zad	+1	2	3	+4	5	6	7	8	9	10	-11	-12	suma
pkt	1	1	1		1		1	–		1	0,5	0,5	8(7)/11(10)
max	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	11 (10 dekl.)

L6

9 November, 2023 00:08

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n-tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznyc W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \ldots)$.
6. Niech k i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq m$. Udowodnij, że $\sum_{i=k}^{m} \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.
7. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze. Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.
8. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.
9. (a) Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$
   (b) Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.
10. Niech $a, b \in Z$. Pokaż, że $a^3 | b^2$ implikuje $a | b$.
11. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n.
12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

+1 (done)

9 November, 2023 00:10

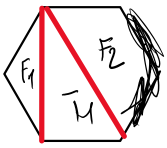
1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n+2)$-kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n-1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n-tej liczbie Catalana.

Lećmy po kolei - trójkąta się nie da, jedna opcja. $C_0 = 1$

Kwadrat - dwie przekątne $C_1 = 2$

Dla $n+2$ kąta wypukłego: - rysujemy przekątne

- otrzymujemy trójkąt T_1 i figury F_1, F_2. Figury będziemy dalej dzielić tak długo jak to możliwe.



Rozpoczynając od „krawędzi" otrzymujemy trójkąt oraz $i-1$ kąt, i tak do zakończenia podziału figury. Oznaczmy możliwe podziały poprzez φ otrzymujemy

$$\varphi_{n+2} = \varphi_{n+1} \cdot \varphi_2 + \varphi_n \cdot \varphi_3 + \varphi_{n-1} \cdot \varphi_4 + \dots + \varphi_3 \cdot \varphi_n + \varphi_2 \cdot \varphi_{n+1}$$

przesuwając wszystkie indeksy o dwa widzimy wprost że to liczby Catalana

$\varphi_{n+2} = C_n$ c.n.w.

2 (done)

9 November, 2023 00:10

2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.

Ładnie rozpisany dowód z

https://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php/Matematyka_dyskretna_1/Wyk%C5%82ad_8:_Funkcje_tworz%C4%85ce_w_zliczaniu_obiekt%C3%B3w_kombinatorycznych#Zliczanie_drzew

Pojedynczy wierzchołek jest jedynym pełnym drzewem binarnym bez węzłów wewnętrznych, a więc $c_0 = 1$. Każde drzewo o co najmniej jednym wierzchołku wewnętrznym rozkłada się jako $T_l \wedge T_r$, dla pewnych jednoznacznie wyznaczonych poddrzew T_l, T_r. Poddrzewo T_l nazywamy lewym, a T_r prawym podrzewem drzewa $T_l \wedge T_r$.

Niech teraz

- $\mathcal{T}_n$ będzie rodziną wszystkich drzew binarnych o n węzłach wewnętrznych, oraz
- $\mathcal{T}_{n_l,n_r}$ będzie rodziną wszystkich drzew, których lewe i prawe poddrzewo mają odpowiednio n_l oraz n_r węzłów wewnętrznych.

Zachodzi więc:

$$|\mathcal{T}_{n_l,n_r}| = |\mathcal{T}_{n_l} \times \mathcal{T}_{n_r}| = |\mathcal{T}_{n_l}| \cdot |\mathcal{T}_{n_r}| = c_{n_l} \cdot c_{n_r}$$

Ponadto, jeśli drzewo o n wierzchołkach wewnętrznych posiada lewe poddrzewo o n_l wierzchołkach wewnętrznych oraz prawe poddrzewo o n_r węzłów wewnętrznych to $n = n_l + n_r + 1$. Zatem rodzina wszystkich drzew o n wewnętrznych wierzchołkach rozbija się na rozłączną sumę

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{T}_{0,n-1} \cup \mathcal{T}_{1,n-2} \cup \ldots \cup \mathcal{T}_{n-1,0}$$

W konsekwencji otrzymujemy:

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \ldots + c_{n-1} c_0$$

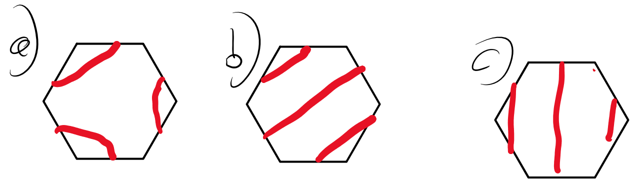
3 (done)

9 November, 2023 00:10

3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?

Mamy $2n$ osób od 1 do $2n$.

Osoba 1 wybiera os. i $\Rightarrow$ os. $2 \dots i-1, i+1, \dots 2n$ też muszą stworzyć poprawną kombinację. Możemy zaobserwować, że jest to po prostu inaczej opisany problem nawiasowania.



$$C_n = \sum_{i=1}^{n} C_{i-1} \cdot C_{n-i}$$

było też na wykładzie

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

Dla a) ()()(), b) ((())), c) (())()

Jest $\binom{2n}{n}$ opcji zapisania nawiasów,
w tym $\binom{2n}{n+1}$ nielegalnych no i Catalan

(k - liczba lewych do tej pory)

jak dojdziemy do pierwszego nielegalnego (n+1 lewy lub k+1 prawy) to zamieniamy każdy kolejny na przeciwny (?)

+4

9 November, 2023 00:10

4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?

5 (done)

9 November, 2023 00:10

5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \ldots) = a_n$

$b_n = 2, 4, 8, 16, \ldots$

$c_n = -1, -1, -1, \ldots$

Ciąg b_n to kolejne potęgi dwójki przesunięte o 1 w lewo

2, 4, 8, 16 $a_1 = \cancel{1}$ $q = 2$ $B(x) = \frac{1}{1-2(x)}$

$$\frac{1}{1-2x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x(1-2x)}$$

$-1, -1, -1, -1$ (bierzemy tę dla jedynek i mnożymy $\cdot(-1)$)

$C(x) = -\frac{1}{1-x}$

I z zasady dodawania funkcji tworzących

$$\frac{1}{x(1-2x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{2x^2-2x+1}{2x^3-3x^2+x}$$

* przesunięcie o k miejsc - mnożenie $\cdot x^k$
(było razem z pochodną na wykładzie)

Funkcja tworząca $G(x)$ dla ciągu $(g_n) = (g_0, g_1, g_2, \ldots)$ jest zdefiniowana jako

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n x^n.$$

Ciąg (g_n) może być w szczególnym przypadku ciągiem liczbowym (wartości są liczbami naturalnymi, jak to się dzieje, gdy odpowiada on zliczaniu obiektów kombinatorycznych, rzeczywistymi, zespolonymi) jednak w ogólności jego wartości mogą być inne (np. funkcje).

Tymczasem jednomiany x^n mogą być rozpatrywane jako wyrazy pierścienia szeregu formalnego (gdy interesują nas wyłącznie algebraiczne właściwości funkcji tworzącej) albo liczby (rzeczywiste lub zespolone).

Ciąg jedynek i ciąg liczb naturalnych [edyt

Funkcją tworzącą ciągu złożonego z samych jedynek

$$(1, 1, 1, \ldots)$$

jest funkcja

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

6

9 November, 2023 00:10

6. Niech k i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq m$. Udowodnij, że $\sum_{i=k}^{m} \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.

7 (done)

9 November, 2023 00:10

7. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.
   Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

$*$ $NWD(a+b, b) = NWD(a, b)$ skorzystamy z tego faktu

I $F_1 = 1$ $F_2 = 1$ $NWD(1,1) = 1$ ✓

II Załóżmy że $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$. Udowodnijmy że $NWD(F_{n+1}, F_{n+2}) = 1$

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \Rightarrow NWD(F_{n+2}, F_{n+1}) = NWD(F_{n+1} + F_n, F_{n+1})$

Z faktu $*$ $NWD(F_{n+1} + F_n, F_{n+1}) = NWD(F_{n+1}, F_n)$ a to z założenia ind. $= 1$

Są więc względnie pierwsze c.n.u.

Dowód Faktu $*$

Note: (a, b) *is shorthand for* $\gcd(a, b)$.

Let $d1 = (a, b)$ and $d2 = (a, a+b)$.

Now, $d2|a$ and $d2|a+b$, this means $d2|(a+b) - a = b$. As $d2|a$ and $d2|b$, this means $d2|(a, b) = d1$.

Now, $d1|a$ and $d1|b$, this means that $d1|a+b$. As $d1|a$ and $d1|a+b$, this means $d1|(a, a+b) = d2$.

Thus, $d1|d2$ and $d2|d1$ and since $d1, d2 \in \mathbb{N}$, thus $d1 = d2$.

8 (rozpisane)

9 November, 2023 00:10

8. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.

Lemma 1: $m \mid n \implies F_m \mid F_n$ (A user presented a proof here)

Lemma 2: $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$ (I presented a proof here)

Let $g = \gcd(m, n)$ and d be any common divisor of F_m, F_n. From the definition of Greatest Common Divisor, it's clear that

$$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(n,m)} = F_g \iff \begin{cases} F_g \mid F_m \text{ and } F_g \mid F_n \\ d \mid F_g \end{cases}$$

1. $F_g \mid F_m$ and $F_g \mid F_n$

Since $g = \gcd(m, n)$, $g \mid m$ and $g \mid n$. From **Lemma 1**, we have

$$g \mid m \Rightarrow F_g \mid F_m \quad \text{and} \quad g \mid n \Rightarrow F_g \mid F_n$$

.

2. $d \mid F_g$

From Bézout's identity, there exists $x, y \in \mathbb{Z}$ such that $g = mx + ny$.

$F_m \mid F_{mx}$ [By **Lemma 1**] and $d \mid F_m \implies d \mid F_{mx}$. Similarly, $d \mid F_{ny}$. Thus $d \mid F_{mx-1}F_{ny} + F_{mx}F_{ny+1}$, and consequently $d \mid F_{mx+ny}$ by **Lemma 2**. Hence $d \mid F_g$.

Lemat 1:

We want to show that if $m \mid n$ then $F_m \mid F_n$.

Now, $m \mid n$ is equivalent to showing that $n = km \;\; k \in \mathbb{N}$. The induction will be over k.

Obviously $k = 1$ $(m = n)$ is true.

Now let's assume the statement is true for $1 \leq k \leq K - 1$, let's show it is true for $n = mK$ as well. By the second equality, choosing $n = (K-1)m$ we obtain

$$F_n = F_{Km} = F_{m+(K-1)m} = F_m F_{(K-1)m+1} + F_{m-1}F_{(K-1)m}.$$

But now by induction hypothesis $F_{(K-1)m}$ is divisible by F_m thus $F_{(K-1)m} = F_m \cdot d$ and hence

$$F_n = F_m F_{(K-1)m+1} + F_{m-1}F_m \cdot d = F_m \cdot (F_{(K-1)m+1} + F_{m-1}d).$$

which shows that $F_m \mid F_n$

Lemat 2:

Let $P(n)$ is the statement $\forall m \in \mathbb{N}(f_{m+n+1} = f_m f_n + f_{m+1} f_{n+1})$.

It is clear that $P(0)$ is true.

Assuming that $P(k)$ is true i.e. $\forall m \in \mathbb{N}(f_{m+k+1} = f_m f_k + f_{m+1} f_{k+1})$.

Since $P(k)$ is true for all m, then $P(k)$ is true for $(m+1)$ too.

Substitute $(m+1)$ for m, we have
$f_{(m+1)+k+1} = f_{m+1} f_k + f_{(m+1)+1} f_{k+1} = f_{m+1} f_k + f_{m+2} f_{k+1}$.

$\iff f_{(m+1)+k+1} = f_{m+1} f_k + f_{m+2} f_{k+1}$

We now prove $P(k+1)$ is true.

$f_{m+(k+1)+1} = f_{(m+1)+k+1} = f_{m+1} f_k + f_{m+2} f_{k+1}$

$= f_{m+1} f_k + (f_{m+1} + f_m) f_{k+1}$

$= f_{m+1} f_k + f_{m+1} f_{k+1} + f_m f_{k+1}$

$= f_{m+1}(f_k + f_{k+1}) + f_m f_{k+1}$

$= f_{m+1} f_{k+2} + f_m f_{k+1}$

$= f_m f_{k+1} + f_{m+1} f_{k+2}$

$= f_m f_{k+1} + f_{m+1} f_{(k+1)+1}$.

To sum up, $f_{m+(k+1)+1} = f_m f_{k+1} + f_{m+1} f_{(k+1)+1}$. This implies $P(k+1)$ is true.

By principle of induction, $P(n)$ is true for all $n \in \mathbb{N}$.

9

9 November, 2023 00:10

9. (a) Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$

   (b) Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.

10 (done)

9 November, 2023 00:10

10. Niech $a, b \in Z$. Pokaż, że $a^3|b^2$ implikuje $a|b$.

$a^2 | a^3$

$a^2 | b^2$ możemy więc skorzystać z prostszej wersji

Niech $c = \frac{b}{a}$. Chcemy pokazać że $c \in \mathbb{Z}$

$a = p_1^{\varphi_1} p_2^{\varphi_2} p_3^{\varphi_3} \cdots p_n^{\varphi_n}$

$b = p_1^{\varphi_1'} p_2^{\varphi_2'} \cdots p_n^{\varphi_n'}$

(Rozkład na czynniki)

skoro $a^3 | b^2$ to

$p_1^{3\varphi_1} p_2^{3\varphi_2} \cdots p_n^{3\varphi_n} | p_1^{2\varphi_1'} p_2^{2\varphi_2'} \cdots p_n^{2\varphi_n'}$

a więc wiemy że dla każdego p_i

$3\varphi_i \leq 2\varphi_i'$ (no bo się dzielić musi)

aby udowodnić $a|b$ musimy pokazać

że $\varphi_i \leq \varphi_i'$ co wprost wynika z

c.k.d.

-11 (done)

9 November, 2023 00:10

przez 2,3,5

$\Updownarrow$

11. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n.

$n^5 - n = n(n^4-1) = n(n^2-1)(n^2+1) = (n-1)\cdot n \cdot (n+1)\cdot(n^2+1)$

Po rozpisaniu na czynniki widzimy, że mamy 3 następujące po sobie naturalne n

- skoro 3 następujące $\Rightarrow$ min. 1 parzysty $\Rightarrow$ podz. przez 2
- -||- $\Rightarrow$ (mod 3) 0,1,2 $\Rightarrow$ podz. przez 3

Pozostaje podzielność przez 5

n:	n-1	n	n+1
0	4	0	1
1	0	1	2
2	1	2	3
3	2	3	4
4	3	4	0

Dla $n \bmod 5 \equiv 0, 1, 4$ musi być podzielne

$n \bmod 5 \equiv 2$ $\quad 2^2+1 = \underset{\text{mod } 5}{\underset{|||}{5}}$ podzielne

$n \bmod 5 \equiv 3$ $\quad 3^2+1 = \underset{\underset{0}{\text{mod } 5}}{\underset{|||}{10}}$ podzielne

a więc jest podzielne dla każdego n

-12 (done)

9 November, 2023 00:10

12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.

11 grup mod 11 $\Rightarrow$ $m \equiv n \pmod{11}$

Bez straty ogólności $m > n$

$m - n \mod 11 \equiv 0$, a skoro $m \neq n$ to $m - n > 0$
i musi być postaci aa

$\{11, 22, 33, \ldots, 88\}$