# Lista nr 14 z matematyki dyskretnej

1. Niech $G$ będzie spójnym grafem planarnym o $n$ wierzchołkach ($n \geq 3$) i niech $t_i$ oznacza liczbę wierzchołków stopnia $i$ w grafie $G$, dla $i \geq 0$.

   (a) Wykaż nierówność: $\sum_{i \in N}(6-i)t_i \geq 12$.

   (b) Wywnioskuj stąd, że graf $G$ ma co najmniej trzy wierzchołki o stopniach 5 lub mniej.

2. Pokaż, że graf $G^*$ dualny do grafu planarnego jest planarny.

3. Uogólnij wzór Eulera na grafy planarne niespójne.

4. Na płaszczyźnie narysowano skończoną liczbę przecinających się prostych (nieskończonych). Wykaż, że utworzone obszary mogą być pomalowane dwoma kolorami tak, że żadne dwa obszary mające wspólny odcinek („dłuższy” od punktu) nie są pomalowane tym samym kolorem.

5. (+) Kilka firm wysyła reprezentantów na konferencję: $i$-ta firma wysyła $m_i$ reprezentantów. Organizatorzy przeprowadzają jednoczesne obrady w grupach: $j$-ta grupa może pomieścić $n_j$ uczestników. Czy istnieje taki przydział uczestników konferencji do grup, by w żadnej grupie nie było dwóch osób z tej samej firmy oraz by każdy uczestnik należał do dokładnie jednej grupy? Warunek $\sum n_j \geq \sum m_i$ jest konieczny. Podaj wielomianowy algorytm, który znajduje opisany przydział, jeśli taki istnieje.

6. Podaj 4 zastosowania problemu kolorowania wierzchołków.

7. (+) Niech $T = (V, E)$ będzie drzewem o parzystej liczbie wierzchołków. Pokaż, że istnieje dokładnie jeden rozpinający podgraf $T$, w którym wszystkie wierzchołki mają stopień nieparzysty. (Podgraf jest rozpinający jeśli zawiera wszystkie wierzchiołki grafu oryginalnego.)

8. Niech $Z$ będzie $n$-elementowym zbiorem. Pokaż, że jeśli wybierzemy więcej niż połowę jego wszystkich podzbiorów, to wśród nich jakieś dwa będą takie, że jeden jest podzbiorem drugiego.

9. Niech $T = (A \cup B, E)$ będzie turniejem dwudzielnym (tzn. dla każdego $a \in A$ i każdego $b \in B$ turniej zawiera krawędź z $a$ do $b$ albo z $b$ do

$a$), w którym co najwyzej jeden wierzchołek ma stopień wchodzący 0. Pokaż, że w tym turnieju istnieje wierzchołek, z którego można dojść do każdego innego w co najwyżej 4 krokach.

10. W grafie spójnym $G$ każda krawędź została pokolorowana na jeden z dwóch kolorów: czerwony lub niebieski, w taki sposób, że nie powstał żaden cykl monochromatyczny. Zaprojektuj wielomianowy algorytm, który znajduje drzewo rozpinające $G$ minimalizujące (bezwzględną) różnicę między liczbami krawędzi czerwonych i niebieskich w tym drzewie.