

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 14

24 stycznia 2024r.

- Lista ta zawiera zadania **powtórkowe**, w tym **wybrane** zadania egzaminacyjne z ostatnich lat.
- Podanymi zadaniami **nie należy** nadmiernie sugerować się podczas przygotowań do egzaminu.^a

^aNie oznacza to jednak, że prawdopodobieństwo zdarzenia *kilka podobnych zadań pojawi się na egzaminie* jest zerowe.

- L14.1.** Udowodnij, że dodatnia liczba rzeczywista ma skończone rozwinięcie dwójkowe wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $m/2^n$, gdzie m i n są liczbami naturalnymi. Jakie znaczenie ma ta obserwacja w kontekście wprowadzania danych do arytmetyki *fl* i wykonywania w niej operacji zmiennopozycyjnych? Odpowiedź **dokładnie** uzasadnij, **odwołując się** do omówionego na wykładzie modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.
- L14.2.** W języku programowania **PW0++** funkcja $\cos(x)$ oblicza z bardzo dużą dokładnością wartość $\cos(x)$, jednak **tylko wtedy**, gdy $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Wykorzystując funkcję \cos , zaproponuj **algorytm** wyznaczający wartości funkcji cosinus z dużą dokładnością dla $x \in [-2\pi, 2\pi]$.
- L14.3.** Jakie znaczenie z punktu widzenia analizy numerycznej ma pojęcie uwarunkowania zadania?
- L14.4.** Sprawdź dla jakich wartości x zadanie obliczania wartości funkcji f jest źle uwarunkowane, jeśli: **a)** $f(x) = \ln(x)$, **b)** $f(x) = (x - 1)^{10}$.
- L14.5.** Podaj definicję zadania źle uwarunkowanego, a następnie zbadaj uwarunkowanie zadania obliczania wartości funkcji $f(x) = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- L14.6.** Załóżmy, że liczby x_0, x_1, \dots, x_n są tego samego znaku. Uzasadnij, że zadanie obliczania ich sumy jest zadaniem dobrze uwarunkowanym. Jakie znaczenie ma ten fakt w kontekście obliczeń numerycznych?
- L14.7.** Wyprowadź wzór na wskaźnik uwarunkowania zadania obliczania wartości funkcji f w punkcie x . Wartość funkcji $f(x) := e^{5x}$ obliczamy w punkcie $x \approx 0.8$. Jak dużej utraty dwójkowych cyfr znaczących spodziewamy się, jeżeli x odbiega od 0.8 o jedną dwójkową cyfrę znaczącą?
- L14.8.** Wytlumacz dokładnie kiedy występuje i na czym polega zjawisko utraty cyfr znaczących wyniku. Dla jakich wartości x obliczanie wartości wyrażenia $(\sqrt{x^2 + 2} + x)^{-1}$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku? Zaproponuj sposób obliczenia wyniku dokładniejszego.
- L14.9.** Dla $x \approx 0$ obliczanie wartości wyrażenia $x^{-5}(\sin(3x) - 3x + 9x^3/2)$ może wiązać się z utratą cyfr znaczących wyniku. Zakładając, że $|x| \leq \frac{1}{10}$, zaproponuj taki sposób obliczenia wartości tego wyrażenia, aby mieć pewność, że błąd bezwzględny nie przekracza 10^{-7} .

L14.10. Podaj (w miarę) bezpieczny numerycznie algorytm obliczania zer równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$). Zastosowaną strategię **uzasadnij** odwołując się do omówionych na wykładzie **problemów** wynikających z przyjętego modelu arytmetyki zmiennopozycyjnej.

L14.11. Do rozwiązania zadania obliczeniowego \mathcal{A} użyto komputera i algorytmu numerycznie poprawnego. Czy można mieć pewność, że otrzymany w ten sposób wynik jest bliski rzeczywistego rozwiązania zadania \mathcal{A} ? Odpowiedź uzasadnij.

L14.12. Sprawdź czy następujący algorytm jest algorytmem numerycznie poprawnym:

```
S:=x[0];

for i from 1 to 4
do
  S:=3*S+x[i]
od;

return(S)
```

L14.13. Niech dany będzie wielomian $w(x) := a_1x/3! - a_3x^3/5! + a_5x^5/7! - a_7x^7/9!$. Rozważmy następujący algorytm obliczania jego wartości w punkcie $x \in \mathbb{R}$:

```
w:=a[7]

for n from 3 downto 1
do
  w:=a[2*n-1]-x^2/(2*n+3)/(2*n+2)*w
od

return(w*x/2/3)
```

Przyjmując, że a_1, a_3, a_5, a_7 oraz x są liczbami maszynowymi, sprawdź czy algorytm ten jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L14.14. Załóżmy, że dane są współczynniki $a := [a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \dots, a_n^{(n)}]$ postaci potęgowej wielomianu $w \in \Pi_n$, tj. $w(x) = \sum_{j=0}^n a_j^{(n)} x^j$. W języku PW0++ procedura **ChebyshevForm**(a) znajduje taki wektor liczb rzeczywistych $[c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \dots, c_n^{(n)}]$, że

$$w(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)} \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k oznacza k -ty wielomian Czebyszewa. Krótko mówiąc: procedura ta wyznacza współczynniki postaci Czebyszewa wielomianu w . **Niestety ma ona pewną wadę**, a mianowicie — stopień n wielomianu w nie może być większy niż 2021. Wykorzystując **co najwyżej** dwukrotnie procedurę **ChebyshevForm**, zaproponuj *efektywny* algorytm znajdowania postaci Czebyszewa dowolnego wielomianu $v \in \Pi_{2023}$.

Uwaga. Jeśli zaproponujesz rozwiązanie, w którym użyjesz procedury **ChebyshevForm** tylko raz, dostaniesz **dodatkowo** 1 punkt. Jeśli natomiast w swoim rozwiązaniu nie użyjesz jej wcale, to możesz liczyć aż na 3 **bonusowe** punkty, **pod warunkiem**, że rozwiązanie nie będzie zbyt kosztowne obliczeniowo (tak, to znaczy, że z egzaminu można łącznie zdobyć **ponad** 50 pkt.).

- L14.15.** Opisz metodę bisekcji i podaj jej własności.
- L14.16.** Stosując metodę Newtona, zaproponuj sposób przybliżonego obliczania wartości $\sqrt[5]{a}$ ($a > 0$). Jak dobrać x_0 ? Jak powinien wyglądać warunek *stopu*?
- L14.17.** Niech α będzie pierwiastkiem pojedynczym funkcji f ($f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$). Udowodnij, że wówczas rząd zbieżności metody Newtona wynosi $p = 2$.
- L14.18.** Zaproponuj efektywny algorytm obliczania z dużą dokładnością wartości \sqrt{a} ($a > 0$) wykorzystując **jedynie** operacje arytmetyczne $(+, -, \cdot, /)$.
- L14.19.** Sformułuj i podaj interpretację geometryczną metody siecznych. Jak w wypadku tej metody powinien wyglądać *warunek stopu*?
- L14.20.** Podaj efektywny algorytm wyznaczania wartości liczby naturalnej a , której cyframi dziesiętnymi (od najbardziej do najmniej znaczącej) są a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 , gdzie $a_n \neq 0$.
- L14.21.** Sformułuj i uzasadnij uogólniony schemat Hornera obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Newtona.
- L14.22.** Sformułuj i uzasadnij algorytm Clenshawa obliczania wartości wielomianu podanego w postaci Czebyszewa.
- L14.23.** Niech dany będzie wielomian $w_n \in \Pi_n$ postaci

$$w_n(x) := z_0(x - z_1)(x - z_2) \dots (x - z_n),$$

gdzie liczby rzeczywiste z_0, z_1, \dots, z_n są dane. Opracuj i uzasadnij **oszczędny** algorytm znajdowania postaci potęgowej wielomianu w_n . Określ złożoność zaproponowanej metody. Gdzie, w kontekście metod omówionych w ramach wykładu, algorytm taki może mieć zastosowania?

- L14.24.** Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego $L_4 \in \Pi_4$ dla danych

$$\frac{x_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_k & 1 & 2 & 10 & 29 & 106 \end{array}}{y_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 10 & 29 & 106 \end{array}}.$$

- L14.25.** Podaj postać Newtona wielomianu interpolacyjnego dla następujących danych:

$$\text{a) } \frac{x_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_k & 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}}{y_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & -4 \end{array}}, \quad \text{b) } \frac{x_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline y_k & -4 & -30 & 0 & 2 & 2 \end{array}}{y_k \parallel \begin{array}{c|c|c|c|c} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline -4 & -30 & 0 & 2 & 2 \end{array}}.$$

- L14.26.** Funkcję $f(x) = \cos(x/2)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w węzłach będących zerami wielomianu Czebyszewa T_{n+1} . Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-8} ?$$

L14.27. Niech $L_n \in \Pi_n$ będzie wielomianem interpolującym funkcję $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ w węzłach postaci

$$x_{nk} := \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2k+1}{2n+2} \pi \right) + \frac{1}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Jak należy dobrać n , aby mieć pewność, że

$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-15} ?$$

L14.28. Niech dane będą: liczba naturalna n i parami różne liczby rzeczywiste a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Zaproponuj algorytm znajdowania takich liczb c_0, c_1, \dots, c_n , że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$x^n = c_0 + c_1(x - a_0) + c_2(x - a_0)(x - a_1) + \dots + c_n(x - a_0)(x - a_1) \cdot \dots \cdot (x - a_{n-1}).$$

Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

L14.29. (a) Podaj definicję naturalnej funkcji sklepanej trzeciego stopnia.

(b) Znajdź naturalną funkcję sklepaną trzeciego stopnia dla danych

$$\frac{x_k \parallel -1 \mid 0 \mid 1}{y_k \parallel -1 \mid 2 \mid -3}.$$

L14.30. Podaj definicję naturalnej interpolacyjnej funkcji sklepanej trzeciego stopnia (*w skrócie*: NIFS3). **Znajdź** NIFS3 dla danych

$$\frac{x_k \parallel -2022 \mid -4 \mid -2 \mid 0 \mid 1 \mid 3 \mid 2022}{y_k \parallel 8043 \mid 1989 \mid 1983 \mid 1977 \mid 1974 \mid 1968 \mid -4089}.$$

Uwaga. Jeśli — wbrew temu, co mówiono — nauczyłeś się na pamięć jawnego wzoru na NIFS3 i użyjesz go w rozwiązaniu drugiej części zadania, to dostaniesz *karę* w wysokości -3 punktów (tak, to znaczy, że z egzaminu można zdobyć **mniej** niż 0 pkt.).

L14.31. Niech dane będą wektory $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ oraz $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$. Niech s_n oznacza naturalną funkcję sklepaną trzeciego stopnia (*w skrócie*: NFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). Jak pamiętamy, w języku PW0++ procedura NSpline3($\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$) wyznacza wektor $\mathbf{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$, z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$. Wiadomo, że NFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Wywołując procedurę NSpline3 **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości wszystkich **miejsz zerowych** funkcji f znajdujących się w przedziale $[x_0, x_{100}]$. W swoim rozwiązaniu możesz **użyć wielokrotnie** innej procedury języka PW0++, a mianowicie Solve3($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$) znajdującej z dużą dokładnością wszystkie rzeczywiste miejsca zerowe wielomianu $\mathbf{a}x^3 + \mathbf{b}x^2 + \mathbf{c}x + \mathbf{d}$ albo informującej, że takich miejsc zerowych nie ma.

L14.32. Wstęp. Niech dane będą wektory liczb rzeczywistych $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_0 < x_1 < \dots < x_n$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ i $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$ ($m, n \in \mathbb{N}$). Niech s_n oznacza naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NIFS3) spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). W języku PW0++ procedura `NSpline3(x,y,z)` wyznacza wektor $[s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)]$. **Zadanie.** Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f . Można więc przypuszczać, że

$$S_n := \int_{x_0}^{x_n} s_n(x) dx$$

jest bardzo dobrym przybliżeniem wartości całki $I := \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx$. Stosując procedurę `NSpline3` **tylko raz**, zaproponuj szkic **efektywnego algorytmu** wyznaczania wielkości S_n . Zadбай więc m.in. o to, aby liczba współrzędnych wektora \mathbf{z} (czyli wartość $m+1$) **była możliwie jak najmniejsza**.

L14.33. Dana jest postać Béziera wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^n a_k B_k^n(t), \quad \text{gdzie} \quad B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}.$$

Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \quad \text{dla} \quad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \leq k \leq n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

L14.34. Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0, 1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.

L14.35. Niech P będzie krzywą Béziera stopnia n o punktach kontrolnych $W_0, W_1, \dots, W_n \in \mathbb{R}^2$. Ustalmy $t \in [0, 1]$. Zaproponuj algorytm wyznaczania $P(t)$ w czasie $O(n)$.

L14.36. Niech p będzie wielomianem zmiennej t stopnia co najwyżej n . W języku PW0++ procedura `BezierCoeffs(p, t)` wyznacza taki wektor $\mathbf{c} := [c_0, c_1, \dots, c_n]$, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^n c_k B_k^n(t),$$

gdzie $B_0^n, B_1^n, \dots, B_n^n$ są wielomianami Bernsteina stopnia n . Współczynniki c_k ($0 \leq k \leq n$) nazywamy *współczynnikami Béziera* wielomianu p . Niestety, procedura ta ma **pewne ograniczenie**, mianowicie: **musi być** $n \leq 50$.

W jaki sposób, używając procedury `BezierCoeffs` co najwyżej **dwa razy**, wyznaczyć współczynniki Béziera wielomianu $w(t) := p(t) \cdot q(t)$, gdzie $p \in \Pi_{50}$, a $q \in \Pi_2$? Jak zmieni się rozwiązanie, jeśli przyjąć, że $q \in \Pi_{50}$?

L14.37. Pomiarzy (t_k, c_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k > 0$, $c_k > 1$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 2^{(At^2 + 2018)^{-1}}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A .

- L14.38.** Wyznacz funkcję postaci $y(x) = \frac{ax^2 - 3}{x^2 + 1}$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{array} \right.$$

przy założeniu, że $s_2 = 10$, $s_4 = -3$, gdzie $s_m := \sum_{k=0}^n \frac{x_k^m}{(x_k^2 + 1)^2}$ ($m = 2, 4$).

- L14.39.** (a) Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f, g) := f(-2)g(-2) + f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1) + f(2)g(2).$$

- (b) Wykorzystując wynik otrzymany w punkcie (a), wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right.$$

- L14.40.** Rozważmy zadanie wielomianowej aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym dla węzłów postaci $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ ($0 \leq k \leq N$; $a > 0$). **Udowodnij**, że jeśli aproksymowana funkcja jest parzysta, to n -ty wielomian optymalny ($n < N$), też jest funkcją parzystą.

- L14.41.** Niech P_0, P_1, \dots, P_N będą wielomianami ortogonalnymi względem iloczynu skalarnego postaci

$$(f, g)_N := \sum_{k=0}^N f(x_k)g(x_k),$$

gdzie $x_k := -a + \frac{2ak}{N}$ ($k = 0, 1, \dots, N$; $a > 0$). Udowodnij, że jeśli α jest miejscem zerowym wielomianu P_k ($0 \leq k \leq N$), to także $-\alpha$ jest miejscem zerowym tego wielomianu.

- L14.42.** Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot, \cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

- L14.43.** Znajdź wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do następujących danych:

$$\frac{x_k}{y_k} \left\| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} -4 & -3 & -2 & -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -5.5 & -5 & -3.2 & -1 & 1 & 3.2 & 5 & 5.5 \end{array} \right.$$

Uwaga. Rozwiązanie nie wymaga wielu obliczeń, ale jeśli tego nie zauważysz, też możesz zdobyć maksimum punktów.

- L14.44.** Podaj definicję rzędu kwadratury liniowej $Q_n(f) := \sum_{k=0}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)})$. Udowodnij, że jeśli rząd kwadratury Q_n wynosi przynajmniej $n + 1$, to jest to kwadratura interpolacyjna.

- L14.45.** Jaki maksymalnie rząd może mieć kwadratura liniowa? Odpowiedź uzasadnij.
- L14.46.** **Opisz w szczególach** kwadratury interpolacyjne (m.in. podaj ideę – odpowiedni rysunek mile widziany, wyprowadź wzory na współczynniki, uwzględnij szczególną sytuację, gdy węzły są równoodległe, nie zapomnij o *najlepszych* kwadraturach interpolacyjnych, itp.).
- L14.47.** Opisz ideę kwadratur złożonych. Wyprowadź złożony wzór Simpsona.
- L14.48.** Opisz metodę Romberga obliczania przybliżonej wartości całki $\int_{-2}^3 f(x) dx$.
- L14.49.** Opisz kwadratury złożone. Jaką mają one przewagę nad kwadraturami Newtona-Cotesa? Czy są one związane z metodą Romberga? Jeśli tak, to w jaki sposób?
- L14.50.** Znajdź rozkład LU macierzy $A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -5 & 3 & -4 \\ 4 & 12 & -10 & 9 \\ -8 & -24 & 32 & -16 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystaj otrzymany rozkład do rozwiązania układu równań $Ax = b$, gdzie $b := [17, -33, 70, -112]^T$.
- L14.51.** Niech dana będzie macierz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Przypomnijmy, że *rzędem* macierzy nazywamy maksymalną liczbę jej liniowo niezależnych kolumn. Opracuj algorytm numerycznego wyznaczania rzędu macierzy A . Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.
- L14.52.** Niech dana będzie macierz nieosobliwa $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zaproponuj efektywny algorytm wyznaczania macierzy odwrotnej A^{-1} i podaj jego złożoność.
- L14.53.** Niech dane będą macierze $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania takiej macierzy $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, aby zachodziła równość $AX = B$. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.
- L14.54.** Opracuj metodę wyznaczania rozkładu LU macierzy $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & & & & c_1 \\ & a_2 & & & c_2 \\ & & a_3 & & c_3 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Podaj jej złożoność.

- L14.55.** Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójkątnej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

(-) Paweł Woźny