Lista nr 5 z matematyki dyskretnej

1. Znajdź ogólną postać rozwiązań następujących równań rekurencyjnych za pomocą anihilatorów i rozwiąż jedno z równań do końca:

   (a) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3^n - 1$, gdy $a_0 = a_1 = 0$.

   (b) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + n2^{n+1}$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

   (c) $a_{n+2} = \frac{1}{2^{n+1}} - 2a_{n+1} - a_n$, gdy $a_0 = a_1 = 1$.

2. Niech c_n oznacza liczbę ciągów długości n złożonych z n cyfr ze zbioru $\{0, 1, 2\}$, nie zawierających dwóch następujących po sobie zer i dwóch następujących po sobie jedynek. Wyprowadź zależność rekurencyjną, jaką spełniają liczby c_n przyjmując $c_0 = 1$. Rozwiąż otrzymaną zależność rekurencyjną.

3. (-) Stosując metodę anihilatorów rozwiąż następujące zależności rekurencyjne

   (a) $t_n = t_{n-1} + 3^n$ dla $n > 1$ i $t_1 = 3$.

   (b) $h_n = h_{n-1} + (-1)^{n+1}n$ dla $n > 1$ i $h_1 = 1$.

4. Rozwiąż następujące zależności rekurencyjne:

   (a) $a_{n+1} = \left|\sqrt{a_n^2 + a_{n-1}^2}\,\right|,\ a_0 = a_1 = 1,$

   (b) $b_{n+1} = \left|\sqrt{b_n^2 + 3}\,\right|,\ b_0 = 8,$

   (c) $c_{n+1} = (n+1)c_n + (n^2 + n)c_{n-1},\ c_0 = 0,\ c_1 = 1.$

5. Rozwiąż zależności rekurencyjne:

   (a) $c_0 = 1, c_n = c_0 + c_1 + \ldots, c_{n-1}$

   (b) $d_0 = 1, d_1 = 2, d_n = d_{n-1}^2 / d_{n-2}$.

6. Na ile sposobów można ułożyć domina na prostokącie o rozmiarze $2 \times n$? Domino ma wymiar 1×2.

7. Rozwiąż zależność rekurencyjną

   $a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_0 = 2$ i założeniem, że $a_n > 0$ dla każdego naturalnego n.

8. Ile jest wyrazów złożonych z n liter należących do 25-literowego alfabetu łacińskiego, zawierających parzystą liczbę liter a?

9. (2p) Wieża Hanoi składa się z n krążków n różnych rozmiarów, po 1 krążku każdego rozmiaru. W jednym kroku przenosimy dokadnie jeden krążek i nie możemy kłaść większego krążka na mniejszym. Ile kroków jest potrzebnych, aby przenieść wieżę z pręta A na pręt C, posługując się przy tym prętem B, jeśli bezpośrednie ruchy z pręta A na C są zakazane, ale ruchy w drugą stronę z pręta C na A są dozwolone?

10. Podaj i udowodnij regułę sprawdzania podzielności przez 11 liczby naturalnej zapisanej w systemie dziesiętnym.

11. Podaj dwie ostatnie cyfry liczby $9^{8^{7^{6^{5^{4^{3^{2^{1}}}}}}}}$ w rozwinięciu dziesiętnym.