1 (done)

15 October, 2023 18:38

L2.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Ustalmy liczbę $B \in \{2, 3, 4, \ldots\}$. Pokaż, że każda niezerowa liczba rzeczywista x ma jednoznaczne przedstawienie w postaci $x = smB^c$, gdzie $s = \operatorname{sgn} x$, $c \in \mathbb{Z}$, $m \in [\frac{1}{B}, 1)$.

Metoda z repo

$x = mB^c$ (z dokładnością do $|x|$)

Bierzemy ciąg
$0 \leq a_1 < a_2 < a_3 \ldots,$
gdzie każdy z wyrazów to B podniesione do odp. potęgi

$x \geq 0$

$a_k \leq x < a_{k+1}$

$B^k \leq x < B^{k+1} \quad | : B^{k+1}$

$\frac{1}{B} \leq \frac{x}{B^{k+1}} < 1$

Jednoznaczność zapisu możemy udowodnić też nie wprost. Znak pomińmy.
Załóżmy, że istnieją dwie reprezentacje tej samej liczby
$x = sm_1B^{c_1} = sm_2B^{c_2} \Rightarrow m_1 B^{c_1} = m_2 B^{c_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = B^{c_2 - c_1}$

Teraz rozważmy przypadki:

$c_1 = c_2 \Rightarrow B^0 = 1 = \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow m_1 = m_2$ ta sama liczba, sprzeczność

$c_1 > c_2 \Rightarrow c \in \mathbb{Z}$ więc $c_2 - c_1 \leq -1$ $\quad B^{-1} = \frac{1}{B}$ $\quad \frac{m_1}{m_2} \leq \frac{1}{B} \Rightarrow m_1 \cdot B \leq m_2$

ale równocześnie $m_1, m_2 \in \langle \frac{1}{B}, 1)$, a więc sprzeczność

$c_1 < c_2$ analogicznie