2 (done)

8 November, 2023 15:14

L6.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Sformułuj i udowodnij *algorytm Clenshawa* obliczania wartości wielomianu

$$w(x) = \frac{1}{2}c_0T_0(x) + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_nT_n(x)$$

w punkcie x, gdzie $c_0, c_1, \ldots, c_n$ są dane, a T_n oznacza n-ty *wielomiany Czebyszewa.*

$$S_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}'' c_k T_k(x)$$

$$B_{n+1} = B_{n+2} = 0$$

$$B_k = 2x B_{k+1} - B_{k+2} + C_k$$

$$S_n(x) = {\sum_{k=0}^{n}}'' (B_k - 2x B_{k+1} + B_{k+2}) T_k(x) =$$

$$\frac{1}{2}B_0T_0 + B_1T_1 - xB_1T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_kT_k - \sum_{k=1}^{n-1} 2xB_{k+1}T_k + {\sum_{k=0}^{n-2}}' B_{k+2}T_k =$$

$$\frac{1}{2}B_0T_0 + B_1T_1 - xB_1T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_kT_k - \sum_{k=2}^{n} 2xB_kT_{k-1} + {\sum_{k=2}^{n}}' B_kT_{k-2} =$$

$$\frac{1}{2}B_0T_0 + B_1T_1 - xB_1T_0(x) + \sum_{k=2}^{n} B_k(T_k - 2xT_{k-1} + T_{k-2}) =$$

$$\frac{1}{2}B_0T_0 + xB_1 - xB_1 - \frac{1}{2}B_2T_0 =$$

$$\frac{1}{2}B_0T_0 - \frac{1}{2}B_2T_0 =$$

$$\frac{1}{2}(B_0 - B_2)$$

Algorytm Clenshawa[1] – rekurencyjna metoda obliczania liniowej kombinacji wielomianów Czebyszewa. Stosuje się go do dowolnej klasy funkcji definiowalnych za pomocą trójtermowego równania rekurencyjnego[2].

Algorytm Clenshawa [edytuj | edytuj kod]

Niech ciąg $\phi_k,\ k = 0, 1, \ldots$ spełnia liniową relację rekurencyjną

$$\phi_{k+1}(x) + \alpha_k(x)\,\phi_k(x) + \beta_k(x)\,\phi_{k-1}(x) = 0,$$

gdzie współczynniki α_k i β_k są znane. Dla dowolnego, skończonego ciągu $c_0, \ldots, c_n$, definiujemy funkcje b_k przez „odwrócony" wzór rekurencyjny:

$$b_{n+1}(x) = b_{n+2}(x) = 0,$$

$$b_k(x) = c_k - \alpha_k(x)\,b_{k+1}(x) - \beta_{k+1}(x)\,b_{k+2}(x).$$

Kombinacja liniowa ϕ_k spełnia:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\phi_k(x) = b_0(x)\phi_0(x) + b_1(x)\left[\phi_1(x) + \alpha_0(x)\phi_0(x)\right].$$

Specjalny przypadek dla ciągu wielomianów Czebyszewa [edytuj | edytuj kod]

Rozważmy kombinację liniową wielomianów Czebyszewa

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \ldots + a_nT_n(x).$$

Współczynniki w postaci rekurencyjnej dla wielomianów Czebyszewa to

$$\alpha_k(x) = -2x, \quad \beta_k = 1.$$

Korzystając z zależności

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = xT_0(x),$$

$$b_0(x) = a_0 + 2xb_1(x) - b_2(x),$$

algorytm Clenshawa redukuje się do:

$$p_n(x) = \frac{1}{2}\left[b_0(x) - b_2(x)\right].$$

Wielomiany Czebyszewa pierwszego rodzaju [edytuj | edytuj kod]

Definicja rekurencyjna [edytuj | edytuj kod]

Wielomiany te spełniają zależność[1]:

$$T_0(x) = 1$$
$$T_1(x) = x$$
$$T_k(x) = 2x \cdot T_{k-1}(x) - T_{k-2}(x)$$

Postać jawna [edytuj | edytuj kod]

Rozwiązaniem powyższej rekurencji jest:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2-1})^k + (x - \sqrt{x^2-1})^k}{2}.$$

Parzystość wielomianów Czebyszewa [edytuj | edytuj kod]

Z definicji wynika, że dla k parzystego wielomian Czebyszewa k-tego stopnia jest parzysty, dla nieparzystego k – nieparzysty:

$$T_k(-x) = (-1)^k T_k(x).$$

Postać trygonometryczna [edytuj | edytuj kod]

Dla $x \in [-1; 1]$ podstawiając za $x = \cos t$, dla $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$T_k(\cos t) = \frac{(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - 1})^k + (\cos t - \sqrt{\cos^2 t - 1})^k}{2}$$
$$= \frac{(\cos t + \sqrt{-\sin^2 t})^k + (\cos t - \sqrt{-\sin^2 t})^k}{2}$$
$$= \frac{(\cos t + i \cdot \sin t)^k + (\cos t - i \cdot \sin t)^k}{2}$$