Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha.

Ile osób jest w tym klubie?

Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona, lub w tenisa.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha,
- 30 gra w tenisa,
- 5 w tenisa i badmintona,
- 7 w tenisa i squasha,
- 3 we wszystkie trzy sporty.

Ile osób jest w tym klubie?

Sporty rakietowe

W pewnym klubie każdy gra w squasha lub badmintona, lub w tenisa, lub w ping-ponga.

- 25 osób gra w badmintona,
- 40 w squasha,
- 10 gra i w badmintona, i w squasha,
- 30 gra w tenisa,
- 5 w tenisa i badmintona,
- 7 w tenisa i squasha,
- 3 w tenisa, badmintona i squasha,
- $\ldots$.

Ile osób jest w tym klubie?

Wzór włączeń i wyłączeń

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\emptyset\neq I\subseteq\{1,2,\ldots,n\},|I|=k}\left|\bigcap_{i\in I} A_i\right|$$

Wzór włączeń i wyłączeń

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\},|I|=k}|\bigcap_{i \in I} A_i|$$

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}}(-1)^{|I|-1}|\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy e jest policzony po prawej stronie wzoru?

Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy e jest policzony po prawej stronie wzoru?

$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots$

Wzór włączeń i wyłączeń - dowód

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}, |I|=k} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Niech $e \in \bigcup_{i=1}^n A_i$. Załóżmy, że $e \in A_1, A_2 \ldots A_p$ oraz $e \notin A_{p+1}, A_{p+2} \ldots, A_n$.

Ile razy e jest policzony po prawej stronie wzoru?

$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots$
$(-1+1)^p = \sum_{i=0}^p (-1)^i \binom{p}{i} (1)^{p-i}$
$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots = -(-1+1)^p + 1 = 1$
e jest policzony raz!

Szczególne sito

Ile liczb spośród $\{1, 2, \ldots, 100\}$ nie jest podzielnych przez żadną z liczb $6, 8, 15$?

Równanie

Ile rozwiązań wśród liczb naturalnych ma równanie $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 50$, jeśli wymagamy, aby $x_i < 15$ dla każdego $1 \leq i \leq 4$?

Surjekcje

Ile jest różnych surjekcji z n-elem. zbioru A na m-elem. zbiór B?

Liczba dzielników

Ile dzielników naturalnych ma 72?

Kwadrat liczby naturalnej

Pokaż, że n jest kwadratem liczby naturalnej wtw, gdy liczba dzielników naturalnych liczby n jest nieparzysta.

Podzielność przez 3

Podzielność przez 3

Liczba naturalna x dzieli się przez 3 wtw, gdy suma jej cyfr w zapisie dziesiętnym dzieli się przez 3.

Podzielność przez 2

Jak rozpoznać czy liczba n zapisana w systemie dziesiętnym jest parzysta?
A w systemie dwójkowym, trójkowym?

Ostatnia cyfra

Jaka jest ostatnia cyfra liczby 77^{77} zapisanej w systemie dziesiętnym?

Dwie ostatnie cyfry

Jakie są dwie ostatnie cyfry liczby 77^{77} zapisanej w systemie dziesiętnym?

Liczby Fibonacciego

- $F_0 = 0$,
- $F_1 = 1$,
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n > 1$.

Proste na płaszczyźnie

Na ile maksymalnie obszarów można podzielić płaszczyznę przy pomocy n prostych?

Wieża Hanoi

Ile potrzeba ruchów by przenieść wieżę składającą się z n krążków z pręta A na pręt C używając pomocniczo pręta B,
jeśli:

- krążki są różnej wielkości, ułożone od największego do najmniejszego, największy na spodzie, najmniejszy na wierzchu,
- w jednym ruchu można przenieść jeden krążek,
- nie można kłaść krążka większego na mniejszym?