Lista nr 12 z matematyki dyskretnej

1. (+) Topologiczne porządkowanie wierzchołków acyklicznego digrafu. Niech D będzie digrafem acyklicznym, tzn. D nie zawiera cykli skierowanych. Podaj algorytm, który w czasie $O(m + n)$ porządkuje wierzchołki digrafu w taki sposób, że po uporządkowaniu, jeśli (i, j) jest krawędzią skierowaną w D, to $i < j$.

2. Podaj metodę znajdowania ścieżki M-powiększającej w grafie dwudzielnym $G = (A \cup B, E)$.

   Wskazówka: skieruj krawędzie z M od B do A, a pozostałe z A do B.

3. Pokaż, że graf dwudzielny k-regularny, tj. taki, którego każdy wierzchołkek ma stopień k, zawiera skojarzenie doskonałe.

   Wskazówka: Warunek Halla.

4. (+) *Kwadratem łacińskim* nazywamy kwadrat $n \times n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdej kolumnie oraz w każdym wierszu jest po jednej z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$. *Prostokątem łacińskim* nazywamy prostokąt o n kolumnach i m wierszach, $1 \leq m \leq n$, w którym na każdym polu stoi liczba ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, że w każdym wierszu każda z liczb $\{1, 2, \ldots, n\}$ występuje dokładnie raz oraz w każdej kolumnie co najwyżej raz.

   Czy każdy prostokąt łaciński o $m < n$ wierszach można rozszerzyć o jeden wiersz?

5. (-) Zmodyfikuj algorytm Dijkstry tak, by działał dla grafów skierowanych.

6. Udowodnij indukcyjnie poprawność działania algorytmu Dijkstry.

7. Załóżmy, że chcielibyśmy obliczyć najkrótszą scieżkę między wierzchołkami s i t w grafie G, w którym wagi c niektórych krawędzi są ujemne. Niech z oznacza najmniejszą wagę ujemną krawędzi w grafie. Zdefinujmy nową funkcję wag $c'(e) = c(e) - z$. Czy w każdym przypadku najkrótsza ścieżka miedzy s i t w G względem c' jest również najkrótszą ścieżką w G względem c?

8. Mamy $2n$ uczniów, z których każdy ma przynajmniej n przyjaciół. Pokaż, że można ich usadzić w n ławkach tak, by każdy z nich siedział z przyjacielem. Pokaż też, że jeśli $n > 1$, to może być to zrobione na co najmniej dwa sposoby.

9. (-) Podaj przykład grafu pokazujący, że założenie $deg(v) \geq n/2$ w twierdzeniu Diraca nie może być zastąpione słabszym założeniem $deg(v) \geq (n-1)/2$.

10. Niech G będzie grafem spójnym nieskierowanym o n wierzchołkach takim, że dla każdej pary wierzchołków u, v niepołączonych krawędzią zachodzi: $deg(u)+deg(v) \geq n-1$. Czy taki graf zawsze zawiera ścieżkę Hamiltona?

11. Pokaż, że dla każdego grafu istnieje pewna kolejność wierzchołków, przy której algorytm zachłanny (sekwencyjny) działa w sposób optymalny.

12. (+) Wykaż, że jeśli w algorytmie sekwencyjnym zostało użytych k kolorów do pomalowania grafu, to ten graf ma przynajmniej $k(k-1)/2$ krawędzi. Wykaż stąd, że każdy graf zawiera przynajmniej $\chi(G)(\chi(G)-1)/2$ krawędzi, gdzie $\chi(G)$ jest liczbą chromatyczną grafu G.