5 (done)

19 October, 2023 11:44

L3.5. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Załóżmy, że dla każdego $x \in X_{fl}$ zachodzi $\mathrm{fl}(\mathrm{tg}(x)) = \mathrm{tg}(x)(1+\varepsilon_x)$, gdzie $|\varepsilon_x| \le 2^{-t}$, natomiast t oznacza liczbę bitów przeznaczoną na zapamiętanie mantysy. Niech dane będą liczby maszynowe y_1, y_2, y_3, y_4 oraz taka liczba maszynowa x, że $x \cdot 2^{-8}$ też jest liczbą maszynową. Sprawdź czy poniższy algorytm obliczania wartości wyrażenia $\sum_{i=1}^{4} y_i \mathrm{tg}(4^{-i}x)$ jest numerycznie poprawny:

```
S:=0;

  for i from 1 to 4
    do
      S:=S+y[i]*tg(4^(-i)*x)
    od;

Return(S)
```

Zał. $rd(x\cdot 2^{-8}) = x\cdot 2^{-8}$

$rd(x) = x$

Błędy:

„$\cdot$" $\rightarrow |\alpha_i| \le 2^{-t}$

„tg" $\rightarrow |\varepsilon_i| \le 2^{-t}$

„+" $\rightarrow |\beta_i| \le 2^{-t}$

liczymy błędy z mnożenia, liczenia tg i dodawania

$$fl(tg(x)) = tg(x)(1+\varepsilon_x)$$

$$tg(\underbrace{4^{-i}\cdot x}_{= rd(4^{-i}\cdot x)})$$

$$fl(\underbrace{y_i \cdot tg_i}_{= y_i \cdot tg(4^{-i}\cdot x)}) = y_i tg_i (1+\alpha_i)(1+\varepsilon_i)$$

$$(((0 + y_1 tg_1(1+\alpha_1)(1+\varepsilon_1) + y_2 tg_2 (1+\alpha_2)(1+\varepsilon_2)) + y_3 tg_3 (1+\alpha_3)(1+\varepsilon_3))(1+\beta_3) \ldots$$

← błędy przy każdym dodawaniu, mnożeniu, wyliczeniu tg

Jak później to wymnożymy wszystko i złożymy w sumę to dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{4} y_i tg_i (1+E_i)$$

gdzie zgodnie z tw. o kumulacji błędów:

$|1+E_1| \lesssim 5\cdot 2^{-t}$ $\quad |1+E_2| \lesssim 4\cdot 2^{-t}$

$|1+E_3| \lesssim 3\cdot 2^{-t}$ $\quad |1+E_4| \lesssim 2\cdot 2^{-t}$

(liczymy ilość błędów, mniejszy lub prawie równy)

co przekształcamy w

$$\sum_{i=1}^{4} (\underbrace{y_i (1+E_i)}_{\tilde{y}_i}) tg_i$$

$\tilde{y}_i$ - mniej więcej y_i

algorytm jest numerycznie poprawny dla $\tilde{y}_i$

$\bar{y}_i$ - mniej więcej y_i

algorytm jest numerycznie poprawny dla $\bar{y}_i$