L4

26 October, 2023 23:08

L4 zad.	+1	2	3	4	5	6	7	8	-9	-10	-11	-12	13	suma
pkt.	1	1	1	1										
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	1	0,5	0,5	0,5	0,5	1	11 (9 na dekl.)

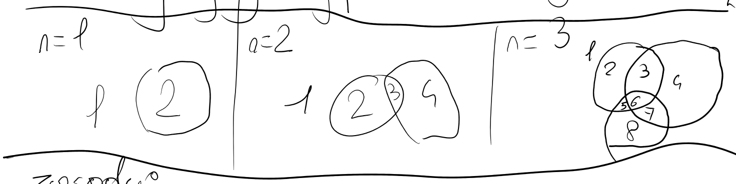
1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.
2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?
3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?
4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?
5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wsród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?
6. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.
7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n+1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)
8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n+2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.
9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne
   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.
   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.
10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.
11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.
12. (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.
13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.

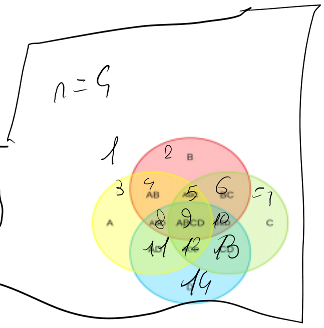
+1 (done)

26 October, 2023 23:13

1. (+) Na płaszczyźnie danych jest n okręgów. Jaka jest maksymalna liczba obszarów, na które dzielą one płaszczyznę. Wyprowadź rozwiązanie za pomocą odpowiedniej zależności rekurencyjnej.

Rozrysujmy najpierw dla małych n:





zasady:

- żaden okrąg nie leży wewnątrz innego okręgu
- jedyne lepsze przecięcie - dokładnie dwa okręgi
- każdy okrąg powinien przecinać się z każdym innym okręgiem w dokładnie dwóch miejscach

Możemy zapisać:

$r_1 = 2 \quad r_2 = 4 \quad r_3 = 8 \quad r_4 = 14$

każdy kolejny okrąg przecina się z poprzednim w 2 punktach. $2(n-1)$ nowych punktów => $2(n-1)$ nowych łuków => $2(n-1)$ nowych pól

i uogólnić jako zależność rekurencyjną

$$r_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ r_{n-1} + 2(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

$$r_n = r_{n-1} + 2(n-1) = r_{n-2} + 2(n-2) + 2(n-1) = r_{n-3} + 2(n-3) + 2(n-2) + 2(n-1) = \ldots =$$

$$r_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 2(n-i) = 2 + \underbrace{2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)}_{} = 2 + \underbrace{2\,\frac{(n-1)\cdot n}{2}}_{} = n^2 - n + 2$$

wzorem na sumę ciągu arytmetycznego

Odp. $n^2 - n + 2, \; n \in \mathbb{N}^+$

2 (done)

26 October, 2023 23:13

2. Ile jest różnych sposobów wejścia po schodach zbudowanych z n stopni, jeśli w każdym kroku można pokonać jeden lub dwa stopnie?

Oczywiście będzie tu rekurencja. Rozważmy najpierw bazowe przypadki, a potem wyprowadźmy wzór rekurencyjny

$$r_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ r_{n-1} + r_{n-2}, & n > 1 \end{cases}$$

czyli Fibonacci

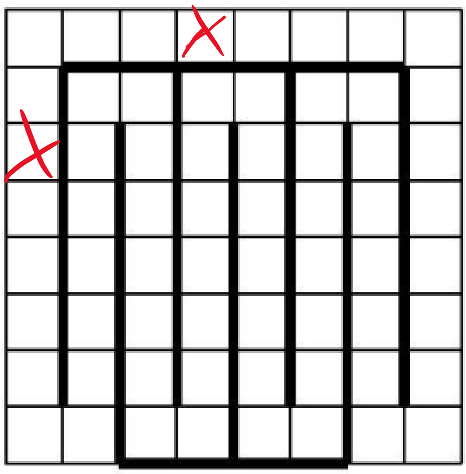
$$F_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

3 (done)

26 October, 2023 23:13

3. Z szachownicy 8×8 wyjmujemy jedno pole białe i jedno czarne. Czy w każdym wypadku pozostałą część szachownicy można pokryć kostkami domina?

Tak. By to zwizualizować narysujmy ścianki tak, by można było przejść całą szachownicę dokładnie jedną drogą, np. jak po prawej. →

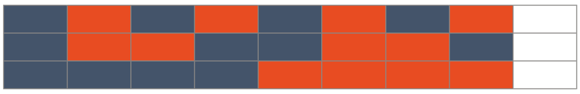


Dzięki temu że usuwamy pola różnych kolorów, to luki w szachownicy zawsze będą oddalone od siebie o parzystą ilość pól. → parzystą ilość pól które można zinterpretować jako ścieżkę o szerokości 1 zawsze można pokryć kostkami domino c.n.u.

4 (done)

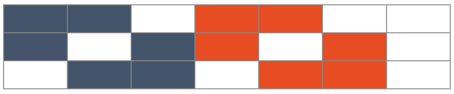
26 October, 2023 23:13

4. Każde pole szachownicy 3×9 pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Wiadomo, że na tej szachownicy istnieje prostokąt o polach wierzchołkowych takiego samego koloru. Czy dla szachownicy $3 \times k$ dla jakiegoś $k < 9$ własność ta jest zachowana?



Dla 9 udowodniliśmy listę temu

Da się udowodnić dla 7



Potrzebujemy conajmniej dwóch pól tego samego koloru na kolumnę, kolumny C,C,C i N,N,N współgrają idealnie z każdym innym wariantem tego samego koloru

z pidgeonhole principle → działa dla $n=7$

i przy okazji stworzyliśmy kontrprzykład dla $n=6$

5

26 October, 2023 23:13

5. Każde pole nieskończonej szachownicy pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Czy można rozważyć jeszcze mniej pól niż w poprzednim zadaniu, by wsród wybranych pól istniał prostokąt o wierzchołkach tego samego koloru?

6

26 October, 2023 23:13

6. 13 dziewczyn i 13 chłopaków zasiada przy okrągłym stole. Pokaż, że w każdym przypadku jakaś osoba będzie mieć po obu stronach dziewczyny.

7

26 October, 2023 23:13

7. Spośród liczb naturalnych z przedziału $[1, 2n]$ wybrano $n + 1$. Pokaż, że zawsze jakieś dwie wśród wybranych są względnie pierwsze. (Dwie liczby a i b są względnie pierwsze jeśli $NWD(a, b) = 1$.)

8

26 October, 2023 23:13

8. Udowodnij, że wśród dowolnych $n + 2$ liczb całkowitych istnieją takie dwie, których suma lub różnica dzieli się przez $2n$.

-9

26 October, 2023 23:13

9. (-) Stosując metodę podstawiania rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1} n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

-10

26 October, 2023 23:13

10. (-) Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest liczbą pierwszą.

Załóżmy, że n nie jest pierwsza $\Leftrightarrow \exists x, y \; n = xy, \; x, y \in N^+$

$$2^n - 1 = 2^{xy} - 1 = (2^x)^y - 1 = (2^x - 1)(2^{x(y-1)} + 2^{x(y-2)} + \ldots + 2^x + 1)$$

-11

26 October, 2023 23:13

11. (-) Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a = 2$.

-12

26 October, 2023 23:13

12. (-) Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to n jest potęgą liczby 2.

13

26 October, 2023 23:13

13. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.