Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Nawiasowanie

Na ile sposobów można w poprawny sposób ustawić n par nawiasów?
Każda para składa się z nawiasu otwierającego i zamykającego.

c_i - liczba poprawnych nawiasowań i par nawiasów

$c_0 = 1$
$c_1 = 1$
$c_2 = 2$

Nawiasowanie

Problem równoważny nawiasowaniu:

Załóżmy, że punkt startowy to $(0, 0)$ w układzie współrzednych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\nearrow$ i n ruchów $\searrow$.

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie znaleźć się pod poziomem 0?

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

Może $c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} \ldots + c_1 c_{n-1} + c_{n-1} = c_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i}$?

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

Może $c_n = c_1 c_{n-1} + c_2 c_{n-2} \ldots + c_1 c_{n-1} + c_{n-1} = c_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} c_i c_{n-i}$?

Powyższy wzór jest niepoprawny, bo np. nawiasowanie $()() \ldots ()$ jest zliczone w każdym ze składników $c_i c_{n-i}$ w sumie.

Nawiasowanie

Jak zapisać c_i w postaci zależności rekurencyjnej?

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w której poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

Nawiasowanie

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w których poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

$d_i = c_{i-1} c_{n-i}$

Nawiasowanie

$c_n = \sum_{i=1}^{n} d_i$, gdzie

d_i liczba "ponadziemnych" ustawień n par kroków $\nearrow$ i $\searrow$, w których poziom 0 osiągamy po raz pierwszy po $2i$ krokach.

$d_i = c_{i-1} c_{n-i}$
$c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}$

Nawiasowanie

Problem równoważny nawiasowaniu:

Załóżmy, że punkt startowy to $(0, 0)$ w układzie współrzędnych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\rightarrow$ (przemieszczenie się o 1 w prawo) i n ruchów $\uparrow$ (przemieszczenie się o 1 w górę).

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie przekroczyć prostej $y = x$?

Nawiasowanie

Załóżmy, że punkt startowy to $(0,0)$ w układzie współrzędnych. Mamy do dyspozycji n ruchów $\rightarrow$ (przemieszczenie się o 1 w prawo) i n ruchów $\uparrow$ (przemieszczenie się o 1 w górę).

Na ile różnych sposobów możemy je wykonać tak, by nigdy nie przekroczyć prostej $y = x$?

$c_n = \binom{2n}{n}$ *minus* liczba złych ścieżek

Ile jest ścieżek złych - przekraczających $y = x$?

Nawiasowanie

Ile jest ścieżek złych - przekraczających $y = x$?

- Każda ścieżka zła przekracza prostą $y = x$.
- Po pierwszym ruchu wyprowadzającym ścieżkę ponad $y = x$ zamieniamy każdy następny ruch $\rightarrow$ na $\uparrow$ i na odwrót.
- W rezultacie każda zła ścieżka w ten spsosób przekierowana będzie kończyć się w punkcie $(n-1, n+1)$.

Nawiasowanie

$c_n = \binom{2n}{n}$ *minus* liczba złych ścieżek

Ile jest ścieżek złych - przekraczających $y = x$?

$c_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} =$

c_n - liczby Catalana
$c_0 = 1$, dla $n > 0$: $c_n = \sum_{i=1}^{n} c_{i-1} c_{n-i}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem.

$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$

Jeśli $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = A(x)$ dla pewnej funcji $A(x)$, to

$A(x)$ jest funkcją tworzącą ciągu $< a_n >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

Czy szereg $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zapisać jakoś inaczej?

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

Czy szereg $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zapisać jakoś inaczej?

Zauważamy, że jest to szereg potęgowy o ilorazie x.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

Czy szereg $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zapisać jakoś inaczej?

Zauważamy, że jest to szereg potęgowy o ilorazie x.

Dla wygody założymy, że $|x| < 1$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

Czy szereg $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zapisać jakoś inaczej?

Zauważamy, że jest to szereg potęgowy o ilorazie x.

Dla wygody założymy, że $|x| < 1$.

Wtedy $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zwinąć do $\frac{1}{1-x}$.

Niech $< a_n >=< 1 >= (1, 1, 1 \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 1x^i = 1 + x + x^2 + \ldots + x^i + \ldots$

Czy szereg $\sum_{i=0}^{\infty} x^i$ możemy zapisać jakoś inaczej?

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$

$\frac{1}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $< 1 >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 7 >= (7, 7, 7 \dots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = 7 + 7x + 7x^2 + \dots + 7x^i + \dots$

$\sum_{i=0}^{\infty} 7x^i = \frac{7}{1-x}$

$\frac{7}{1-x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $< 7 >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< 2^n >= (1, 2, 4, 8, \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = 1 + 2x + 4x^2 + \ldots + 2^i x^i + \ldots$

$\sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (2x)^i = \frac{1}{1-2x}$

$\frac{1}{1-2x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $< 2^n >$.

Niech $< a_n >=< (-1)^n >= (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^i x^i + \ldots$

Jaka jest funkcja tworzącą ciągu $< (-1)^n >$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >=< (-1)^n >= (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

$\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^i = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^i x^i + \ldots$

$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$ jest funkcją tworzącą ciągu $< (-1)^n >$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcję tworzącą dla ciągu: $(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \ldots)$?

A jaką funkcję tworzącą ma ciąg: $(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Funkcja tworzące dla ciągu:
$(a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, a_3, 0, \ldots)$ to
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4 + \ldots + a_i x^{2i} + \ldots = A(x^2)$.

Funkcja tworzące dla ciągu:
$(a_0, 0, 0, a_1, 0, 0, a_2, 0, 0, a_3, 0, 0, \ldots)$ to
$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x^3 + a_2 x^6 + \ldots + a_i x^{3i} + \ldots = A(x^3)$.

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(a_0, 0, a_2, 0, a_4, \ldots)$?

$\frac{A(x)+A(-x)}{2}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.
$A(-x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (-x)^i = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 \ldots + a_i (-x)^i + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 0, a_3, 0, \ldots)$?

$\frac{A(x) - A(-x)}{2}$

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + i a_i x^{i-1} + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a
$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$A'(x) = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} = a_1 + a_2 x + \ldots + i a_i x^{i-1} + \ldots$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, ia_i, \ldots)$?

$A'(x)x$

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu: $(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem a $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots$ jego funkcją tworzącą.

$$\int A(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

Funkcje tworzące

Niech $< a_n >$ będzie pewnym ciągiem o funkcji tworzącej

$$A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i + \ldots.$$

$$\int A(x)dx = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} + C$$

Jak znaleźć funkcę tworzącą dla ciągu:
$(0, a_1/1, a_2/2, a_3/3, a_4/4, \ldots, a_i/i, \ldots)$?

$$\int_0^x \frac{A(t) - a_0}{t} dt$$

Asymptotyka

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

- Czy $f(n) = O(f(n))$?
- Czy $f(n) = O(\frac{f(n)}{100})$?
- Czy $10^6 n = O(n^2)$?

Asymptotyka

Funkcja duże O

Niech $f, g : N \rightarrow R \geq 0$.
$f(n) = O(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \leq cg(n)$

- Czy $f(n) = O(f(n))$? $n_0 = 0, \ c = 1$
- Czy $f(n) = O(\frac{f(n)}{100})$? $n_0 = 0, \ c = 100$
- Czy $10^6 n = O(n^2)$? $n_0 = 10^6, \ c = 1$

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Asymptotyka

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

- Czy $f(n) = o(f(n))$?
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$?
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = o(f(n))$?

Asymptotyka

Funkcja małe o

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.
$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

- Czy $f(n) = o(f(n))$? NIE
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$? TAK
- Czy $f(n) = o(g(n)) \Rightarrow g(n) = o(f(n))$? NIE

Asymptotyka

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Asymptotyka

Duże O

Niech $C, a, \alpha, \beta \in R > 0$.

- $\forall_{\alpha,\beta} \alpha \leq \beta \Rightarrow n^\alpha = O(n^\beta)$
- $\forall_{a>1} n^C = O(a^n)$
- $\forall_{\alpha>0} (\ln n)^C = O(n^\alpha)$

Przydatna może się okazać reguła de l'Hospitala:
Jeśli $f(n)$ i $g(n)$ dążą do nieskończoności, to $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(n)}{g'(n)}$.

Asymptotyka

Inne funkcje

Niech $f, g : N \to R \geq 0$.

- $f(n) = \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists_{c>0} \exists_{n_0 \in N} \forall_{n \geq n_0} f(n) \geq cg(n)$
- $f(n) = \Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n) = \Omega(g(n)) \wedge f(n) = O(g(n))$
- $f(n) = \omega(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

Suma harmoniczna

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

$G_k = \{i : \frac{1}{2^k} < \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2^{k-1}}\}$