

L8.6. [1 punkt] Ustalmy liczby naturalne M oraz N . Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk} , gdzie $0 \leq k \leq N$, a $m = 1, 2, \dots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \quad (0 \leq k \leq N)$$

dla $1 \leq m \leq M$. Opracuj oszczędny algorytm konstrukcji funkcji s_1, s_2, \dots, s_M .

Mamy $n+1$ węzłów i $(n+1) \cdot m$ wartości - osobne dla każdej NIFS3.
Wynikiem naszego algorytmu ma być m różnych NIFS3.

Nasz algorytm:

Najpierw wspólne zmienne na potrzeby wszystkich funkcji:

1) Wyliczamy lambdy i h ze wzorów

2) Wyliczamy w petli listy p i q

1 teraz dla każdego $m=1, 2, 3, \dots, M$

3) Wyliczamy d_m (wartościami y_m)

4) Wyliczamy listę e_m korzystając z d_m

5) Wyliczamy M_m korzystając z e_m

6) Możemy teraz wyliczyć z jawnego wzoru $s_m(x)$

Obliczamy pomocnicze wielkości $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ w następujący sposób rekurencyjny:

$$\left. \begin{aligned} q_0 &:= u_0 := 0, \\ p_k &:= \lambda_k q_{k-1} + 2, \\ q_k &:= (\lambda_k - 1)/p_k, \\ u_k &:= (d_k - \lambda_k u_{k-1})/p_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

gdzie

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}] \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} M_{n-1} &= u_{n-1}, \\ M_k &= u_k + q_k M_{k+1} \quad (k = n-2, n-3, \dots, 1). \end{aligned}$$

Twierdzenie

Dla danych $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ i danej funkcji f określonej w tych węzłach ($y_k = f(x_k)$) zawsze istnieje dokładnie jedna NIFS3.

Niech $x \in [x_{k-1}, x_k]$, $(1 \leq k \leq n)$, wtedy:

$$\begin{aligned} s(x) = & h_k^{-1} \left[\frac{1}{6} M_{k-1} (x_k - x)^3 + \frac{1}{6} M_k (x - x_{k-1})^3 + (f(x_{k-1}) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} M_{k-1} h_k^2)(x_k - x) + (f(x_k) - \frac{1}{6} M_k h_k^2)(x - x_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

Gdzie $H_k := x_k - x_{k-1}$ oraz $M_k := s''(x_k)$

Momenty M_k spełniają następującą zależność (*):

$$\lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k) M_{k+1} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

Gdzie $f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$ to iloraz różnicowy zdefiniowany wcześniej, natomiast współczynniki

$$\lambda_k := \frac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$$