https://skos.ii.uni.wroc.pl/course/view.php?id=561

# Ćwiczenia
# z ANALIZY NUMERYCZNEJ

## Lista nr 12b

10 stycznia 2024 r.

Zajęcia 16 stycznia 2024 r.
Zaliczenie list 12a i 12b: **od 6 pkt. łącznie.**

**Uwaga!** Z list 12a i 12b **nie można** zdobyć łącznie więcej niż **12 punktów**.

**L12.7.** 1 punkt O funkcji ciągłej $f$ wiadomo, że $\max_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)| < 2024$. Załóżmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ potrafimy z dużą dokładnością obliczać $f(x)$. Opracuj algorytm wyznaczania przybliżonej wartości całki $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ z błędem bezwzględnym nie przekraczającym $\varepsilon$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ oraz $\varepsilon > 0$ są dane.

**L12.8.** 1 punkt Jak należy dobrać $n$, aby stosując złożony wzór Simpsona $S_n$ obliczyć przybliżoną wartość całki $\displaystyle\int_{-3\pi}^{\pi/6} \sin(5x - \pi/3)\,\mathrm{d}x$ z błędem względnym $\le 10^{-10}$?

**L12.9.** 1 punkt Sprawdź, że ciąg złożonych wzorów trapezów spełnia związek

$$T_{2n}(f) = \frac{1}{2}\left[T_n(f) + M_n(f)\right] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

gdzie

$$M_n(f) := h_n \sum_{i=1}^{n} f\left(a + \frac{1}{2}(2i-1)h_n\right), \qquad h_n := \frac{b-a}{n}.$$

Korzystając z tej obserwacji sformułować oszczędny algorytm konstrukcji tablicy Romberga.

**L12.10.** **Włącz komputer!** 1 punkt Stosując metodę Romberga znajdź przybliżenia $T_{m,k}$ $(0 \le m \le 20;\ 0 \le k \le 20 - m)$ następujących całek:

a) $\displaystyle\int_{-3}^{2} (2024x^8 - 1977x^4 - 1981)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, c) $\displaystyle\int_{-3\pi}^{\pi/6} \sin(5x - \pi/3)\,\mathrm{d}x$.

Skomentuj wyniki.

**L12.11.** 2 punkty Wykaż, że ciąg elementów dowolnej kolumny tablicy Romberga, utworzonej dla funkcji $f \in C[a, b]$, jest zbieżny do całki $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

**L12.12.** 1 punkt Korzystając z faktu podanego na wykładzie, tzn. **bez konieczności** rozwiązywania układu równań nieliniowych, dobierz węzły $x_0, x_1, x_2$ oraz współczynniki $A_0, A_1, A_2$ kwadratury

$$Q_2(f) := A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

w taki sposób, aby równość $\int_{-5}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x = Q_2(f)$ zachodziła dla wszystkich wielomianów stopnia $\le 5$.

**L12.13.** $\boxed{\text{2 punkty}}$ W języku `PWO++` procedura `LegendreZeros(`$m$`)` znajduje z dużą dokładnością wszystkie miejsca zerowe $m$-tego wielomianu Legendre'a. Używając tej procedury, opracuj efektywny **algorytm** znajdowania takich węzłów $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ oraz współczynników $A_0^{(n)}, A_1^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$, że dla każdego wielomianu $w$ stopnia mniejszego od $2n+2$ zachodzi

$$\int_{-7}^{4} w(x)\,\mathrm{d}x = Q_n(w),$$

gdzie $Q_n(f) := \sum_{k=0}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$.

---

**L12.14.** $\boxed{\textbf{Dodatkowe zadanie programistyczne}\text{ (do 28 stycznia; do 6 punktów)}}$ [1]

Węzły równoodległe używane w kwadraturach Newtona-Cotesa bywają użyteczne dla wielomianów niskich stopni, ale mogą okazać się złym wyborem, gdy stopień jest wysoki. Należy rozważyć kwadratury interpolacyjne dla całek postaci $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$ z węzłami będącymi:

(a) zerami wielomianu Czebyszewa pierwszego rodzaju $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n);$$

(b) zerami wielomianu Czebyszewa drugiego rodzaju $U_{n-1}(x)$, które są punktami ekstremalnymi $T_n(x)$ w przedziale $(-1, 1)$,

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1); \tag{1}$$

(c) wartościami danymi wzorem (1) wraz z $x_0 = 1$ i $x_n = -1$.

**Wyprowadź** — podając **wszystkie szczegóły** rozumowania — **jawne wzory** na wagi kwadratur w każdym z wymienionych wypadków. Przetestuj uzyskane kwadratury dla **wielu** różnego rodzaju funkcji $f$. **Skomentuj wyniki**.

**Literatura**


[1] G. Dahlquist, Å. Björck, *Numerical Methods in Scientific Computing*, Volume 1, SIAM, 2008.


*(–) Paweł Woźny*

[1] Patrz pkt. 10. regulaminu zaliczania ćwiczeń.