7 (done - 2pkt)

24 November, 2023 23:46

ie $\eta_x \in (a,b) \ni \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

L7.7. $\boxed{\text{2 punkty}}$ Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f, że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\le n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$M(x_j) = f(x_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

$$f(x) - L(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = g(x)$$

$$f(x) - M(x) = \frac{f^{(n+1)}(\eta x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) = h(x)$$

by pokazać że $f(x)$ jest pomiędzy $L(x)$ a $M(x)$ będziemy rozważać znaki nowo powstałych funkcji. Skoro wiemy, że pochodna jest ciągła i ma stały znak, to na potrzeby naszych rozważań możemy ją pominąć.

$$g(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = (x - x_0) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$h(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (x - x_i) = (x - x_{n+1}) \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

to samo, ten sam znak, znów dla uproszczenia pomijamy

I możemy teraz rozważyć znak na krańcach przedziałów $(x = x_0, x_{n+1})$ $\quad F = L / M$ odpowiednio

dla $x \in (x_0, x_{n+1})$

$(x - x_0) > 0 \longrightarrow$ odpowiada $F(x) - L(x)$

$(x - x_{n+1}) < 0 \longrightarrow$ -„- $F(x) - M(x)$

W zależności od znaków pochodnej i pominiętego iloczynu

W zależności od znaków pochodnej i pominiętego iloczynu zachodzi jeden z dwóch przypadków

I

$F(x) - L(x) > 0$

$F(x) - M(x) < 0$

$\Downarrow$

$F(x) > L(x)$

$F(x) < M(x)$

$\Downarrow$

$L(x) < f(x) < M(x) \leftarrow x \in (x_0, x_{n+1})$

$\Downarrow$ + krawędzie

$L(x) \leq f(x) \leq M(x) \leftarrow x \in [x_0, x_{n+1}]$

II

$F(x) - L(x) < 0$

$F(x) - L(x) > 0$

$\Downarrow$

$F(x) < L(x)$

$F(x) > M(x)$

$\Downarrow$

$M(x) < f(x) < L(x)$

$\Downarrow$ + krawędzie

$M(x) \leq f(x) \leq L(x)$