Lista nr 10 z matematyki dyskretnej

1. Załóżmy, że w grafie G wszystkie wagi krawędzi są różne. Pokaż, nie używając żadnego algorytmu, że G zawiera tylko jedno minimalne drzewo rozpinające.

2. Niech T będzie MST grafu G. Pokaż, że dla dowolnego cyklu C grafu G drzewo T nie zawiera jakiejś najcięższej krawędzi z C.

3. Czy poniższy algorytm zawsze znajduje MST w grafie spójnym G?

   Załóżmy, że krawędzie grafu są posortowane wg wag: $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \ldots \leq w(e_m)$. Dla każdej krawędzi o indeksie i w kolejności od m do 1 wykonaj następujące: jeśli wyrzucenie e_i nie rozspaja G, wyrzuć e_i z G.

4. (+) Udowodnij, że algorytm Prima znajdowania MST działa poprawnie.

5. Załóżmy, że wszystkie krawędzie w grafie mają różne wagi. Udowodnij, że algorytm Boruvki rzeczywiście znajduje drzewo rozpinające, tzn. pokaż, że w żadnej iteracji nie powstaje cykl.

6. (-) Jak zmodyfikować algorytm Boruvki, by działał również w grafach, w których krawędzie mogą mieć takie same wagi?

7. Krawędzie pewnego grafu G pokolorowano na czerwono i niebiesko. Kiedy graf ten zawiera drzewo rozpinające niemonochromatyczne, tzn. zawierające krawędź każdego koloru?

8. Krawędzie pewnego prostego grafu spójnego G pokolorowano na czerwono, zielono i niebiesko. G ma przynajmniej 4 krawędzie oraz przynajmniej jedną krawędź każdego z trzech kolorów. Czy graf ten w każdym przypadku zawiera drzewo rozpinające trójkolorowe?

   A gdyby kolorów było cztery i G był dodatkowo dwudzielny, czy zawsze zawierałby drzewo rozpinające zawierające przynajmniej jedną krawędź każdego z czterech kolorów? Czy dwudzielność jest potrzebna?

9. (-) Udowodnij lub obal: Jeśli T jest minimalnym drzewem spinającym grafu G, to ścieżka łącząca wierzchołki u i v w drzewie T jest minimalną wagowo ścieżką między u i v w grafie G.

10. (+) Niech $G = (A \cup B, E)$ będzie grafem dwudzielnym, a M i N jego dwoma skojarzeniami. Pokaż, że istnieje skojarzenie M' takie, że każdy wierzchołek $a \in A$ skojarzony w M jest również skojarzony w M' oraz każdy wierzchołek $b \in B$ skojarzony w N jest również skojarzony w M'.

11. Pokaż jak znaleźć największe skojarzenie w drzewie T.