

## Lista nr 9 z matematyki dyskretnej

1. Ile jest nieidentycznych digrafów (grafów skierowanych) o wierzchołkach  $1, 2, \dots, n$ , w których nie ma pętli ani krawędzi równoległych i stopnie wchodzący i wychodzący każdego wierzchołka wynosi 1?
2. Ile jest nieidentycznych grafów nieskierowanych niekoniecznie prostych na  $n$  wierzchołkach, które zawierają dokładnie  $m$  krawędzi?
3. Dla każdego  $n \geq 2$  opisz jak wygląda graf nieskierowany prosty  $n$ -wierzchołkowy niespójny o maksymalnej liczbie krawędzi.
4. Przedstaw algorytm, służący do sprawdzania, czy dany graf jest dwudzielny, korzystający z przeglądania grafu metodą w głąb. Złożoność Twojego algorytmu powinna być  $O(m+n)$ , gdzie  $m$  to liczba krawędzi a  $n$  wierzchołków.
5. Zaczynając od dowolnego pola, czy można obejść ruchem skoczka (konika) szachowego wszystkie pola szachownicy  $5 \times 5$ , każde dokładnie raz, i wrócić do punktu początkowego? Odpowiedź uzasadnij.
6. Dana jest kostka sera  $3 \times 3 \times 3$ . Mysz rozpoczyna jedzenie kostki od dowolnego rogu. Po zjedzeniu jednego pola przenosi się do kolejnego mającego wspólną ścianę z ostatnio zjedzonym. Czy możliwe, aby mysz jako ostatnie zjadła środkowe pole?
7. Pokaż, że każdy turniej zawiera (skierowaną) ścieżkę Hamiltona tzn. przechodzącą wszystkie wierzchołki grafu. *Turniej* to graf skierowany w którym każda para wierzchołków  $a, b$  jest połączona krawędzią z  $a$  do  $b$  albo z  $b$  do  $a$ .
8. (+) Pokaż, że każdy turniej zawiera *króla*. *Król* to wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego po ścieżce o dł. co najwyżej 2.
9. Pokaż, że dla  $n \geq 3$  każdy  $n$ -wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym  $n-1$  i bez wierzchołka o st. wejściowym  $n-1$  zawiera przynajmniej trzy króle.
10. (+) Czy  $n$ -wymiarowa kostka  $Q_n$  zawiera ścieżkę Hamiltona?

11. Digraf  $D$  jest dany w postaci macierzy sąsiedztwa. Wykaż, że sprawdzenie, czy  $D$  zawiera źródło, czyli wierzchołek, z którego wychodzą łuki do wszystkich pozostałych wierzchołków, ale nie wchodzi do niego żaden łuk, może być wykonane w czasie liniowym względem liczby wierzchołków w  $D$ . Zapisz swój algorytm w języku programowania i określ dokładnie jego złożoność obliczeniową, jako funkcję zmiennej liczby wierzchołków w digrafie.