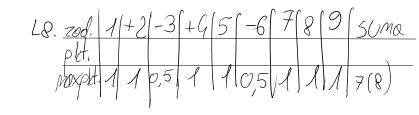
- Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
  - (a) na dowolne składniki,
  - (b) na różne składniki nieparzyste,
  - (c) na składniki mniejsze od m,
  - (d) na różne potęgi liczby 2.
- 2. (+) Niech  $p_n$  oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np.  $p_4=2$ , bo interesujące nas podziały to 1+3 i 2+2. Podaj funkcję tworząca dla ciągu  $p_n$ .
- (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.
- 4. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków  $V(G)=V(H)=\{1,2,3,\ldots,n\}$ . Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie O(m+n), czy te grafy są identyczne.
- Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:
  - (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
  - (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,
  - (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,
  - (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),
  - (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).
- 6. (-) Pokaž, že ješli w grafie G istnieje droga z u do v, to istnieje tež sciežka z u do v.
- 7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny  $\{G_v:v\in V\}$  są spójne, gdzie  $G_v$  jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.
- Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzcholek.
- 9. Wykaź, że przynajmniej jeden z grafów G=(V,E) i G (G jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie G=(V,E') grafu G zdefiniowane jest jako graf (V,E') taki, że  $\{u,v\}\in E'\Leftrightarrow \{u,v\}\notin E$ .



- Podaj postać funkcji tworzącej dla liczby podziałów liczby naturalnej n (czyli rozkładów liczby n na sumę składników naturalnych, gdy rozkładów różniących się kolejnością nie uważamy za różne):
  - (a) na dowolne składniki,
  - (b) na różne składniki nieparzyste,
  - (c) na składniki mniejsze od m,
  - (d) na różne potęgi liczby 2.

2. (+) Niech  $p_n$  oznacza liczbę podziałów liczby naturalnej n, w których każdy składnik nieparzysty występuje nieparzystą liczbę razy a każdy parzysty parzystą, np.  $p_4=2$ , bo interesujące nas podziały to 1+3 i 2+2. Podaj funkcję tworząca dla ciągu  $p_n$ .

3. (-) Przekonaj się, że z dokładnością do izomorfizmu, istnieje 11 grafów prostych z czterema wierzchołkami.

4. (+) Problem izomorfizmu dwóch grafów jest trudny. Załóżmy natomiast, że w komputerze są dane dwa grafy G i H, określone na tym samym zbiorze wierzchołków  $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ . Niech m oznacza liczbę krawędzi grafu G. Podaj algorytm sprawdzający w czasie O(m+n), czy te grafy są identyczne.

- 5. Rozważ reprezentacje grafu G: macierzową (za pomocą macierzy sąsiedztwa), listową. Dla każdej z tych reprezentacji, określ złożoność wykonania na grafie G następujących operacji:
  - (a) oblicz stopień ustalonego wierzchołka,
  - (b) przeglądnij wszystkie krawędzie grafu,
  - (c) sprawdź, czy krawędź (u, v) należy do grafu G,
  - (d) usuń z grafu G krawędź (u, v),
  - (e) wstaw do grafu G krawędź (u, v).

6. (-) Pokaż, że jeśli w grafie Gistnieje droga z u do v, to istnieje też scieżka z u do v.

7. Udowodnij, że graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy przynajmniej dwa grafy z rodziny  $\{G_v:v\in V\}$  są spójne, gdzie  $G_v$  jest grafem powstałym z G przez usunięcie wierzchołka v i incydentnych z nim krawędzi.

8. Udowodnij, że w grafie spójnym każde dwie najdłuższe ścieżki mają wspólny wierzchołek.

9. Wykaż, że przynajmniej jeden z grafów G=(V,E) i  $\bar{G}$  (G jest dopełnieniem grafu G) jest spójny. Dopełnienie  $\bar{G}=(V,E')$  grafu G zdefiniowane jest jako graf (V,E') taki, że  $\{u,v\}\in E'\Leftrightarrow \{u,v\}\notin E$ .