L3

21 October, 2023 11:49

L3 zad.	+1	2	3	4	5	6	+7	8	9	-10	11	12	suma
plkt.		1				1	1	1		0,5		1	—
maxpkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	1	1	11,5

1. (+) ***Nieporządkiem*** nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

7. (+) Wykaż, że wśród $n+1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

    Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

+1

21 October, 2023 12:03

1. (+) *Nieporządkiem* nazywa się taką permutację elementów, w której żaden element nie znajduje się na swoim miejscu. Niech d_n oznacza liczbę nieporządków utworzonych z n kolejnych liczb naturalnych. Wyprowadź wzór na d_n stosując zasadę włączeń-wyłączeń.

2 (done)

21 October, 2023 12:03

2. Wśród liczb naturalnych $1, 2, \ldots, 800$, ile jest takich, które nie są podzielne przez 7, ale są podzielne przez 6 lub przez 8.

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}_+$ jest $\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor$ liczb podzielnych przez a.

Oznaczmy zbiór podzielnych przez 6 jako A, przez 8 jako B, przez 7 jako C. Wyznaczmy teraz wzór:

$$|(A \cup B) \setminus C| = |A \cup B| - |(A \cup B) \cap C| =$$

$$|A \cup B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A \cup B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

to będzie nasza odp.

$$|A \cup B| = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{nww(6,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{8} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 133 + 100 - 33 = 200$$

$$|A \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{42} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 19$$

$$|B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{56} \right\rfloor \overset{n=800}{=} 14$$

$$|A \cap B \cap C| = \left\lfloor \frac{n}{nww(6,7,8)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{168} \right\rfloor = 4$$

Po podstawieniu we wzór ost. wynik to $200 + 4 - 14 - 19 = 171$

3

21 October, 2023 12:03

3. Korzystając z zasady włączeń-wyłączeń oblicz, ile jest sposobów ustawienia liter $a, a, a, a, b, b, b, c, c$ w taki sposób, aby takie same litery nie tworzyły jednego bloku, tzn. ustawienie $a, a, a, a, b, c, b, c, b$ jest zakazane, ale ustawienie $a, a, a, b, a, c, b, c, b$ jest dobre.

4

21 October, 2023 12:03

4. Baltazar Gąbka ma 7 przyjaciół. Określ, na ile sposobów może zapraszać po 3 z nich na kolację przez 7 kolejnych dni tak, aby każdy z nich został zaproszony co najmniej raz.

5

21 October, 2023 12:03

5. Udowodnij, że $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ równa się liczbie dróg, po których wieża może przejść z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu szachownicy $(n+1) \times (n+1)$ poruszając się wyłącznie do góry lub na prawo.

   Czy potrafisz zwinąć tę sumę?

6 (done)

21 October, 2023 12:03

1, S

6. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z dwóch kolorów: szafirowy lub alabastrowy. Pokaż, że na tej płaszczyźnie istnieje prostokąt o wierzchołkach takiego samego koloru.

1 A

Rozważmy siatkę na tej płaszczyźnie zawierającą trzy wiersze. Z zasady szufladkowej Dirchleta wiemy wtedy, że w każdej kolumnie powtarza się conajmniej jeden kolor. Korzystamy z zasady szufladkowej Dirchleta.

Weźmy siatkę 9×3 na płaszczyźnie, mamy opcje

A	A	A	S	A	S	S	S
A	A	S	A	S	A	S	S
A	S	A	A	S	S	A	S

mamy 8 opcji, w każdej jeden z kolorów występuje min. 2 razy w każdej z nich. Zawsze możemy zestawić odp. kolory

+7 (done)

21 October, 2023 12:03

7. (+) Wykaż, że wśród $n + 1$ różnych liczb wybranych spośród $2n$ kolejnych liczb naturalnych zaczynając od 1 istnieją dwie, w których jedna dzieli drugą.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

X X X X X X

Prosty sposób że albo będzie 1 albo dwie parzyste odpowie

Ładny dowód:

Każdą z liczb $n \in \mathbb{N}$ zapisać jako $n = 2^a b_n$, gdzie b jest największym nieparzystym dzielnikiem. Istnieje n nieparzystych liczb mniejszych niż $2n$. Jako że bierzemy $n+1$ liczb, przynajmniej dwie będą miały ten sam współczynnik b.

$a, b, c \in \mathbb{N}^+$

$c \geq a$ wtedy $\frac{2^c b}{2^a b} = 2^{c-a}$; $c - a \geq 0$

a więc 2^{c-a} jest lb. $\mathbb{N}$, a więc te dwie liczby są podzielne c.n.d.

8 (done)

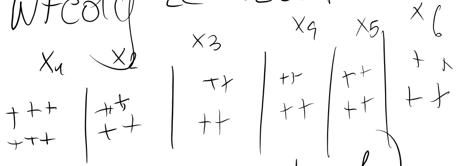
21 October, 2023 12:03

8. Na ile sposobów można wybrać pewną liczbę z 50 nierozróżnialnych kulek i wrzucić je do 5 (rozróżnialnych) szuflad?

5 szuflad + opcja zostawienia ich na zewnątrz bo wybieramy tylko pewną liczbę kul.

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=50$$

Wtedy ze wzoru stars & bars (dwa z końcowych zadań z poprzedniej listy)



umieszczamy 5 ścian w dowolnym miejscu między 50-cioma gwiazdkami

Wzór to $\binom{n+k-1}{k-1}$, gdzie w naszym przypadku $n=50$ $k=6$

← udowodnione przy zadaniu z niemalejącymi funkcjami z listy 2

$$\binom{50+6-1}{6-1} =$$

$$\binom{55}{5} = \frac{55!}{5!\,50!} = \frac{51\cdot52\cdot53\cdot54\cdot55}{120} = 3478761$$

$$\frac{11\cdot51\cdot52\cdot53\cdot54}{24} = \frac{11\cdot27\cdot51\cdot52\cdot53}{12} = \frac{11\cdot26\cdot27\cdot51\cdot53}{6} = \frac{11\cdot13\cdot27\cdot51\cdot53}{3} =$$

$$11\cdot13\cdot17\cdot27\cdot53$$

9

21 October, 2023 12:03

9. Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100$, jeśli dodatkowo wymagamy, aby $x_1, x_2 < 30$ oraz $x_3, x_4 < 40$?

100 kul, 4 szuflady w pierwszych dwóch 0-29, w dwóch kolejnych 0-39

-10 (done)

21 October, 2023 12:03

dowód dlaczego tak w zad. 12

10. (-) Określ liczbę podzielną przez 7, która leży najbliżej liczby 10^{100000}.

① $10^1 \% 7 \equiv 3 \pmod 7$

$10^2 \% 7 \equiv 5 \pmod 7$

$10^4 \% 7 \equiv 25 \% 7 \equiv 4$

$10^8 \% 7 \equiv 4 \cdot 4 = 2$

$10^{16} \% 7 \equiv 2 \cdot 2 = 4$

$10^{32} \% 7 \equiv 4 \cdot 4 = 2$

$10^{64} \% 7 \equiv 2$

wszędzie poniżej (mod 7)

② $10^{100} \equiv 10^{32+64+4} \equiv$

$4 \bmod 7 \cdot 10^4 \bmod 7 \equiv$

$4 \bmod 7 \cdot 4 \bmod 7 =$

$2 \bmod 7$

③ $10^{100000} \equiv 10^{100} \cdot 10^{100} \pmod 7 \equiv$

$4 \bmod 7$

④ $10^{10} \equiv 10^8 \cdot 10^2 \equiv 10 \equiv 3$

⑤ $10^{100000} \bmod 7 \equiv$

$(3 \bmod 7 \cdot 4 \bmod 7) \bmod 7 = 12 \bmod 7 = 5 \bmod 7$

A więc odp: $10^{100000} + 2$

11

21 October, 2023 12:03

11. Udowodnij lub obal następujące stwierdzenie:

    Liczba naturalna a, której zapis w systemie dziesiętnym to $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ dzieli się przez 11 wtw gdy liczba $\sum_{i=1}^{\lceil n/2 \rceil} a_{2i-1} - \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{2i}$ jest podzielna przez 11.

12 (done)

21 October, 2023 12:03

12. Oblicz dwie ostatnie cyfry w rozwinięciu dziesiętnym liczby 74^{74}.

Do obliczeń skorzystamy z zależności

$(a \cdot b) \bmod n = ((a \bmod n)(b \bmod n)) \bmod n$

nie musimy tak ale zwykle będzie najszybciej jak przy szybkim potęgowaniu *

Rozpiszmy 74^{74} rozbijając wykładnik potęgi na kolejne potęgi dwójki

$74 = 64 + 8 + 2$

$74^{74} = 74^{64+8+2}$

$74^1 \equiv 74 \bmod 100$

$74^2 \equiv 76 \bmod 100$

$74^4 \equiv 74^2 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv 5776 \bmod 100 = 76 \bmod 100$

$74^8 \equiv 74^4 \bmod 100 \cdot 74^4 \bmod 100 = 76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 = 76 \bmod 100$

Zauważmy też, że nam się to „zapętliło" więc

$74^2 \equiv 74^4 \equiv 74^8 \equiv 74^{16} \equiv 74^{32} \equiv 74^{64} \pmod{100} \equiv 76 \bmod 100$

Mając te wszystkie liczby, możemy zapisać:

$74^{74} \bmod 100 \equiv 74^{64+8+2} \bmod 100 \equiv$

$74^{64} \cdot 74^8 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$(((76 \bmod 100) \cdot (76 \bmod 100)) \bmod 100) \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$5776 \bmod 100 \cdot 74^2 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 5776 \bmod 100 \equiv$

$76 \bmod 100 \cdot 76 \bmod 100 \equiv$

$\underline{76} \bmod 100$

A więc dwoma ostatnimi cyframi będzie 76.

(można obliczyć dowolną ilość biorąc odp. wartość modulo)