

Ćwiczenia z ANALIZY NUMERYCZNEJ (L)

Lista nr 6

8 listopada 2023 r.

Zajęcia 14 listopada 2023 r.
Zaliczenie listy **od 5 pkt.**

L6.1. 1 punkt Uzasadnij, że *schemat Hornera* jest algorytmem numerycznie poprawnym.

L6.2. 1 punkt Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \dots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x , gdzie c_0, c_1, \dots, c_n są dane, a T_n oznacza n -ty *wielomian Czebyszewa*.

L6.3. 2 punkty Niech T_n ($n = 0, 1, \dots$) oznacza n -ty wielomian Czebyszewa.

- (a) Podaj postać potęgową wielomianu T_5 .
- (b) Jakimi wzorami wyrażają się współczynniki wielomianu T_n przy x^n i x^{n-1} ?
- (c) Korzystając z faktu, że dla dowolnego x z przedziału $[-1, 1]$ n -ty ($n \geq 0$) wielomian Czebyszewa wyraża się wzorem $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$:
 - i. sprawdź, że $|T_n(x)| \leq 1$ ($-1 \leq x \leq 1$; $n \geq 0$);
 - ii. wyznacz wszystkie *punkty ekstremalne* n -tego wielomianu Czebyszewa, tj. rozwiązania równania $|T_n(x)| = 1$;
 - iii. udowodnij, że wielomian Czebyszewa T_{n+1} ($n \geq 0$) ma $n+1$ zer rzeczywistych, pojedynczych, leżących w przedziale $(-1, 1)$.

L6.4. 2 punkty Wykaż, że dla dowolnych $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$T_{kl}(x) = T_k(T_l(x)).$$

Wykorzystaj podaną zależność do opracowania **szybkiego algorytmu** wyznaczania wartości wielomianu Czebyszewa **wysokiego** stopnia niebędącego liczbą pierwszą.

L6.5. 1 punkt Udowodnij istnienie i jednoznaczność rozwiązania zadania interpolacyjnego Lagrange'a.

L6.6. 1 punkt Podaj postać Lagrange'a wielomianu interpolacyjnego dla danych

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_k & -10 & -5 & 7 & 11 \\ y_k & 8 & -3 & 5 & 0 \end{array}.$$

L6.7. 1 punkt Niech będzie $f(x) = 2023x^8 + 1977x^7 - 1939x^4 + 1410x^2 - 966x + 1996$.

- (a) Wyznacz wielomian stopnia ≤ 8 interpolujący funkcję f w punktach $-2023, 1977, -1945, \sin(1), 1989, -1939, 1791, 1945, \pi$.
- (b) Wyznacz wielomian drugiego stopnia, interpolujący funkcję f w punktach $-1, 0, 1$.

(-) *Paweł Woźny*