

Lista nr 6 z matematyki dyskretnej

1. (+) Udowodnij, że liczba sposobów, na jaki można podzielić $(n + 2)$ -kąt wypukły na płaszczyźnie na rozłączne trójkąty za pomocą $n - 1$ nieprzecinających się przekątnych jest równa n -tej liczbie Catalana.
2. Określ liczbę drzew binarnych, zawierających n wierzchołków wewnętrznych. W drzewie binarnym każdy wierzchołek ma zero lub dwóch synów.
3. Ile niekrzyżujących się uścisków dłoni może wykonać jednocześnie n par osób siedzących za okrągłym stołem?
4. (+) Z macierzy $n \times n$ usuwamy część nad przekątną otrzymując macierz "schodkową". Na ile sposobów można ją podzielić na n prostokątów?
5. Podaj funkcję tworzącą dla ciągu $(1, 3, 7, 15, 31, \dots)$.
6. Niech k i m będą liczbami naturalnymi takimi, że $k \leq m$. Udowodnij, że $\sum_{i=k}^m \binom{i}{k} = \binom{m+1}{k+1}$.
7. Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze. Wskazówka: Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.
8. Udowodnij indukcyjnie, że $NWD(F_m, F_n) = F_{NWD(m,n)}$.
9. (a) Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2F_{n-1})$
(b) Podaj podobną zależność dla F_{2n+1} zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych indeksach.
10. Niech $a, b \in \mathbb{Z}$. Pokaż, że $a^3|b^2$ implikuje $a|b$.
11. (-) Pokaż, że $n^5 - n$ jest podzielne przez 30 dla każdego naturalnego n .
12. (-) Danych jest 12 różnych liczb dwucyfrowych. Wykaż, że wśród nich istnieją takie dwie, których różnica jest liczbą dwucyfrową o jednakowych cyfrach.