Ćwiczenia
z ANALIZY NUMERYCZNEJ

Lista nr 13

17 stycznia 2024 r.

Zajęcia 23 stycznia 2024 r.
Zaliczenie listy **od 3 pkt.**

L13.1. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech będzie

$$A := \begin{bmatrix} 780 & 563 \\ 913 & 659 \end{bmatrix}, \quad b := \begin{bmatrix} 217 \\ 254 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{x} := \begin{bmatrix} 0.999 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \quad \widehat{x} := \begin{bmatrix} 0.341 \\ -0.087 \end{bmatrix}.$$

Oblicz wektory reszt $\widetilde{r} := A\widetilde{x} - b$, $\widehat{r} := A\widehat{x} - b$ oraz wektory błędów $\widetilde{e} := \widetilde{x} - x$, $\widehat{e} := \widehat{x} - x$, gdzie x jest rozwiązaniem układu $Ax = b$. Który z wektorów $\widetilde{x}$, $\widehat{x}$ jest lepszym przybliżeniem rozwiązania rozważanego układu równań liniowych? Jaki stąd wniosek?

L13.2. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Znajdź rozkład LU macierzy

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 & 6 \\ -3 & -5 & 4 & -8 \\ 5 & 3 & 37 & -52 \\ -9 & -7 & -65 & 213 \end{bmatrix},$$

a otrzymany wynik wykorzystaj do obliczenia wartości jej wyznacznika oraz macierzy A^{-1}.

L13.3. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Stosując metodę faktoryzacji rozwiąż układ równań $Ax = b$, gdzie

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 6 \\ -3 & 5 & 20 & 28 \\ -5 & 3 & 75 & 112 \\ -9 & 7 & 111 & 319 \end{bmatrix}, \qquad b := \begin{bmatrix} 30 \\ 146 \\ 588 \\ 1480 \end{bmatrix}, \qquad x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

L13.4. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Udowodnij następujące twierdzenia:

(a) Iloczyn dwu macierzy trójkątnych dolnych (górnych) jest macierzą trójkątną dolną (górną).

(b) Jeśli L jest macierzą trójkątną dolną z jedynkami na przekątnej głównej, to L^{-1} również jest macierzą tego typu.

L13.5. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Zaproponuj algorytm odwracania nieosobliwej macierzy trójkątnej górnej. Jaka jest jego złożoność?

L13.6. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Opracuj oszczędny algorytm znajdowania rozkładu LU macierzy trójprzekątniowej, przy założeniu, że rozkład ten istnieje.

L13.7. $\boxed{\text{1 punkt}}$ Niech dana będzie macierz $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ postaci

$$A_n := \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ d_2 & a_2 & & & & \\ d_3 & & a_3 & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ d_{n-1} & & & & a_{n-1} & \\ c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix},$$

gdzie zaznaczono jedynie niezerowe elementy. Załóżmy, że istnieje rozkład LU macierzy A_n. Opracuj oszczędny algorytm wyznaczania tego rozkładu. Podaj jego złożoność czasową i pamięciową.

(–) Paweł Woźny