8 (done)

25 October, 2023 16:47

L5.8. 1 punkt Zaproponuj **numeryczną metodę** wyznaczania wykładnika zbieżności jednokrokowej metody iteracyjnej (por. zadanie **L5.5**) rozwiązywania równania nieliniowego $f(x) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x_{n+1}-\alpha|}{|x_n-\alpha|^p} = C$$

błąd: $\varepsilon_n = x_n - \alpha \to |\varepsilon_{n+1}| \overset{n\to\infty}{\approx} c\cdot|\varepsilon_n|^p$

$$|\varepsilon_n| \approx c\cdot|\varepsilon_{n-1}|^p$$

$$c \approx \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p} = \frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}$$

$$\underbrace{\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|^p}}_{L_1} = \log c = \underbrace{\log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|^p}}_{L_2}$$

$\log_a(x\cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r\cdot\log_a x \qquad \log_a\frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$L_1 - L_2 = 0$ korzystamy ze wzorów z liceum

$$\log|\varepsilon_{n+1}| - p\cdot\log|\varepsilon_n| + p\cdot\log|\varepsilon_{n-1}| - \log|\varepsilon_n| = 0$$

$$\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = p\cdot\log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|}$$

$$p = \frac{\log\frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|}}{\log\frac{|\varepsilon_n|}{|\varepsilon_{n-1}|}}$$

p znaleziony w internecie slajd to potwierdza

Wykładnik zbieżności

- Określa szybkość zbieżności metod iteracyjnych
- Metoda jest rzędu p, jeżeli istnieje stała c taka, że dla dwóch kolejnych przybliżeń x_k i x_{k+1} zachodzi

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\varepsilon_{k+1}|}{|\varepsilon_k|^p} = c$$

gdzie $\varepsilon_k = x_{k+1} - x_k$.

Przypadki specjalne

$p=1$ (metoda liniowa),
$p>1$ & $p<2$ (metoda superliniowa)
$p=2$ (metoda kwadratowa),
$p=3$ (metoda kubiczna)

Zbieżność

1. $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$... liniowa z C = 10^{-1}
2. $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}$... liniowa z C = 10^{-2}
3. $10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}$... superliniowa
4. $10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-8}, 10^{-16}$... kwadratowa