

Lista nr 7
22 listopada 2023 r.

Zajęcia 28 listopada 2023 r.
Zaliczenie listy od 6 pkt.

17 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	suma
pkt.		1	1	1	1	2	2		
rozpłt.	1	1	1	1	1	2	2	2	11

L7.1. [1 punkt] Niech dane będą parami różne liczby x_0, x_1, \dots, x_n . Wykaż, że dla wielomianów

$$\lambda_k(x) := \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j} \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

zachodzi

$$\text{a) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(x) \equiv 1, \quad \text{b) } \sum_{k=0}^n \lambda_k(2023) \prod_{i=0}^{j-1} (x_k - f(i)) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

gdzie $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją spełniającą warunek $f(0) = 2023$.

L7.2. [1 punkt] Używając postaci Newtona, podaj wielomian interpolacyjny dla następujących danych:

$$\text{a) } \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -3 & 0 & 3 & 4 \\ \hline y_k & 2 & 2 & 38 & 142 \end{array}, \quad \text{b) } \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & 3 & 4 & -3 & -1 \\ \hline y_k & 38 & 142 & 2 & 62 \end{array},$$

$$\text{c) } \begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -4 & -3 & -2 & 2 \\ \hline y_k & 9 & 7 & 5 & -3 \end{array} \begin{array}{c|c|c|c} 3 & 4 & 1977 & 2 \end{array}.$$

Uwaga. Na pewno zauważysz, że rozwiązując podpunkty b) oraz c) nie musisz wykonywać wielu obliczeń.

L7.3. [Włącz komputer!] [1 punkt] Przy pomocy programu umożliwiającego rysowanie wykresów funkcji, przygotuj wykresy wielomianów

$$p_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) \quad (n = 4, 5, \dots, 20)$$

dla x_k ($0 \leq k \leq n$) będących węzłami równoodległymi w przedziale $[-1, 1]$. Następnie powtórz eksperyment dla węzłów Czebyszewa. Skomentuj wyniki porównując odpowiednie wykresy. Jakże i dlaczego płyną stąd wnioski dla sposobu wyboru węzłów interpolacji?

L7.4. [1 punkt] Niech $t_{nk}^{[a,b]}$ ($0 \leq k \leq n$; $n \in \mathbb{N}$) oznacza węzły Czebyszewa w przedziale $[a, b]$ ($a < b$). Podaj jawny wzór dla tych węzłów. Jaką wartość przyjmuje wyrażenie

$$\max_{x \in [a,b]} \left| \left(x - t_{n0}^{[a,b]} \right) \left(x - t_{n1}^{[a,b]} \right) \dots \left(x - t_{nn}^{[a,b]} \right) \right|?$$

Odpowiedź uzasadnij.

L7.5. [1 punkt] Funkcję $f(x) = \cos(x)$ interpolujemy wielomianem $L_n \in \Pi_n$ w pewnych $n+1$ różnych punktach przedziału $[-3, -2]$. Znajdź wartość n , dla której

$$\max_{x \in [-3, -2]} |f(x) - L_n(x)| \leq 10^{-12}.$$

Jak zmieni się sytuacja, gdy użyjemy węzłów Czebyszewa odpowiadającym przedziałowi $[-3, -2]$?

L7.6. [2 punkty] Jak wiadomo, język programowania PWO++ ma bogatą bibliotekę funkcji i procedur numerycznych. Wśród nich jest m.in. procedura `DD.Table(x, f)` znajdująca z dokładnością bliższą maszynowej ilorazy różnicowe $f[x_0], f[x_0, x_1], \dots, f[x_0, x_1, \dots, x_n]$, gdzie $x = [x_0, x_1, \dots, x_n]$ jest wektorem parami różnych liczb rzeczywistych, a f – daną funkcją. Niestety procedura ta ma pewną wadę, mianowicie n musi być mniejsze niż 21. W jaki sposób, wykorzystując procedurę `DD.Table` tylko raz, można szybko wyznaczyć ilorazy różnicowe $f[z_0], f[z_0, z_1], \dots, f[z_0, z_1, \dots, z_{20}], f[z_0, z_1, \dots, z_{20}, z_{21}]$, gdzie $z_i \neq z_j$ dla $i \neq j$, $0 \leq i, j \leq 21$.

Uwagi. Rozwiązania, w których dwukrotnie używa się procedury `DD.Table` lub wykorzystuje się jawny wzór na iloraz różnicowy nie wchodzi w grę.

L7.7. [2 punkty] Niech dla $n \in \mathbb{N}$ dane będą punkty $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$ oraz taka funkcja f , że pochodna $f^{(n+1)}$ jest ciągła i ma stały znak w przedziale $[x_0, x_{n+1}]$. Niech L i M będą takimi wielomianami stopnia $\leq n$, że

$$L(x_i) = f(x_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

$$M(x_j) = f(x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, n+1).$$

Wykazać, że dla dowolnego $x \in [x_0, x_{n+1}]$ wartość $f(x)$ leży pomiędzy $L(x)$ i $M(x)$.

L7.8. [2 punkty] Niech p_n będzie wielomianem stopnia $n > 1$ interpolującym daną funkcję f w węzłach $t_{nj} := \cos \frac{\pi j}{n}$ ($j = 0, 1, \dots, n$). Udowodnij, że

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k^n \cdot T_k(x),$$

gdzie T_k jest k -tym wielomianem Czebyszewa, a

$$b_k^n := \frac{2}{n} \sum_{j=0}^n f(t_{nj}) T_k(t_{nj}) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Jak użyć algorytmu Clenshawa do obliczenia współczynników b_k^n ($k = 0, 1, \dots, n$)? Ile to kosztuje?

Uwaga. Jeśli potrafisz podać i uzasadnić algorytm wyznaczania współczynników b_k^n ($0 \leq k \leq n$) w czasie $O(n \log n)$, to przygotuj rozwiązanie przy pomocy systemu `WpEx` i dostarcz je prowadzącemu – być może dostaniesz dodatkowe punkty.