzna w R^n zadana jest wzorem $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$, gdzie przynajmniej jedno a_i jest niezerowe. Na ile maksymalnie obszarów można podzielić n-wymiarową przestrzeń R^n za pomocą m hiperpłaszczyzn? Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_ix^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

1. Niech $A(x)$ będzie funkcją tworzącą ciągu a_n. Podaj postać funkcji tworzącej dla ciągu
   $s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
   Wskazówka: Trzeba użyć funkcji tworzącej $\frac{1}{1-x}$.

$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, co podstawiamy pod wzór na funkcję tworzącą

$$\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot x^{n-k}\right) =$$

$\to$ $a_0x^0 + a_0x^0x_1 + a_1x^1x_0$ zapis działa a_0x_1 a_1x_1

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot x^n\right) = A(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{A(x)}{1-x} \quad \square$$

2. Wyznacz funkcje tworzące ciągów:
   (a) $a_n = n^2$
   (b) $a_n = n^3$
   Wskazówka: Przyda się funkcja tworząca $\frac{1}{1-x}$.

to wiemy z wykładu

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{F}\right) = \frac{\frac{d}{dx}F}{F^2}$$

(a) $a_n = n^2$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

(a) $a_n = n^2$

Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

$A'(x)x$

$\left(\frac{1}{1-x}\right)'$

$\frac{1}{1-x}$ to Funkcja tworząca dla n

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

potrzebujemy jeszcze przesunięcia o x $(\cdot x)$

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

znów pochodna

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

i znów przesuwamy o x

$$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$$

i dostajemy Funkcję tworzącą dla n^2: $A(x) = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$

(b) $a_n = n^3$ znów pochodna

$$A'(x) \cdot x = \frac{x^2+4x+1}{(1-x)^4} \cdot x = \frac{x^3+4x^2+x}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n$$

3. (+) Wyznacz funkcję tworzącą ciągu: $\binom{n+k}{k}$

Wskazówka: Odpowiednia potęga funkcji $\frac{1}{1-x}$

Szukamy wzoru $A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k$

1° W dowodzie skorzystamy z dwóch wzorów:

https://pl.wikipedia.org/wiki/Symbol_Newtona#Uog%C3%B3lnien

$\binom{z}{n} = (-1)^n \binom{n-z-1}{n}$

$$\binom{n}{k} = (-1)^k \binom{k-n-1}{k} \Rightarrow \binom{n+k}{k} = (-1)^k \binom{-n-1}{k} = (-1)^k \binom{-(n+1)}{k} = (-1)^k \binom{y}{k} \leftarrow y = -(n+1)$$

2° W szczególności dla $x = 1$ lub $y = 1$ dostaniemy wzór na tzw. szereg Newtona $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

https://pl.wikipedia.org/wiki/Dwumian_Newtona

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{y}{k} x^k \overset{1^\circ}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{y}{k} (-x)^k \overset{2^\circ}{=} (1+(-x))^y = (1-x)^{-(n+1)} = \frac{1}{(1-x)^{n+1}}$$

9. Sprawdź prawdziwość następujących relacji:
$n^2 \in O(n^3)$; $n^3 \in O(n^{2.99})$; $2^{n+1} \in O(2^n)$; $(n+1)! \in O(n!)$; $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$; $\sqrt{n} \in O(\log_2 n)$.

a) $n^2 \in O(n^3)$ $n_0 > 1$ $c > 0$

$n^2 \leq c \cdot n^3$ ✓

b) $n^3 \in O(n^{2,99})$ dla każdego c znajdziemy

$n^3 \leq c \cdot n^{2,99}$ F ↗ n_0 takie że $n^3 > c \cdot n^{2,99}$

c) $2^{n+1} \in O(2^n)$

$2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$, dowolne n_0, $c > 2$ ✓

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

$2 \cdot 2^n \leq c \cdot 2^n$, dowolne n_0, ...

d) $(n+1)! \in O(n!)$ Dla jakiegoś n_0 L > P

$(n+1)n! \leq c \cdot n!$ **F**

e) $\log_2 n \in O(\sqrt{n})$ $\log_2 n = x \Rightarrow 2^x = n \Leftrightarrow \log_2(n) \leq x \Rightarrow 2^x \leq n$

$\log_2(n) \leq c \cdot \sqrt{n}$

$2^{c\sqrt{n}} \leq n$ $2^c \cdot 2^{\sqrt{n}} \leq n$ chyba nie?

f) analogicznie do e

10. Niech $f, g, h : N \to R$. Pokaż, że:

(a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,
(b) $f(n) = O(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Omega(f(n))$,
(c) $f(n) = \Theta(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $g(n) = \Theta(f(n))$.

(a) jeśli $f(n) = O(g(n)$ i $g(n) = O(h(n))$, to $f(n) = O(h(n))$,

$$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$$

Z definicji funkcji O wiemy, że funkcja f(n) jest rzędu co najwyżej g(n). Oznaczmy rząd funkcji f(n) jako rF, g(n) jako rg. Możemy wtedy zapisać rF ≤ rg. W drugim analogicznie rg ≤ rh

rF ≤ rg ≤ rh ⇒ rF ≤ rh ⇒ $f(n) = O(h(n))$ ✓

b i c analogicznie z odpowiednich definicji ⇒ wszystkie prawda

11. Niech f i g będą dowolnymi wielomianami o stopniach k i l takimi, że $k < l$.

* Pokaż, że wówczas $f(n) = o(g(n))$.

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Z definicji:

$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

a z treści zadania wiemy że g(n) jest wielomianem wyższego stopnia z def. * prawdziwe.