

Zajęcia 19 grudnia 2023 r.
Zaliczenie listy od 5 pkt.

L10 zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	suma
pkt.	1	1	1	1	1	1	1			7
max pkt.	1	1	1	1	1	1	1	2	1	10

- L10.1.** [1 punkt] Niech dane będą parami różne punkty $\mathcal{X} := \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ i funkcja p o własności $p(x) > 0$ dla $x \in \mathcal{X}$. Udowodnij, że wzór

$$\|f\| := \sqrt{\sum_{k=0}^N p(x_k) f(x_k)^2}$$

określa normę na zbiorze dyskretnym \mathcal{X} .

- L10.2.** [1 punkt] Wyznacz funkcję postaci $y(x) = (x-1)(2023x+a) - 2024x$ najlepiej dopasowaną w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

$$\frac{x_k}{y_k} \parallel \begin{matrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ y_0 & y_1 & \dots & y_n \end{matrix}.$$

- L10.3.** [1 punkt] Dla jakiej stałej a wyrażenie

$$\sum_{k=0}^r \frac{e^{2x_k}}{2 + \sin(2023x)} \left[y_k - a (\ln(2022x_k^4 + 3) + 4x_k^5) \right]^2$$

przyjmuje najmniejszą możliwą wartość?

- L10.4.** [1 punkt] Wiadomo, że napięcie powierzchniowe cieczy S jest funkcją liniową temperatury T :

$$S = aT + b.$$

Dla konkretnej cieczy wykonano pomiary S w pewnych temperaturach, otrzymując następujące wyniki:

$$\frac{T}{S} \parallel \begin{matrix} 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 80 & 90 & 95 \\ 68.0 & 67.1 & 66.4 & 65.6 & 64.6 & 61.8 & 61.0 & 60.0 \end{matrix}$$

Wyznacz prawdopodobne wartości stałych a i b .

- L10.5.** [1 punkt] Pomiary (t_k, C_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k, C_k > 0$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = 5 + \frac{\sin(1977t^4) + 2}{A \cos(2t-1) + B e^{1-2t} + 2023t^2 + 3}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobne wartości stałych A i B .

- L10.6.** [1 punkt] Punkty (x_k, y_k) ($k = 0, 1, \dots, r$) otrzymano jako wyniki pomiarów. Po ich zaznaczeniu na papierze z siatką półlogarytmiczną¹ okazało się, że leżą one prawie na linii prostej, co sugeruje, iż $y \approx e^{ax+b}$. Zaproponuj prosty sposób wyznaczenia prawdopodobnych wartości parametrów a i b .

- L10.7.** [1 punkt] Poziom w Morzu Północnym zależy głównie od tzw. pływów M_2 o okresie ok. 2π i równaniu

$$H(t) = h_0 + a_1 \sin \frac{2\pi t}{12} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{12} \quad (t \text{ mierzone w godzinach}).$$

Zrobiono następujące pomiary:

$$\frac{t}{H(t)} \parallel \begin{matrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 1 & 1.6 & 1.4 & 0.6 & 0.2 & 0.8 \end{matrix} \begin{matrix} \text{godz.} \\ \text{m} \end{matrix}.$$

Wykorzystaj aproksymację średniokwadratową do wyznaczenia prawdopodobnych wartości stałych h_0 , a_1 , a_2 .

- L10.8.** [2 punkty] Niech dane będą: $x_0 < x_1 < \dots < x_N$, $y_k \in \mathbb{R}$ ($0 \leq k \leq N$) oraz wielomian $w_n^*(x) := \sum_{k=0}^n A_k^* x^k$, gdzie $n < N$. Podaj jawną postać układu równań, który muszą spełniać współczynniki $A_0^*, A_1^*, \dots, A_n^*$, aby zachodziło

$$\|f - w_n^*\|_2 = \min_{w_n \in \Pi_n} \|f - w_n\|_2,$$

gdzie f jest taką funkcją, że $f(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \dots, N$, natomiast

$$\|g\|_2 := \sqrt{\sum_{k=0}^N (g(x_k))^2}.$$

- L10.9.** [1 punkt] Niech dane będą parami różne liczby x_0, x_1, \dots, x_N . Niech $y_0, y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}$. Jakim wzorem wyraża się wielomian $w_N^* \in \Pi_N$, dla którego

$$\|f - w_N^*\|_2 = \min_{w_N \in \Pi_N} \|f - w_N\|_2$$

(f oraz $\|\cdot\|_2$ mają znaczenie, jak w zadaniu poprzednim)?

(-) Paweł Woźny