Lista nr 13 z matematyki dyskretnej

1. Pokaż, że dla $n \geq 3$ każdy n-wierzchołkowy turniej bez wierzchołka o st. wyjściowym $n-1$ i bez wierzchołka o st. wejściowym $n-1$ zawiera przynajmniej trzy króle.

2. Wykaż, że liczba chromatyczna grafu, w którym stopień żadnego wierzchołka nie przekracza 3, może być znaleziona w czasie wielomianowym.

3. Dla każdego $n > 1$ skonstruuj graf dwudzielny na $2n$ wierzchołkach i uporządkowanie tych wierzchołków, dla których algorytm sekwencyjny używa n kolorów.

4. (+) Pokaż, że dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ zachodzi $\chi(G)\chi(\bar{G}) \geq n = |V|$, gdzie $\chi(G)$ oznacza liczbę chromatyczną G, czyli minimalną liczbę kolorów, jaką można pokolorować G, a $\bar{G}$ oznacza dopełnienie grafu G.

5. (-) Znajdź pokolorowanie grafu Mycielskiego M_4 za pomocą algorytmu sekwencyjnego.

6. (+) Niech M_k będzie k-tym grafem Mycielskiego. Wykaż, że M_k nie zawiera trojkątow i $\chi(M_k) = k$ dla każdego k.

7. (+) Zbiór wierzchołków jest *niezależny* w grafie G, jeśli żadne dwa wierzchołki nie są w nim połączone krawędzią. Zbiór wierzchołków jest *pokryciem wierzchołkowym* grafu G, jeśli każda krawędź ma przynajmniej jeden z końców w tym zbiorze. Niech $\alpha(G)$ i $\beta(G)$ oznaczają odpowiednio moc największego zbioru niezależnego G i moc najmniejszego pokrycia wierzchołkowego G. Pokaż,:

   - że $\alpha(G) + \beta(G) = n$, gdzie n to liczba wierzchołków grafu G;
   - jak obliczyć $\alpha(G)$, gdy G jest dwudzielny.

8. Niech G będzie grafem skierowanym a s i t jego dwoma wierzchołkami. Opracuj algorytm znajdujący maksymalną liczbę ścieżek rozłącznych krawędziowo między s i t.

9. Niech G będzie grafem skierowanym a s i t jego dwoma wierzchołkami. Opracuj algorytm znajdujący maksymalną liczbę ścieżek między s i t takich, że dowolne dwie ścieżki mają wspólne końce a poza tym nie mają wspólnych wierzchołków.

10. Niech $l : E \to R \geq 0$ będzie pewną funkcją na zbiorze krawędzi. Opracuj algorytm, który sprawdza czy w danej sieci $G = (V, E)$ o źródle s, ujściu t i funkcji przepustowości $c : E \to R \geq 0$ istnieje przepływ, który dla każdej krawędzi spełnia $l(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

11. (+) Dany jest graf prosty skierowany G. *Pokrycie cyklowe* grafu G to zbiór Z skierowanych cykli G taki, że każdy wierzchołek należy do dokładnie jednego z cykli z Z (cykle o długości 2 są dozwolone). Pokaż jak, mając do dyspozycji algorytm obliczania największego skojarzenia w grafie dwudzielnym nieskierowanym, skonstruować algorytm znajdujący pokrycie cyklowe G, o ile takowe istnieje.

    Wskazówka: Można rozszczepić każdy wierzchołek na dwie kopie.

W zadaniu 7 można zadeklarować tylko jeden podpunkt.