

Funkcje tworzące

11 November, 2024 15:39

Jeśli $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = A(x)$ dla pewnej funkcji $A(x)$, to $A(x)$ jest funkcją tworzącą ciąg $\langle a_n \rangle$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 1 \rangle = (1, 1, \dots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^i + \dots$$

Dla wygody założymy, że $|x| < 1$. Zauważając że to jest ciąg potęgowy

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad \frac{1}{1-x} \text{ jest funkcją tworzącą ciąg } \langle 1 \rangle$$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 7 \rangle = (7, 7, 7, \dots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = 7 + 7x + 7x^2 + \dots + 7x^i + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = \frac{7}{1-x} \quad \frac{7}{1-x} \text{ jest funkcją tworzącą ciąg } \langle 7 \rangle$$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle 2^n \rangle = (1, 2, 4, \dots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = 1 + 2x + 4x^2 + \dots + 2^i x^i + \dots$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x} \quad \frac{1}{1-2x} \text{ jest funkcją tworzącą ciąg } \langle 2^n \rangle$$

Niech $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle = (1, -1, 1, -1, \dots)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^i x^i + \dots$$

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} \quad \frac{1}{1+x} \text{ jest funkcją tworzącą ciąg } \langle (-1)^n \rangle$$

Ogólnie:

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem a

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots \text{ jest jego funkcją tworzącą}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1+x$$

1+x jest

0

Ogólnie:

Niech $\langle a_n \rangle$ będzie pewnym ciągiem

$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$ jest jego funkcją tworzącą

Dla ciągu:

$$\bullet (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$$

$$\bullet \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \dots = A(x^2)$$

Dla ciągu:

$$\bullet (a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, \dots)$$

$$\bullet \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \dots + a_i x^{3i} + \dots = A(x^3)$$

Dla ciągu:

$$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \dots)$$

Bierzemy dwie takie że pozyskać się wyzerują

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$$

$$B(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + a_i (-x)^i + \dots$$

$$A(x) = \frac{B(x) + B(-x)}{2}$$

A dla $(0, a_1, 0, a_3, 0, \dots)$?

$$B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_i x^i + \dots$$

$$B(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - \dots + a_i (-x)^i + \dots$$

$$A(x) = \frac{B(x) - B(-x)}{2}$$

$$A(x) = \frac{B(x) - B(-x)}{2}$$