

18.12.23	1	2	3	4	5	6	7	max pkt.
18.12.23	1	1	1	1	2	1	2	9

- L8.1.** 1 punkt Znajdź naturalną interpolacyjną funkcję sklejaną trzeciego stopnia (w skrócie: NIFS3) dla danych

a) $\begin{array}{c|c|c|c} x_k & -1 & 0 & 2 \\ \hline y_k & 48 & -72 & 96 \end{array}$

b) $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} x_k & -7 & -4 & -2 & 0 & 1 & 5 & 10 \\ \hline y_k & -16185 & -10116 & -6070 & -2024 & -1 & 8091 & 18206 \end{array}$

- L8.2.** 1 punkt Czy funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 24x^3 + 216x^2 + 500x + 328 & \text{dla } -3 \leq x \leq -2, \\ -17x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla } -2 \leq x \leq 0, \\ 22x^3 - 30x^2 + 8x & \text{dla } 0 \leq x \leq 1, \\ -6x^3 + 54x^2 - 76x + 28 & \text{dla } 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-3, -2, 0, 1, 3$?

- L8.3.** 1 punkt Czy istnieją takie stałe a, b, c, d , że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} 2023x - 2024 & \text{dla } -2 \leq x \leq -1, \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \text{dla } -1 \leq x \leq 1, \\ -2024x + 2023 & \text{dla } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

jest NIFS3 dla pewnych danych (obserwacji) odpowiadającym węzłom $-2, -1, 1, 2$?

- L8.4.** 1 punkt Niech s będzie naturalną funkcją sklejaną trzeciego stopnia interpolującą funkcję f w węzłach x_0, x_1, \dots, x_n ($a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$). Jak wiemy, *momenty* $M_k := s''(x_k)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) spełniają układ równań

$$(1) \quad \lambda_k M_{k-1} + 2M_k + (1 - \lambda_k)M_{k+1} = d_k \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

gdzie $M_0 = M_n = 0$ oraz

$$d_k := 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}], \quad \lambda_k := h_k / (h_k + h_{k+1}), \quad h_k := x_k - x_{k-1}.$$

Sformułuj i uzasadnij oszczędny algorytm rozwiązywania układu (1). Jaki jest koszt jego realizacji?

- L8.5.** 2 punkty Niech dane będą wektory $\mathbf{x} := [x_0, x_1, \dots, x_n]$ ($x_k < x_{k+1}$, $0 \leq k \leq n-1$), $\mathbf{y} := [y_0, y_1, \dots, y_n]$ oraz $\mathbf{z} := [z_0, z_1, \dots, z_m]$. Niech s_n oznacza NIFS3 spełniającą warunki $s_n(x_k) = y_k$ ($0 \leq k \leq n$). W języku **PW0++** procedura **NSpline3(x, y, z)** wyznacza wektor

$$\mathbf{Z} := [s_n(z_0), s_n(z_1), \dots, s_n(z_m)],$$

z tym, że **musi być** $m < 2n$. Załóżmy, że wartości pewnej funkcji ciągłej f znane są **jedynie** w punktach $x_0 < x_1 < \dots < x_{100}$. Wiadomo, że NIFS3 odpowiadająca danym $(x_k, f(x_k))$ ($0 \leq k \leq 100$) bardzo dobrze przybliża funkcję f w przedziale $[x_0, x_{100}]$. Wywołując procedurę **NSpline3** **tylko raz**, opracuj algorytm numerycznego wyznaczania przybliżonych wartości

$$f'(h_0), f'(h_1), \dots, f'(h_N),$$

gdzie $x_0 \leq h_0 < h_1 < \dots < h_N \leq x_n$, natomiast N jest dowolną liczbą naturalną.

- L8.6.** 1 punkt Ustalmy liczby naturalne M oraz N . Niech dane będą węzły $t_0 < t_1 < \dots < t_N$ oraz liczby rzeczywiste y_{mk} , gdzie $0 \leq k \leq N$, a $m = 1, 2, \dots, M$. Niech s_m oznacza NIFS3 spełniającą następujące warunki:

$$s_m(t_k) = y_{mk} \quad (0 \leq k \leq N)$$

dla $1 \leq m \leq M$. Opracuj **oszczędny** algorytm konstrukcji funkcji s_1, s_2, \dots, s_M .

- L8.7.** **Włącz komputer!** 2 punkty Niech s_x i s_y będą naturalnymi funkcjami sklejanymi trzeciego stopnia spełniającymi następujące warunki interpolacyjne:

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k \quad (k = 0, 1, \dots, 95),$$

gdzie $t_k := \frac{k}{95}$ ($k = 0, 1, \dots, 95$), natomiast

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, \dots, x_{95}] &:= [5.5, 8.5, 10.5, 13, 17, 20.5, 24.5, 28, 32.5, 37.5, 40.5, 42.5, 45, 47, \\ &49.5, 50.5, 51, 51.5, 52.5, 53, 52.8, 52, 51.5, 53, 54, 55, 56, 55.5, 54.5, 54, 55, 57, 58.5, \\ &59, 61.5, 62.5, 63.5, 63, 61.5, 59, 55, 53.5, 52.5, 50.5, 49.5, 50, 51, 50.5, 49, 47.5, 46, \\ &45.5, 45.5, 45.5, 46, 47.5, 47.5, 46, 43, 41, 41.5, 41.5, 41, 39.5, 37.5, 34.5, 31.5, 28, 24, \\ &21, 18.5, 17.5, 16.5, 15, 13, 10, 8, 6, 6, 6, 5.5, 3.5, 1, 0, 0, 0.5, 1.5, 3.5, 5, 5, 4.5, 4.5, 5.5, \\ &6.5, 6.5, 5.5], \\ [y_0, y_1, \dots, y_{95}] &:= [41, 40.5, 40, 40.5, 41.5, 41.5, 42, 42.5, 43.5, 45, 47, 49.5, 53, 57, 59, \\ &59.5, 61.5, 63, 64, 64.5, 63, 61.5, 60.5, 61, 62, 63, 62.5, 61.5, 60.5, 60, 59.5, 59, 58.5, \\ &57.5, 55.5, 54, 53, 51.5, 50, 50, 50.5, 51, 50.5, 47.5, 44, 40.5, 36, 30.5, 28, 25.5, 21.5, \\ &18, 14.5, 10.5, 7.5, 4, 2.5, 1.5, 0, 2, 3.5, 7, 12.5, 17.5, 22.5, 25, 25, 25, 25.5, 26.5, \\ &27.5, 27.5, 26.5, 23.5, 21, 19, 17, 14.5, 11.5, 8, 4, 1, 0, 0.5, 3, 6.5, 10, 13, 16.5, 20.5, \\ &25.5, 29, 33, 35, 36.5, 39, 41]. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę zadanie **L8.6**, opracuj **własną implementację** wyznaczania NIFS3. Następnie użyj jej do narysowania łamanej łączącej punkty

$$(s_x(u_0), s_y(u_0)), (s_x(u_1), s_y(u_1)), \dots, (s_x(u_M), s_y(u_M)),$$

gdzie $u_k := \frac{k}{M}$ ($k = 0, 1, \dots, M$), a M jest odpowiednio dużą liczbą naturalną. Co przedstawia ta łamana?