L4 zad.	+1	2	3	4	5	6	7	8	-9	-10	-11	-12	13	suma
pkt.														
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	11 (9 na dekl.)

L4

26 October, 2023 23:08

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?
3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?
4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?
5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wsród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?
6. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.
7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a,b) = 1$.)
8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.
9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
12. (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.
13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

+1

26 October, 2023 23:13

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

2

26 October, 2023 23:13

2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

3

26 October, 2023 23:13

3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?

4

26 October, 2023 23:13

4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?

5

26 October, 2023 23:13

5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wsród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?

6

26 October, 2023 23:13

6. **13** dziewczyn i **13** chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

7

26 October, 2023 23:13

7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a,b) = 1$.)

8

26 October, 2023 23:13

8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

-9

26 October, 2023 23:13

9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

-10

26 October, 2023 23:13

10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

-11

26 October, 2023 23:13

11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.

-12

26 October, 2023 23:13

12. (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

13

26 October, 2023 23:13

13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.