

Sprawozdanie z Projektu

Wyznaczanie charakterystyk częstotliwościowych czwórników RC oraz RL w oparciu o rozwiązywanie równań różniczkowych z zastosowaniem metody Rungego-Kutty

Wojciech Kozub, Filip Żurek

22 stycznia 2024

1 Wstęp

Celem projektu było uzyskanie charakterystyk Bode'go dla obwodów pierwszego rzędu, wykorzystując równania różniczkowe rozwiązane metodą Rungego-Kutty w środowisku MATLAB.

2 Omówienie metody

Na wejście czwórnika podano sygnał okresowy o znanej częstotliwości. Przy użyciu algorytmu Rungego-Kutty rozwiązano równania różniczkowe obwodów RC i RL, aby wyznaczyć przebiegi wyjściowe. Wyznaczenie wzmocnienia i przesunięcia fazowego polegało na porównaniu przebiegu wejściowego oraz stanu ustalonego przebiegu wyjściowego.

Aby otrzymać charakterystyki częstotliwościowe, proces ten został powtórzony dla wielu różnych częstotliwości z zadanego zakresu.

2.1 Matematyczny opis czwórników

Zakładając napięcie wymuszające, opisane wzorem (1),

$$u_{we} = U_m \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

gdzie U_m oraz ϕ nie wpływają na wynik programu, równania różniczkowe (2), (3) oraz (5), zostały zapisane zgodnie z Napięciowym Prawem Kirchhoffa (NPK). Warunki początkowe, tj. napięcie na pojemności oraz prąd indukcyjności w chwili $t = 0$ zostały uwzględnione, jednak do dalszych obliczeń przyjęto stan ustalony.

2.1.1 Czwórnik RC (filtr dolnoprzepustowy)

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 2a:

$$\frac{du_{wy}(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u_{wy}(t) + \frac{1}{RC} \cdot u_{we}(t) \quad (2)$$

2.1.2 Czwórnik RC (filtr górnoprzepustowy)

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 3a:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot u_C(t) + \frac{1}{RC} \cdot u_{we}(t) \quad (3)$$

Rozwiązaniem równania (3) jest napięcie pojemności u_C . Odpowiedź czwórnika wyznaczono w równaniu (4).

$$u_{wy} = Ri_C = RC \frac{du_C}{dt} \quad (4)$$

2.1.3 Czwórnik RL (filtr górnoprzepustowy)

Dla czwórnika przedstawionego na rysunku 4a:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot i_L(t) + \frac{1}{L} \cdot u_{we}(t) \quad (5)$$

Rozwiązaniem równania (5) jest prąd indukcyjności i_L . Odpowiedź czwórnika wyznaczono w równaniu (6).

$$u_{wy} = u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (6)$$

2.2 Implementacja w MATLAB

2.2.1 Algorytm Rungego-Kutty

Do rozwiązywania równań różniczkowych postaci $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$, gdzie $f(t, x) = Ax(t) + Bu(t)$, napisano dwie funkcje (przedstawione w listingu 1):

- Funkcja `f_ode` oblicza wartość funkcji f
- Funkcja `rungego_kutty` jest implementacją algorytmu Rungego-Kutty czwartego rzędu

W tabeli 1 przedstawiono zastosowane wartości współczynników. Jest to klasyczny algorytm o stałym kroku h , wyznaczanym w linii 2 listingu 1.

Listing 1: Implementacja metody Rungego-Kutty

```
1 function x = rungego_kutty(A, B, a_gen, fi, f, t, x0)
2     h = t(2) - t(1); % Krok
3     x = NaN(size(t));
4     x(1) = x0; % Warunek początkowy (w chwili t0)
5
6     for n = 1:length(t) - 1
7         k1 = f_ode(t(n), x(n), A, B, a_gen, f, fi);
8         k2 = f_ode(t(n) + h / 2, x(n) + h * k1 / 2, A, B, a_gen, f, fi);
9         k3 = f_ode(t(n) + h / 2, x(n) + h * k2 / 2, A, B, a_gen, f, fi);
10        k4 = f_ode(t(n) + h, x(n) + h * k3, A, B, a_gen, f, fi);
11        x(n + 1) = x(n) + h * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6;
12    end
13 end
14
15 function dx = f_ode(t, x, A, B, a, f, fi)
16     dx = A * x + B * u_in(a, f, t, fi);
17 end
```

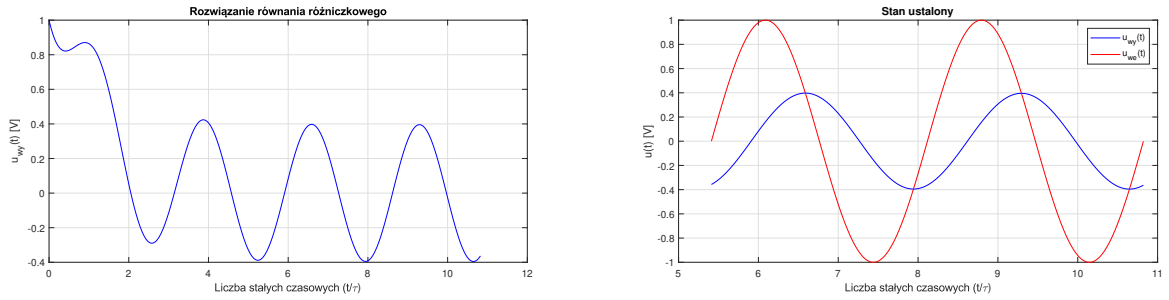
Tabela 1: Tablica Butchera

	h	k_1	k_2	k_3	k_4
k_1	0	0			
k_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0		
k_3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	
k_4	1	0	0	1	0
x_{n+1}		$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Rozwiązanie oraz stan ustalony Na rysunku 1 przedstawiono przykładowe przebiegi dla obwodu 2a. Do dalszych obliczeń wykorzystywano stany ustalone, aby zapewnić poprawne wyniki.

2.2.2 Wyznaczanie wzmocnienia

Wzmocnienie, czyli stosunek amplitud sygnałów wyjściowego i wejściowego. W tym przypadku są sygnały okresowe bez składowych stałych (offset = 0), zatem porównano wartości maksymalne. Wektor wzmocnień K obliczono w następujący sposób: $K(i) = \max(u_{out}) / \max(u_{in})$.



Rysunek 1: Przykładowe wykresy. Po lewej widać stan nieustalony ($u_{C0} = 1V$), po prawej stan ustalony po 5 stałych czasowych

2.2.3 Wyznaczanie przesunięcia fazowego

Aby określić przesunięcie fazowe, zaimplementowano funkcję `shift`, która oblicza kąt przesunięcia między dwoma sygnałami, tj. wejściowym i wyjściowym, wyrażony w stopniach. Z pomocą wbudowanej funkcji `islocalmax` znajdowane są punkty szczytowe przebiegów. Na ich podstawie jest wyznaczane przesunięcie. W dalszej części funkcji zaimplementowano odpowiednie warunki do niwelacji błędów o pełny okres ($\pm 360^\circ$), które występowały w nielicznych przypadkach.

3 Analiza wyników

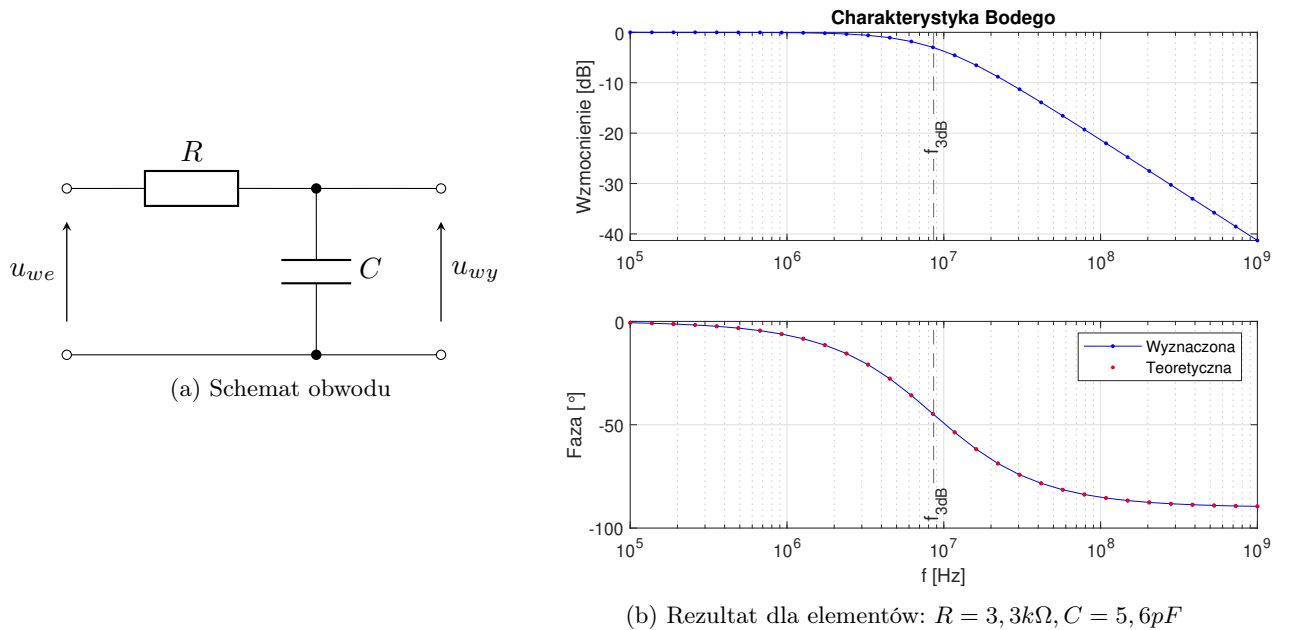
Na rysunkach 2b, 3b oraz 4b przedstawiono otrzymane Charakterystyki Bodego dla odpowiednich czwórników. Kształt charakterystyk pokrywa się z oczekiwanymi, dla odpowiednich przypadków. Wzmocnienie -3dB pokrywa się z częstotliwością 3-decybelową wyznaczoną teoretycznie wg wzoru (7).

$$f_{3dB} = \frac{1}{2\pi\tau} \quad (7)$$

Przebieg przesunięcia fazowego również pokrywa się z przebiegiem teoretycznym, wyznaczonym przy użyciu wzoru (8).

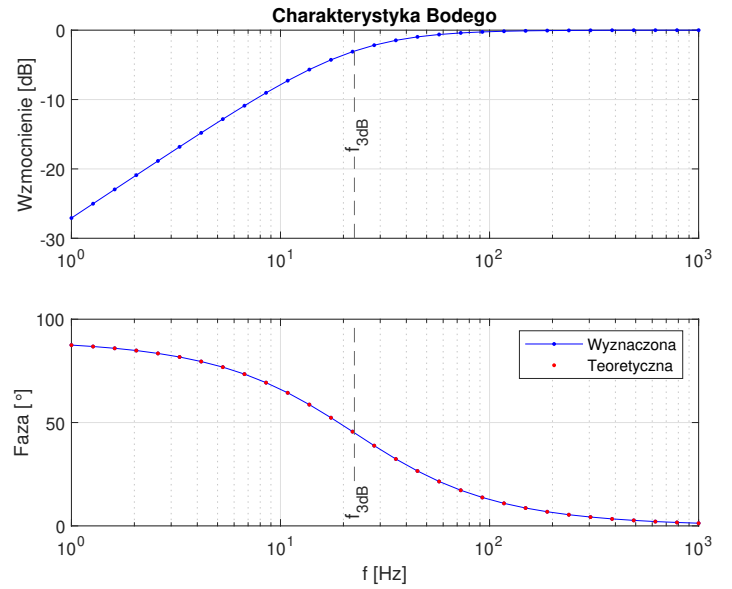
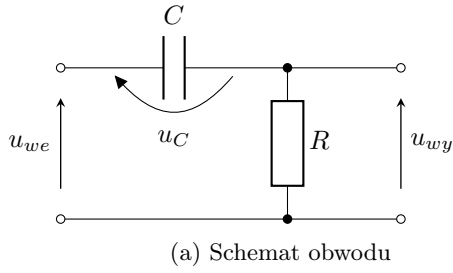
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\pi f\tau}\right) \quad (8)$$

Na tej podstawie można stwierdzić, iż program działa poprawnie.

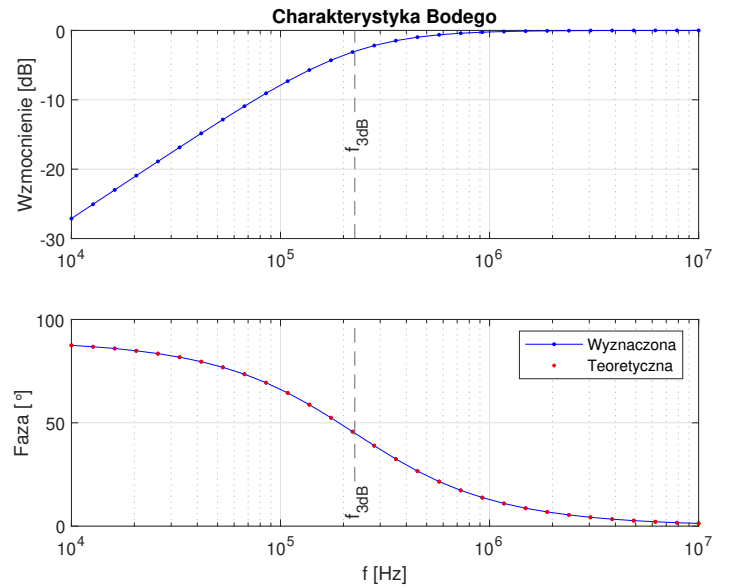
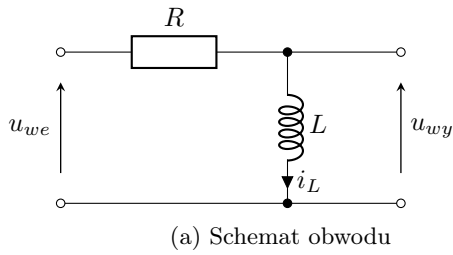


(b) Rezultat dla elementów: $R = 3,3k\Omega$, $C = 5,6pF$

Rysunek 2: Czwórnik RC (filtr dolnoprzepustowy)



Rysunek 3: Czwórnik RC (filtr górnoprzepustowy)



Rysunek 4: Czwórnik RL (filtr górnoprzepustowy)

4 Podsumowanie

Wyniki eksperymentów są zgodne z oczekiwaniami teoretycznymi, co świadczy o poprawności implementacji algorytmu i metody analizy. Zastosowane czwórniki RC i RL (zarówno dolnoprzepustowe, jak i górnoprzepustowe) wykazały odpowiednie właściwości charakterystyczne w dziedzinie częstotliwościowej.