Lista02

11 October, 2024 12:54

1. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \leq j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

2. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna dzieli drugą.

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10.

5. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

6. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)

7. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

8. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$
Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

9. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:
$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$
.

10. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:
$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$
Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

11. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: zielony lub pomarańczowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

12. Na ile sposobów $3n$ dzieci może uformować trzy równoliczne koła graniaste? (Dwie formacje są różne jesli istnieje dziecko, które kogo innego trzyma lewą ręką w obu układach lub kogo innego prawą ręką.)

$3(n-1)!$?

13. Niech n będzie liczbą naturalną. Na ile sposobów można pokolorować pola tablicy $n \times n$ na dwa kolory (każde pole jednym kolorem) tak, by liczba pól jednego koloru nie przewyższała liczby pól drugiego koloru o więcej niż 1?

P: $\binom{n^2}{\frac{n^2}{2}}$

NP: $2 \cdot \binom{n^2}{\frac{n^2}{2}-1}$

14. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:
$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}.$$

15. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

1. (+) Dany jest ciąg liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pokaż, że istnieją takie i oraz j, $i \le j$, że suma $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$ jest podzielna przez n.

$S_k = a_1 + \ldots + a_k \quad a_i + \ldots + a_j = S_j - S_{i-1}$

Szukamy $(S_j - S_{i-1}) \bmod n = 0 \Rightarrow S_j \equiv S_{i-1} \pmod n$

Mamy $n+1$ sum S_k, a tylko n wartości mod n $(0 - n-1)$

$\Rightarrow$ z PP wiemy, że conajmniej dwie przystają mod n

$\Rightarrow$ istnieje $\square$

2. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, z których jedna dzieli drugą.

Dowolne $n \Rightarrow 2^k \cdot r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ nieparzystych

Jest dokładnie n nieparzystych w $1-2n$ $(1, 3, \ldots, 2n-1)$ zał. $k_1 > k_2$

Z PP min. 2 z takim samym $r \Rightarrow \frac{2^{k_1} \cdot r}{2^{k_2} \cdot r} = 2^{k_1 - k_2} \in \mathbb{Z}$ $\square$

3. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje liczba podzielna przez n, której zapis dziesiętny złożony jest tylko z zer i jedynek.

Weźmy $n+1$ liczb tylko z jedynek $(1, 11, \ldots, \underbrace{1\ldots\ldots1}_{n+1})$

wer. a) któraś podzielna przez $n \Rightarrow \square$

wer. b) w.p. z PP min. 2 a, b $(a > b)$ gdzie $a \equiv b \bmod n \Rightarrow a - b$ składa się tylko z 1 i 0 i jest podzielne przez n

4. Pokaż, że spośród dowolnych trzech liczb całkowitych potrafimy wybrać dwie a i b takie, że $a^3b - ab^3$ jest podzielne przez 10. $\leftarrow 2$ i 5

$a^3b - ab^3 = ab(a^2 - b^2) = ab(a-b)(a+b)$

[Wer. $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow ab \equiv 0 \vee a - b \equiv 0 \vee a + b \equiv 0$

War. $ab(a-b)(a+b) \equiv 0 \mod 5 \Rightarrow ab \equiv 0 \vee a-b \equiv 0 \vee a+b \equiv 0$

Dowolna $a,b,c \equiv 0 \mod 5$ to war. spełniony

w.p.p. $\{a,b,c\} \equiv_{mod 5} \{1,2,3\} \vee \{1,2,4\} \vee \{2,3,4\} \vee \{2,3,5\} \vee \{3,4,5\}$ lub z duplikatami

$1+4 \equiv 2+3 \equiv$ dupl. $-$ dupl. $\equiv 0 \mod 5$

$\square$ dla 5, analogicznie dla 2 $\square$

5. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

Nie wprost $\Rightarrow \neg\exists X,\ K \times K \Rightarrow$ każda osoba graniczy z mężczyzną

Optymalne rozłożenie:

$M_1 K_1 K_2 M_2 M_3 K_3 K_4 M_4 M_5 K_5 K_6 M_6 M_7 K_7 K_8 M_8 M_9 K_9 K_{10} M_{10} M_{11} K_{11} K_{12} M_{12} M_{13} K_{13}$

Dla każdej nieparzystej nie działa $\square$

6. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n + 1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)

7. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

8. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

$P = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k} = L$

Kombinatorycznie prościej z tej postaci

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & \text{dla } k = 0 \text{ lub } k = n \\ \underbrace{\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}} & \text{dla } 0 < k < n \end{cases}$$

Bo wtedy mamy wyjęty 1 i sumujemy opcję że albo wyjęliśmy z k albo nie z k

9. Podaj interpretację następującej tożsamości w terminach zbiorów:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$$

L: Z n pracowników k kierowników, z k kierowników m menadżerów

P: Z n pracowników m menadżerów, z reszty k-m menadżerów

L:

P:

Otrzymujemy tyle samo kadry każdego szczebla, mamy tyle samo sposobów

10. (+) Wykaż prawdziwość tożsamości Cauchy'ego:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?

Kombinatorycznie:

L: Ilość sposobów na wybranie r ludzi z m mężczyzn i n kobiet

P: -//- 0 mężczyzn i r kobiet + 1m i (r-1) kob. ....

c.b.d. L = P $\square$

Indukcyjnie (względem m)

I $m=0$

$\binom{n}{r} = \binom{0}{0}\binom{n}{r-0}$ ✓

II Zał. $\binom{m+n}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i}$

III Pokażmy $\binom{m+n+1}{r} = \sum_{i=0}^{r}\binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i}$

$P = \sum_{i=0}^{r}\binom{m+1}{i}\binom{n}{r-i} = \sum_{i=0}^{r}\left(\binom{m}{i}+\binom{m}{i-1}\right)\binom{n}{r-i} =$

$\sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i} + \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i-1}\binom{n}{r-i} =$

$\binom{m+n}{r} + \sum_{i=0}^{r}\binom{m}{i}\binom{n}{r-i-1} =$

$\binom{m+n}{r} + \binom{m+n}{r-1} = \binom{m+n+1}{r} = L$ $\square$

11. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: zielony lub pomarańczowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

Rozważmy 3 wiersze tej płaszczyzny

z P.P. kolor się powtarza w każdej kolumnie.

Jest 8 opcji kolumn $\left(\begin{matrix} Z \\ P \\ Z \end{matrix}, \begin{matrix} Z \\ Z \\ Z \end{matrix}, \ldots \right)$. Na siatce 9x3 powtarzają się więc dwie kolumny (z dwoma kolorami) (PP) co daje nam szukany prostokąt □

14. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego naturalnego n zachodzi:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}.$$

Induction Hypothesis

This is our induction hypothesis:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

(ew. moja wersja zad 12 / L2 2023)

Induction Step

This is our induction step:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k && \text{Inductive Hypothesis} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0}x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \binom{n}{n}y^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^{n-k}y^{k+1} \\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n+1-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}x^{n+1-k}y^k \\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)x^{n+1-k}y^k \\
&= \binom{n+1}{0}x^{n+1} + \binom{n+1}{n+1}y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k && \text{Pascal's Rule} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}y^k
\end{aligned}$$

The result follows by the Principle of Mathematical Induction.

■

15. (-) W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tej samej kolumnie, w tym samym wierszu i na tej samej przekątnej. Udowodnij, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zakres wartości: $-n$ — n : $2n+1$ możliwości

n wierszy, n kolumn, 2 przekątne : $2n+2$ sum

stąd P.P. □