Lista nr 11 z matematyki dyskretnej

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m+n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i,j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

3. (+) *Minimalnym cięciem* w grafie jest podzbiór jego krawędzi, których usunięcie rozspaja graf, a usunięcie żadnego podzbioru krawędzi w nim zawartego nie rozspaja grafu. Wykaż, że graf spójny zawiera cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy każde minimalne cięcie zawiera parzystą liczbę krawędzi.

4. (-) Udowodnij lub obal: Nie istnieje graf eulerowski (tj. zawierający cykl Eulera) o parzystej liczbie wierzchołków i nieparzystej liczbie krawędzi.

5. Rozwiąż problem cyklu/drogi Eulera w grafach skierowanych.

6. Ile jest nieidentycznych digrafów o wierzchołkach $1, 2, \ldots, n$, w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?

7. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy 5×5, każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.

8. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

   Wskazówka: Warunek Halla.

9. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie

oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

10. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków a, b jest połączona krawędzią z a do b albo z b do a.