

# 深入浅出通信原理

陈爱军 著

清华大学出版社  
北 京

## 内 容 简 介

本书的主要内容源于作者在通信人家园论坛上的“深入浅出通信原理”系列连载，继承了连载图文并茂、深入浅出、理论联系实际的特点，并在连载内容的基础上进行了补充和完善。本书从信号和频谱讲起，以通信模型为主线，对信道、信源编码、信道编码和交织、脉冲成形、调制、天线技术、复用和多址技术等内容做了系统讲解。

本书针对希望真正搞清楚通信原理的读者编写，适用于高等院校通信、信息、电子等专业本科生和研究生、在职的电信行业工程师，也适用于对通信原理具有浓厚兴趣的非通信专业人士。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

### 图书在版编目(CIP)数据

深入浅出通信原理 / 陈爱军著. — 北京：清华大学出版社，2018

ISBN 978-7-302-48386-1

I. ①深… II. ①陈… III. ①通信原理 IV. ①TN911

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 216731 号

责任编辑：刘 洋

封面设计：李召霞

版式设计：方加青

责任校对：王荣静

责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社 总 机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, [c-service@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:c-service@tup.tsinghua.edu.cn)

质 量 反 馈：010-62772015, [zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn](mailto:zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn)

印 装 者：清华大学印刷厂

经 销：全国新华书店

开 本：187mm×235mm 印 张：24 字 数：452 千字

版 次：2018 年 2 月第 1 版 印 次：2018 年 2 月第 1 次印刷

印 数：1～5000

定 价：89.00 元

---

产品编号：074140-01

# 通信人家园论坛网友精彩回帖摘录

1914# (通信行业的《X朝那些事儿》)

bdlipx 发表于 2010-9-8 09:54:21

希望在平凡中——通信老生写在急功近利的年代 (节选)

虽然现在的垃圾书很多,可更加适合现代人阅读习惯的书籍也正由新一代的人们写出来,开启一个新的时代。从《水煮三国》之类的颠覆经典的著作开始,《百家讲坛》的那些老师们也顺势而为。当年明月的《明朝那些事儿》是一个高峰,也是一个里程碑。号称高科技行业的通信行业有丁奇的《大话无线通信》和杨波的《大话通信》等书,近年来陈爱军连载的《深入浅出通信原理》,堪称这些书中的翘楚。这些书一点一点地影响着阅读他们的人,影响范围也一点点地扩大。当量变产生质变,才是复兴的开始。希望也正是在这些平凡的人们之中。

2255# (本科到研究生一直在跟帖)

timthorpe 发表于 2010-10-19 14:02:17

看楼主的文章有一段时间了,有一种酣畅淋漓的感觉,很想一下子就看完。以前学信号与系统、通信原理、数字信号处理的时候总感觉中间隔了好多东西,理解不透彻。现在读了您的文章,豁然开朗,感谢楼主的无私分享,相信无数像我一样迷茫的通信学子读了之后会大有裨益。

发表于 2010-10-26 12:22:53

楼主的人气很高啊,年度最热帖,像当年的《大话无线通信》那样,大家受益匪浅啊……

楼主的文章让我对自己的专业认识有了彻底的改观……

陈老师,看了您讲的东西后,再看课本上的东西,发现以前的那层隔阂已经没有了,对基本的概念有了新的更深的体会,向您致敬!

发表于 2013-5-5 14:00:02

陈老师，大三时就看您的帖子，如今研一都快结束了，回首过往，好多感动。

2660#（对通信原理由恨到爱）

qiqige774 发表于 2010-11-25 22:44:04

因为要考博，继续考通信原理，研究生期间考北京邮电大学的通信原理，还是跨专业，想死的心都有，昨天晚上刚发现楼主的帖子，一口气看了 30 个，豁然开朗呀，楼主加油，通信原理让我又爱又恨呢，现在终于爱死它了。

2803#（参加工作前的充电）

084 发表于 2010-12-10 13:35:14

太激动了，论坛第一帖，顶楼主！

今年要博士毕业去华为了，虽然本科是 EE 专业的，但这几年没做通信，本科学的通信原理之类的知识已经忘光了，工作应该是去做无线上层的东西，但心里还是很慌，很想补一下原来的通信基础知识，翻以前的教材实在翻不下去了，刻板难读，就在这时候看到了楼主的帖子，深入浅出，把深奥的知识用最直观简单的方式讲述出来，并且在知识内容的结构和组织上也有独到之处，非常适合像我这样想再去捡回知识的人，非常感谢楼主，会坚持拜读下去，也希望楼主能坚持下去，更希望楼主能出书，肯定畅销！出的话我肯定会买来支持的，哈哈 ~

2992#

newstorm2003 发表于 2010-12-28 22:06:17

非常喜欢楼主的帖子，当年一直抱怨通信业教育的失败。如果早有楼主这样的人在学校里当教授，将现实中的案例和几门理论结合在一起，肯定有学生爱学！另外，曾经我也一直爱好通信原理，最早的动力就是从疑惑带宽和速率的关系开始的。也是看了 MP3 那些参数后才开始真正研究信号与系统，继而通信原理，然后是数字信号处理。到数字信号处理的时候，我已经没啥精力了。毕业到现在也三年多了，这些知识都荒废了，只剩下书架里还摆着那些我当年购买的国外电子通信教材系列的书本。感谢楼主的讲解，让我想起那些美好的回忆，那些充实的日子，那些真正值得留恋的日子。

3010# (对研究生的学习和课题有很大帮助)

tuohuangniu 发表于 2010-12-30 21:46:24

哈哈, 前两天考现代通信技术用到了老师讲的一些东西, 并没有像其他人那样死记硬背, 考得很轻松, 更重要的是对知识的理解更深刻了, 谢谢陈老师!

发表于 2011-5-6 10:10:33

跟着老师学习快半年了, 真的受益匪浅, 有的知识点看了好几遍, 这些理论上的理解和巩固对我在研究生期间的学习和课题有很大帮助, 衷心感谢陈老师!

3392#

不是那条鱼 发表于 2011-2-13 13:18:30

很高兴能看到这样的帖子, 在中国这个到处是“开心”“人人”“种菜”“养牛”的网络时代能够看到这样的文章我着实惊叹了一把, 虽然我对通信一窍不通, 而且我也刚毕业半年, 目前处于寻找工作的状态, 出于偶然的机会看到了陈老师的分享帖子, 我决定要跟着陈老师一直学习下去, 即使很多专业名称我都不知道, 但是起码我知道波、三角函数, 陈老师加油, 我会跟进学习的, 有不懂的地方还请老师不吝赐教。既然不能从兴趣中找到工作, 那就从工作中找到兴趣。

3541# (谈了自己对深入浅出的理解)

simon\_lau6 发表于 2011-3-1 08:51:49

喜欢深入浅出的学习方式, 强烈支持楼主。我个人特别喜欢深入浅出的学习过程, 只有深入地研究并理解了, 才能浅显易懂地表述出来。

3667# (通俗易懂, 非通信专业也可以看懂)

gaqzcb 发表于 2011-3-14 20:56:05

陈老师, 您好! 我是自动化专业的, 刚刚接触通信这方面的知识, 前阵子买了通信原理方面的经典书籍来看, 看得我特别郁闷, 虽然自身数学基础挺好, 但是好多东西理解不了, 没两天就把买来的书扔在一边了, 恰好非常幸运地看到了这个帖子, 老师的讲解非常通俗易懂, 比我们老师讲的好多了, 责任心非常强, 我由衷地祝福您! 请您一定要保重身体!

3673# (对通信产生了浓厚的兴趣)

zjdayy 发表于 2011-3-15 01:27:04

陈老师不仅做学问严谨，做人也很厚道。现在我正努力准备考研复试，这个连载对我而言简直就是一极品茗香。我一直非常喜欢通信，看了您的连载，对通信越发产生了浓厚的兴趣，很多知识点描述得比书上晦涩的理论更加生动形象。谢谢您的无私奉献。

3943#

xiya\_ang 发表于 2011-4-9 09:17:15

陈老师，您该给我们大学生出本教科书了！为什么我们现在的专业教材那么晦涩难懂？本来是可以一针见血、言简意赅地把原理点出，却浪费着大量的篇幅；本该重点详细地对原理进行解释，深入分析，所见字段却很少。老师在讲解的时候也是如此：浅显的原理，我们一点就透，但每到该详细讲解的时候，老师都会含糊其辞，一笔带过，真是纠结啊。

4049# (找回了学习通信的自信)

lemon0553 发表于 2011-4-20 23:08:02

看到楼主深入浅出、通俗易懂的讲解，让我又找回了学习移动通信的自信啊！原来书本上感觉很深奥的东西，各种公式一大堆，看得脑袋都大，怎么跟着楼主就学得很轻松呢！

4066# (将过去学的课程连贯串通起来)

潘帕斯牧羊人 发表于 2011-4-22 09:34:55

回想起来，楼主讲的东西其实都是过去学过的，只是过去学的课程都太割裂了，有可能其中一些课程学得还不错，但是缺乏连贯的思维，好比一堆珍珠没有用线穿起来一样。楼主从初中数学最简单的多项式乘法说起，一步一步加深并融会贯通，让人有一种醍醐灌顶、豁然开朗的感觉。我真的感受到，原来我们从初中到高中再到大学，其实每一门课程都没有白学，前面的课程就是后面的基础，只是我们过去理解不到这一点，变成了死记硬背加套用公式，把一个本来有趣的学习变成了枯燥的记忆和解题，学的时候很痛苦，学完之后赶快扔掉再也不愿去想。过去也从来没有一个老师能够这样讲授过课程，往往就是一来就给出一大堆公式定律，然后就让人云里雾里了。说实话我在大学里面学得算是还将就的，毕竟从来没有挂过科，个别课程还考过年级前几

名（自夸一下），但是一样的考完试就绝对不愿意再去想它。再次感谢楼主和其他热心回帖者，你们写的内容让我找回了久违的对技术的热情，使我对这些公式不再感到恐惧——反而有一些亲切了。

4080#（讲解形象、生动，让人印象深刻）

zj2081 发表于 2011-4-24 01:38:48

感谢陈老师，写得非常精彩。最近看到您的帖子，仔细拜读了几遍。和您一样，我也是一名基站研发的工程师。从本科到硕士，有两本《通信原理》，学了好几遍。不得不说，您的讲解形象、生动，让人印象深刻。如果您出书，我一定买一本珍藏，也希望有机会多和您交流。

4082#（把云里雾里的东西讲得谁都能明白）

witkeysai 发表于 2011-4-24 12:32:09

谁是大师？看了楼主的解释，心中豁然开朗，作为通信学子，真心为有这么通俗易懂的解释而高兴。心中也有些感慨：谁是大师？大师不是搞些谁都不明白的理论，而是把云里雾里的东西讲得谁都能明白！！！楼主就是这样的大师！

4639#（深入浅出、利于理解）

lqx2274 发表于 2011-7-12 22:43:48

只看了几帖就迫不及待想留言，感慨现行的通信教科书要像楼主这样深入浅出，一切从利于理解的角度编写就好了，强烈建议楼主将自己的智慧结晶集结成书，相信更多陷入深奥晦涩通信教材泥沼的学子们定会茅塞顿开、受益匪浅，如此这般定会功德无量的！期盼中……

4644#（真正理解了“信号处理”和“信号与系统”）

li\_li\_an 发表于 2011-7-13 16:48:41

上海交大的同学在看的，冒泡哈！不久前才发现有这么好的帖子，我本科的时候学的自动化，现在基本上转无线通信了，本科学信号处理和信号系统就从来没学得明白，学了也容易忘记，现在通过楼主的讲解真正地理解了信号处理、通信这些概念的物理意义，尤其是真正理解了傅里叶变换、欧拉公式在通信中的地位，将信号用简单的数学形象地讲解，让我们收获很大。谢谢楼主的无私奉献。



4689# (原理和应用结合起来讲解)

zrcoolhappy 发表于 2011-7-18 13:47:25

赞,确实如您所说:讲原理的书没结合应用,讲应用的书没把原理说透,您的这些连载真的是非常吸引我,原理和应用穿插着讲!我建议您可以整理一下大家的问题和建议,然后出一本书,应该会很受欢迎,最重要的是给想学习通信知识的人提供方便。

5319# (将抽象的内容用图画出来)

cgl304 发表于 2011-10-23 03:09:36

我真的有话说:看了楼主这么辛苦地分享知识,不是一般人能做的啊,楼主很用心,从讲解到画图,无一不是用心在做。大学里学的东西包括通信原理、数字信号处理、信号与系统、高数,但都如蜻蜓点水,自己不努力是第一,再有就是教科书中为什么不能加入一些对这些原理的应用介绍,做一点力所能及的形象化,比如楼主将极其抽象的东西尽可能地用图像画出。大学里懂知识的教授不少,但是用心讲课,会讲课的教授真的不多。再次表示感谢,希望楼主能继续下去。

5418# (一位老师的点评,通信课程很好的参考)

lcs199771 发表于 2011-11-2 20:33:11

总算看到了陈老师 11 月 1 日的“深入浅出通信原理”连载,毫无疑问这是在通信方面一个很好的参考。多人留帖,多人看帖,不管哪种方式都是对通信事业的极大支持。我在通信最火的 2010 年选择了在高校教书。其间教过“信号与系统”“通信原理”“信息论”。多年的教师生涯使我深知我国高校教育的缺陷,正如各位感受的一样,我们要大力赞扬陈老师。但是我们一定要感恩我们的老师,不管他们书教得怎样,他们绝大多数人是认真的。儿时我不知道学算术做什么,后来我知道了学算术可以数钱;中学我不知道学几何做什么,后来我知道几何可以丈量土地;高中我不知道学政治做什么,后来我知道了可以得分考大学;上了大学我更是迷惑多多,学高数做什么、学信号与系统做什么、学通信原理做什么,后来我知道了学这些是要为通信行业服务。我总是那么滞后,总是怀疑我老师的水平,总是指手画脚,结果如今我空空如也。陈老师绝对称得上是技术专家,理论水平也很深,做了件功德无量的事情!但愿那些在大学里听过信号与系统及通信原理课程的学子,在工作的岗位上聆听陈老师的教诲后,可以在自己的行业建功立业。



5596# (对考研的专业课很有帮助)

jck2 发表于 2011-11-20 22:57:09

我是大三的学生，陈老师您比我们老师讲得详细得多，我们通信专业讲数字通信原理的时候很多东西都是一带而过，而且没有讲模拟通信直接就讲数字通信的话，很多东西都没有弄懂，而且学时少了，很多东西都需要自学，老师你讲得很好、很详细，对我们现在考研的专业课很有帮助。

5859# (创立了通信课程全新的教学模式)

s29952 发表于 2011-12-28 01:05:32

通信难学的根源在于没有实际性的感性认识，缺少一条线串起来，其实数学原理并不复杂。陈大侠先建立感性概念，再进行讲解，创立了通信课程全新的教学模式，了不起！

6092# (将多门课程串起来讲解)

阿邓 发表于 2012-2-13 13:09:48

毕业工作后想重温通信原理的时候，却发现需要将线性代数、复变函数、信号与线性分析等教材结合在一起才能搞清楚当年通信原理到底学了些什么，现在楼主把通信原理涉及的相关数学基础知识串连延伸讲解，真是让我们这些想重学通信原理的人省心！省力！省时！望继续保持呀。

6243# (对自己的工作很有帮助)

20032021 发表于 2012-3-8 21:47:22

毕业后做了两年 RRC，做了一年 RRM，过完年高高兴兴地来到公司，谁知领导说，物理层很缺人呀，你去物理层吧，就这么来到了物理层。结果新老大扔给我两本参考书就出差去了，天哪，那两本是纯英文的呀，我从来没学过通信原理，也不知道数字信号分析是什么东西！整天看得头晕脑胀，都想自杀了！幸好同事推荐了陈老师的帖子，救世主呀，现在终于走上正路了，每天都能感到自己在进步，感觉真的很不错！

6715# (培养了对通信和技术的兴趣，增添了克服困难的勇气)

atpains 发表于 2012-6-13 00:04:47

到今天为止，囫圇吞枣地把楼主帖子看了一遍，感到很受益，以后会再不断复习和学习，争取有朝一日可以跨过通信知识的门槛，登堂入室。感谢陈老师，有幸现场听过您的讲座，真正的良师益友，从您身上学到了很多。从您身上获得了知识，更重要的是，

培养了我对通信和技术的兴趣，增添了克服困难的勇气。真正的勇气是心怀畏惧，但仍然选择前行。在您身上有很多闪光点：首先自己懂，所以不至于误人子弟；其次可以讲清楚，让别人听懂，不是每一个自己懂的人都可以给别人讲明白，也不是每一个自己懂的人都愿意给别人讲解。敏而好学，不耻下问；人无完人，学无止境，别人指出错误，如果确实错了，不会生气，也不会假装谦虚，真正做到人不知而不愠，不亦君子乎；如果别人的理解深度不够，指出错误的地方没有问题，也会耐心回应；会有意识地宣传自己，但实事求是；懂得控制自己的情绪和措辞，有智商，有情商；不会为了和气而放弃辩论，以学心听，以公心辩。连续两年多坚持下来，需要毅力和自律，这本身也是一种值得学习的品质。

6963#（对研究生毕业论文有帮助）

GGaFish 发表于 2012-10-15 13:27:25

正好研究生毕业论文方向就是 OFDM，现在感觉这篇帖子真的是好，虽然内容不深，但是在继续深入学习 OFDM 的过程中，遇到想不通的相关问题的时候，找出这篇帖子来看看最基本的原理，对于问题的理解帮助特别大。别看内容简单，我现在已经是第五六遍回头看了，结合遇到的问题，还是发现了以前学习的时候没有发现的细节，重新加深了对知识的理解，确实不错。

7388#

liyan19871224 发表于 2013-1-16 10:31:41

今天才看见这个帖子，有种相见恨晚的感觉，学了几年的通信，虽然考试都拿高分，但是对很多原理的东西，真心理解不了，估计是课本上的内容解释得太官方太拗口，非常难理解。看了这个帖子才知道原来这些知识可以这么简单地理解，真心感谢陈老师，如果陈老师出书我一定第一个支持！

7673#（对通信原理从厌烦到喜欢）

s46037 发表于 2013-3-21 18:35:25

陈老师，我今年大三，正开始学通信原理，看了您的贴子，我翻出《信号与系统》《数字信号处理》《积分变换》还有《通信原理》几本书一块学，真是越学越有成就感，从原来的厌烦、学不会，到现在的喜欢，变化之大令人难以想象，我已经决定考这方面的研究生了，真的可以说，您的这个帖子改变了我的一生，感激之情无以言表！

7765# (搞清楚物理意义很重要)

zhuxinsir 发表于 2013-4-9 06:21:22

陈老师,您太强了,我数学出身,当时学的时候这些公式也懂,不过学完了就忘,从来没有从物理意义上去追究其意义,今天听完你的课,受益匪浅,正可谓:听君一席话,胜读十年书。

8030# (把晦涩的通信知识讲得生动形象)

pobenliu 发表于 2013-5-26 18:07:23

感谢陈老师,把晦涩的通信知识讲得如此生动形象,以至于周末我也可以坐在实验室花上整天的时间来学习,这种思考的乐趣真是一种享受,让我一个通信科班出身的学生,重新萌发出对这个学科的兴趣。看着陈老师的连载,想起了自己追的漫画《海贼王》,日本漫画一般都是一周出一话,也就是一个连载,现在人气最高的《海贼王》从1997年连载至今已经到709话了,俨然是日本的国民级漫画了。真心希望陈老师的这个帖子也能继续连载下去,成为通信界的国民级神帖。

8188# (将通信原理和信号与系统联系了起来)

新手程序猿 发表于 2013-7-19 15:49:54

这本书真心适合深入学习通信原理啊!一层一层地剥开核心的东西,还把我本科时候不知道有什么关系的两大巨头课程——“通信原理”和“信号与系统”联系了起来!楼主真是下了很大的功夫啊!在工作之余每天跟进一些,收获很大!

8406# (原来听不懂的课都能听懂了)

通信大学生 123 发表于 2013-10-21 19:09:53

感谢楼主哈,现在大三正在学通信原理、数字信号处理等知识,看了您的连载之后觉得以前听不懂的课都能听懂了。

8439# (讲解了好多教材都没有讲解的疑难内容)

v\_p\_m\_qd 发表于 2013-11-12 18:35:59

陈老师,您写得太深刻了,找了好多教材都没找到的疑难点内容您在连载中都讲解了,正在努力学习中!

8550# (把本科的通信知识都串起来了)

laotu1990 发表于 2014-3-8 11:38:46

陈老师,您好。我是在校研一学生,读完您的连载,感觉本科学的通信知识全都串起来了,谢谢您帮我把之前学习中的困惑解决掉了。

8980# (讲解方法让人上瘾)

SmartMonkey525 发表于 2014-12-15 20:13:33

在理解虚数  $j$  的基础上,明白了傅里叶级数;在看到了三维的频谱图时,对傅里叶变换有了更深入的理解。陈老师的讲解简直一绝啊,看得我都上瘾了。

9333# (理解公式的内在含义后再讲解出来)

thinkfree 发表于 2015-6-14 08:53:16

楼主前辈的这种奉献精神和耐心太让人佩服了,真正理解公式背后内在含义的人本来就少,而理解了又愿意花这么多的心思和精力将其耐心地讲解出来的人就更是凤毛麟角了。本人自己即这样,虽然理解了,但是用简单的几句话表达出来都觉得累,更不用说花时间做这么多形象的图表,一步一步耐心地推导了。佩服楼主深厚的专业功底,更佩服楼主不辞辛劳地奉献的精神。无以回报,只能多回帖。

10292# (给非通信专业学生入职后学习通信知识带来了福音)

MrsBean 发表于 2017-9-5 14:32:02

陈老师您好,先感谢您这么多年坚持下来的分享,我是今年毕业的研究生,本来就是非通信专业毕业的,所以入职后学习通信相关知识的过程更加痛苦,直到8月的某一天,突然在网上发现了您的帖子。可以说是它真正让我在专业上有这么直观的感受,了解了您的事迹后更是十分佩服您的为人。非常感谢您的分享,私下以为我们这些网友作为您的学生,最好的感恩方式就是好好把学到的知识运用到实际工作之中。最后,出书了一定要叫我们大家来买!万分感谢!

# 前言

随着电话和互联网的普及，特别是手机和移动互联网的普及，越来越多的人接触到通信，不少人都想搞清楚通信的基本原理，找一些通信原理方面的书来看，但很多书中充斥的大量繁杂的数学公式让很多人望而却步。

和大家一样，我在学习通信原理的过程中也遇到了同样的困难，大家一定很好奇我是如何克服这些困难的，下面我就对自己学习通信原理的经历和体会做一个介绍，希望对大家学好通信原理有所启发。

## 一、通信原理学习经历

说起通信，作为一名“70后”，我接触通信的时间最早可以追溯到小学的时候。家里有一台熊猫牌电子管收音机，后来又新买了一台红灯牌电子管收音机，如图1所示。

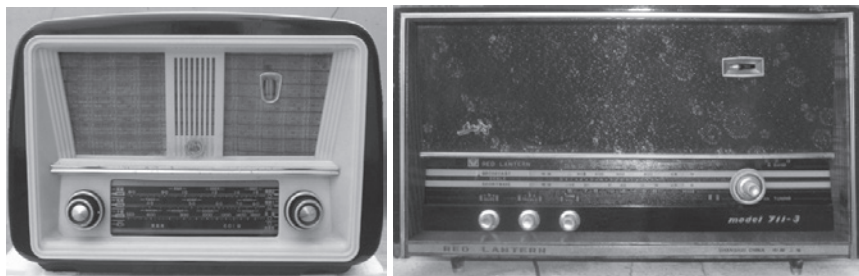


图1 熊猫牌和红灯牌电子管收音机

低年级时我特别喜欢收听小喇叭节目，听孙敬修老爷爷讲故事，“嗒嘀嗒，嗒嘀嗒，小喇叭开始广播了”至今还在耳边回响。到了高年级之后，收听最多的节目就是单田芳老师讲的评书，每次还没听够呢，一句“欲知后事如何，且听下回分解”就结束了。

我的父亲是一名复员军人，在部队当兵时自学了无线电技术，经常为邻居修理收



音机等家用电器。家里常年订阅《无线电》和《家用电器》杂志，如图2所示。



图2 《无线电》和《家用电器》杂志

受父亲影响，我从小就对无线电产生了浓厚的兴趣，很想搞清楚声音是怎么从广播台传到收音机并通过喇叭播放出来的。虽然通过初中和高中物理课学了一些电压、电流、电阻、电容、电感等电路知识和电磁学方面的知识，但我的疑惑还是没能完全解开。于是高考填报志愿时几个志愿全部填了与无线电技术相关的专业，最终如愿考入西安交大信息与控制工程系无线电专业。

当时对无线电的认识也就是无线电广播和电视，想着大学毕业后回家搞家电维修去。正是因为这个想法，我参加了学校的电子学会，把大学期间的大部分课余时间都花在帮同学和老师修单放机、电视机方面了。当时大家都是使用单放机来听音乐和学英语，最常见的单放机牌子要数索尼和爱华，如图3所示。



图3 索尼和爱华单放机

大二时一次偶然的机会，从即将毕业的学长摆的旧书摊上买到了一本《电子世界》的创刊号，发现这本杂志对三极管等电子技术知识讲得通俗易懂，我如饥似渴地把从

创刊号开始的每一期杂志全部搜集齐了来看，如图 4 所示。



图 4 《电子世界》杂志

也正是通过《电子世界》这本杂志，我第一次接触到了四位单片机，搞清楚了单片机的工作原理，后来一鼓作气把大四才学的 8031 单片机原理给学完了。这为我后来毕业被华为录取埋下了伏笔——画出 8031 最小系统并讲清楚工作原理就是 1997 年应聘华为时面试官楚庆给我出的一道题。当然单放机和电视维修所展现的动手能力也为我应聘进华为起了很大作用。

进入华为后，最初在无线业务部从事 GSM 硬件开发工作，开发基站控制器 BSC 上的单板。当时的 BSC 是基于 C&C08 交换机开发的，主管尹志刚给我安排了一项任务：给 1998 年报到的无线新员工讲 C&C08 交换机工作原理。说老实话，虽然大学时学过程控交换原理，但当时真没理解，以七号信令系统为例，只知道它是通信系统的神经系统，由于根本没接触过实际的通信设备，根本不知道说的是啥，为了准备那次培训，我找了大量培训资料来学习，包括 C&C08 硬件总体架构，主控板、时钟板、信令板、中继板、用户板、交换网板等各种单板（如图 5 所示）的功能介绍和配置方法，电话网组网，电话区号编码，打通电话的流程等。结合大学学过的理论知识，我终于把程控交换原理彻底搞清楚了。

至今我还记得那次培训，培训时间为 1998 年 9 月 22 日。我清楚地记得，那次培训的结尾我讲了一个例子，从我的老家吉林延边拨打深圳的电话，中间途经了哪些设备，电话是如何一步一步接续成功的。培训结束时我说：今天正好是我进无线业务部满一年的日子，很高兴有这样一个机会给大家分享我对 C&C08 交换机的理解，你们在这么短的时间内就掌握了我花了半年时间才搞清楚的知识，相信你们在无线业务部



工作满一年时会有更大收获！令我没有想到的是，多年以后还有人记得那次培训。一次偶遇同事谢寿波，他说，“我参加过 1998 年的那次培训，那是我加入华为进入无线业务部参加的第一个培训，至今仍记忆犹新，通过那次培训我真正搞明白了程控交换原理，受益匪浅！”听了他的话我非常感动。

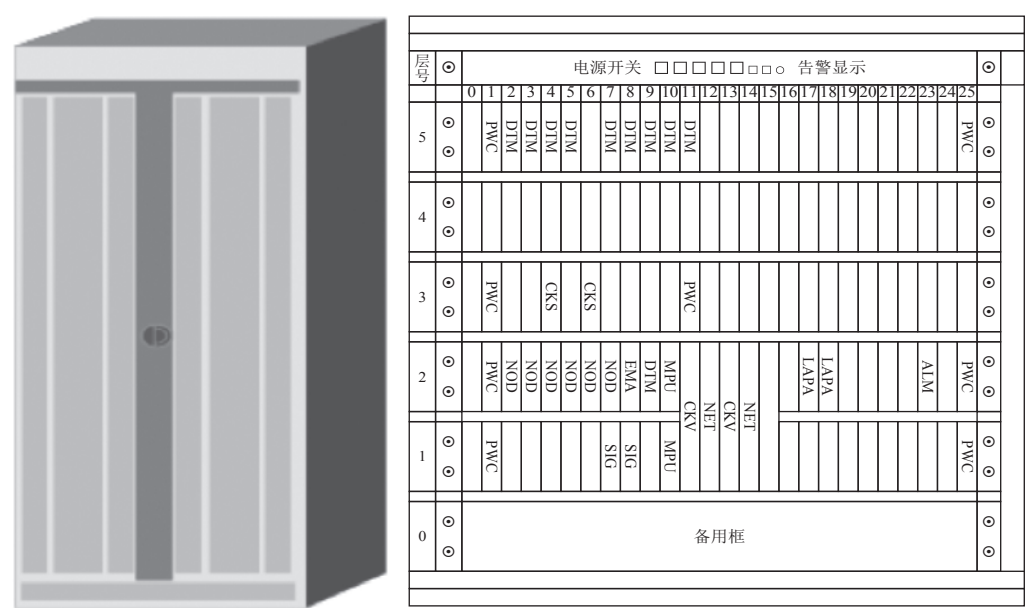


图 5 C&C08 交换机机柜和单板配置

后来随着计算机和互联网的普及，开始接触到上网。当时想上网，除了要有计算机以外，还要买一个猫 (MODEM) 接到计算机的串口上，再买一张上网卡，凭卡上的账号和密码拨号上网，如图 6 所示。

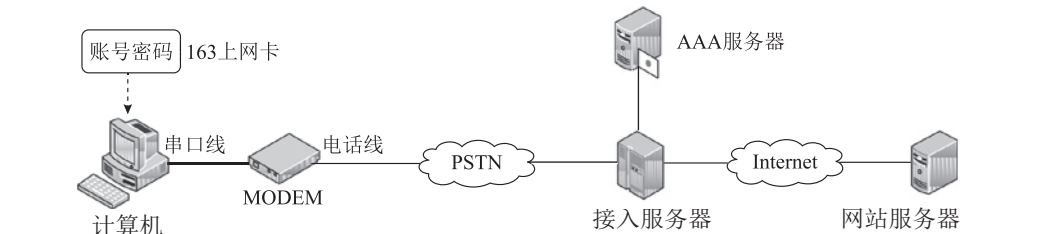


图 6 拨号上网示意图

当时的上网速率一般只有 33.6kbit/s，后来出现一种 56k MODEM，最高速率可以达到 56kbit/s。我特别想搞清楚为什么一般 MODEM 上网速率最高只能达到 33.6kbit/s，

而 56k MODEM 最高能达到 56kbit/s。可惜由于当时掌握的知识太有限，没能搞明白这些问题，直到去年处理一个机顶盒通过 MODEM 与服务器通信的问题时才彻底弄明白了这些问题。

2003 年我转入新成立的 CDMA 解决方案测试部，负责终端兼容性测试。让我感到郁闷的是，每次发现异常都要找同事来帮忙分析跟踪到的信令信息，定位问题出在哪儿了，麻烦别人次数多了，自己都觉得不好意思了。为了系统地熟悉信令流程，部门领导邓泰华安排我到 CBSC 产品测试部做了半年的产品测试，在凌湘寿的指导下，我把 CDMA 标准信令流程（如图 7 所示）和 CBSC 内部各模块的信令处理流程都搞得一清二楚，从那之后我最终可以做到对信令流程问题不求人了！

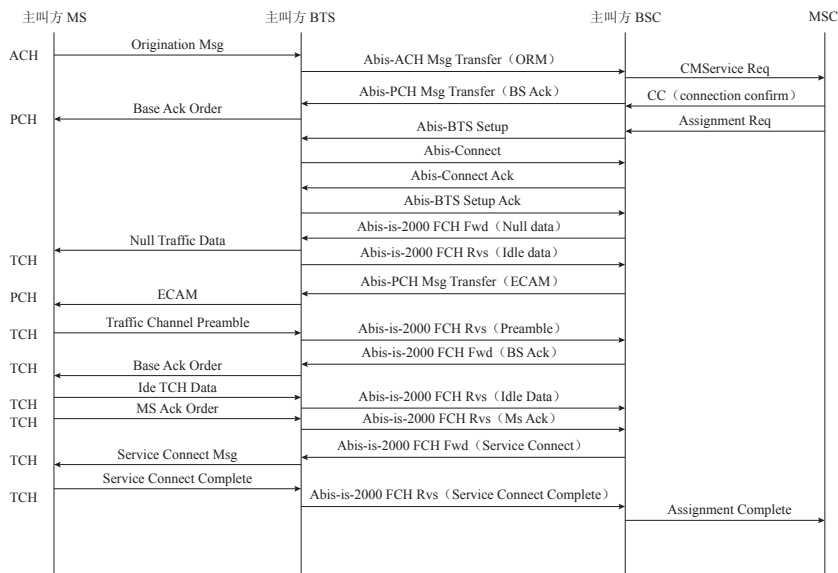


图 7 移动台发起呼叫信令流程图

再后来我转入 CDMA 性能测试组，做性能算法测试，开始定位一些数据传输速率方面的问题。速率低时首先看的就是  $E_c/I_0$ ，但  $E_c/I_0$  到底是什么一直没搞清楚。另外，码分多址是什么？码分多址是利用扩频通信实现的，扩频通信的原理是什么？为什么 CDMA 频谱占用的带宽是 1.23MHz？为什么 CDMA 1X 的速率可以达到 153.6kbit/s？等等，有太多的问题没弄明白。

考虑到很多问题都与频谱有关，我决定把频谱作为一个切入点来研究。频谱与傅里叶系数和傅里叶变换有关。虽大学时学过信号与系统，知道傅里叶级数展开和傅里叶变换，但说老实话，当时没有真正学明白，例如，为什么会有负频率？复信号是

如何在通信系统中传输的？这些很基本的问题以前都没搞清楚。真心感谢万能的互联网，让我搜索到了西安电子科技大学陈怀琛老师的文章《负频率频谱究竟有没有物理意义》和西安理工大学张华容老师的文章《为“复信号”正名之辩》，才终于弄明白了负频率和复信号的物理意义。

但是对于复信号表达式中的虚数  $j$ ，我一直耿耿于怀。虚数是高中解一元三次方程组时，为了给  $j$  的平方等于  $-1$  一个解而引入的， $j$  的意义到底是什么压根没有说清楚。一次逛书店时我偶然发现了《虚数的故事》这本书。此书对虚数的来龙去脉进行了系统的介绍，我终于弄清楚了虚数  $j$  的物理意义：一个复数与  $j$  相乘就相当于这个复数对应的向量在复平面上逆时针旋转  $90^\circ$ 。搞清楚这一点后， $j^2=-1$  就很好解释了，如图 8 所示。

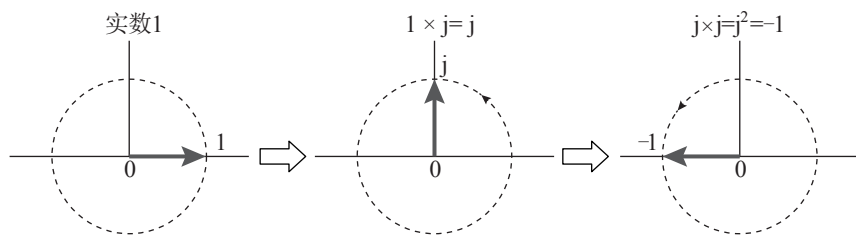


图 8 为什么虚数  $j$  的平方等于  $-1$

学习傅里叶级数展开时，我发现：两个周期信号相乘可以转化为两个多项式相乘，多项式的系数就是傅里叶系数。再结合“两个多项式乘积的系数等于这两个多项式系数的卷积”（如图 9 所示），得到：两个周期信号相乘相当于这两个周期信号的傅里叶系数做卷积！

$$\begin{array}{rcl}
 \frac{6+5x+x^2}{3x+2} & \Rightarrow & 3x^3 \\
 \frac{6+5x+x^2}{3x+2} & \Rightarrow & 17x^2 \\
 \frac{6+5x+x^2}{3x+2} & \Rightarrow & 28x \\
 \frac{6+5x+x^2}{3x+2} & \Rightarrow & 12
 \end{array}$$

图 9 两个多项式乘积的系数等于两个多项式系数的卷积

我以“深入浅出通信原理”为题，把这个发现分享到通信人家园论坛（<http://bbs.c114.net/thread-394879-1-1.html>），受到大量网友的围观，大家都说第一次看到这么直观地利用多项式乘法来理解《信号与系统》中所讲的“时域相乘相当于频域卷积”，激发了很多人学习通信原理的兴趣。

从那以后，每天下班回家，就算再晚我也要研究一个通信原理的小知识点并分享到通信人家园论坛，逐渐形成了一个系列连载。不断增加的访问量和网友的肯定与支持大大激发了我的学习热情，我对通信原理的深入研究一发不可收拾。

数据传输速率问题除了涉及无线通信原理外，还涉及数据通信原理，我利用业余时间对数据通信原理进行了深入研究，包括以太网交换机、路由器等数通设备的工作原理，互联网上广泛使用的 TCP/IP 协议、HTTP 协议、FTP 协议等，搞清楚了客户端、交换机、路由器、服务器的协议栈等，如图 10 所示。

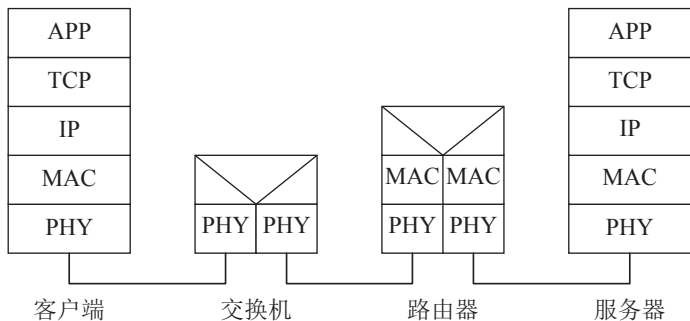


图 10 客户、交换机、路由器、服务器的协议栈

由于掌握的知识比较全面，从客户端、终端、基站、核心网到服务器，从信令面到用户面，从物理层、链路层、传输层到应用层，出现数据传输速率问题时，我总能在大家走投无路时找到突破点，连公司的 IT 部门遇到疑难问题时都来找我帮忙解决，就这样我逐步在公司范围内树立了自己的专家形象和技术影响力。

上面讲了我研究通信原理的过程。下面针对很多人提的通信原理太难学、没时间学的问题谈一下我的经验和体会。

## 二、通信原理的学习经验和体会

关于通信原理难学的问题，我的建议如下所述。

(1) 多问几个为什么。一定要保持你的好奇心。天天挂在嘴边的词你不一定真

正懂了，要多问一些为什么，要有打破砂锅问到底的精神。例如 CDMA 中的  $E_c/I_0$ ，不要以为理解为接收信号强度就算明白了，要进一步问问： $E_c$  是什么， $I_0$  又是什么？如图 11 所示。

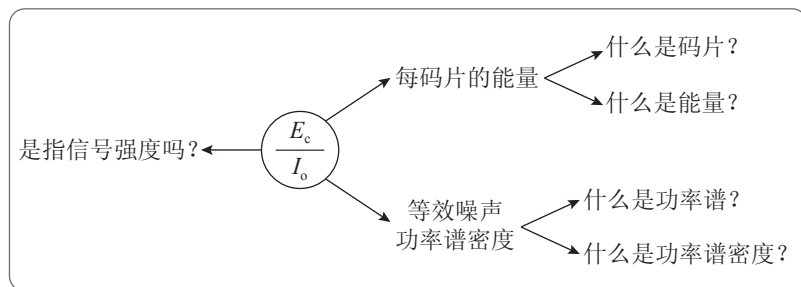


图 11  $E_c/I_0$  的含义是什么？

(2) 透过公式看本质。非常复杂的公式背后往往隐藏了很简单的道理。学好通信原理的关键就在于透过公式看本质，千万不要被繁杂的公式蒙蔽了双眼。

例如：傅里叶级数展开式

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega_0 t}$$

看着很复杂，实质上就是将周期信号分解成一系列旋转向量之和，各旋转向量的角速度分别为  $\pm\omega_0, \pm2\omega_0, \pm3\omega_0, \dots, \pm k\omega_0$ ， $t=0$  时刻的初始向量就是傅里叶系数  $c_k$ ，如图 12 所示。

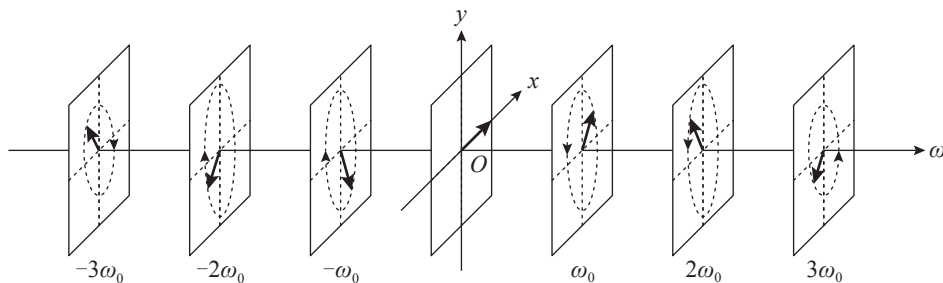


图 12 三维频谱

(3) 以不变应万变。虽然移动通信技术的发展日新月异，从 2G、3G 到 4G，4G 还没商用多久，5G 又要来了，但是移动通信系统的端到端网络架构变化不大，基本保持着客户端+终端+基站+传输+核心网+互联网+服务器的形态，如图 13 所示。



图 13 移动通信系统端到端网络架构

(4) 利用工具辅助学习。在学习通信原理过程中，我发现 Matlab 是一个很好的工具，不但支持仿真，还可以将很多表达式以二维或三维曲线方式呈现出来，使枯燥的式子变得非常直观而有趣，于是我自学了 Matlab，并使用 Matlab 画图来辅助理解通信原理。另外，学习数据通信协议时，利用 Wireshark 抓包和分析也是一种效果很好的学习方法。

利用 Matlab 进行频谱分析和利用 Wireshark 进行抓包分析的界面如图 14 所示。

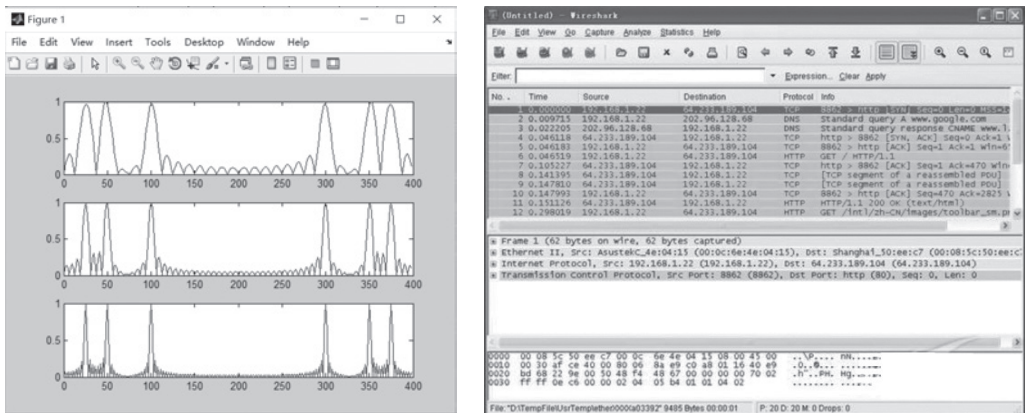


图 14 利用 Matlab 和 Wireshark 学习通信原理

(5) 化繁为简。把一个大目标分解成很多小目标，把复杂的通信原理知识分解成一个一个小的知识点，这样每个知识点就没那么难了，如图 15 所示。

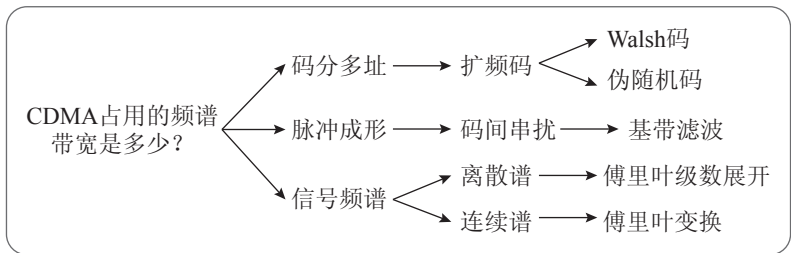


图 15 把一个问题层层分解成多个小知识点

(6) 简单的事情重复做。坚持每天研究一个小知识点，长年累月积累起来，最

终会实现从量变到质变。关于这一点，跟着“深入浅出通信原理”系列连载（如图 16 所示）学习通信原理的网友很有体会，每次发一个连载，有些网友说内容少、不过瘾，坚持学下来才发现不知不觉学了很多知识。

连载539: OFDM信号表达式	连载551: SC-FDMA (一)
连载540: OFDM基带信号的实部与虚部	连载552: SC-FDMA (二)
连载541: LTE采样频率	连载553: SC-FDMA (三)
连载542: LTE采样与CPRI接口	连载554: SC-FDMA (四)
连载543: LTE FFT点数	连载555: SC-FDMA (五)
连载544: OFDM射频信号表达式	连载556: SC-FDMA (六)
连载545: OFDM射频信号的频谱	连载557: SC-FDMA (七)
	连载558: SC-FDMA (八)
	连载559: SC-FDMA (九)
连载546: 上变频和下变频 (一)	连载560: 信息度量之信息量
连载547: 上变频和下变频 (二)	连载561: 信息度量之信源的熵
连载548: 上变频和下变频 (三)	连载562: 信息传输之基本概念
连载549: 上变频和下变频 (四)	
连载550: 上变频和下变频 (五)	

图 16 “深入浅出通信原理”系列连载

(7) 多看书。很多人说“书非借不能读也”，我觉得此言差矣。建议大家有时间多转转实体书店或网上书店，发现好书之后立即买下来，否则过几年等你想看时再买，很有可能就买不到了。网友推荐给我的好书中就有几本买不到了，很可惜。我的部分藏书如图 17 所示。



图 17 部分藏书

(8) 多记笔记。好记性不如烂笔头，注意把想明白的问题随手记录下来，做成笔记。一来避免自己忘记；二来便于回过头去翻阅和查找。

(9) 多总结。没有总结就没有提高。通过归纳总结可以发现自己还有哪些东西没搞懂，把没搞懂的东西弄懂，技术水平自然就提高了。



(10) 多分享。总结的东西要多分享。分享的形式很多，讲课、论坛发帖、写博客等，都可以，总之不要捂在自己手里。分享之后会有很多人问你问题，可以检验你是否真明白了。如果答不上来，赶紧去学习。学习明白了，你就又进步了。

关于没有时间学习通信原理的问题，我不是太认同。“时间是弹簧，你弱它就强”。当你坐公交车时，当你等电梯时，当你躺在床上睡不着觉时，你在干什么？相信很多人都在看手机！有时间刷朋友圈，没时间学通信原理？大家相信吗？反正我不信！建议大家把碎片化的时间利用起来学习通信原理。

上面讲了我的技术成长经历，还谈了我学习通信原理的一些经验和体会。下面对本书的成书过程做一下简要介绍。

### 三、成书过程

“深入浅出通信原理”系列连载于 2010 年 4 月 8 日在通信人家园论坛上线，受到广大网友的热烈欢迎。很多网友回帖表示肯定和支持，也给了不少改进建议。例如，有网友反馈：连载讲了很多通信原理的知识点，每个知识点以图文并茂的方式讲得很清楚，但这些知识点在通信系统的哪个地方会用到缺少必要的说明，希望能够出书，对通信原理知识进行更系统、更全面的介绍。

为了将连载的内容集集成书，我利用周末和节假日的时间，以通信系统模型为主线，对连载内容进行了系统梳理和查缺补漏，补充了信源编码、信道编码、天线技术、复用和多址技术等方面的很多内容。

经过多年的酝酿和积累，《深入浅出通信原理》这本书终于即将出版了。2017 年 8 月 14 日是我进入华为工作满 20 周年的日子，《深入浅出通信原理》这本书的出版也算是我 20 年工作和学习的经验总结，非常具有纪念意义。

### 四、致谢

最后我要向为本书出版做出贡献的家人、朋友和同事致谢！

感谢我的父亲！没有您的潜移默化，我不可能喜欢上无线电，更不可能进入通信行业。

感谢我的父母、老婆和孩子！谢谢你们对我出书的大力支持、为我写书创造的良好环境！同时也请你们原谅，我把很多本该陪伴你们的时间都用来研究通信原理了。

谢谢通信人家园论坛，特别是通信原理与基础版的版主！谢谢你们搭建了一个很

好的通信原理学习和交流的平台，没有这个平台，就没有“深入浅出通信原理”系列连载，更不会创造单帖 800 万人次的阅读量！

感谢本书策划编辑刘洋老师！“深入浅出通信原理”在通信人家园论坛开始连载以后，是您第一时间与我联系出书事宜，和我一起讨论本书的定位和读者群，确定本书的主要内容和主体框架。是您作为本书的策划和第一位读者，提出了很多非常专业的改进建议！把连载的帖子转化成书要补充很多新内容，由于我投入写书的时间有限，导致书稿的交稿时间一拖再拖，有几次我自己都想撂挑子不干了，是您一直不离不弃，动之以情、晓之以理，鼓励我把书写完。可以毫不夸张地说，没有您就不会有《深入浅出通信原理》这本书！

感谢华为无线网络业务部人力资源部部长孙承，感谢您极力推荐我负责《无线通信原理基础》MOOC 课程内容的开发！还要感谢 MOOC 课程线上培训的助教季超老师，感谢参加 MOOC 课程线上培训的所有华为同事！MOOC 课程的主要内容取自本书初稿，你们反馈的建议使本书内容得以进一步完善。

感谢《大话无线通信》的作者丁奇！谢谢您为本书提出的非常有价值的改进建议！

感谢通信人家园论坛的广大网友！没有你们的肯定、支持和鼓励，这本书不可能出版！

陈爱军  
2017 年 10 月

# 目 录

第 1 章 通信原理概述 .....	1
1.1 什么是通信 .....	1
一、广义的通信 .....	1
二、狭义的通信 .....	2
1.2 什么是通信系统 .....	2
一、有线模拟通信系统 .....	3
二、无线模拟通信系统 .....	4
三、有线数字通信系统 .....	5
四、无线数字通信系统 .....	10
1.3 通信系统模型 .....	10
一、信源和信宿 .....	11
二、信道 .....	12
三、发信机和收信机 .....	12
1.4 信道 .....	13
一、有线信道 .....	13
二、无线信道 .....	15
1.5 信号变换 .....	19
一、信源编码 .....	19
二、信道编码和交织 .....	19
三、脉冲成形 .....	20
四、调制 .....	21
五、天线技术 .....	24

1.6 复用和多址技术 .....	25
一、复用技术 .....	26
二、多址技术 .....	26
<b>第2章 信号与频谱 .....</b>	<b>27</b>
2.1 概述 .....	27
2.2 正弦信号 .....	28
一、正弦信号的波形 .....	28
二、正弦信号的特性 .....	29
2.3 复指数信号 .....	32
一、欧拉公式 .....	32
二、如何理解复数 .....	33
三、如何理解复信号 .....	36
四、复指数信号的特性 .....	41
2.4 信号的相和相位 .....	42
一、概述 .....	42
二、什么是Phase .....	43
三、月亮的相和相位 .....	43
四、什么是相 .....	46
五、什么是相位 .....	47
六、什么是相位差 .....	55
七、波的干涉 .....	61
2.5 信号的分解与合成 .....	65
一、正弦信号作为基本信号 .....	65
二、复指数信号作为基本信号 .....	69
2.6 周期信号的傅里叶级数展开 .....	76
一、傅里叶级数展开的定义 .....	76
二、傅里叶级数展开的几何意义 .....	76
三、傅里叶系数计算公式 .....	77
四、方波信号的傅里叶系数 .....	77
五、周期矩形信号的傅里叶系数 .....	79

2.7 周期信号的离散谱 .....	80
一、两类频谱 .....	80
二、常用周期信号的频谱 .....	82
2.8 非周期信号的连续谱 .....	90
一、非周期矩形脉冲信号的离散谱 .....	90
二、非周期矩形脉冲信号的连续谱 .....	92
2.9 傅里叶变换 .....	94
一、傅里叶正变换 .....	94
二、傅里叶逆变换 .....	95
三、傅里叶变换 .....	96
四、非周期信号的傅里叶变换 .....	97
五、周期信号的傅里叶变换 .....	100
六、傅里叶变换的对称性 .....	105
七、延迟信号的傅里叶变换 .....	108
八、信号乘积的傅里叶变换 .....	110
九、信号卷积的傅里叶变换 .....	128
2.10 离散傅里叶变换 .....	137
一、离散傅里叶正变换 .....	137
二、离散傅里叶逆变换 .....	148
<b>第 3 章 信道 .....</b>	<b>153</b>
3.1 噪声和干扰 .....	153
3.2 信道带宽 .....	153
3.3 信道容量 .....	154
3.4 移动衰落信道 .....	155
一、路径损耗 .....	155
二、大尺度衰落 .....	156
三、小尺度衰落 .....	156
<b>第 4 章 信源编码 .....</b>	<b>169</b>
4.1 模 / 数转换 .....	169
一、采样 .....	169

二、量化	177
三、编码	180
四、实现	181
4.2 音频编码	186
一、G.711 PCM	186
二、RPE-LPT	186
三、AMR-NB	187
四、AMR-WB	187
4.3 视频编码	188
一、概述	188
二、模/数转换	190
三、视频压缩	194
<b>第 5 章 信道编码与交织</b>	<b>201</b>
5.1 FEC	201
一、重复码	201
二、分组码	202
三、卷积码	206
5.2 交织	218
一、交织	218
二、去交织	219
5.3 反馈重传	219
一、ARQ	219
二、HARQ	220
三、HARQ+ARQ	220
<b>第 6 章 基带信号的发送和接收</b>	<b>221</b>
6.1 脉冲成形	221
一、矩形脉冲	221
二、sinc脉冲	223
6.2 基带滤波器	224
一、理想低通滤波器	224
二、升余弦滚降滤波器	225

6.3 眼图 .....	229
一、什么是眼图 .....	229
二、眼图的生成原理 .....	229
<b>第 7 章 频带信号的发送和接收 .....</b>	<b>234</b>
7.1 模拟调制 .....	234
一、标准幅度调制 .....	235
二、双边带调制 .....	239
三、单边带调制 .....	243
四、IQ调制 .....	247
7.2 数字调制 .....	251
一、数字调制 .....	251
二、PSK调制 .....	251
三、QAM调制 .....	253
四、数字调制的实现 .....	254
五、星座图 .....	263
六、数字调制的映射关系 .....	266
七、调制效率 .....	269
7.3 变频技术 .....	270
一、直接变频 .....	270
二、间接变频 .....	272
三、数字变频 .....	275
四、带通采样 .....	276
<b>第 8 章 天线技术 .....</b>	<b>284</b>
8.1 天线的功能 .....	284
8.2 电磁波辐射原理 .....	284
一、辐射能力与导线形状的关系 .....	285
二、辐射能力与导线长度的关系 .....	285
8.3 半波对称振子 .....	285
8.4 全向天线 .....	286
8.5 定向天线 .....	287
8.6 多天线技术 .....	287



一、分集技术·····	287
二、MIMO·····	289
三、波束赋形·····	306
<b>第 9 章  复用和多址技术·····</b>	<b>312</b>
9.1  TDM/TDMA·····	312
一、概念·····	312
二、实现·····	313
三、应用·····	313
9.2  FDM/FDMA·····	314
一、概念·····	314
二、实现·····	315
三、应用·····	316
9.3  OFDM/OFDMA·····	316
一、概念·····	316
二、实现·····	318
三、应用·····	327
9.4  CDM/CDMA·····	327
一、概念·····	327
二、实现·····	328
三、应用·····	338
<b>第 10 章  通信系统性能评估·····</b>	<b>340</b>
10.1  通信系统性能指标·····	340
10.2  模拟通信系统·····	340
一、概述·····	341
二、有效性·····	341
三、可靠性·····	341
10.3  数字通信系统·····	342
一、概述·····	342
二、有效性·····	345
三、可靠性·····	347
<b>参考文献·····</b>	<b>350</b>

# 第1章

## 通信原理概述

### 1.1 什么是通信

所谓的通信就是指信息的传递和交流，如图 1-1 所示。

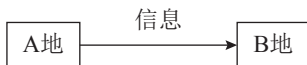


图 1-1 通信

#### 一、广义的通信

广义的通信：无论采用什么方法、使用什么传输媒介，只要将信息从一地传送到另一地，均可称为通信。从这个意义讲，古代的飞鸽传书和利用烽火传递信息都属于通信。

古人将书信绑在鸽子腿上，通过鸽子将书信从一个地方传递到另外一个地方，这就是飞鸽传书，如图 1-2 所示。

古代边防前线发现敌情时，点燃烽火台上的烽火，利用浓烟将敌人入侵的消息传递到后方，这就是烽火通信，如图 1-3 所示。



图 1-2 飞鸽传书



图 1-3 烽火通信

## 二、狭义的通信

狭义的通信只包括电信和广播电视。

### 1. 电信

电信是指利用“电”来传递信息的方法，如电报和电话通信。

电报通信中的发报机如图 1-4 所示。电话通信中的电话机如图 1-5 所示。

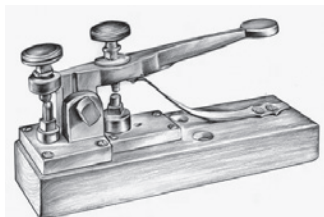


图 1-4 发报机

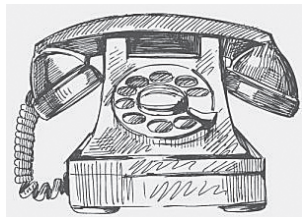


图 1-5 电话机

### 2. 广播电视

广播：听众使用如图 1-6 所示的收音机来收听广播电台的声音节目。

电视：观众使用如图 1-7 所示的电视机来收看电视台的视频节目。



图 1-6 收音机

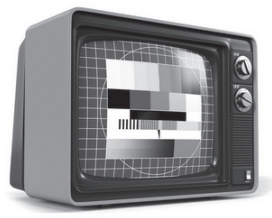


图 1-7 电视机

## 1.2 什么是通信系统

实现信息传递所需的一切技术设备和传输媒质被统称为通信系统。电话通信系统就是指实现声音传递的通信系统，如图 1-8 所示。



图 1-8 电话通信系统

我们在日常生活中接触到的通信系统都比较复杂，但这些复杂的通信系统并不是一蹴而就的，它经历了由简单到复杂、由有线到无线、由模拟到数字的发展历程。

为了更好地理解通信原理，下面回顾一下通信系统的演变历史。

## 一、有线模拟通信系统

1875 年，贝尔发现电流的强弱可以模拟声音大小的变化，由此想到了利用电流来传送声音，发明了电话。最简单的有线电话通信系统如图 1-9 所示，主要由话筒、听筒及二者之间的电话线组成。

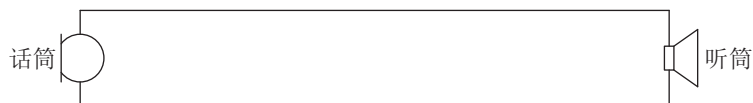


图 1-9 有线模拟电话通信系统

### 1. 话筒

话筒又被称为麦克风、送话器，负责将声音的变化转换为电流的变化。曾经在电话通信系统中广泛应用的碳粒式麦克风如图 1-10 所示。



图 1-10 碳粒式麦克风

其工作原理如图 1-11 所示：当声波作用于震动膜片，碳粒被挤压变得紧密，电阻随之减小，电流增大；当声音变小时，碳粒变得疏松，电阻随之增大，电流减小。

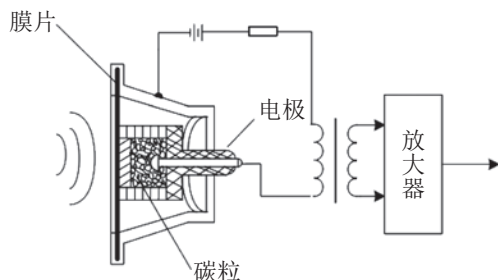


图 1-11 碳粒式麦克风工作原理

## 2. 听筒

听筒又被称为扬声器、喇叭、受话器，负责将电流的变化转换为声音的变化。如图 1-12 所示的就是一种很常见的扬声器，被称为动圈式扬声器。

其工作原理如图 1-13 所示：扬声器里有一个线圈，镶嵌在环形磁体的空隙里，当有音频电流通过时，就产生一个随电流规律变化的磁场，在环形磁铁的共同作用下，线圈带动纸盆振动，发出声音。



图 1-12 动圈式扬声器

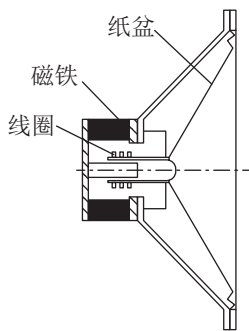


图 1-13 动圈式扬声器工作原理

## 二、无线模拟通信系统

有线电话通信需要架设很长的电话线路，部署起来很不方便。1887 年赫兹通过试验证实了电磁波的存在。马可尼受赫兹的电磁波试验的启发，1894 年开始进行无

线电通信试验，并于 1896 年发明了无线电报，1899 年首次完成了英国与法国之间国际性的无线电通话。

无线电话通信系统如图 1-14 所示，主要由话筒、调制器、发射天线、接收天线、解调器和听筒组成。



图 1-14 无线电话通信系统

最初的通信系统是用模拟电路实现的，其中传输的信号都是模拟信号，因此被称为模拟通信系统。

模拟信号存在一个缺点，那就是抗干扰能力差，很容易在传输的过程中受到干扰影响而产生失真。假定从话筒输出一个音频信号，其波形如图 1-15 所示。



图 1-15 话筒送出的音频信号波形

信号经过传输到达听筒，波形很容易发生失真，如图 1-16 所示。



图 1-16 到达听筒的音频信号波形

### 三、有线数字通信系统

相对于模拟信号，数字信号有很多优点。

#### 1. 数字信号抗干扰能力强

数字信号的抗干扰能力很强。以最常见的二进制数字信号为例，其使用高电平和低电平两种电平分别代表二进制数字 0 和 1。接收端只需关注采样时刻的电平值，能

够区分出高电平和低电平就可以了，并不需要对接收信号的波形太关心，因此信号波形失真对数字信号的影响很小。

假定发送端发出一串二进制数字 010101…，其波形如图 1-17 所示。

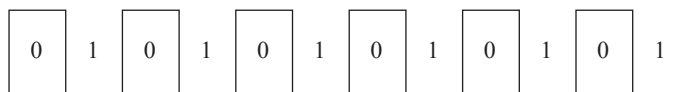


图 1-17 发送端发出的二进制数字信号波形

经过传输到达接收端的信号很容易发生失真，波形如图 1-18 所示。

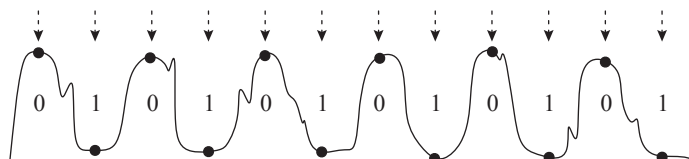


图 1-18 到达接收端的二进制数字信号波形

只要传输线路比较短，信号衰减程度比较小，信号波形失真不是太严重，二进制数字 010101…很容易在接收端被正确恢复出来。但如果传输线路很长，信号衰减程度很大，信号到达接收端时波形失真很严重，二进制数字很难被正确恢复出来。有没有什么解决办法呢？

只要在信号衰减到一定程度、波形失真还不是太严重时插入数字中继器，对数字信号进行放大，恢复理想脉冲波形，再转发出去即可，这就是数字信号的再生，如图 1-19 所示。



图 1-19 数字信号的再生

由此可见，数字信号通过再生很容易实现远距离传输。

有人会说：模拟信号也可以采用类似的方法来实现远距离传输啊，只要在中途对模拟信号进行放大即可，如图 1-20 所示。



图 1-20 模拟信号的远距离传输



表面上看似可行，实际上存在一个问题：对模拟信号进行放大的同时，叠加在上面的噪声也会被放大，而且累积的噪声会随着传输距离的增加而越来越多，信号质量会越来越差。而数字信号则不同，通过中继器放大时，可以恢复出理想脉冲波形，叠加在脉冲信号上的噪声不会被累积。

## 2. 数字信号便于复用传输

数字信号还便于实现多路信号的复用传输。

以4路信号的并行传输为例，如图1-21所示，4路信号只要按时间错开、轮流占用传输线路，即可实现4路信号的复用传输。

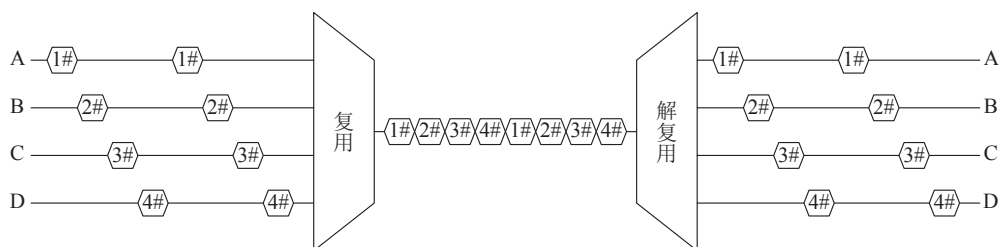


图 1-21 数字信号的4路复用传输

## 3. 数字信号便于交换

数字信号很容易利用时隙交换实现用户间的数据交换。

假定甲用户的数据在A线路的1#时隙中传输，乙用户的数据在H线路的3#时隙中传输。通过时隙交换，很容易将A线路1#时隙中的内容交换到H线路3#时隙中，如图1-22所示。

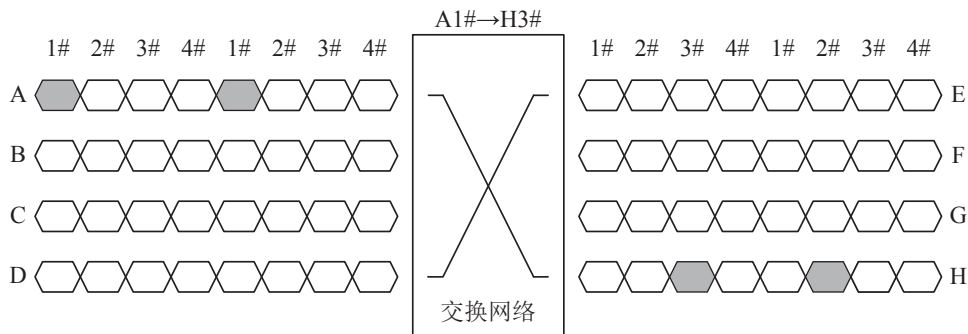


图 1-22 数字信号的时隙交换

#### 4. 数字信号便于加密

数字信号还便于进行加密和解密。

对称加密是一种很常见的加密算法，其工作原理如图 1-23 所示。

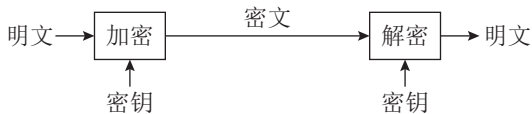


图 1-23 对称加密原理

加密：发送方将明文和加密密钥一起经过特殊加密算法处理后，使其变成复杂的加密密文发送出去。

解密：接收方收到密文后，使用相同的密钥及相同算法的逆算法对密文进行解密，将明文恢复出来。

下面看一个例子：明文为 101101011011，密钥为 011010101001，对二者进行异或运算，得到密文 110111110010，这就完成了加密；只要用相同的密钥与密文进行异或运算，就可以得到明文，完成解密，如图 1-24 所示。

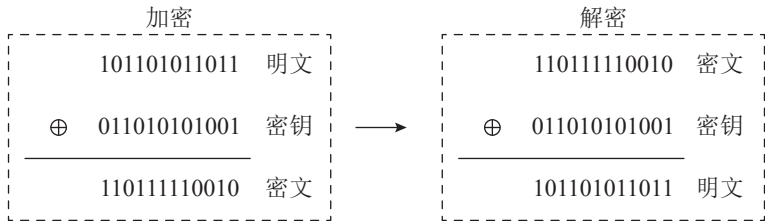


图 1-24 对称加密的例子

#### 5. 数字信号便于存储

数字信号可以很方便地保存在如图 1-25 所示的 VCD/DVD 光盘、U 盘、硬盘或者网盘中。一个小小的 U 盘就可以轻松存储几百首歌。



图 1-25 光盘、U 盘和硬盘

相对来讲，模拟信号的存储就没有那么方便了。图 1-26 所示就是过去常见的录音带和录像带，一盘录音带或录像带一般只能存储个把小时的模拟声音信号或模拟视频信号。



图 1-26 录音带和录像带

## 6. 数字电路的优点多

处理模拟信号的电路被称为模拟电路；处理数字信号的电路被称为数字电路。数字电路相对于模拟电路有很多优点，如表 1-1 所示。

表 1-1 数字电路和模拟电路对照表

类 别	数 字 电 路	模 拟 电 路
电路组成	主要由大量晶体管构成	主要由晶体管、电容、电阻、电感等模拟元器件构成
电路功耗	工作电压低，电流小，电路功耗低	工作电压高，电流大，电路功耗高
电路集成度	数字电路的集成度很高	模拟电路的集成度很低
电路可靠性	电源电压的小幅波动对数字电路没有影响，温度和工艺偏差对数字电路工作的可靠性影响小	电源电压的波动、温度和工艺偏差对模拟电路工作的可靠性影响比较大
电路设计	设计过程自动化程度高，对设计人员要求低	通常需要很多手工运算，设计过程自动化程度低，对设计人员水平要求高

正是由于数字信号具有上述诸多优点，数字信号开始在通信系统中得到应用，模拟通信系统逐渐演变为数字通信系统。

采用了数字通信技术的电话通信系统如图 1-27 所示。



图 1-27 有线数字电话通信系统

相对于有线模拟电话通信系统：在发送端增加了模 / 数转换器用于将模拟语音信号转换成数字信号；在接收端增加了数 / 模转换器，用于将数字信号转换回模拟语音信号。

## 四、无线数字通信系统

数字通信技术引入无线通信系统后，无线通信系统也由模拟通信系统演变为数字通信系统，如图 1-28 所示。

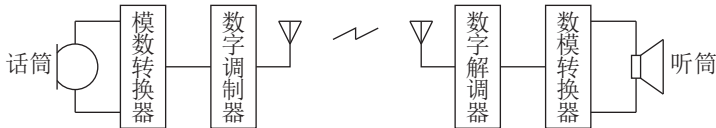


图 1-28 无线数字电话通信系统

相对于无线模拟电话通信系统：在发送端增加模 / 数转换器用于将模拟语音信号转换成数字信号，同时将模拟调制器更改为数字调制器；在接收端将模拟解调器更改为数字解调器，同时增加数 / 模转换器，用于将数字信号转换回模拟语音信号。

## 1.3 通信系统模型

通信的过程就是信源和信宿通过信道收发信息的过程。基本的通信系统模型如图 1-29 所示。



图 1-29 单向通信系统模型

图 1-29 是一个单向通信系统。广播、电视都属于这类。商用的移动通信系统一般都是双向通信系统，如图 1-30 所示。



图 1-30 双向通信系统模型

## 一、信源和信宿

信源和信宿位于通信系统的两端，如图 1-31 所示。

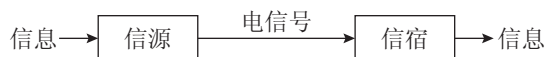


图 1-31 信源和信宿

信源：位于发送端，负责将原始信息转换为电信号。

信宿：位于接收端，负责将电信号转换回原始信息。

下面以无线话筒、视频监控、电报通信为例，介绍一下信源和信宿。

### 1. 无线话筒

麦克风作为信源，将声音转换为声音信号发送出去；扬声器作为信宿，将接收到的声音信号转换回声音，如图 1-32 所示。

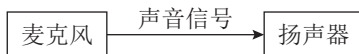


图 1-32 无线话筒

### 2. 视频监控

摄像头作为信源，将图像转换为图像信号发送出去；显示器作为信宿，将接收到的图像信号转换回图像，如图 1-33 所示。

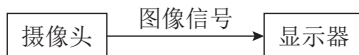


图 1-33 视频监控

### 3. 电报通信

发报机作为信源，将携带了文字信息的莫尔斯码转换为脉冲信号发送出去；收报机作为信宿，将接收到的脉冲信号转换回莫尔斯码，如图 1-34 所示。

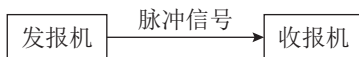


图 1-34 电报通信

## 二、信道

信道就是指信息的传输通道。信道对传输的信号是有要求的，信息必须转换成满足信道要求的信号才能在信道中传输，如图 1-35 所示。

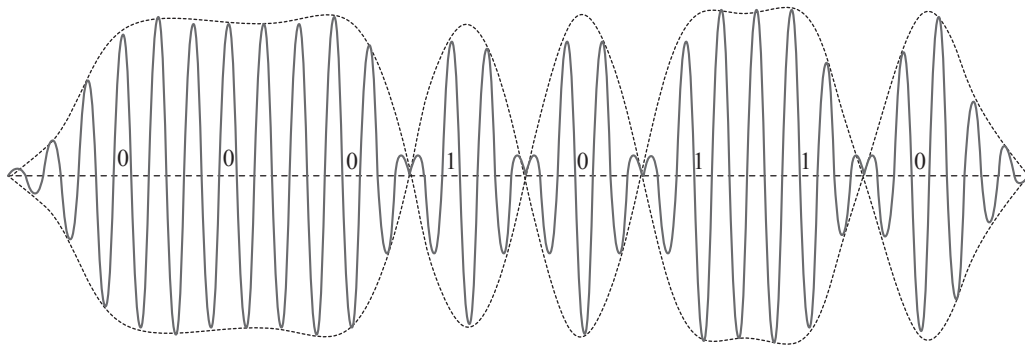


图 1-35 发送信号

信号通过信道传输时会出现衰减，而且信道上的干扰和噪声也会对信号产生影响，导致信号失真，如图 1-36 所示。

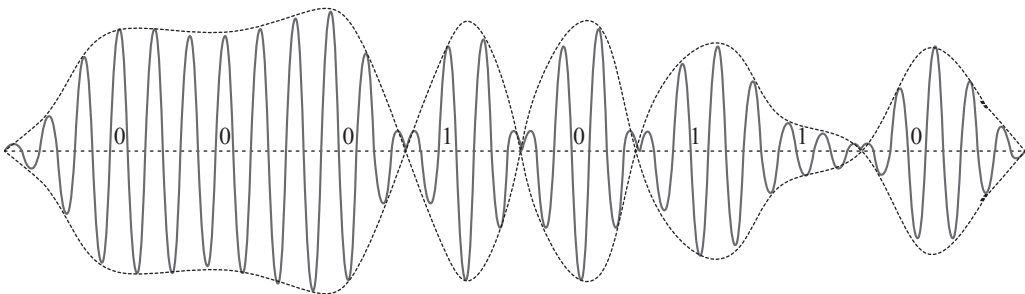


图 1-36 接收信号

信号失真严重时会导致误码。要想实现无误码的信息传输，通信系统设计时必须考虑检错和纠错处理。

## 三、发信机和收信机

### 1. 发信机

发信机对信源发出的信息进行必要的检错和纠错编码等处理后，将其转换成适合

在信道上传输的信号，发送到信道上，如图 1-37 所示。

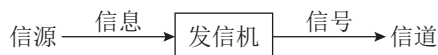


图 1-37 发信机

## 2. 收信机

收信机负责从信道上接收信号，进行检错和纠错处理后，将信息恢复出来发给信宿，如图 1-38 所示。

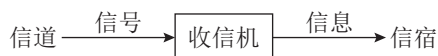


图 1-38 收信机

# 1.4 信道

信道的特性决定了信息在信道上的传输形式，而信道的特性又取决于传输媒介。按照传输媒介的不同，通信信道分为有线信道和无线信道。

## 一、有线信道

有线信道的传输媒介为电话线、网线和光纤等导线。

### 1. 电话线

电话线通常作为电话通信中用户侧的传输媒介，如图 1-39 所示。

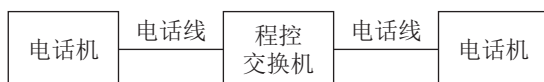


图 1-39 电话通信

常见的电话线如图 1-40 所示。



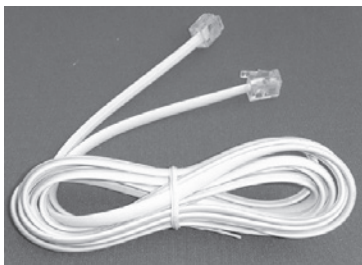


图 1-40 电话线

## 2. 网线

网线通常作为计算机之间通信的传输媒介。

计算机之间通过以太网交换机相连，计算机和以太网交换机之间的传输媒介一般采用网线，如图 1-41 所示。

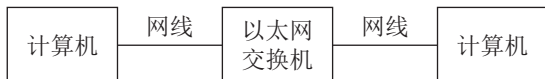


图 1-41 计算机通信

常见的网线如图 1-42 所示。



图 1-42 网线

## 3. 光纤

光纤通常作为光传输设备之间、通信设备之间的传输媒介。

LTE 基站和核心网设备 SGW 之间通过传输设备相连，基站和核心网设备 SGW 与传输设备之间采用的传输媒介一般都是光纤，如图 1-43 所示。

常见的光纤如图 1-44 所示。

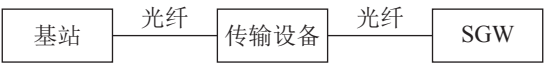


图 1-43 光纤通信



图 1-44 光纤

二、无线信道

无线信道的传输媒介为自由空间的电磁波。

电磁波按照波长的不同分为无线电波、光波、X射线、γ射线。电磁波谱图如图 1-45 所示。

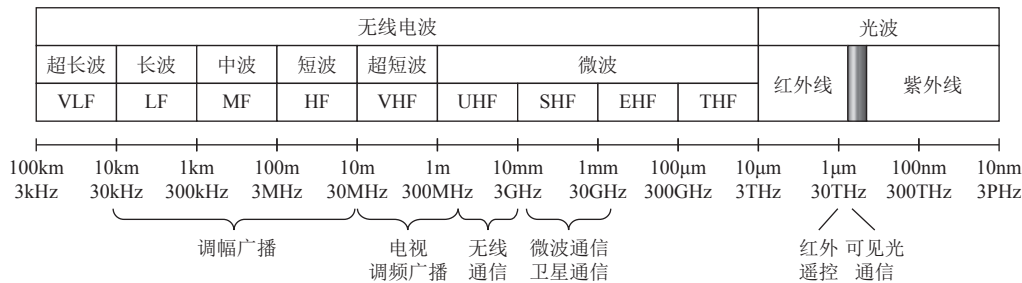


图 1-45 电磁波谱图

通信中主要用到了无线电波和光波。

1. 无线电波

无线电波按波长分为超长波、长波、中波、短波、超短波和微波。

1) 调幅广播

使用长波、中波或短波进行通信，如图 1-46 所示。

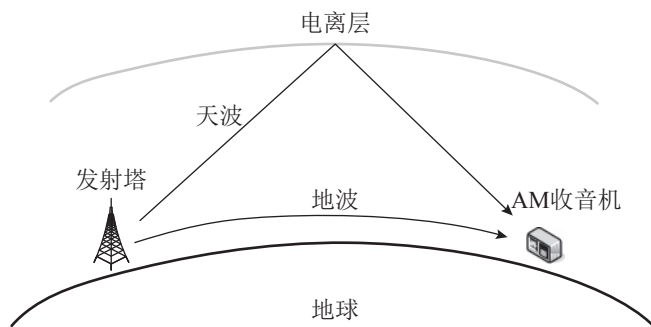


图 1-46 调幅广播

## 2) 调频广播

使用 VHF 频段 87~108MHz 的微波进行通信，如图 1-47 所示。

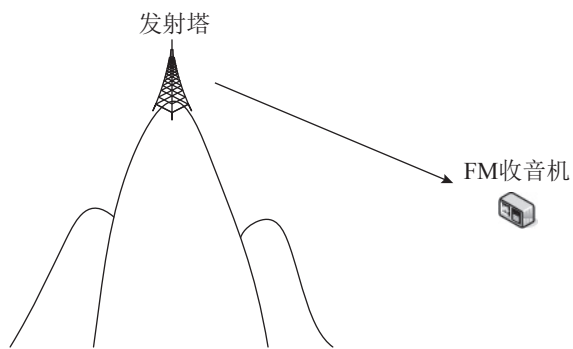


图 1-47 调频广播

## 3) 电视

使用 VHF 频段 48.5~92 MHz 和 167~223MHz、UHF 频段 223~870MHz 的微波进行通信，如图 1-48 所示。

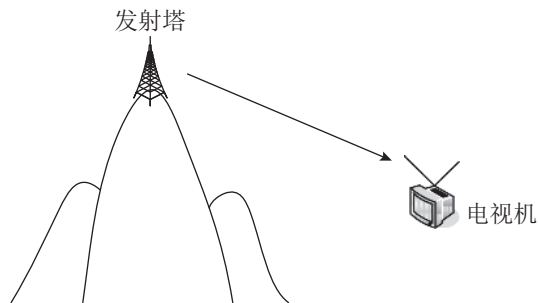


图 1-48 电视

## 4) 无线通信

Wi-Fi: 主要使用 UHF 频段的 2.4GHz 微波进行通信, 如图 1-49 所示。



图 1-49 Wi-Fi 通信

GSM: 主要使用 UHF 频段的 900MHz/1800MHz 微波进行通信, 如图 1-50 所示。



图 1-50 GSM 通信

LTE: 主要使用 UHF 频段的 2.5GHz 微波进行通信, 如图 1-51 所示。



图 1-51 LTE 通信

## 5) 微波和卫星通信

使用 SHF 和 EHF 频段的 7~38GHz 微波进行通信。微波接力通信如图 1-52 所示。

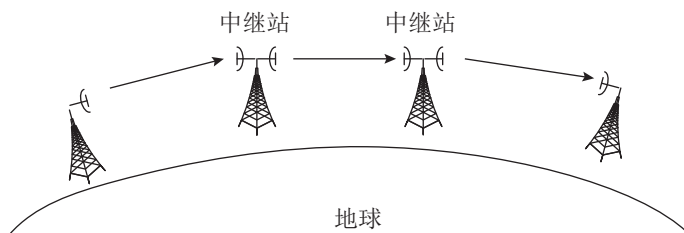


图 1-52 微波通信

卫星通信如图 1-53 所示。

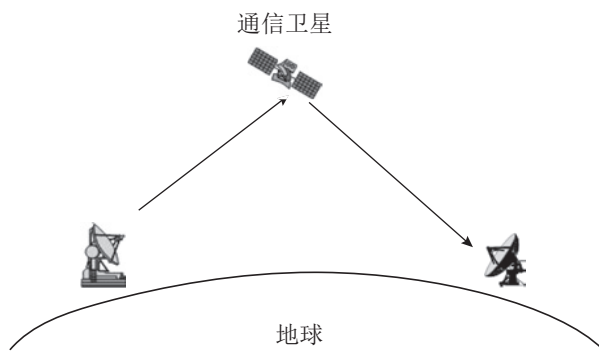


图 1-53 卫星通信

## 2. 光波

### 1) 可见光通信

使用光波中的可见光进行通信。

LiFi 就是一种提出不久的可见光通信技术，如图 1-54 所示。



图 1-54 LiFi 通信

### 2) 红外通信

红外遥控：使用波长为 940nm 的红外线进行通信，如图 1-55 所示。



图 1-55 红外遥控

## 1.5 信号变换

承载信息的信号在发信机中要经过哪些处理才能转换成适合信道传输的信号形式，到了接收端，收信机要做哪些处理才能将信息恢复出来呢？

发信机和收信机对信号所做的处理如图 1-56 所示。

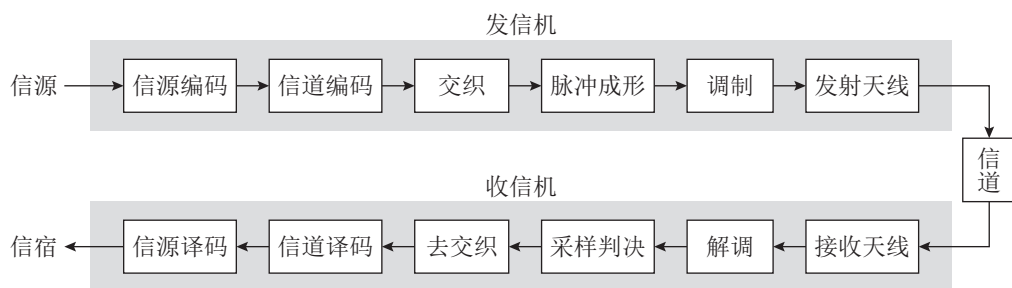


图 1-56 信号变换

发信机进行的信号处理：信源编码、信道编码、交织、脉冲成形、调制。

收信机进行的信号处理：解调、采样判决、去交织、信道译码和信源译码。

### 一、信源编码

对于模拟信源，一般先进行模 / 数转换，将模拟信号数字化，再进行压缩编码，尽量剔除冗余信息，减少对传输带宽的占用，如图 1-57 所示。

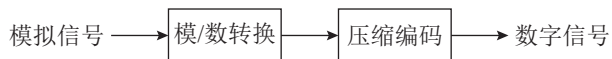


图 1-57 信源编码

例如，GSM 中先通过 PCM 编码将模拟语音信号转换成 104kbps 的二进制数字码流，再利用 RPE-LPT 算法对其进行压缩，最终输出 13kbps 的码流，压缩比为 8:1。

### 二、信道编码和交织

通过添加冗余信息，以便在接收端进行纠错处理，解决信道的噪声和干扰导致的误码问题，这就是信道编码。

一般的信道译码只能纠正零星的误码，对于连续的误码无能为力。

例如：

输入序列：11011，信道编码输出码元：11 01 01 00 01

通过信道传输，到达接收端时：

如果有 1 个码元出错：11 01 01 10 01，信道译码时可以检测并纠正错误，如图 1-58 所示。

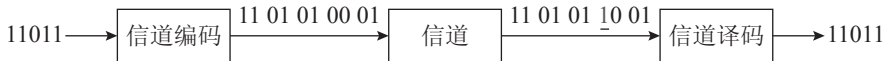


图 1-58 信道译码（1 个码元出错）

如果连续 3 个码元出错：11 01 01 11 11，信道译码会出错，如图 1-59 所示。



图 1-59 信道译码（连续 3 个码元出错）

为了解决连续误码问题，需要将信道编码之后的数据顺序按照一定规律打乱，这就是交织。到了接收端，在信道译码之前先将数据顺序复原，这就是去交织，这样连续的误码到了接收端就变成了零星的误码，信道译码就可以正确纠错了，如图 1-60 所示。

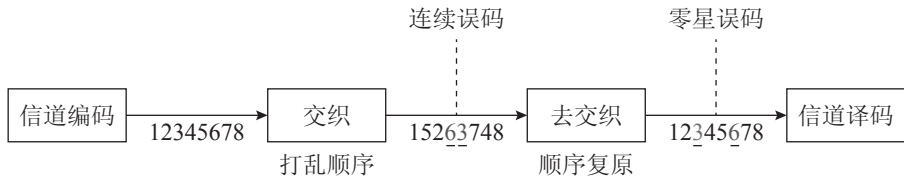


图 1-60 交织和去交织

### 三、脉冲成形

数字信号要想在信道中传输，必须先转换成合适的脉冲波形，这就是脉冲成形。

最容易想到的脉冲波形就是矩形脉冲了，其波形如图 1-61 所示。

数字信号 00010110 对应的连续多个矩形脉冲波形，如图 1-62 所示。



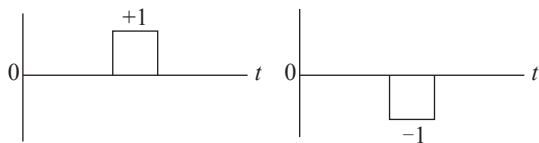


图 1-61 矩形脉冲波形

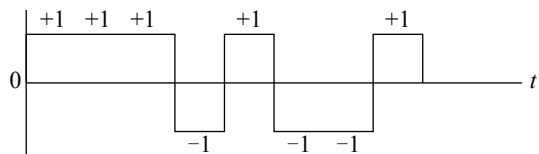


图 1-62 连续多个矩形脉冲波形

## 四、调制

将信息承载到满足信道要求的高频载波信号上的过程就是调制。

为什么要对信号进行调制呢？

### 1. 无线通信

无线通信是用空间辐射的方式传送信号的，由电磁波理论可以知道：天线尺寸为被辐射信号波长的十分之一或更大些，信号才能被有效地辐射。

以语音信号为例。人能听见的声音频率范围为  $20\text{Hz} \sim 20\text{kHz}$ ，假定我们要以无线通信方式直接发送一个频率为  $10\text{kHz}$  的单音信号出去。

该单音信号的波长为：

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10 \times 10^3 / \text{s}} = 30\text{km}$$

其中，

$c$ ：光速，一般认为电磁波在空间的传播速度等于光速。

$f$ ：信号的频率。

如果不经调制直接在空间发送这个单音信号，需要的天线尺寸至少要几公里，显而易见，实际上根本不可能制造出这样的天线。

通过调制将信号频谱搬移到较高的频率范围，如图 1-63 所示，这样信号就很容易被电磁波形式辐射出去。

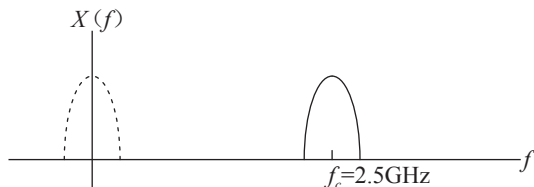


图 1-63 信号频谱搬移

另外，还可以通过调制把多路信号频谱搬移到不同的频率范围内，实现多路频分复用（FDM），如图 1-64 所示。

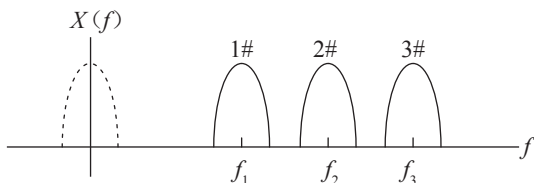


图 1-64 多路频分复用

## 2. 有线通信

与无线通信的原理类似，有线通信要通过调制将信号频谱搬移到合适的频率范围内，以满足有线信道的频率要求。

以电话通信为例。

电话线允许频率低于 3 400Hz 的信号直接通过。发送端的麦克风进行声电转换，只要转换后的音频信号最高频率不超过 3 400Hz，就可以通过电话线传送给接收端，由喇叭进行电声转换把话音恢复出来，如图 1-65 所示。

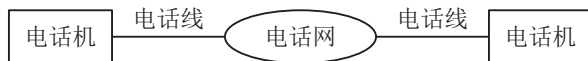


图 1-65 电话之间进行语音通信

要想通过电话线传输 010010111 这样的二进制数据怎么办？在发送端，利用调制器将数据调制到音频载波上，通过电话线传送给接收端，由解调器将调制在音频载波上的数据恢复出来，如图 1-66 所示。

但这样做存在一个问题：打电话时不能传数据，传数据时不能打电话。

有没有办法可以做到语音和数据两不误？答案是：可以利用电话线的低频部分传

输话音，高频部分传输数据，如图 1-67 所示。

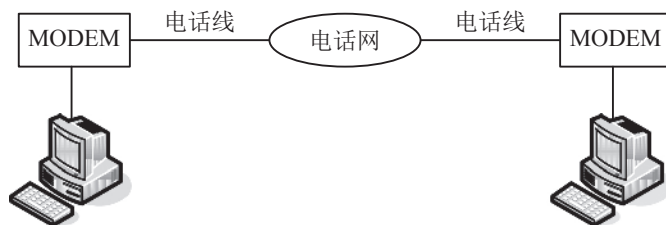


图 1-66 计算机之间进行数据通信

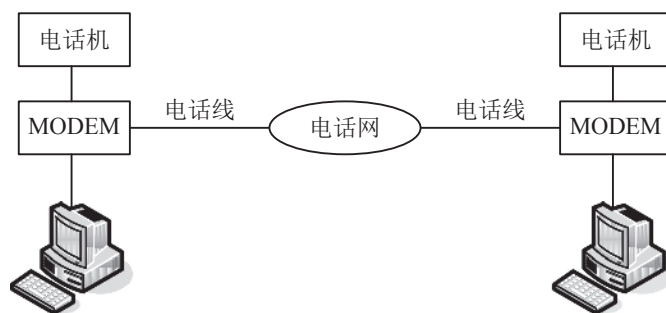


图 1-67 语音和数据通信同时进行

实际上 ADSL 就是这么做的，其频谱分配情况如图 1-68 所示。

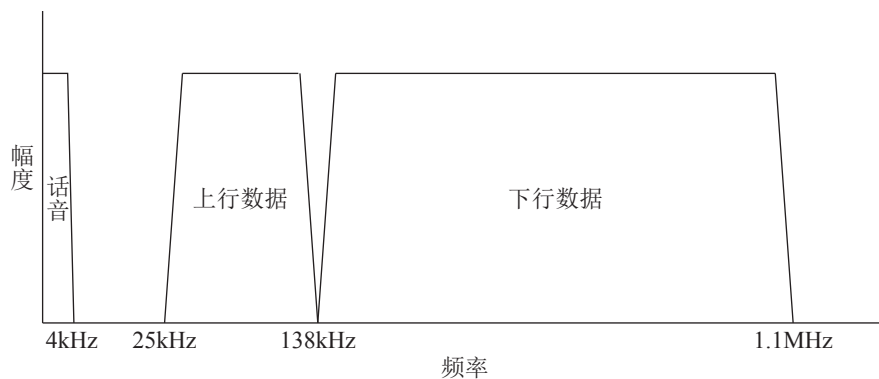


图 1-68 ADSL 频谱分配

0 ~ 4kHz: 用于传输话音。

25 ~ 138kHz: 用于传输上行数据。

138kHz ~ 1.1MHz: 用传输下行数据。

## 五、天线技术

无线通信系统中，调制得到的已调信号要转换成电磁波才能在空间中进行传输。

### 1. 电磁波

电磁波是由同相振荡且互相垂直的电场与磁场在空间中以波的形式移动，其传播方向垂直于电场与磁场构成的平面，可以有效地传递能量，如图 1-69 所示。

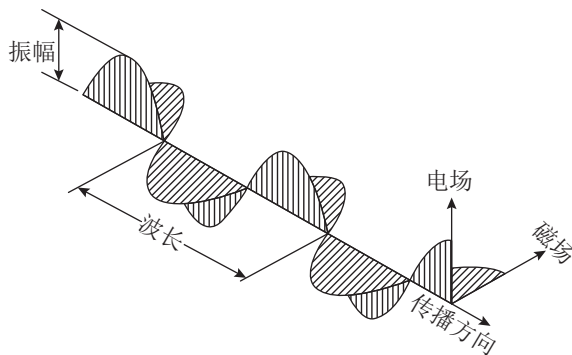


图 1-69 电磁波的传播

#### 1) 传播速度

电磁波的传播速度  $v$  与传输媒介有关：

真空中：电磁波的传播速度等于光速，即 30 万千米 / 秒。

空气中：电磁波的传播速度略小于光速，不过一般都按光速来计算。

#### 2) 波长

在传播速度一定的前提下，电磁波的波长与频率成反比：

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

其中，

$v$ ：电磁波的传播速度。

$f$ ：电磁波的频率，等于已调信号的频率。

以 Wi-Fi 所用的 2.4GHz 信号为例，对应的电磁波波长为：

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{2.4 \text{ GHz}} = 0.125 \text{ m} = 12.5 \text{ cm}$$

#### 3) 振幅

电磁波的振幅会随着传播距离的增加而衰减。

衰减快慢与电磁波的频率有关：在传播距离相同的情况下，频率越高，振幅衰减越快。

换句话说：频率越高，覆盖性能越差。以 GSM 为例，900MHz 频段的覆盖性能就比 1 800MHz 频段的覆盖性能要好，如图 1-70 所示。

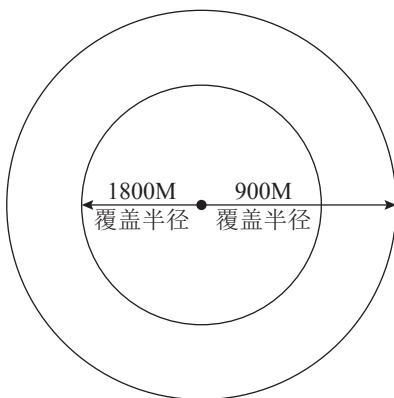


图 1-70 不同频率信号的覆盖半径

## 2. 发射天线

发射天线负责将调制器发来的电信号转换为电磁波发射出去，如图 1-71 所示。



图 1-71 发射天线的功能

## 3. 接收天线

接收天线负责将接收到的电磁波转换回电信号发送给解调器，如图 1-72 所示。

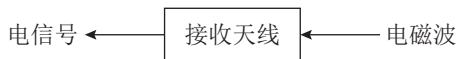


图 1-72 接收天线的功能

# 1.6 复用和多址技术

一条信道上只传输一路数据的情况下，信源发出的信号经过信源编码、信道编码

和交织、脉冲成形、调制之后就可以发送到信道上进行传输了。如果需要在一条信道上同时传输多路数据，还要用到复用和多址技术。

## 一、复用技术

复用技术是指一条信道同时传输多路数据的技术，如图 1-73 所示。



图 1-73 复用技术

TDM(时分复用)、FDM(频分复用)、CDM(码分复用)是最常见的 3 种复用技术。

前面所讲的 ADSL，实际上就用到了频分复用技术，语音和数据采用不同频率的信号传输，实现了语音信号和数据信号在一条电话线上并行传输。

## 二、多址技术

多址技术是指一条信道同时传输多个用户数据的技术，如图 1-74 所示。



图 1-74 多址技术

TDMA(时分多址)、FDMA(频分多址)、CDMA(码分多址)是最常见的 3 种多址技术。

一个用户对应一路数据，多个用户就对应多路数据，因此多址技术是以多路复用技术为基础的。

除此之外，多址技术还会关注信道资源的分配算法。例如，CDMA 中用到了 Walsh 码，会关注 Walsh 码的分配算法。

# 第2章

## 信号与频谱

### 2.1 概述

通过第1章的介绍可以知道：信息传输的过程就是信号变换和处理的过程。如何观察这个过程中信号发生了什么变化？一种方法是在时域观察信号波形的变化，另一种方法是在频域观察信号频谱的变化。

信号的波形很直观、好理解，信号的频谱如何理解呢？

中学物理中学过光的色散：白光通过三棱镜分解成红、橙、黄、绿、青、蓝、紫七种颜色的单色光，如图2-1所示。

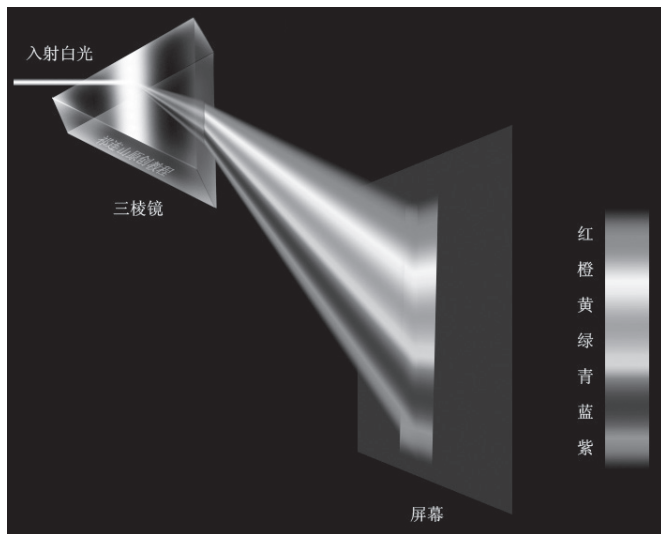


图 2-1 光的色散和光谱

显示在屏幕上的七彩光带，被称为光谱。和光分解成单色光类似，任何复杂的信



号都可以分解成一系列不同频率的基本信号之和，一般用频谱来反映构成信号的所有频率成分。

最常见的基本信号非正弦信号莫属。

## 2.2 正弦信号

正弦信号和余弦信号仅在相位上相差 $\frac{\pi}{2}$ ，因此经常统称为正弦信号。

### 一、正弦信号的波形

#### 1. 正弦信号

$s(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$ ，其中  $A$  是幅度， $f$  是频率， $\varphi$  是初相，如图 2-2 所示。

$$s(t) = A \sin(2\pi ft + \varphi)$$

$\uparrow$                        $\downarrow$                        $\uparrow$   
 幅度                      频率                      初相

图 2-2 正弦信号表达式

假定： $A=1$ ， $f=1\text{Hz}$ ， $\varphi=0$

则： $s(t)=\sin 2\pi ft$ ，其波形如图 2-3 所示。

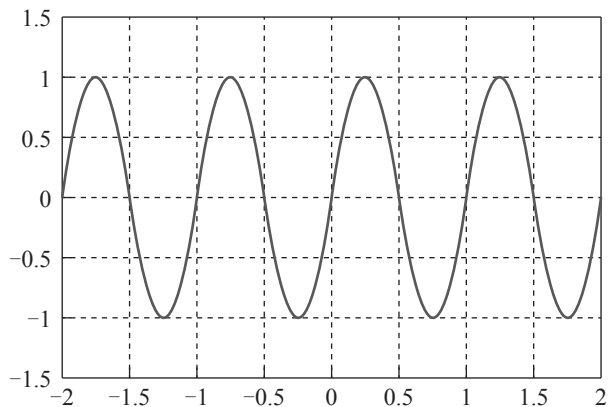


图 2-3 正弦信号波形

## 2. 余弦信号

$s(t)=A\cos(2\pi ft+\varphi)$ , 其中  $A$  是幅度,  $f$  是频率,  $\varphi$  是初相, 如图 2-4 所示。

$$s(t) = A \cos(2\pi ft + \varphi)$$

↑ 幅度      ↑ 初相  
↓ 频率

图 2-4 余弦信号表达式

假定:  $A=1$ ,  $f=1\text{Hz}$ ,  $\varphi=0$

则:  $s(t)=\cos 2\pi ft$ , 其波形如图 2-5 所示。

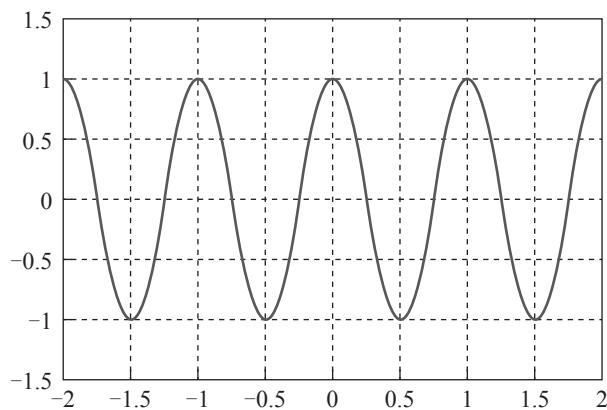


图 2-5 余弦信号波形

## 二、正弦信号的特性

### 1. 正弦信号的积分特性

正弦信号有一些非常好用的性质, 其中一个就是积分特性。

对一个正弦信号做积分, 当积分区间取正弦信号周期的整数倍时, 积分结果为零。

正弦信号:  $s(t)=A\sin(2\pi f_0 t+\varphi)$

在整数个周期做积分:  $\int_{nT_0} s(t)dt = A \int_{nT_0} \sin(2\pi f_0 t + \varphi)dt = 0$

其中,

$n$  是整数;

$T_0$  是正弦信号的周期:  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ 。

根据积分的几何意义: 信号波形与时间轴的积分区间部分围出一个封闭图形, 对信号求积分就是求这个封闭图形面积的代数和。上述结论显然是成立的, 由正弦信号的周期性和对称性直接就可以得到, 如图 2-6 所示。

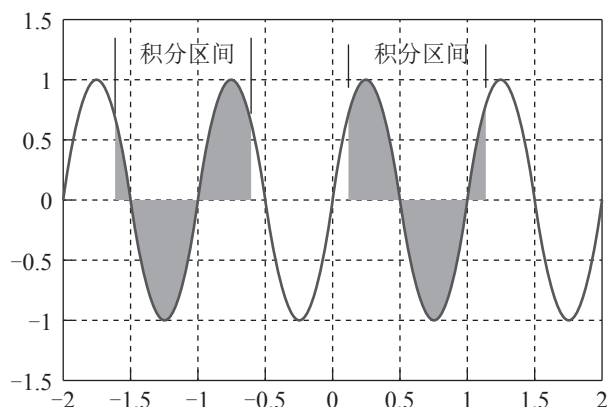


图 2-6 正弦信号的积分特性

## 2. 正弦信号的正交特性

正弦信号的另外一个非常好用的性质就是正交特性: 正弦信号集合  $\{\sin 2\pi f_0 t, \cos 2\pi f_0 t, \sin 4\pi f_0 t, \cos 4\pi f_0 t, \sin 6\pi f_0 t, \cos 6\pi f_0 t, \dots\}$  由基波  $\{\sin 2\pi f_0 t, \cos 2\pi f_0 t\}$  和二次谐波  $\{\sin 4\pi f_0 t, \cos 4\pi f_0 t\}$  等各次谐波组成。

在这个正弦信号集合中:

- 任意 2 个正弦信号的乘积在基波周期内的积分结果都为 0。

$$\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0 t \sin 2n\pi f_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{T_0} \cos 2m\pi f_0 t \cos 2n\pi f_0 t dt = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0 t \cos 2n\pi f_0 t dt = 0$$

- 任意 1 个正弦信号与自身的乘积在基波周期内的积分结果都为  $\frac{T_0}{2}$ 。

$$\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0 t \sin 2n\pi f_0 t dt = \frac{T_0}{2} \quad (m = n)$$

$$\int_{T_0} \cos 2m\pi f_0 t \cos 2n\pi f_0 t dt = \frac{T_0}{2} \quad (m = n)$$

证明:

由三角函数的和差化积公式:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos \alpha \cos \beta-\sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos \alpha \cos \beta+\sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin \alpha \cos \beta+\cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin \alpha \cos \beta-\cos \alpha \sin \beta$$

很容易推导出三角函数的积化和差公式:

$$\sin \alpha \sin \beta=\frac{1}{2}[\cos (\alpha-\beta)-\cos (\alpha+\beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta=\frac{1}{2}[\cos (\alpha-\beta)+\cos (\alpha+\beta)]$$

$$\sin \alpha \cos \beta=\frac{1}{2}[\sin (\alpha-\beta)+\sin (\alpha+\beta)]$$

将  $\alpha=2m\pi f_0t$ ,  $\beta=2n\pi f_0t$  代入积化和差公式, 得

$$\sin 2m\pi f_0t \sin 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[\cos 2(m-n)\pi f_0t-\cos 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-1)$$

$$\cos 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[\cos 2(m-n)\pi f_0t+\cos 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-2)$$

$$\sin 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[\sin 2(m-n)\pi f_0t+\sin 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-3)$$

当  $m \neq n$  时, 分别对式 (2-1)、(2-2)、(2-3) 在基波周期内进行积分, 由于  $m-n$  次谐波分量和  $m+n$  次谐波分量的积分结果都是 0, 因此得:

$$\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0t \sin 2n\pi f_0t = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{T_0} \cos 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t = 0 \quad (m \neq n)$$

$$\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t = 0 \quad (m \neq n)$$

当  $m=n$  时, 式 (2-1)、(2-2)、(2-3) 三个式子化为:

$$\sin 2m\pi f_0t \sin 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[1-\cos 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-4)$$

$$\cos 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[1+\cos 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-5)$$

$$\sin 2m\pi f_0t \cos 2n\pi f_0t=\frac{1}{2}[\sin 2(m+n)\pi f_0t] \quad (2-6)$$

分别对式 (2-4)、(2-5)、(2-6) 在基波周期内进行积分, 由于  $m+n$  次谐波分量的积分结果都是 0, 所以得:

$$\begin{aligned}\int_{T_0} \sin 2m\pi f_0 t \sin 2n\pi f_0 t &= \frac{T_0}{2} \quad (m=n) \\ \int_{T_0} \cos 2m\pi f_0 t \cos 2n\pi f_0 t &= \frac{T_0}{2} \quad (m=n) \\ \int_{T_0} \sin 2m\pi f_0 t \cos 2n\pi f_0 t &= 0 \quad (m=n)\end{aligned}$$

至此, 正弦信号的正交特性证明完毕。

## 2.3 复指数信号

使用正弦信号作为基本信号进行频谱分析时会涉及三角函数运算, 比较烦琐。

欧拉发现欧拉公式之后, 人们开始注意到复指数信号。复指数信号作为基本信号进行频谱分析时使用复指数运算, 比较简洁, 很快取代了正弦信号的基本信号地位。

### 一、欧拉公式

著名的欧拉公式:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j \sin\theta$$

#### 1. 欧拉公式的几何意义

$\cos\theta + j \sin\theta$  是一个复数, 实部为  $\cos\theta$ , 虚部为  $\sin\theta$ , 在复平面上对应单位圆上的一个点。根据欧拉公式, 这个点可以用复指数  $e^{j\theta}$  表示, 如图 2-7 所示。

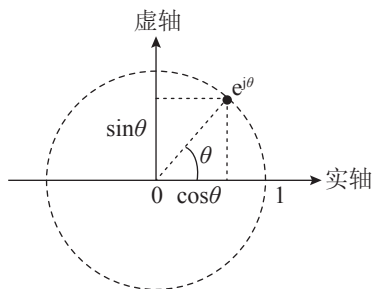


图 2-7 欧拉公式的几何意义

## 2. 欧拉公式的证明

下面利用泰勒级数展开对欧拉公式进行证明。

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

令  $z=jx$ , 则

$$\begin{aligned} e^{jx} &= 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \frac{(jx)^7}{7!} \dots \\ &= 1 + jx - \frac{x^2}{2!} - j\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + j\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos x + j \sin x \end{aligned}$$

推导过程中用到了:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

证明完毕。

## 二、如何理解复数

欧拉公式涉及复数, 如何理解复数呢?

### 1. 复数的几何意义

为了便于理解, 通常用复平面上的向量来表示复数。

复指数  $e^{j\theta}$  对应的向量: 始端为原点, 长度为 1, 辐角为  $\theta$ , 如图 2-8 所示。

引入向量之后, 复数与复指数  $e^{j\theta}$  相乘就可以用向量旋转来理解。

复数:  $z=r(\cos \varphi+j \sin \varphi)$

直接套用欧拉公式, 可得:  $z=re^{j\varphi}$

复数  $z$  与复指数  $e^{j\theta}$  相乘:

$$ze^{j\theta}=re^{j\varphi}e^{j\theta}=re^{j(\varphi+\theta)}$$

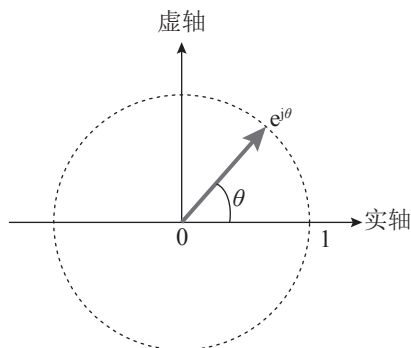


图 2-8 复指数信号的向量表示

也就是说：

复数与复指数  $e^{j\theta}$  相乘，相当于复数对应的向量旋转角度  $\theta$ ：

$\theta > 0$  逆时针旋转

$\theta < 0$  顺时针旋转

如图 2-9 所示。

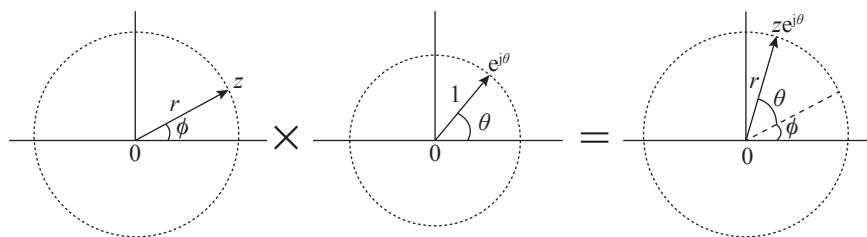


图 2-9 复数与复指数相乘的向量表示

## 2. 如何理解虚数

复指数  $e^{j\theta}$  中引入了虚数  $j$ ，如何理解这个虚数  $j$  呢？

讲到这里也许有人会问：数学中的虚数一般用“ $i$ ”表示，为何物理中一般用“ $j$ ”表示呢？这是因为物理中经常用“ $i$ ”表示电流。

关于虚数，如果追溯起来，在高中的时候我们就接触过了。具体说来，应该是在解一元三次方程的时候涉及的。

已知： $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

求： $x$

解：



$$\text{由: } x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{得: } x^2(x-2) + x-2 = (x-2)(x^2+1) = 0$$

$$\text{由: } x-2=0$$

$$\text{得: } x=2 \text{ (实根)}$$

$$\text{由: } x^2+1=0, x^2=-1$$

$$\text{得: } x=\pm i \text{ (虚根)}$$

感觉高中课本纯粹就是为了给  $x^2=-1$  一个解，才定义了虚数  $i$ ，其平方为  $-1$ ，至于虚数  $i$  有什么物理意义就不得而知了。

按一般的理解：一个数和它自己相乘，应该得到一个正数才对，例如： $2 \times 2=4$ ， $(-1) \times (-1)=1$ 。为什么虚数  $i$  和自己相乘会得  $-1$  呢？

虚数刚被提出时，也曾经困扰了很多数学家，被大家认为是“虚无缥缈的数”，直至欧拉发现“欧拉公式”后，人们才对虚数的物理意义有了清晰的认识。

下面我们来看看如何利用欧拉公式理解虚数。

在欧拉公式中，令  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ，得：

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2} = j$$

$$\text{即: } j = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

复数与  $j$  相乘，就是与复指数  $e^{j\frac{\pi}{2}}$  相乘，相当于复数对应的向量逆时针旋转  $90^\circ$ 。

也就是说，复数与  $j$  相乘的过程，也就是向量旋转的过程，如图 2-10 所示。

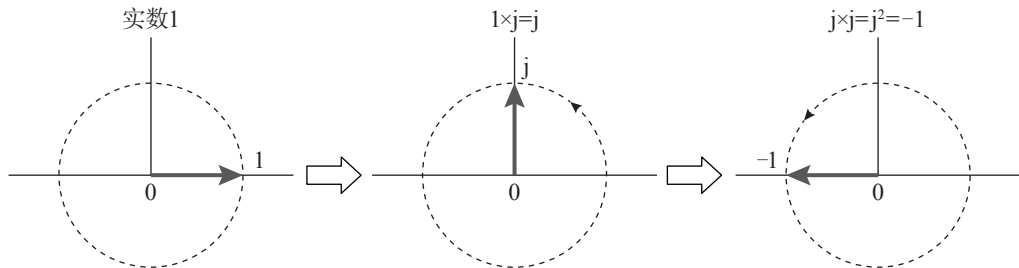


图 2-10 虚数的平方等于  $-1$  的向量表示

根据前面的分析，可以得到：

实数  $1$  对应的向量逆时针旋转  $90^\circ$ ，得到虚数  $j$ ，即： $1 \times j = j$

虚数  $j$  对应的向量再逆时针旋转  $90^\circ$ ，得到实数  $-1$ ，即： $j \times j = j^2 = -1$

至此，我们解释清楚了为什么虚数  $j$  的平方等于  $-1$ 。

### 三、如何理解复信号

当  $\theta$  以角速度  $\omega_0$  随时间变化时，复指数  $e^{j\theta}$  就成了复指数信号。

复指数信号： $s(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$ ，其中  $A$  是幅度， $\omega_0$  是角速度， $\varphi$  是初相，如图 2-11 所示。

$$\begin{array}{c}
 \text{角速度} \\
 \Downarrow \\
 s(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)} \\
 \Uparrow \quad \Uparrow \\
 \text{幅度} \quad \text{初相}
 \end{array}$$

图 2-11 复指数信号表达式

如何理解这个复指数信号呢？

#### 1. 复指数信号的几何意义

复平面上的一个长度为  $A$  的旋转向量，始端位于原点，从角度  $\varphi$  开始，以角速度  $\omega_0$  围绕原点旋转，其末端在复平面上的轨迹就是复指数信号  $s(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$ 。

0 时刻：复指数信号  $s(0)=Ae^{j\varphi}$ ，对应的向量如图 2-12 所示。

$t$  时刻：复指数信号  $s(t)=Ae^{j(\omega_0 t+\varphi)}$ ，对应的向量如图 2-13 所示。

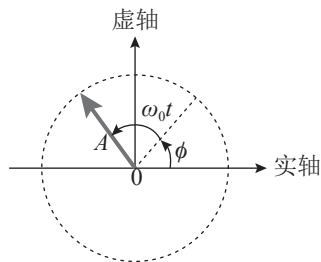
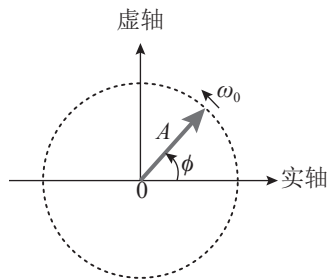


图 2-12 复指数信号对应的旋转向量（0 时刻） 图 2-13 复指数信号对应的旋转向量（ $t$  时刻）

假定： $A=1$ ， $\omega_0=2\pi$ ， $\varphi=0$

则： $s(t)=e^{j2\pi t}$ ，这个复指数信号随时间变化的轨迹如图 2-14 所示。

这个复指数信号在复平面上的投影是个单位圆，如图 2-15 所示。

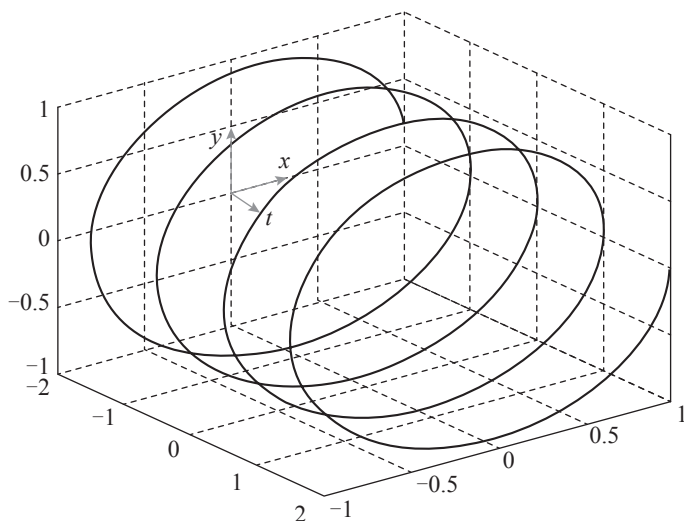


图 2-14 复指数信号随时间的变化轨迹

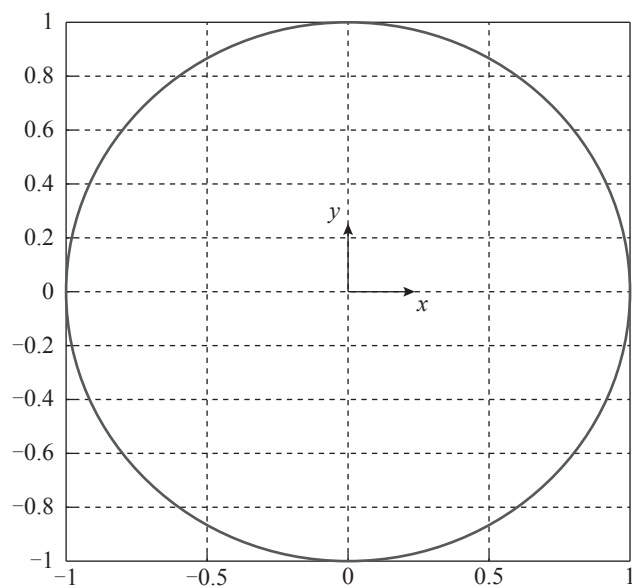


图 2-15 复指数信号在复平面上的投影

这个复指数信号在实轴 ( $x$  轴) 上的投影随时间变化的曲线如图 2-16 所示。  
 这个复指数信号在虚轴 ( $y$  轴) 上的投影随时间变化的曲线如图 2-17 所示。

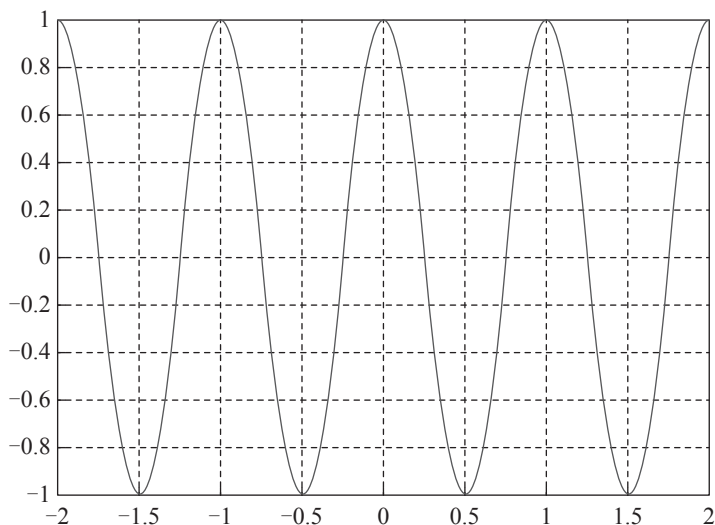


图 2-16 复指数信号在实轴上的投影随时间变化的曲线

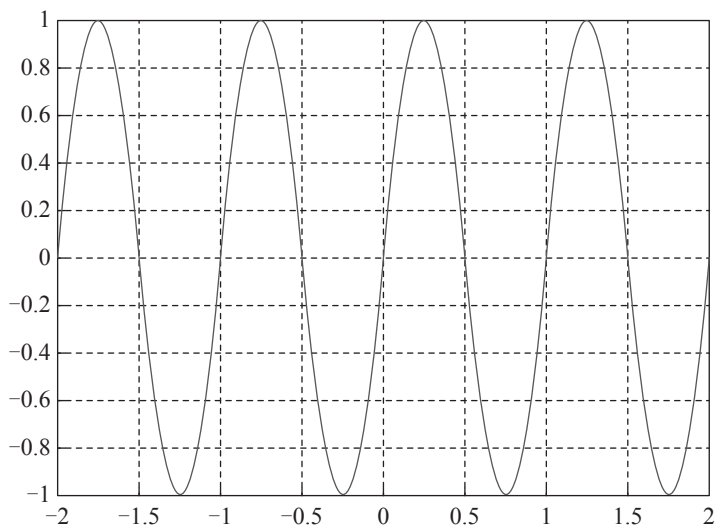


图 2-17 复指数信号在虚轴上的投影随时间变化的曲线

由复指数信号在复平面上的投影是个圆，很容易让人想起物理中学过的李萨育图形。

## 2. 李萨育图形

使用互相成谐波频率关系的两个信号  $x(t)$  和  $y(t)$  分别作为  $X$  和  $Y$  偏转信号送入示波器，如图 2-18 所示。

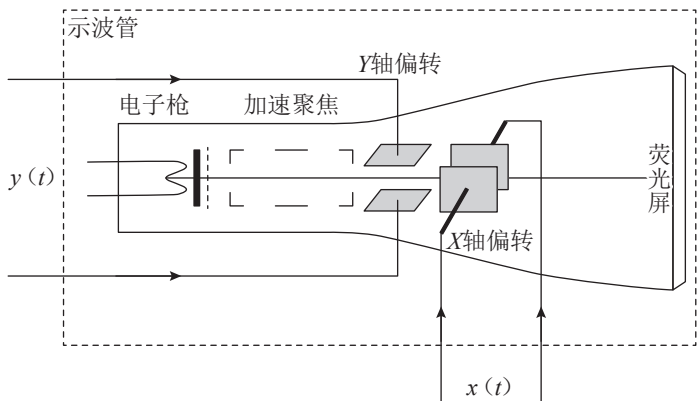


图 2-18 示波器工作原理

这两个信号分别在  $X$  轴、 $Y$  轴方向同时作用于电子束而在荧光屏上描绘出稳定的图形，这些稳定的图形就叫“李萨育图形”，如图 2-19 所示。

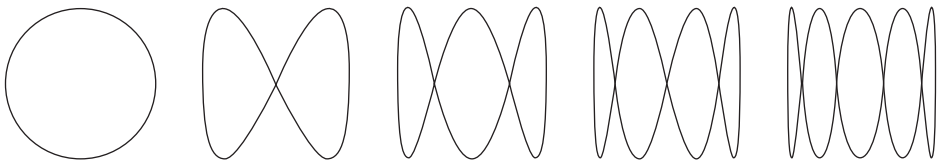







图 2-19 李萨育图形

各种李萨育图形对应的  $X$  轴和  $Y$  轴输入信号、电子束运动轨迹函数如表 2-1 所示。

表 2-1 示波器输入信号和电子束运动轨迹函数

李萨育图形	$X$ 轴输入信号 $x(t)$	$Y$ 轴输入信号 $y(t)$	电子束运动轨迹函数 $f(t)$
	$\cos(2\pi ft)$	$\sin(2\pi ft)$	$\cos(2\pi ft)+j \sin(2\pi ft)$
	$\cos(2\pi ft)$	$\sin(4\pi ft)$	$\cos(2\pi ft)+j \sin(4\pi ft)$
	$\cos(2\pi ft)$	$\sin(6\pi ft)$	$\cos(2\pi ft)+j \sin(6\pi ft)$
	$\cos(2\pi ft)$	$\sin(8\pi ft)$	$\cos(2\pi ft)+j \sin(8\pi ft)$
	$\cos(2\pi ft)$	$\sin(10\pi ft)$	$\cos(2\pi ft)+j \sin(10\pi ft)$

表中第一个李萨育图形实质就是复指数信号  $e^{j2\pi ft}$  在复平面上的投影。

再来看一下第二个李萨育图形，其实质就是复信号  $f(t)=\cos(2\pi ft)+j \sin(4\pi ft)$  在复平面上的投影，如图 2-20 所示。

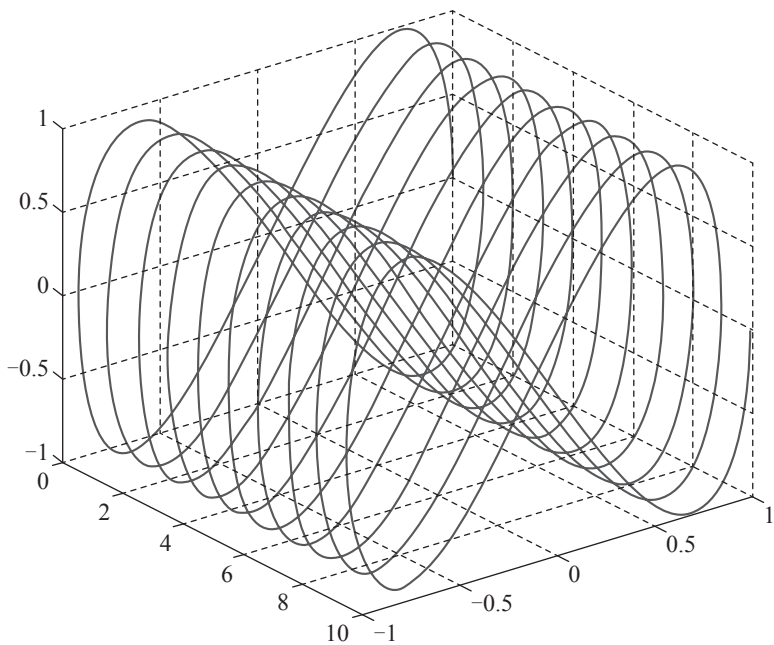


图 2-20 一个复信号的三维波形

### 3. 什么是复信号

通过上面的讲解，可以发现：

复信号的本质就是并行传输的 2 路实信号。之所以被称为复信号，只是因为这个信号可以用复数来表示而已。

假定： $x(t)$  和  $y(t)$  是并行传输的 2 路实信号。

这两路实信号用一个复信号来表示就是：

$$f(t)=x(t)+jy(t)$$

需要注意的是：

引入复信号只是为了便于描述和处理信号而已，实际通信系统中都是并行传输 2 路实信号，并没有传输虚数  $j$ 。

如图 2-21 所示。

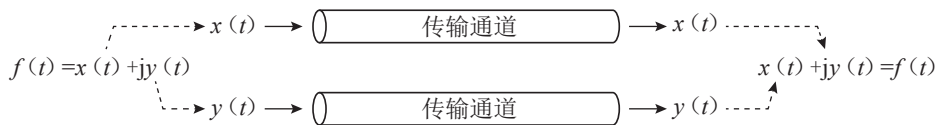


图 2-21 复信号的传输

## 四、复指数信号的特性

### 1. 复指数信号的积分特性

复指数信号有一些很好用的性质，积分特性就是其中一个：

对一个复指数信号做积分，当积分区间取复指数信号周期的整数倍时，积分结果为零。

复指数信号： $s(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \varphi)}$

在整数个周期内做积分：

$$\int_{nT_0} s(t) dt = A \int_{nT_0} e^{j(\omega_0 t + \varphi)} dt = A \int_{nT_0} [\cos(\omega_0 t + \varphi) + j \sin(\omega_0 t + \varphi)] dt$$

根据正弦信号的积分特性，上式的积分结果为 0，即

$$\int_{nT_0} s(t) dt = A \int_{nT_0} e^{j(\omega_0 t + \varphi)} dt = 0$$

其中，

$n$  是整数；

$T_0$  是复指数信号的周期： $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ 。

### 2. 复指数信号的正交特性

复指数信号的另外一个很好用的性质是正交特性：

复指数信号集合  $\{e^{j\omega_0 t}, e^{j2\omega_0 t}, e^{j3\omega_0 t}, \dots\}$  由基波  $e^{j\omega_0 t}$  和二次谐波  $e^{j2\omega_0 t}$  等各次谐波组成。

在这个复指数信号集合中：

- 任意 1 个复指数信号与另 1 个复指数信号共轭的乘积在基波周期内的积分结果都为 0。

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = 0 \quad (m \neq n)$$

- 任意 1 个复指数信号与自身共轭的乘积在基波周期内的积分结果都为  $T_0$ 。

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = T_0 \quad (m=n)$$

证明:

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_{T_0} [\cos(m-n)\omega_0 t + j \sin(m-n)\omega_0 t] dt$$

当  $m \neq n$  时, 根据正弦信号的积分特性, 上式的积分结果为 0

$$\text{即: } \int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = 0 \quad (m \neq n)$$

当  $m=n$  时, 余弦项变为 1, 正弦项变为 0, 得:

$$\int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{T_0} e^{j(m-n)\omega_0 t} dt = \int_{T_0} [1] dt = T_0$$

$$\text{即: } \int_{T_0} e^{jm\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt = T_0 \quad (m=n)$$

证明完毕。

## 2.4 信号的相和相位

### 一、概述

前面讲解正弦波时, 提到了正弦波的表达式:

$$s(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi)$$

并指出其中  $\varphi$  是初相。

其实还有一点没有讲, 那就是正弦波在  $t$  时刻的相位:

$$\phi = 2\pi f t + \varphi$$

假设:

$$A=1, \quad \varphi=\pi/4, \quad f=1\text{Hz}$$

则该正弦波的表达式为:

$$s(t) = \sin(2\pi t + \pi/4)$$

该正弦波的波形如图 2-22 所示。

波形画出来很容易, 可是如何理解相位和初相呢? 如何从这张波形图中看出初相是多少, 某时刻的相位又是多少呢?



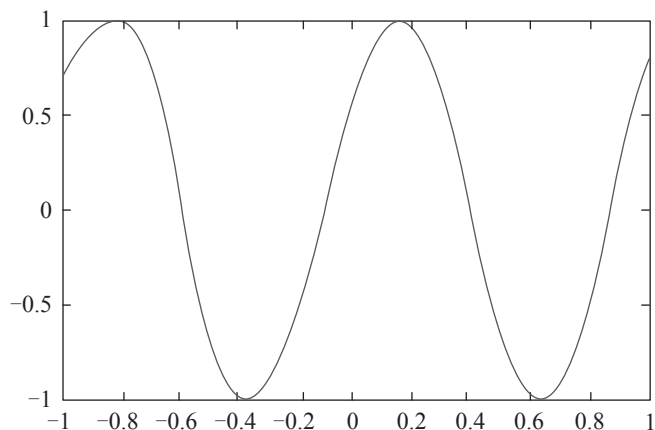


图 2-22 正弦波的波形

下面先从英文单词 Phase 讲起。

## 二、什么是Phase

Phase 这个英文单词在物理学中有以下两种含义。

第一种：相，有规律的循环变化周期中的一个特定现象或状态。

a particular appearance or state in a regularly recurring cycle of changes.

第二种：相位，从指定参考点开始测量的完整周期已经过去的部分，通常用角表示，所以又被称为相角。

The fraction of a complete cycle elapsed as measured from a specified reference point and often expressed as an angle.

由此可见，虽然相和相位在英文中对应同一个单词，在中文中也只差一个字，但是它们的含义是完全不同的。

## 三、月亮的相和相位

下面以月亮为例，来看看什么是“相”和“相位”。

### 1. 月亮的相

月相是天文学中对于地球上看到的月球被太阳照亮部分的称呼。月球绕地球运

动，使太阳、地球、月球三者的相对位置在一个月中有规律地周期变动，因此月相也就有了周期性的变化，如图 2-23 所示。



图 2-23 月相的变化

注意：月相不是由于地球遮住太阳所造成的（这是月食），而是由于我们在地球上只能看到月球上被太阳照到发光的那一部分所造成的，其阴影部分是月球自己的阴暗面。

月球位于特定位置的月相有专门的名称，如图 2-24 所示。

## 2. 月亮的相位

根据前面的定义，相位是从指定参考点开始测量的完整周期已经过去部分。

月相周期为 30 天，特定位置月亮的相位可以用月历来表示。我国古代把月亮称为太阴，因此月历又被称为阴历。阴历初一到三十的月相图如图 2-25 所示。

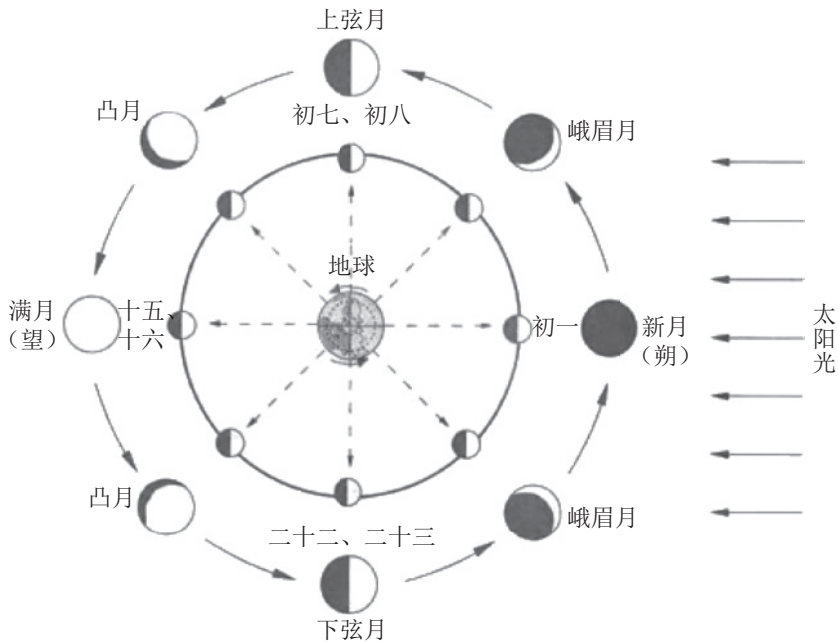


图 2-24 月球位于特定位置的月相名称

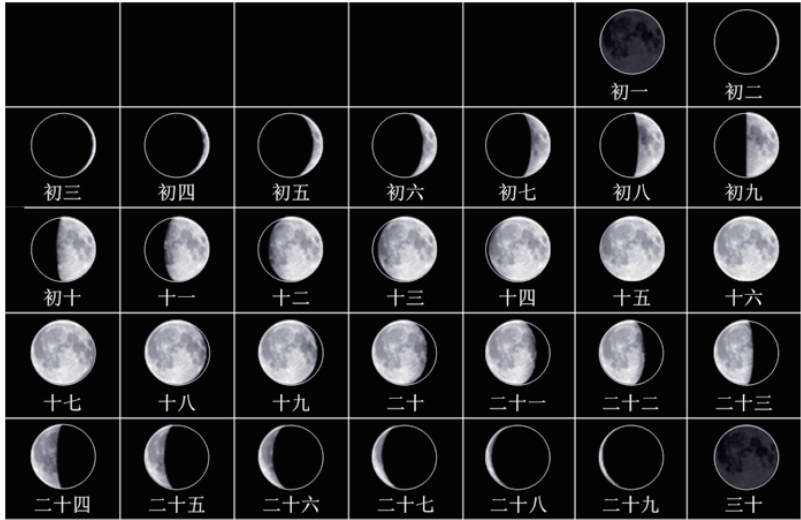


图 2-25 阴历初一到三十的月相图

以阴历十五为例。月相为满月，刚好位于月相周期（30 天）一半的位置，该月相对应的相位为阴历十五。

## 四、什么是相

与月相类似，通信系统中使用“相”来描述正弦波的状态：随着时间的推移，正弦波的幅值从零变到最大值，从最大值变到零，又从零变到负的最大值，从负的最大值变到零……不断循环，如图 2-26 所示。

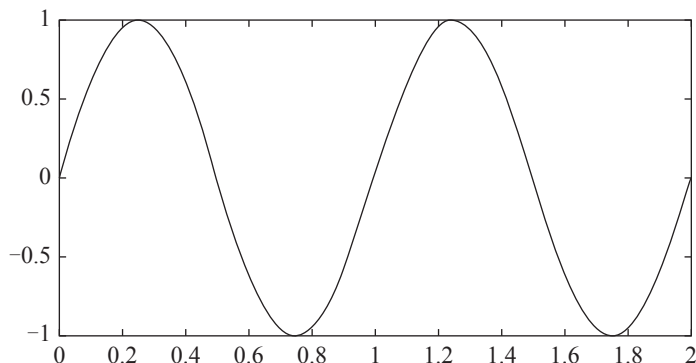


图 2-26 正弦波的状态变化

正弦波在特定时刻所处的特定状态，例如：幅值是正的还是负的，是在增大的过程中还是在减小的过程中，等等，就是正弦波在这一时刻的“相”。

以图 2-27 中的 A 点和 B 点为例。

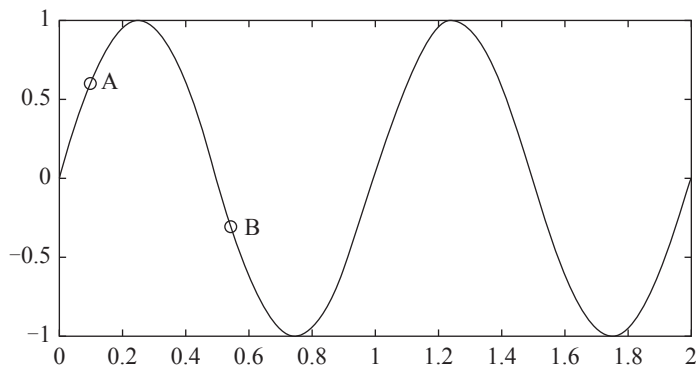


图 2-27 正弦波在特定时刻的特定状态

这两个特定点所处的状态不同：

- A 点幅值为正，B 点幅值为负；
- A 点处在增大过程中，B 点处在减小过程中。

因此，A 点和 B 点对应的“相”是不同的。

## 五、什么是相位

相位：是指对于一个正弦波，特定的时刻在它循环中的位置：波峰、波谷或它们之间的某点。相位通常用角表示，因此也称作相角。一个循环是  $360^\circ$ 。

以图 2-28 所示的正弦波为例：某时刻相位为  $90^\circ$  就意味着该时刻正弦波处于波峰位置， $270^\circ$  就意味着处于波谷位置， $450^\circ$  就意味着处于波峰位置。

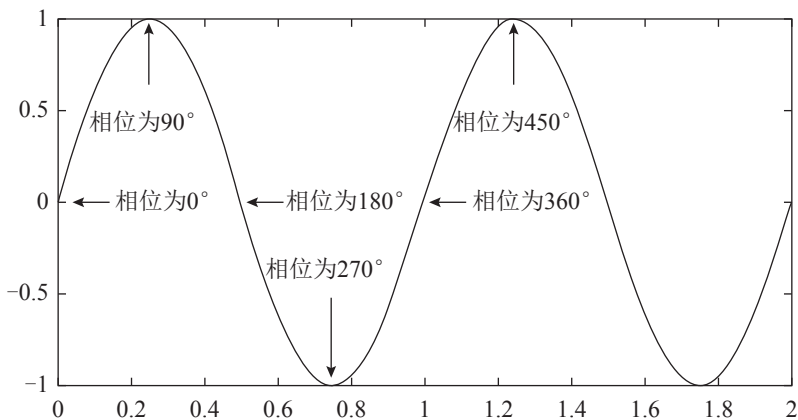


图 2-28 正弦波在特定时刻的相位

### 1. 如何确定零相位

表面上看上面描述清楚了相位，但实际上还不清楚。因为正弦波是周期信号，到底哪个波峰的相位算  $90^\circ$ ，哪个波谷的相位算  $270^\circ$ ？还没说清楚。说不清楚的原因归根结底在于零相位没有明确。

做如下约定：

起始点离  $t=0$  时刻最近的那个完整周期的起始点相位为零。

注意其中的完整周期：正弦信号和余弦信号的完整周期是不同的。对于正弦信号来讲，在  $f>0$  和  $f<0$  情况下的完整周期也是不同的。

$f>0$  时，正弦信号的一个完整周期如图 2-29 所示。

$f<0$  时，正弦信号的一个完整周期如图 2-30 所示。

余弦信号的一个完整周期如图 2-31 所示。

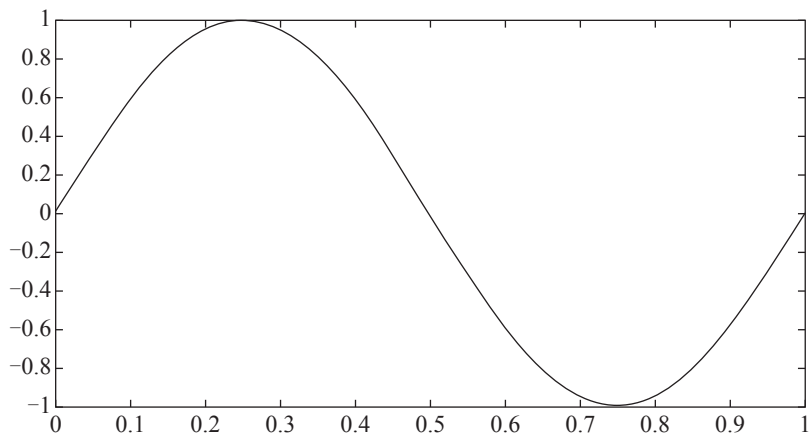


图 2-29 正弦信号的一个完整周期 ( $f > 0$ )

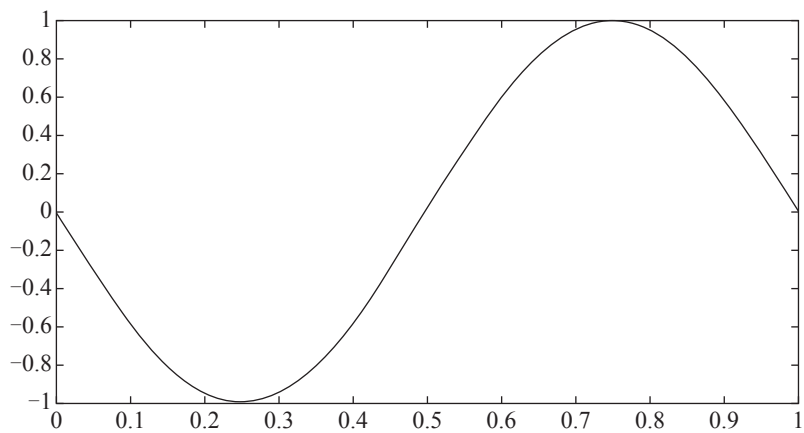


图 2-30 正弦信号的一个完整周期 ( $f < 0$ )

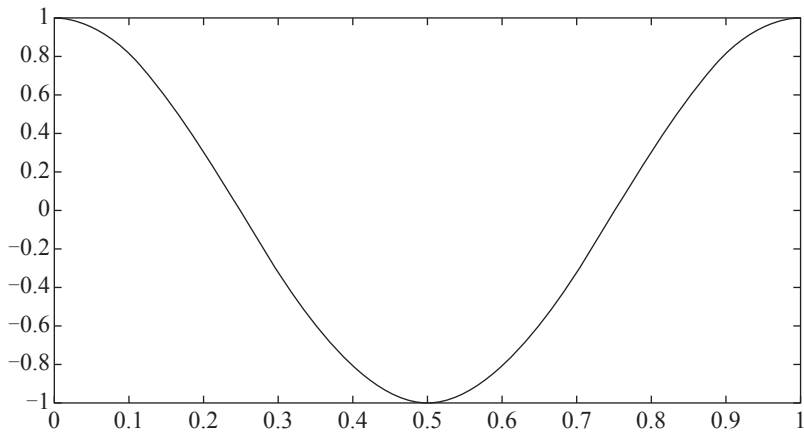


图 2-31 余弦信号的一个完整周期

以图 2-32 中这个波形为例。

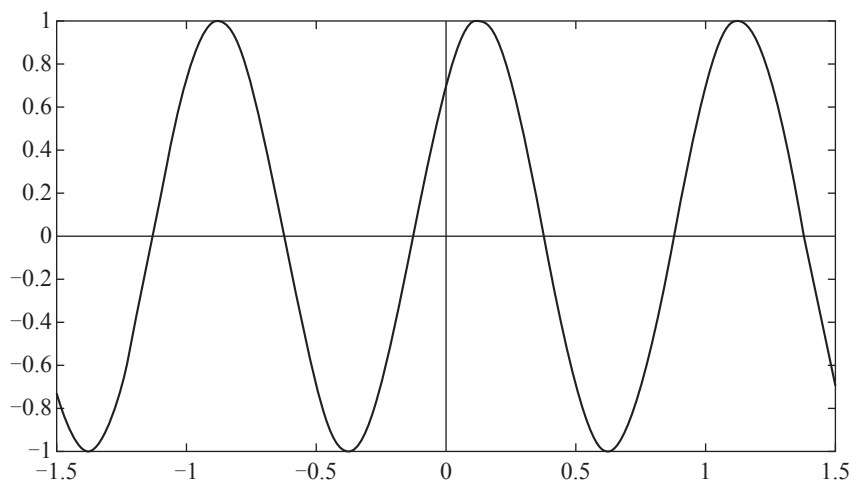


图 2-32 波形举例

如果这个波形是频率大于零的正弦波，则其零相位点如图 2-33 所示。

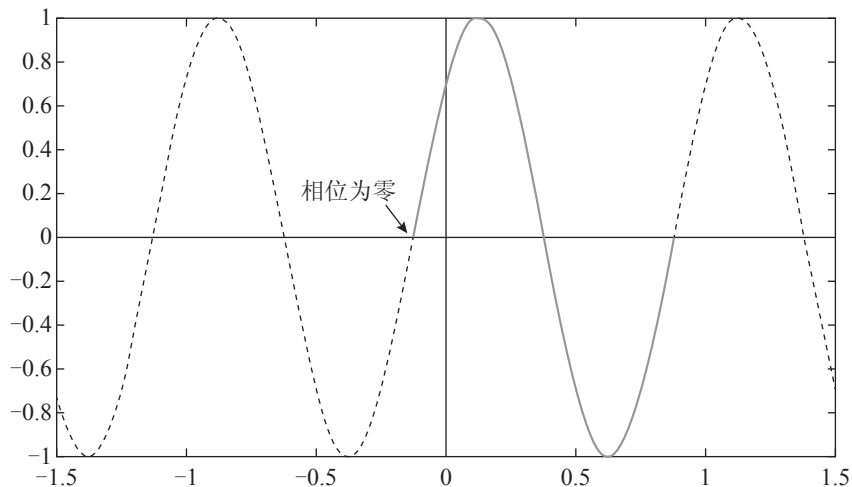


图 2-33 频率大于零的正弦波零相位点

如果这个波形是频率小于零的正弦波，则其零相位点如图 2-34 所示。

如果这个波形是个余弦波，则其零相位点如图 2-35 所示。

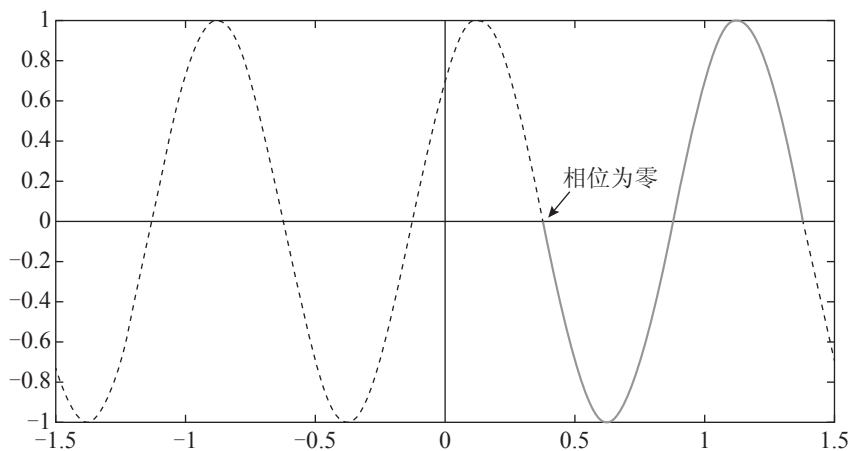


图 2-34 频率小于零的正弦波零相位点

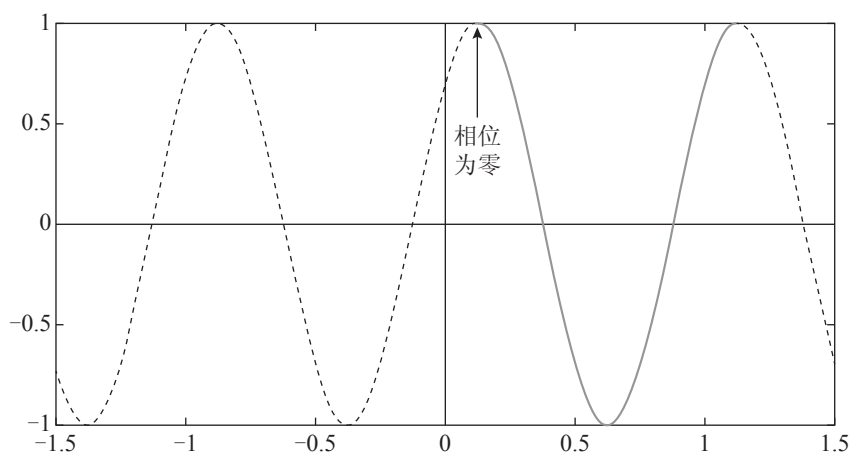


图 2-35 余弦波零相位点

## 2. 如何理解正相位和负相位

### 1) 相位的正负

零相位点确定之后，波形上其他点的相位就确定了，相位的正负规定如下所述。

$f > 0$ : 沿时间轴正方向，相位逐渐增大，如图 2-36 所示。

- 零相位点右侧波形上各点的相位为正；
- 零相位点左侧波形上各点的相位为负。



$f < 0$ : 沿时间轴正方向, 相位逐渐减小, 如图 2-37 所示。

- 零相位点左侧波形上各点的相位为正;
- 零相位点右侧波形上各点的相位为负。

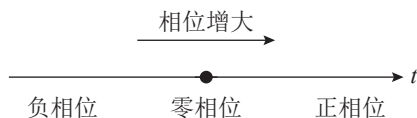


图 2-36 正相位和负相位 (频率大于 0)



图 2-37 正相位和负相位 (频率小于 0)

## 2) 相位的取值

相位的值取决于该点和零相位点之间的距离:

- 距离为 1 个周期时, 相位为  $360^\circ$ ;
- 距离为  $n$  个周期时, 相位为  $360n^\circ$ ;
- 距离为  $1/2$  个周期时, 相位为  $180^\circ$ ;
- 距离为  $1/4$  个周期时, 相位为  $90^\circ$ 。

以此类推。

以图 2-38 中这个频率大于零的正弦波为例, 距离零相位点半个周期的右侧那个点的相位是  $180^\circ$ , 距离零相位点半个周期的左侧那个点的相位是  $-180^\circ$ 。

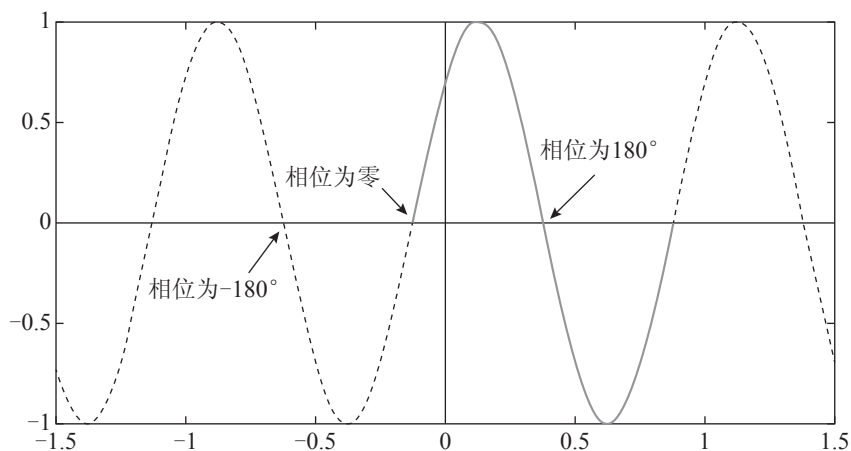


图 2-38 频率大于零的正弦波相位

以图 2-39 中这个频率小于零的正弦波为例, 距离零相位点半个周期的右侧那个点的相位是  $-180^\circ$ , 距离零相位点半个周期的左侧那个点的相位是  $180^\circ$ 。

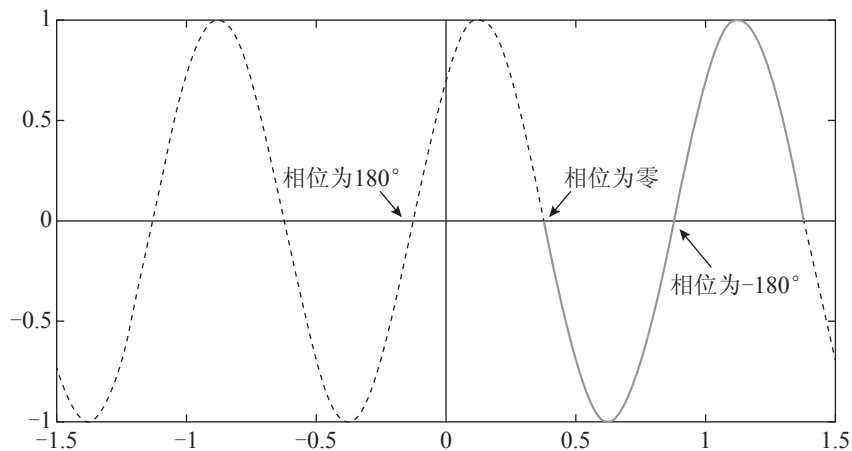


图 2-39 频率小于零的正弦波相位

### 3. 如何理解初始相位

零相位、正负相位都清楚了，下面看一下什么是初始相位。

初始相位就是指  $t=0$  时刻的相位。

由于选取零相位点时，选择了离  $t=0$  时刻最近的那个完整周期的起始点，因此  $t=0$  时刻的相位绝对值不会大于  $180^\circ$ ，即： $|\varphi| \leq 180^\circ$ 。

以图 2-40 中这个频率大于零的正弦波为例，其初始相位为  $45^\circ$ 。

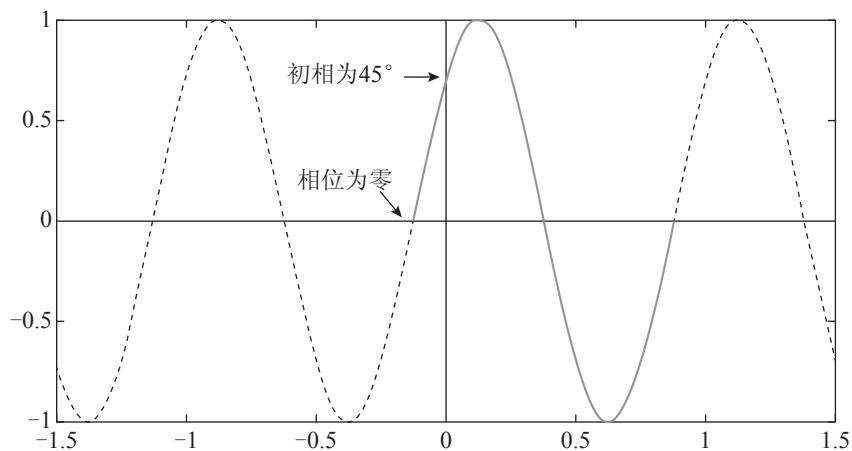


图 2-40 频率大于零的正弦波初始相位

以图 2-41 中这个频率小于零的正弦波为例，其初始相位为  $135^\circ$ 。

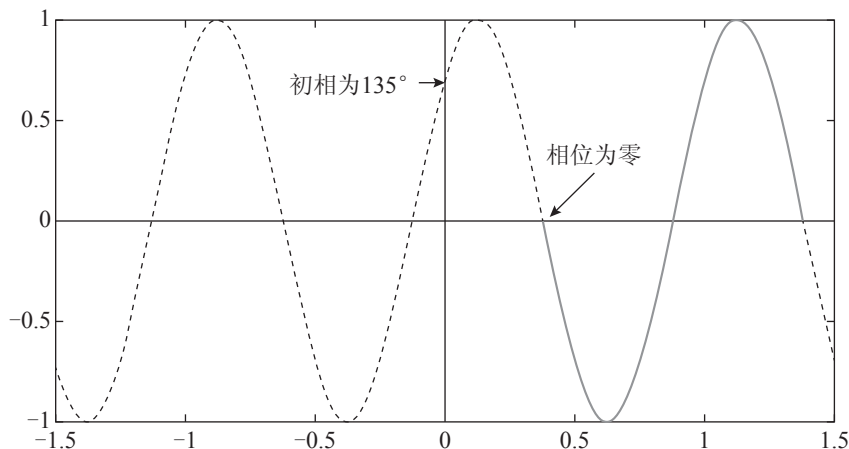


图 2-41 频率小于零的正弦波初始相位

通过上面的介绍，大家应该对相和相位有了初步认识。

下面我们利用旋转向量来进一步深入理解一下相位。

#### 4. 利用旋转向量理解相位

正弦波： $s(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$

该正弦波可以看成是一个长度为  $A$ 、角速度为  $\omega=2\pi f$ 、围绕原点旋转的向量在虚轴上的投影。

相位和初相要分 4 种情况。

##### 1) 频率大于零且初相大于等于零

如图 2-42 所示： $\omega>0$ ，旋转向量逆时针旋转。

0 时刻：旋转向量所在位置如虚线向量所示， $\varphi$  就是初相： $0 \leq \varphi \leq \pi$ 。

$t_0$  时刻：旋转向量所在位置如实线向量所示， $\omega t_0 + \varphi$  就是  $t_0$  时刻的相位。

##### 2) 频率大于零且初相小于零

如图 2-43 所示： $\omega>0$ ，旋转向量逆时针旋转。

0 时刻：旋转向量所在位置如虚线向量所示， $\varphi$  就是初相： $-\pi < \varphi < 0$ 。

$t_0$  时刻：旋转向量所在位置如实线向量所示， $\omega t_0 + \varphi$  就是  $t_0$  时刻的相位。

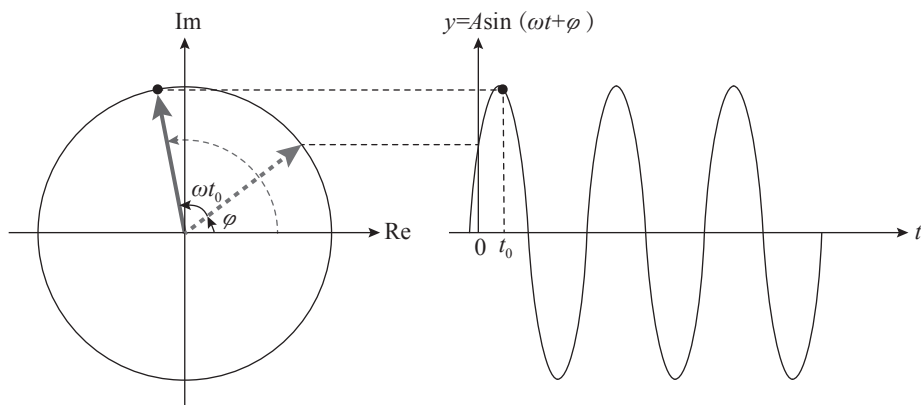


图 2-42 正弦波的初相和相位（频率大于 0，初相大于等于 0）

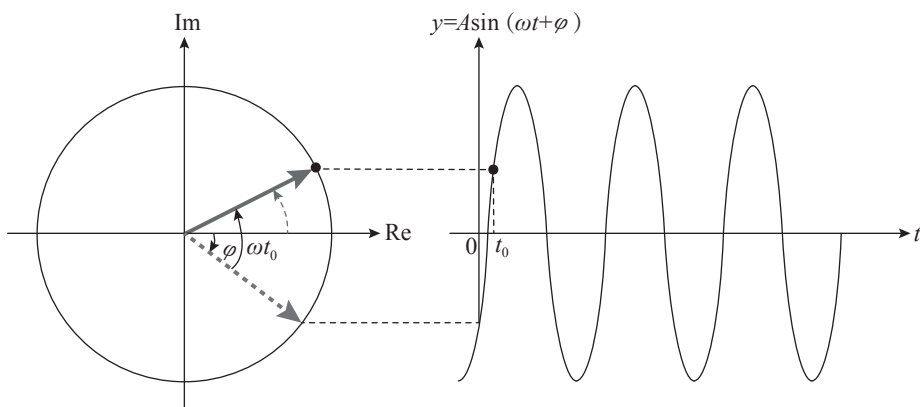


图 2-43 正弦波的初相和相位（频率大于 0，初相小于 0）

### 3) 频率小于零且初相大于等于零

如图 2-44 所示： $\omega < 0$ ，旋转向量顺时针旋转。

0 时刻：旋转向量所在位置如虚线向量所示， $\varphi$  就是初相： $0 \leq \varphi \leq \pi$ 。

$t_0$  时刻：旋转向量所在位置如实线向量所示， $\omega t_0 + \varphi$  就是  $t_0$  时刻的相位。

### 4) 频率小于零且初相小于零

如图 2-45 所示： $\omega < 0$ ，旋转向量顺时针旋转。

0 时刻：旋转向量所在位置如虚线向量所示， $\varphi$  就是初相： $-\pi < \varphi < 0$ 。

$t_0$  时刻：旋转向量所在位置如实线向量所示， $\omega t_0 + \varphi$  就是  $t_0$  时刻的相位。

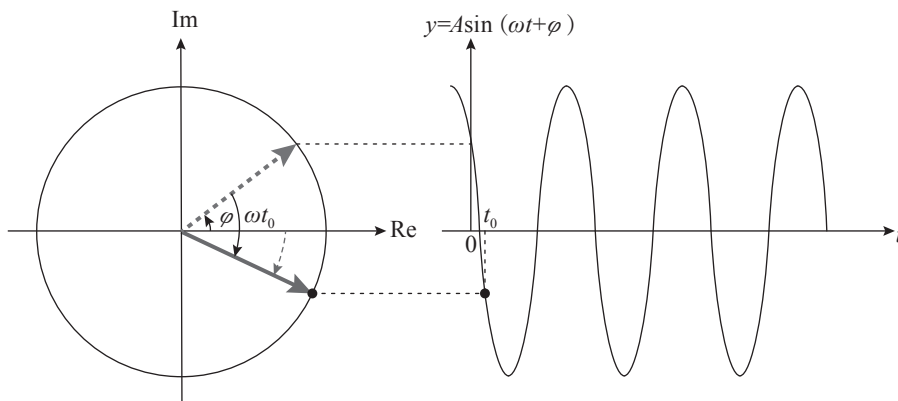


图 2-44 正弦波的初相和相位（频率小于 0，初相大于等于 0）

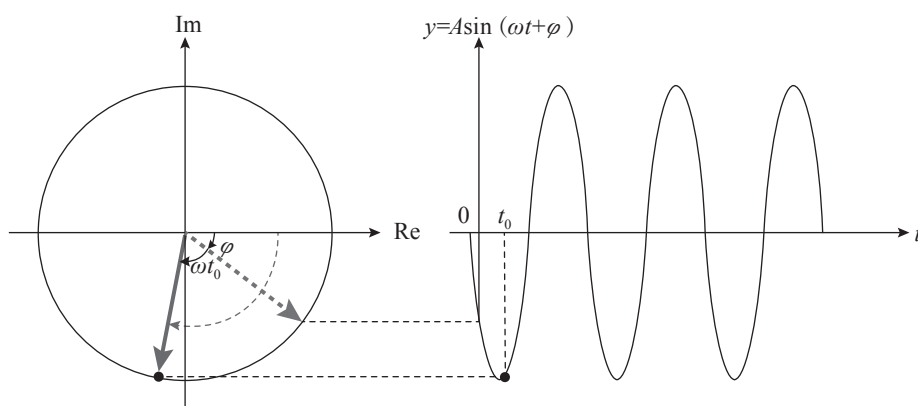


图 2-45 正弦波的初相和相位（频率小于 0，初相小于 0）

## 六、什么是相位差

两个同频信号的相位之差就是相位差。

注意：当我们说相位差的时候，已经隐含了两个信号频率相同的意思。

两个同频信号：

$$s_1(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi_2)$$

相位差：

$$\Delta\varphi=(2\pi ft+\varphi_1)-(2\pi ft+\varphi_2)=\varphi_1-\varphi_2$$

也就是说：两个同频信号的相位差就等于初相之差，如图 2-46 所示。

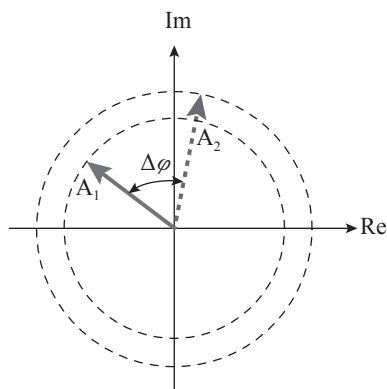


图 2-46 相位差等于初相之差

以图 2-47 所示的三相交流电为例：

虚线波形的初相为  $2\pi/3$ ，实线波形初相为 0，点划线波形初相为  $-2\pi/3$ 。

虚线波形和实线波形的相位差为： $2\pi/3-0=2\pi/3$ 。

实线波形和点划线波形的相位差为： $0-(-2\pi/3)=2\pi/3$ 。

虚线波形和点划线波形的相位差为： $2\pi/3-(-2\pi/3)=4\pi/3$ 。

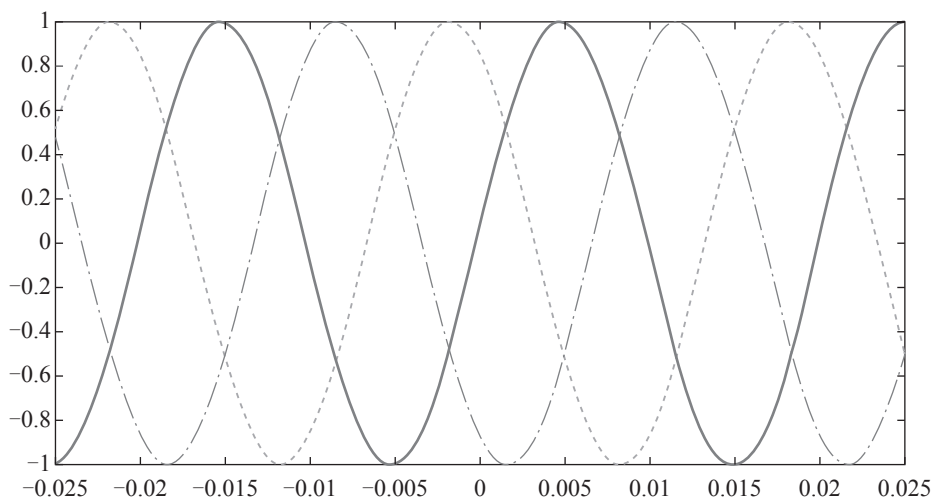


图 2-47 三相交流电波形

当两个同频信号的相位差取某些特定的值时，这两个同频信号的相之间具有特定的关系，因此被赋予了特定的名称。

1. 相位差为 0

当两个同频信号之间的相位差为 0 时，这两个信号对应的旋转向量每时每刻方向都相同，如图 2-48 所示。

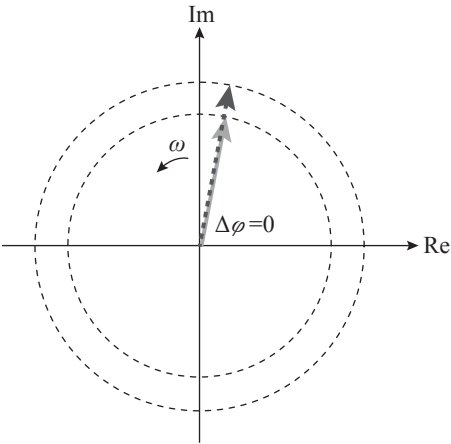


图 2-48 两个同相信号对应的旋转向量

这两个信号每时每刻的“相”都相同，如图 2-49 所示，因此我们称这两个信号“同相”。

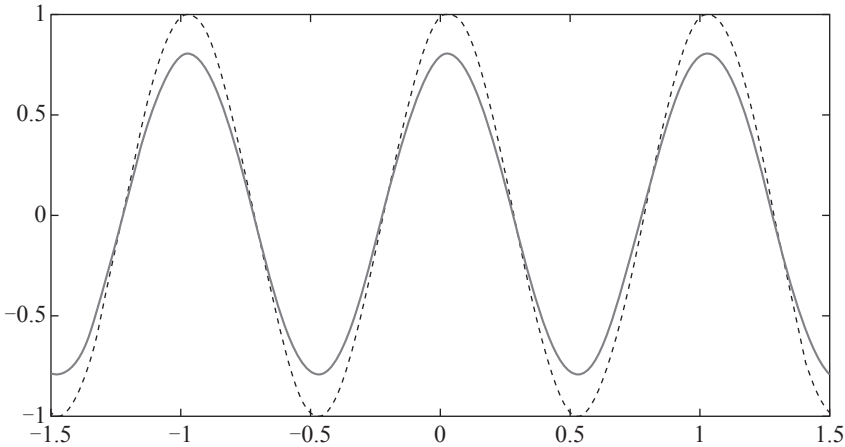


图 2-49 两个同相信号的波形

而所谓“相”相同，就是指任意时刻两个信号的状态都是相同的：

- 一个取值为正，另一个取值也为正；一个取值为负，另一个取值也为负。
- 一个处在增大过程中，另一个也处在增大过程中；一个处在减小过程中，另一个也处在减小过程中。

## 2. 相位差为 $\pm\pi$

当两个信号之间的相位差为  $\pm\pi$  时，这两个信号对应的旋转向量每时每刻方向都相反，如图 2-50 所示。

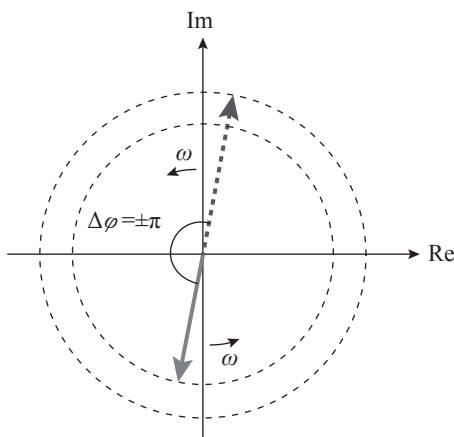


图 2-50 两个反相信号对应的旋转向量

这两个信号每时每刻的“相”都相反，如图 2-51 所示，因此我们称这两个信号“反相”。

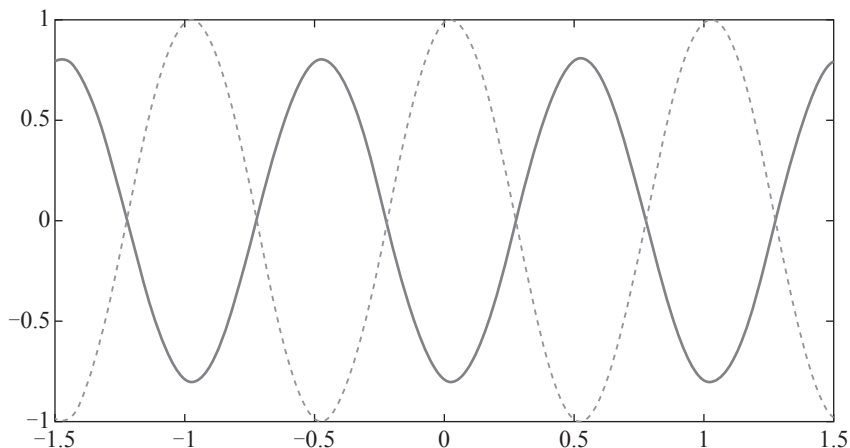


图 2-51 两个反相信号的波形



而所谓“相”相反，就是指任意时刻两个信号的状态都是相反的：

- 一个取值为正，另一个取值必为负；一个取值为负，另一个取值必为正。
- 一个处在增大过程中，另一个必处在减小过程中；一个处在减小过程中，另一个必处在增大过程中。

### 3. 相位差为 $\pm\pi/2$

当两个信号之间的相位差为  $\pm\pi/2$  时，对应的两个旋转向量每时每刻方向都垂直，如图 2-52 所示。因此我们称这两个信号“正交”。

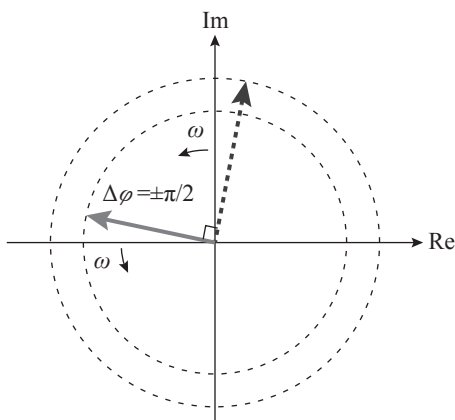


图 2-52 两个正交信号对应的旋转向量

这两个正交信号的波形如图 2-53 所示，很明显正交信号波形具有如下规律：当一个取值达到正的最大值或负的最大值时，另一个取值必为零。

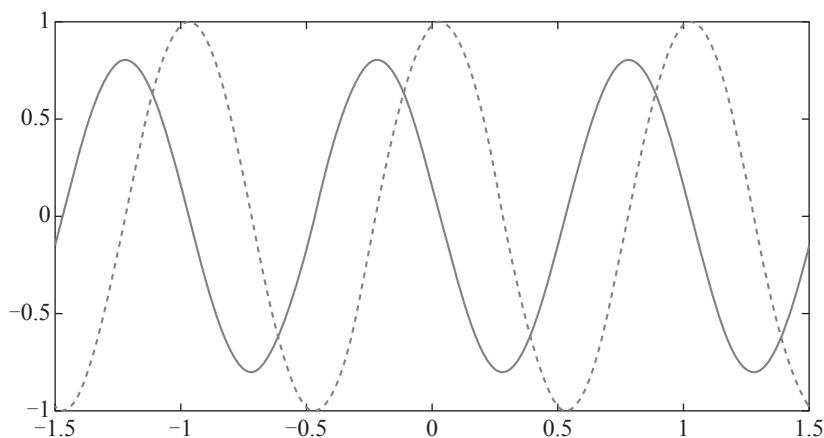


图 2-53 两个正交信号的波形

#### 4. 超前和滞后

##### 1) 相位差绝对值小于 $\pi$

当两个信号对应的旋转向量在 0 时刻的位置如图 2-54 所示时，我们称信号 S1 超前信号 S2，或者称信号 S2 滞后信号 S1。

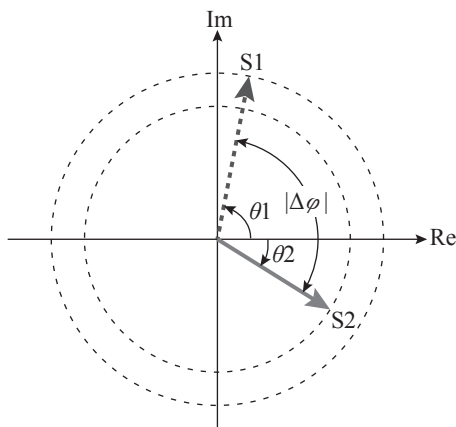


图 2-54 超前和滞后向量图（相位差绝对值小于  $\pi$ ）

这两个信号的波形如图 2-55 所示。

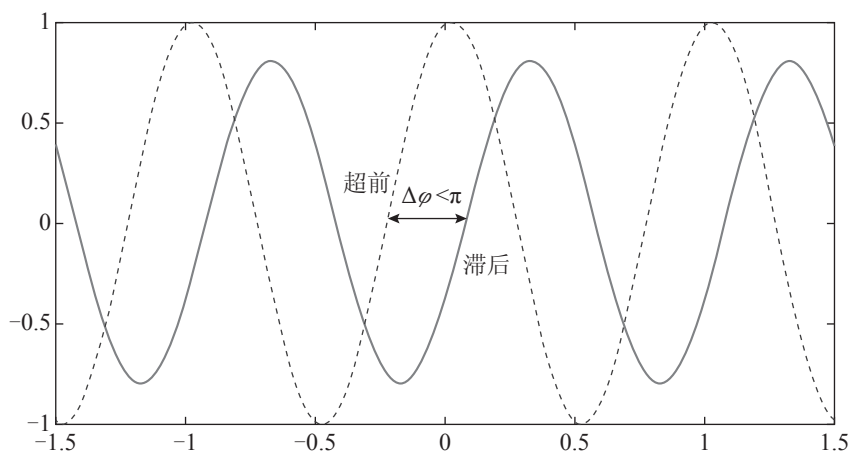


图 2-55 超前和滞后波形图（相位差绝对值小于  $\pi$ ）

##### 2) 相位差绝对值大于 $\pi$

当两个信号对应的旋转向量在 0 时刻的位置如图 2-56 所示时，我们称信号 S2 超

前信号 S1，或者称信号 S1 滞后信号 S2。

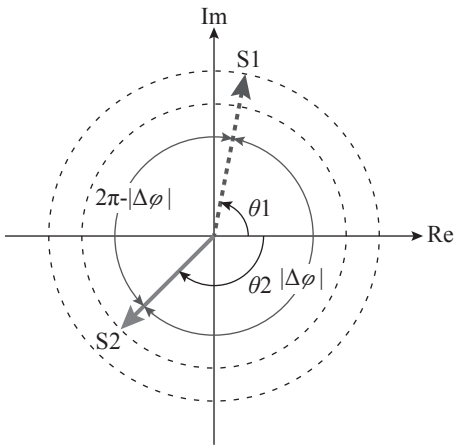


图 2-56 超前和滞后向量图（相位差绝对值大于  $\pi$ ）

这两个信号的波形如图 2-57 所示。

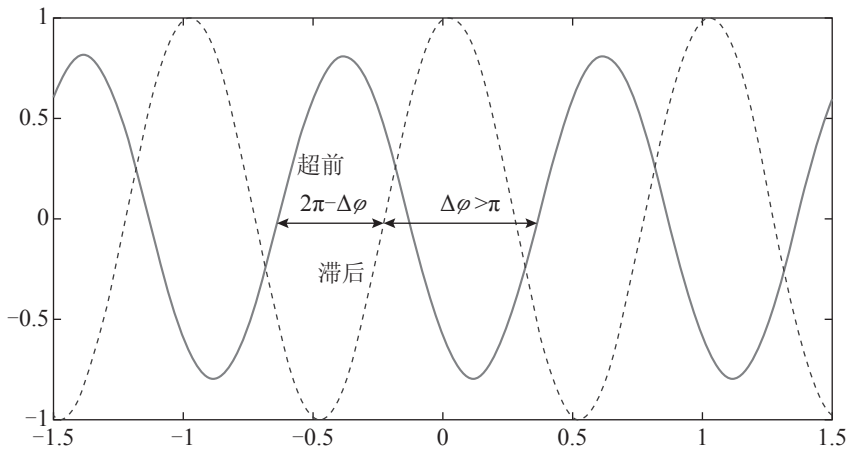


图 2-57 超前和滞后波形图（相位差绝对值大于  $\pi$ ）

## 七、波的干涉

前面研究了两个同频且具有恒定相位差的正弦波信号波形之间的联系，如果两个同频且具有恒定相位差的正弦波信号在同一点相遇会发生什么情况呢？

## 1. 概述

位于 A 点和 B 点的波源同时发出同频同相的正弦波：

$$s(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi)$$

由于各个位置的点到两个波源的距离不同，接收到的来自两个波源的信号存在相位差。

如图 2-58 所示，P 点到 A 点的距离为  $d_1$ ，到 B 点的距离为  $d_2$ 。

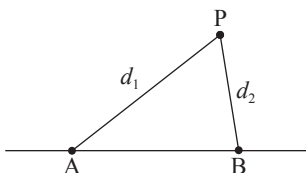


图 2-58 各个位置的点到两个波源的距离不同

P 点接收到的来自 2 个波源的信号：

$$s_1(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_1}{\lambda})$$

$$s_2(t) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_2}{\lambda})$$

令

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{2\pi d_1}{\lambda}$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(d_2 - d_1)}{\lambda}$$

则

$$s_1(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi_1 + \Delta\varphi)$$

这两个信号具有恒定的相位差，如图 2-59 所示。

叠加： $s(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi_1) + A_2 \sin(2\pi ft + \varphi_1 + \Delta\varphi)$

对应的向量合成图如图 2-60 所示。

合成向量的旋转角速度不变，向量的长度与两个信号的相位差有关：

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(d_2 - d_1)}{\lambda} = \frac{2\pi f(d_2 - d_1)}{c}$$

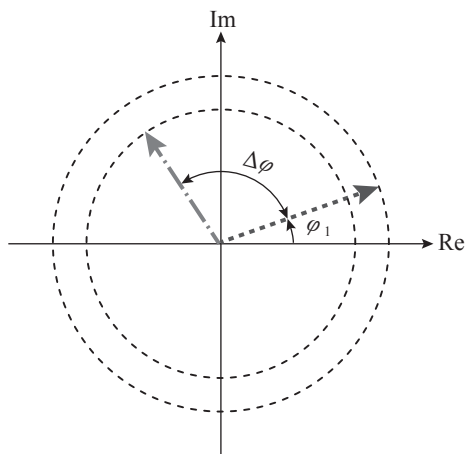


图 2-59 P 点接收到的来自 2 个波源信号的向量图

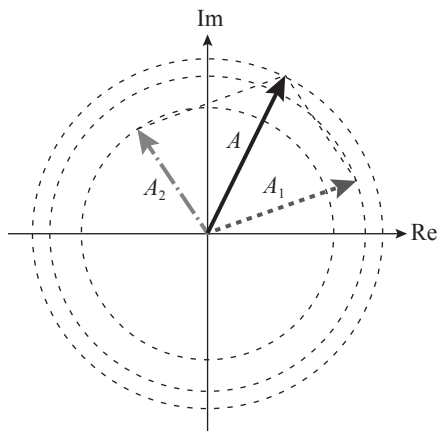


图 2-60 向量合成图

其中：

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

归根结底向量的长度与 P 点到两个波源的距离差和信号频率有关。

因此各个位置合成信号的幅度各不相同，在某些位置合成信号幅度大，在另一些位置合成信号幅度小甚至幅度为 0，而且合成信号幅度大的区域和幅度小的区域相互隔开，这种现象称为波的干涉，如图 2-61 所示。

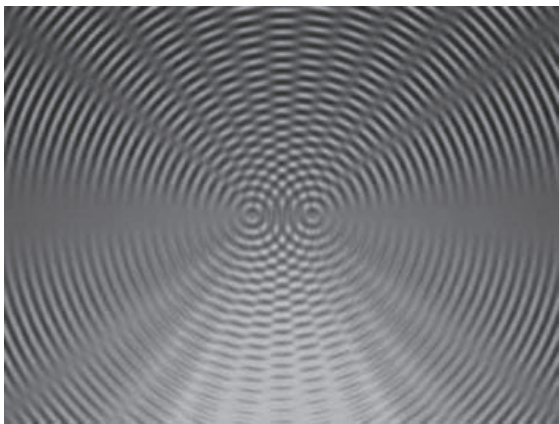


图 2-61 波的干涉现象

产生相干现象的波叫相干波。

波的相干条件：频率相同，相位差恒定，振动方向相同。

不论是光波、水波还是电磁波，只要是波，而且满足相干条件，都会产生干涉现象。

## 2. 相长干涉

如图 2-62 所示，P1 点到 A 点的距离： $d_1=8\lambda$ ，到 B 点的距离： $d_2=6\lambda$ 。

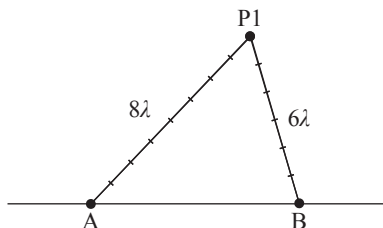


图 2-62 同频同相正弦波叠加

两个正弦波到达 P1 点时，刚好同相：

$$s_1(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_1}{\lambda}) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi)$$

$$s_2(t) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_2}{\lambda}) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi)$$

P1 点的波形：

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = (A_1 + A_2) \sin(2\pi ft + \varphi)$$

正弦波的幅度是来自两个波源的正弦波的幅度之和。

接收到的两个波源信号正好同相，合成信号幅度等于二者幅度之和，这种情况被称为相长干涉。

## 3. 相消干涉

如图 2-63 所示，P2 点到 A 点的距离： $d_1=6.5\lambda$ ，到 B 点的距离： $d_2=2\lambda$ 。

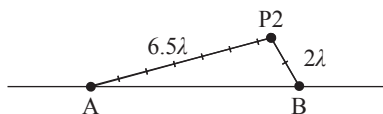


图 2-63 同频反相正弦波叠加

两个正弦波到达 P2 点时，刚好反相：

$$s_1(t) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_1}{\lambda}) = A_1 \sin(2\pi ft + \varphi + \pi) = -A_1 \sin(2\pi ft + \varphi)$$

$$s_2(t) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi + \frac{2\pi d_2}{\lambda}) = A_2 \sin(2\pi ft + \varphi)$$

P2 点的波形:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = (A_2 - A_1) \sin(2\pi ft + \varphi)$$

正弦波的幅度是来自 2 个波源的正弦波的幅度之差。

接收到的两个波源信号正好反相，合成信号幅度等于二者幅度之差，这种情况被称为相消干涉。

## 2.5 信号的分解与合成

### 一、正弦信号作为基本信号

下面以周期方波信号为例，看看使用一系列余弦信号合成方波信号的过程。  
假定方波信号的周期为 1s，如图 2-64 所示。

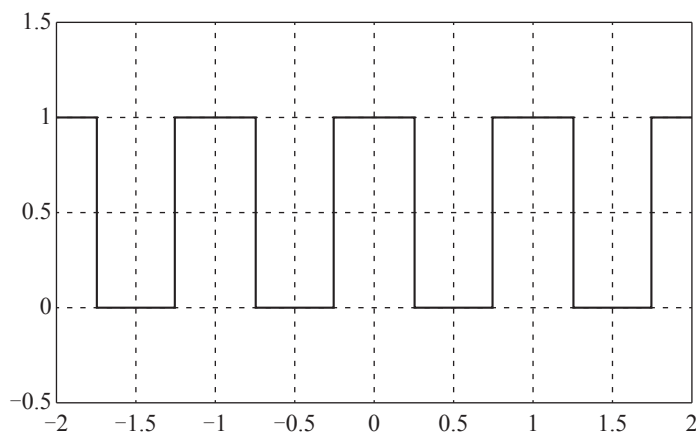


图 2-64 周期为 1s 的方波信号

幅度为 0.5 的直流信号，如图 2-65 所示。

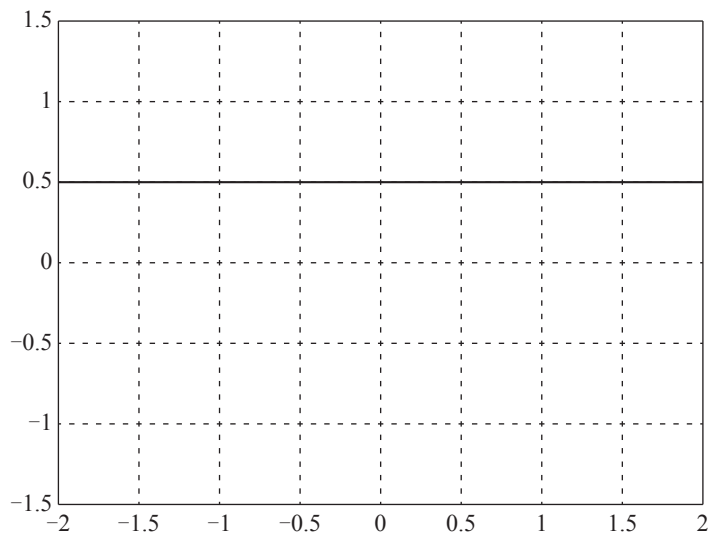


图 2-65 幅度为 0.5 的直流信号

叠加 1 个幅度为 0.637、频率为 1Hz 的余弦信号，如图 2-66 所示。

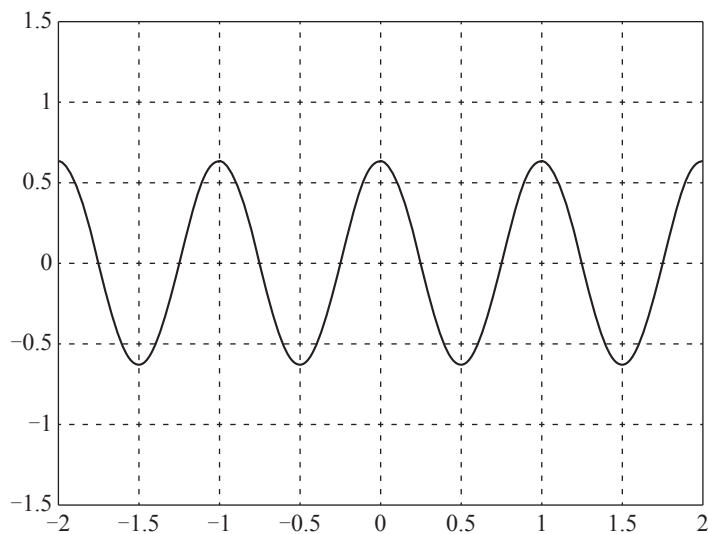


图 2-66 幅度为 0.637、频率为 1Hz 的余弦信号

合成信号波形如图 2-67 所示。

再叠加一个幅度为 -0.212、频率为 3Hz 的余弦信号，如图 2-68 所示。



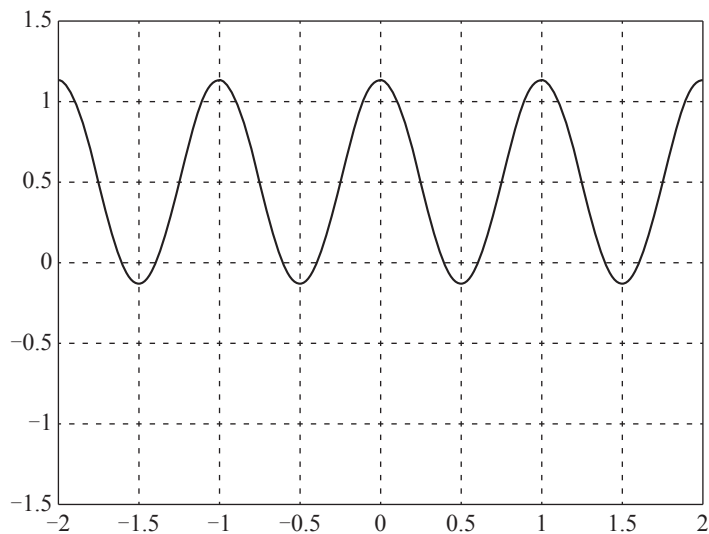
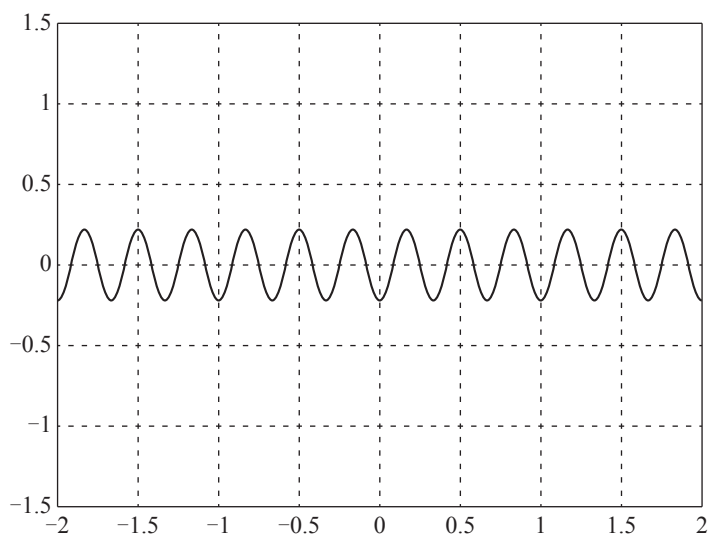


图 2-67 第一次合成信号波形

图 2-68 幅度为  $-0.212$ 、频率为  $3\text{Hz}$  的余弦信号

合成信号波形如图 2-69 所示。

再叠加一个幅度为  $0.127$ 、频率为  $5\text{Hz}$  的余弦信号，如图 2-70 所示。

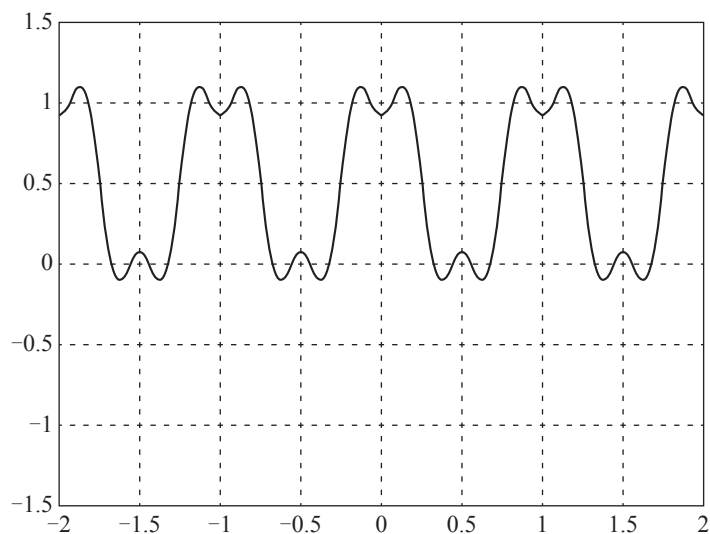


图 2-69 第二次合成信号波形

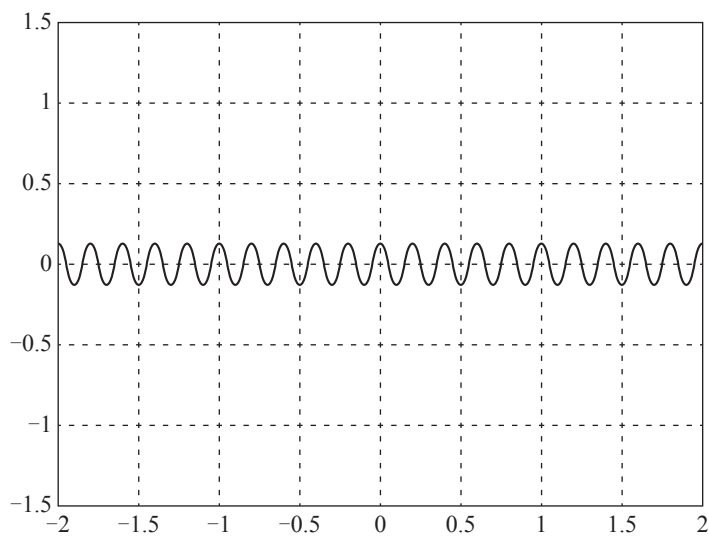


图 2-70 幅度为 0.127、频率为 5Hz 的余弦信号

合成信号波形如图 2-71 所示。

可以想象，随着叠加的余弦信号越来越多，合成信号的波形越来越逼近一个方波，这从一个侧面说明了：可以将方波信号分解成一个直流分量和一系列余弦波分量之和。

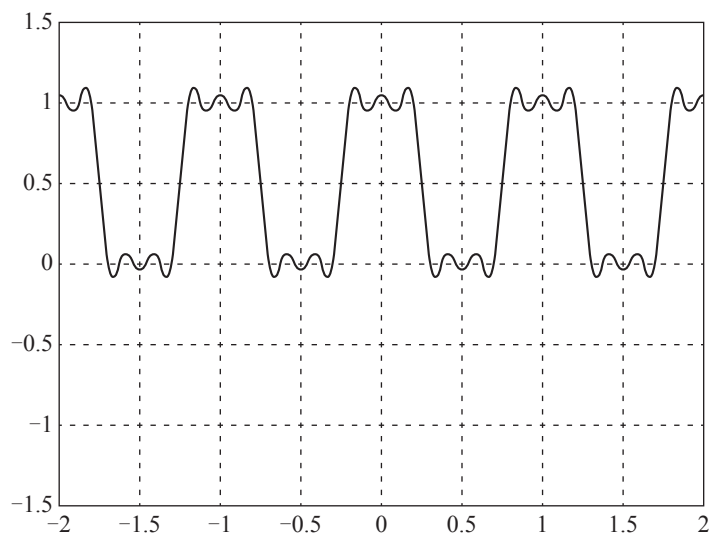


图 2-71 第三次合成信号波形

## 二、复指数信号作为基本信号

还是以周期方波信号为例，看看使用一系列复指数信号合成方波信号的过程。  
幅度为 0.5 的直流信号如图 2-72 所示。

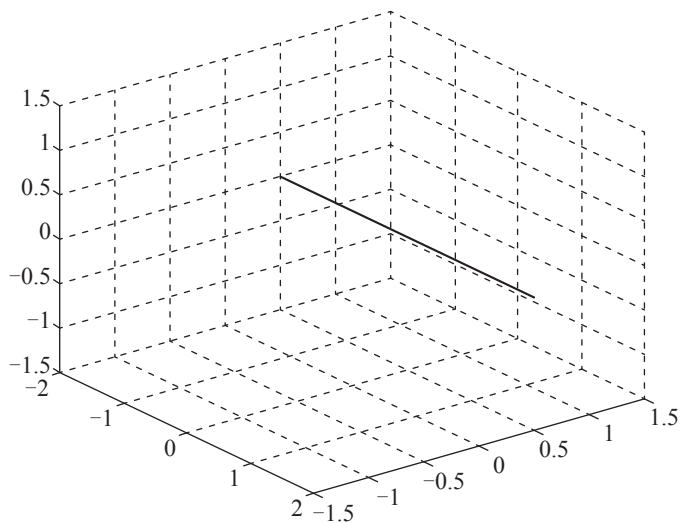


图 2-72 幅度为 0.5 的直流信号

幅度为 0.318、频率为 1Hz 的复指数信号，如图 2-73 所示。

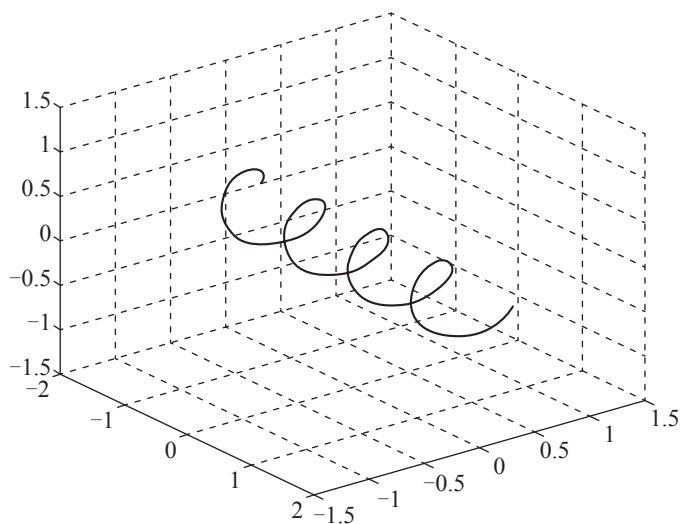


图 2-73 幅度为 0.318、频率为 1Hz 的复指数信号

幅度为 0.318、频率为 -1Hz 的复指数信号，如图 2-74 所示。

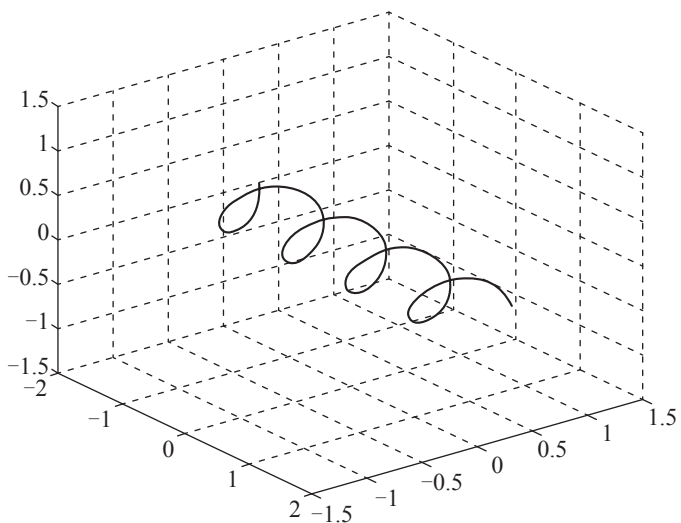


图 2-74 幅度为 0.318、频率为 -1Hz 的复指数信号

两个幅度为 0.318 的复指数信号合成结果如图 2-75 所示。

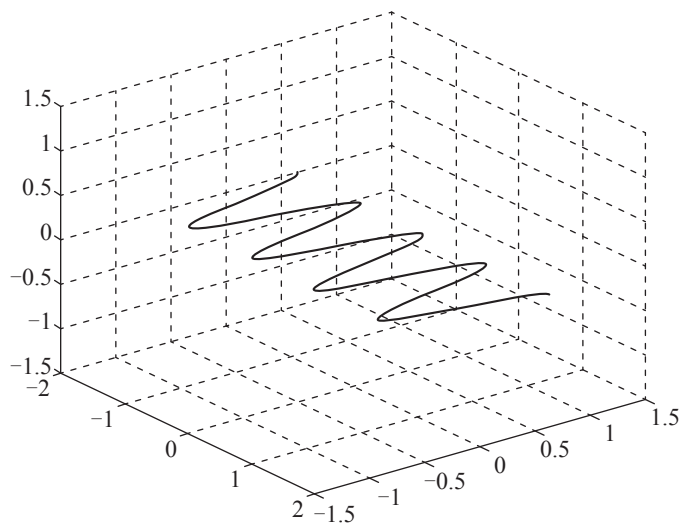


图 2-75 两个幅度为 0.318 的复指数信号合成信号

与前面的直流信号叠加，合成信号如图 2-76 所示。

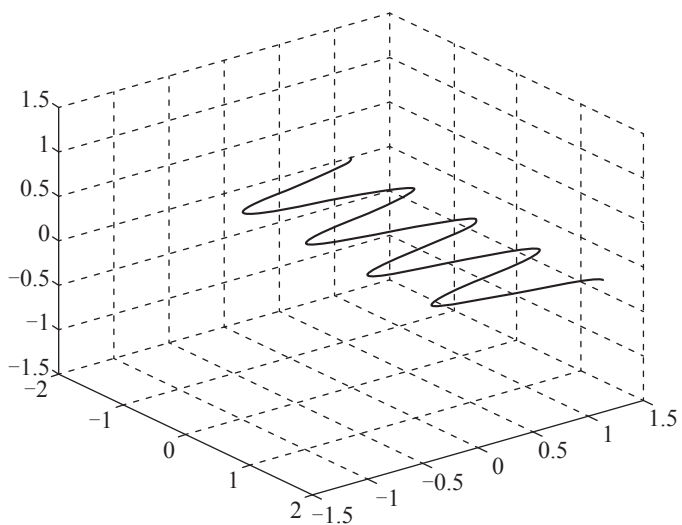
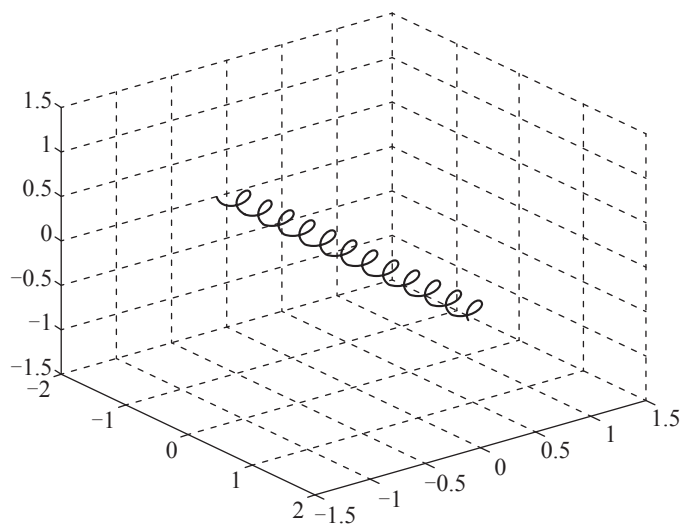
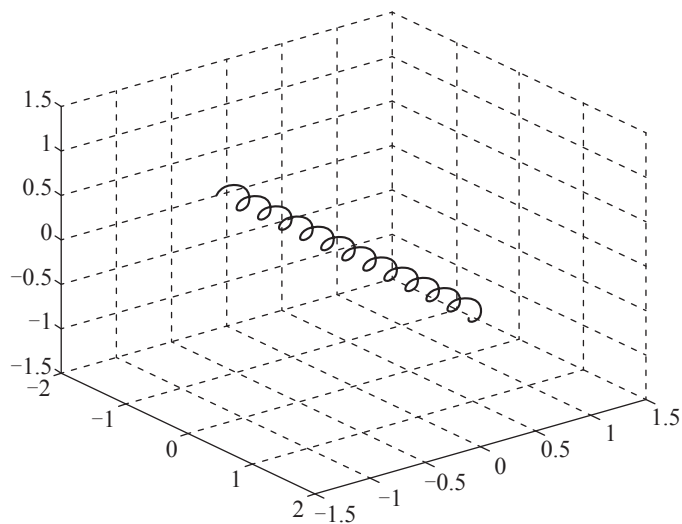


图 2-76 第一次合成信号波形

幅度为  $-0.106$ 、频率为  $3\text{Hz}$  的复指数信号，如图 2-77 所示。

幅度为  $-0.106$ 、频率为  $-3\text{Hz}$  的复指数信号，如图 2-78 所示。

图 2-77 幅度为  $-0.106$ 、频率为  $3\text{Hz}$  的复指数信号图 2-78 幅度为  $-0.106$ 、频率为  $-3\text{Hz}$  的复指数信号

两个幅度为  $-0.106$  的复指数信号合成结果如图 2-79 所示。

叠加到第一次合成信号上去，结果如图 2-80 所示。

幅度为  $0.063$ 、频率为  $5\text{Hz}$  的复指数信号如图 2-81 所示。

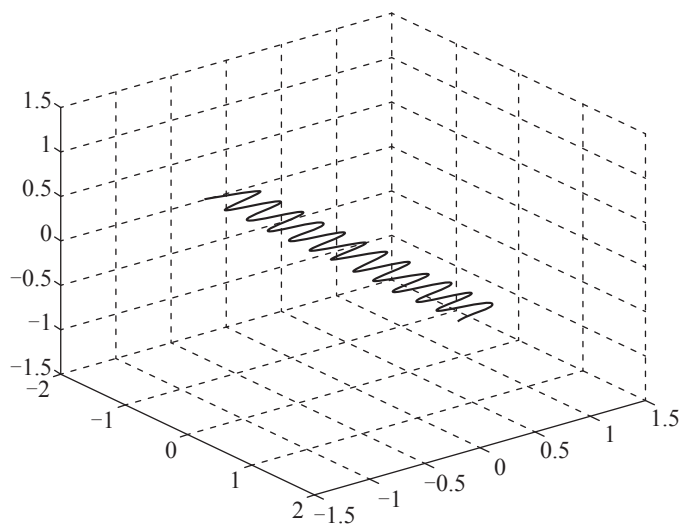
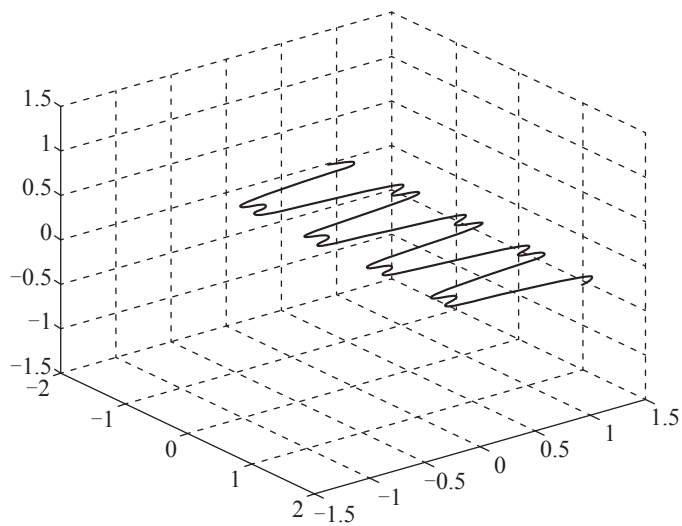
图 2-79 两个幅度为  $-0.106$  的复指数信号合成信号

图 2-80 第二次合成信号波形

幅度为  $0.063$ 、频率为  $-5\text{Hz}$  的复指数信号如图 2-82 所示。  
两个幅度为  $-0.106$  的复指数信号合成结果如图 2-83 所示。  
叠加到第二次合成信号上去，结果如图 2-84 所示。

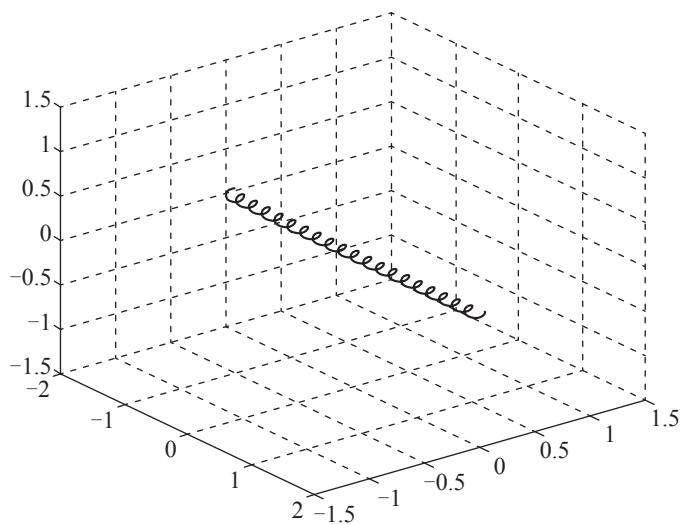


图 2-81 幅度为 0.063、频率为 5Hz 的复指数信号

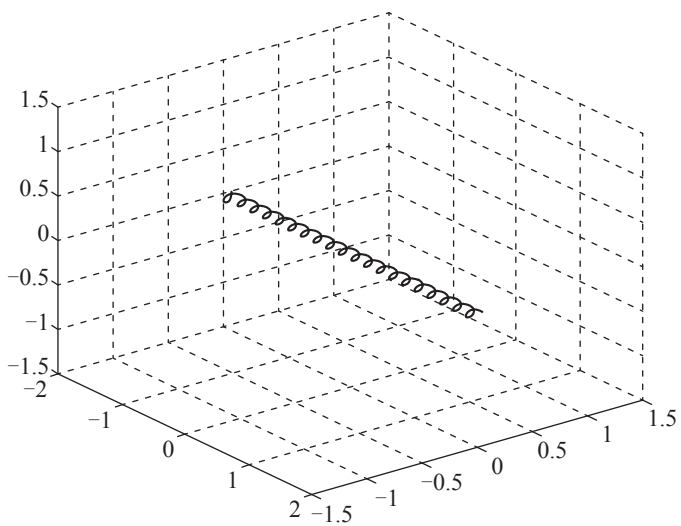


图 2-82 幅度为 0.063、频率为 -5Hz 的复指数信号



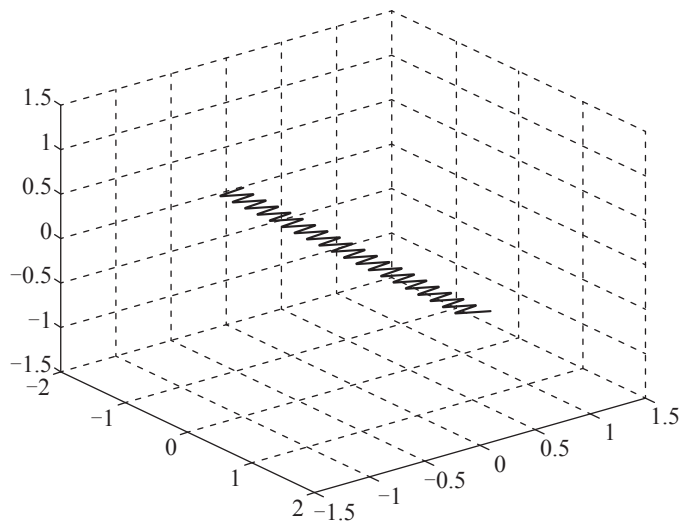
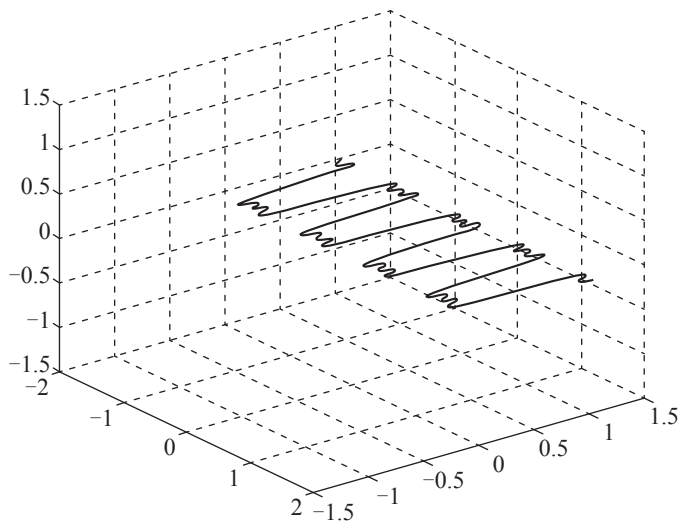
图 2-83 两个幅度为  $-0.106$  的复指数信号合成信号

图 2-84 第三次合成信号波形

可以想象,随着叠加的复指数信号越来越多,波形越来越逼近一个方波,这从一个侧面说明:可以将方波信号分解成一个直流分量和一系列复指数信号分量之和。

## 2.6 周期信号的傅里叶级数展开

### 一、傅里叶级数展开的定义

将一个周期信号分解为一个直流分量和一系列复指数信号分量之和的过程被称为傅里叶级数展开。

周期信号  $f(t)$  的傅里叶级数展开式为：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

其中：

$\omega_0$ :  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , 周期  $T$  确定了  $\omega_0$  就确定了。

$c_k$ : 就是傅里叶系数,  $c_0$  是直流分量。

### 二、傅里叶级数展开的几何意义

傅里叶级数展开的本质就是用一系列角速度为  $\omega = k\omega_0$  的旋转向量  $c_k e^{jk\omega_0 t}$  来合成周期信号。旋转向量在  $t=0$  时刻对应的向量就是傅里叶系数  $c_k$ , 如图 2-85 所示。

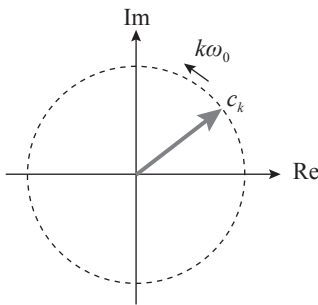


图 2-85 傅里叶系数的几何意义

通常  $c_k$  是个复数。

如何求傅里叶系数呢？

### 三、傅里叶系数计算公式

傅里叶系数的计算公式如下：

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

这个公式是怎么得来的呢？

(1) 将傅里叶级数展开式中  $k=m$  那一项单独列出来：

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = c_m e^{jm\omega_0 t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

(2) 两端乘以  $e^{-jm\omega_0 t}$ ：

$$f(t) e^{-jm\omega_0 t} = c_m e^{jm\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} = c_m + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{\infty} c_k e^{j(k-m)\omega_0 t}$$

(3) 在基波周期内对两端进行积分：

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} c_m dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq m}}^{\infty} c_k e^{j(k-m)\omega_0 t} dt$$

根据复指数信号的正交性，上式中求和项的积分为 0，因此：

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \int_{-T/2}^{T/2} c_m dt = c_m T$$

(4) 求出  $c_m$ ：

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

将  $m$  更换为  $k$ ，即得傅里叶系数的计算公式。

### 四、方波信号的傅里叶系数

下面以方波信号为例，求其傅里叶系数。

方波信号  $x(t)$  的波形如图 2-86 所示，周期为  $T$ ，幅度为 1，脉宽为  $\tau$ 。对方波来讲，占空比为  $1/2$ ，因此： $T=2\tau$ 。

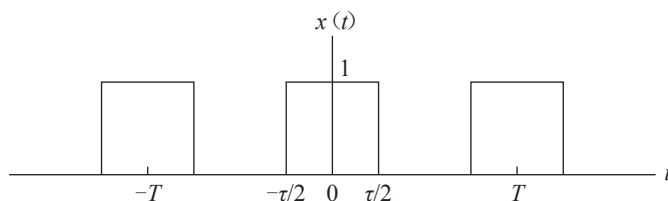


图 2-86 方波信号

(1) 先来求  $c_0$

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} 1 dt = 0.5$$

这说明幅度为 1 的方波信号的直流分量为 0.5。

(2) 再来求  $c_k$

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} (\cos k\omega_0 t - j \sin k\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos k\omega_0 t dt - j \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin k\omega_0 t dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos k\omega_0 t dt \\
 &= \frac{2}{k\omega_0 T} \int_0^{\tau/2} \cos k\omega_0 t (k\omega_0 t) \\
 &= \frac{2}{k\omega_0 T} \sin(k\omega_0 t) \Big|_0^{\tau/2} \\
 &= \frac{\sin(k\omega_0 \tau / 2)}{k\omega_0 T / 2}
 \end{aligned} \tag{2-7}$$

由:  $\omega_0 = 2\pi/T$ , 得:  $\omega_0 T = 2\pi$

又因为:  $T = 2\tau$ , 所以:  $\omega_0 2\tau = 2\pi$ , 得到:  $\omega_0 \tau = \pi$

代入式 (2-7), 得

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi/2} = \frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right)$$

#### TIPS: sinc 函数的定义

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

$\sin(\pi x)$  是个等幅振荡信号,  $\sin(\pi x)/\pi x$  是个振荡衰减信号, 如图 2-87 所示。

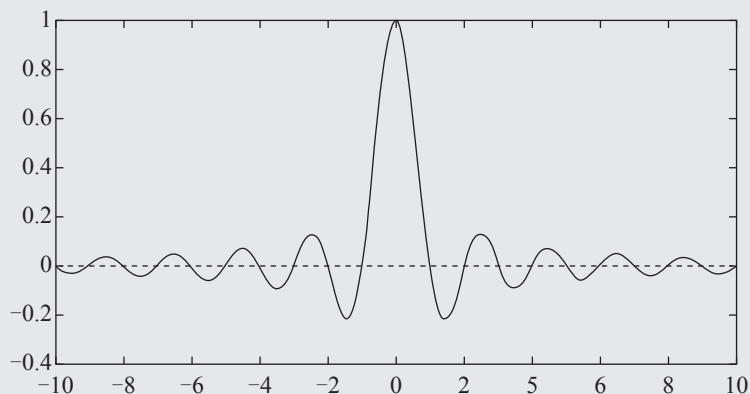


图 2-87 sinc 函数

因为： $\sin(\pi x)$  在  $x=\pm 1, \pm 2, \pm 3\cdots$  时的值为 0

所以：

$\text{sinc}(x)=0$  (当  $x=\pm 1, \pm 2, \pm 3\cdots$  时)

因为：当  $x\rightarrow 0$  时， $\sin(\pi x) \rightarrow \pi x$ ， $\text{sinc}(x) \rightarrow 1$

所以：

$\text{sinc}(x)=1$  (当  $x=0$  时)

## 五、周期矩形信号的傅里叶系数

在方波信号的傅里叶系数推导过程中，我们用  $\tau$  表示脉冲的宽度，用  $T$  表示脉冲的周期，得出傅里叶系数的表达式：

$$c_k = \frac{\sin(k\omega_0\tau/2)}{k\omega_0T/2}$$

回顾整个推导过程可以发现，这个结果对幅度为 1、脉宽为  $\tau$ 、周期为  $T$  的周期矩形信号也是适用的。

因为： $\omega_0=2\pi/T$ ，所以： $\omega_0T=2\pi$

假定占空比为  $1/n$ ，即： $T=n\tau$ ，所以： $\omega_0n\tau=2\pi$ ，得到： $\omega_0\tau=2\pi/n$ ，代入上面的傅里叶系数表达式，得

$$c_k = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sin(k\pi/n)}{k\pi/n} = \frac{1}{n} \text{sinc}\left(\frac{k}{n}\right)$$

至此我们得到了幅度为 1、脉宽为  $\tau$ 、占空比为  $1/n$  的周期矩形信号的傅里叶系数:

$$c_k = \frac{1}{n} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{n} \right)$$

从上式可以看出: 幅度为 1 的周期矩形信号的傅里叶系数只与占空比有关。

当占空比为  $1/2$ , 也就是  $n=2$  时, 代入得到的就是幅度为 1 的方波信号的傅里叶系数。

## 2.7 周期信号的离散谱

构成周期信号的所有复指数信号成分可以用傅里叶系数来描述, 但是傅里叶系数不够直观, 有没有什么办法可以把傅里叶系数直观地呈现出来呢? 这就引出了频谱。

### 一、两类频谱

#### 1. 三维频谱

以频率为横轴, 将所有  $c_k$  画到  $\omega=k\omega_0$  处与横轴垂直的复平面上, 就得到了三维频谱, 如图 2-88 所示。

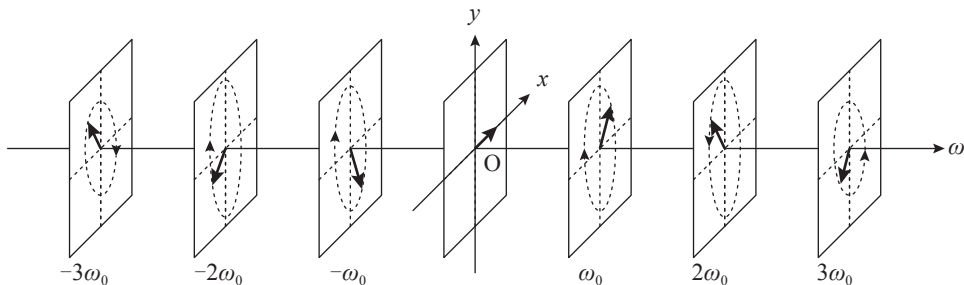


图 2-88 三维频谱

接着前面的例子, 周期为 1s 的方波信号, 其三维频谱如图 2-89 所示。

仔细观察可以发现: 方波信号的傅里叶系数  $c_k$  是实数, 不是复数, 因此只需画出实轴和频率轴即可, 如图 2-90 所示。

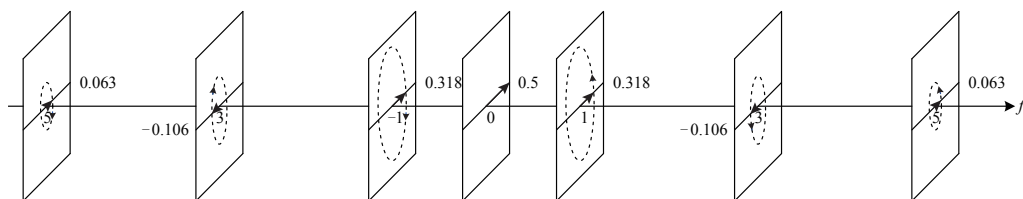


图 2-89 方波信号的三维频谱

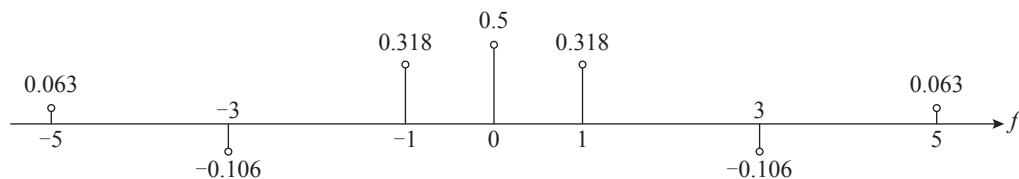


图 2-90 方波信号的三维频谱（只画实轴和频率轴）

需要指出的是，虽然在  $c_k$  是实数的情况下三维频谱只画了两维，但本质上还是三维频谱，只是虚轴没有画出来而已。注意与后面讲到的幅度谱区分开。

三维频谱非常直观，但绘制起来不方便，很多书中都是使用幅度频谱和相位频谱来进行频谱分析。

## 2. 幅度频谱和相位频谱

### 1) 幅度谱

以频率为横轴，以幅度为纵轴，将所有  $c_k$  的幅度（也就是模）画到一张图中，这就是幅度谱。

周期为 1s 的方波信号幅度谱如图 2-91 所示。

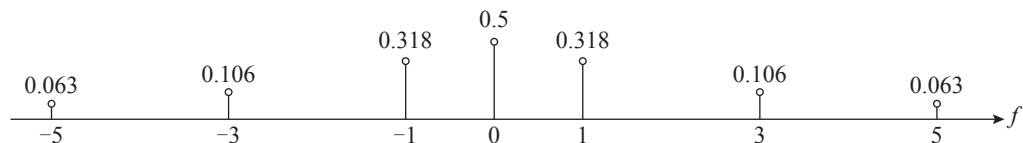


图 2-91 周期为 1s 的方波信号幅度谱

### 2) 相位谱

以频率为横轴，以初相为纵轴，将所有  $c_k$  的初相画到一张图中，这就是相位谱。

周期为 1s 的方波信号相位谱如图 2-92 所示。

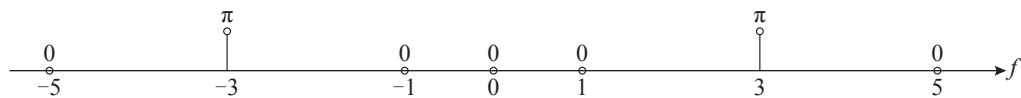


图 2-92 周期为 1s 的方波信号相位谱

## 二、常用周期信号的频谱

### 1. 余弦信号的频谱

余弦信号：

$$f(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

#### 1) 三维频谱

余弦信号的三维频谱如图 2-93 所示。

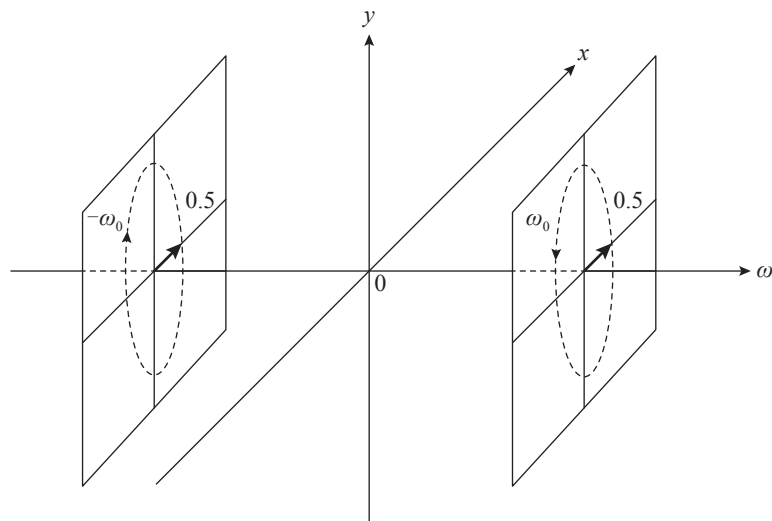


图 2-93 余弦信号的三维频谱图

#### 2) 幅度谱

余弦信号的幅度谱如图 2-94 所示。

#### 3) 相位谱

余弦信号的相位谱如图 2-95 所示。



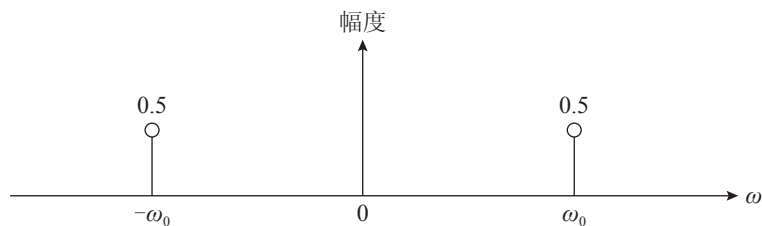


图 2-94 余弦信号的幅度谱

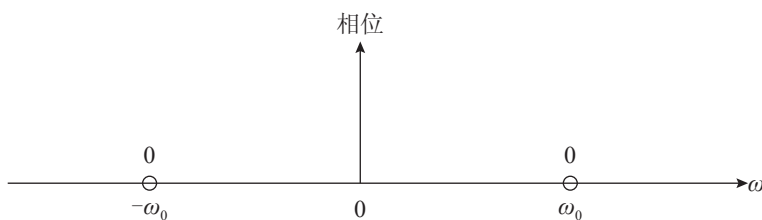


图 2-95 余弦信号的相位谱

## 2. 正弦信号的频谱

正弦信号：

$$f(t) = \sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) = -\frac{j}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{j}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

### 1) 三维频谱

正弦信号的三维频谱如图 2-96 所示。

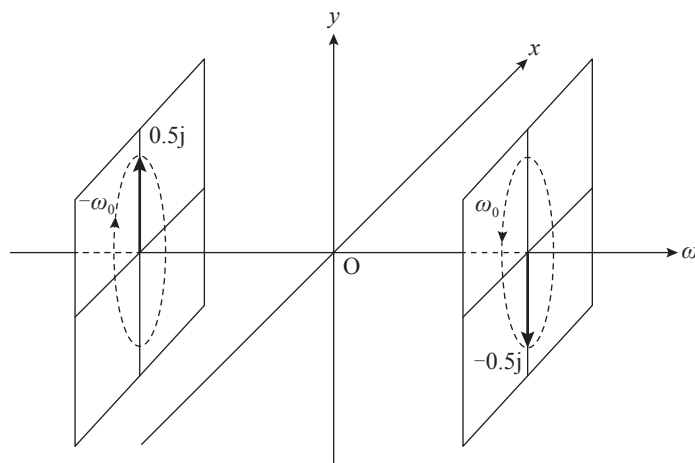


图 2-96 正弦信号的三维频谱图

## 2) 幅度谱

正弦信号的幅度谱如图 2-97 所示。

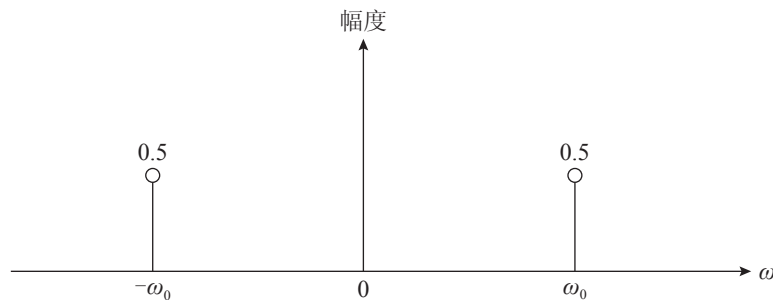


图 2-97 正弦信号的幅度谱

## 3) 相位谱

正弦信号的相位谱如图 2-98 所示。

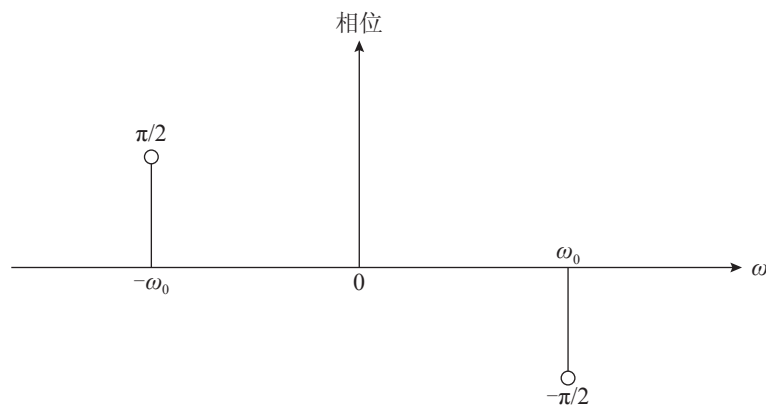


图 2-98 正弦信号的相位谱

## 3. 方波信号的频谱

周期为 1s 的方波信号如图 2-99 所示。

周期： $T=1$ ，脉冲宽度： $\tau=0.5$ ，占空比： $1/n=\tau/T=1/2$

根据周期矩形信号傅里叶系数表达式：

$$c_k = \frac{1}{n} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{n} \right)$$

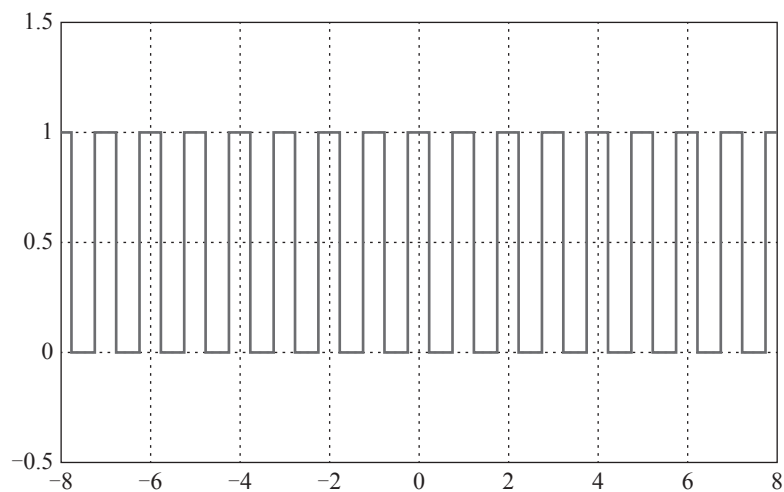


图 2-99 周期为 1s 的方波信号波形

将  $n=2$  代入, 得

$$c_k = \frac{1}{2} \text{sinc} \left( \frac{k}{2} \right)$$

以频率为横轴, 傅里叶系数  $c_k$  为纵轴, 画出其三维频谱, 如图 2-100 所示。

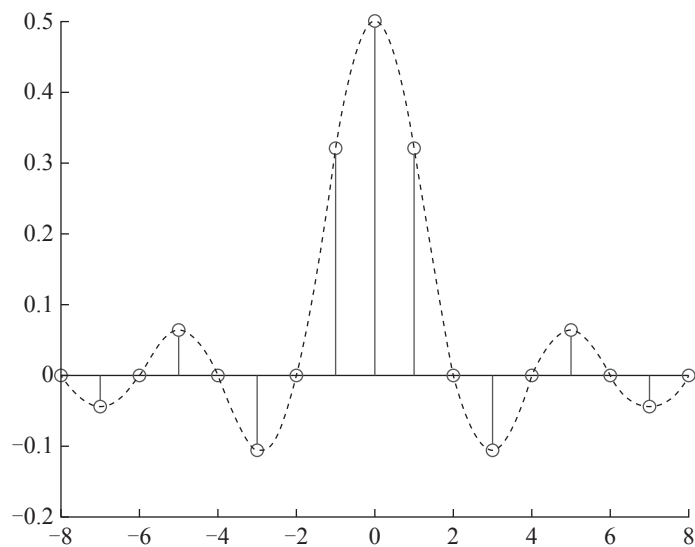


图 2-100 方波信号的频谱图

横轴的单位是  $\omega_0$ ，也就是说坐标轴上的  $k$  对应的频率为  $k\omega_0$ ， $k$  和  $k+1$  对应的频率间隔为基波频率  $\omega_0$ 。换句话说，谱线之间的频率间隔就是基波频率。

其中： $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ， $T$  是周期信号的周期。

值得注意的是：只有  $c_k$  为实数的情况下才能这样画三维频谱。

仔细观察可以发现：对于幅度为 1、周期为 1s 的方波信号，其离散谱就是对  $\frac{1}{2} \text{sinc}\left(\frac{1}{2}f\right)$  的采样，采样间隔为  $f_0$ 。

#### 4. 周期矩形信号的频谱

周期矩形信号的傅里叶系数：

$$c_k = \frac{1}{n} \text{sinc}\left(\frac{k}{n}\right)$$

将

$$n = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau f_0}$$

代入上式 sinc 函数中，得

$$c_k = \frac{1}{n} \text{sinc}(\tau k f_0)$$

也就是说：

幅度为 1、脉宽为  $\tau$ 、占空比为  $1/n$  的周期矩形信号的离散谱就是对  $\frac{1}{n} \text{sinc}(\tau f)$  的采样，采样间隔为  $f_0$ 。

下面接着前面周期方波信号的例子。保持脉宽不变，逐步增大周期，得到不同占空比的周期矩形信号，对其频谱进行对比。

##### 1) 占空比为 1/4 的周期矩形信号

保持脉宽不变，周期增大一倍，得到占空比为 1/4 的周期矩形信号，如图 2-101 所示。

周期： $T=2$ ，脉冲宽度： $\tau=0.5$ ，占空比： $1/n=\tau/T=1/4$

根据周期矩形信号傅里叶系数表达式：

$$c_k = \frac{1}{n} \text{sinc}\left(\frac{k}{n}\right)$$

将  $n=4$  代入, 得

$$c_k = \frac{1}{4} \text{sinc}\left(\frac{k}{4}\right)$$

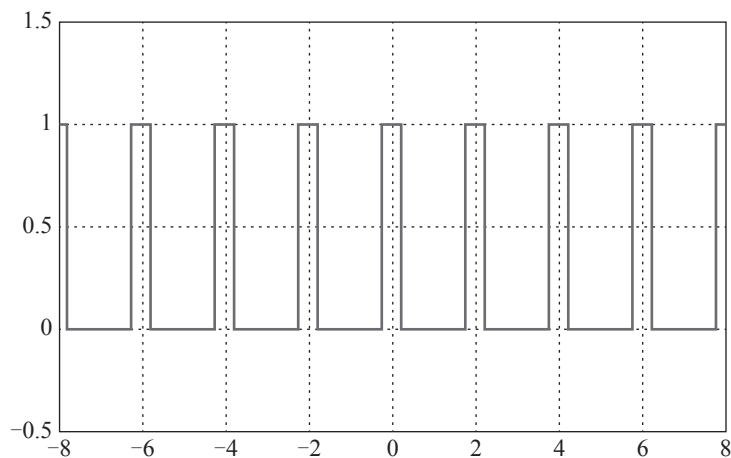


图 2-101 占空比为 1/4 的周期矩形信号

其三维频谱如图 2-102 所示。

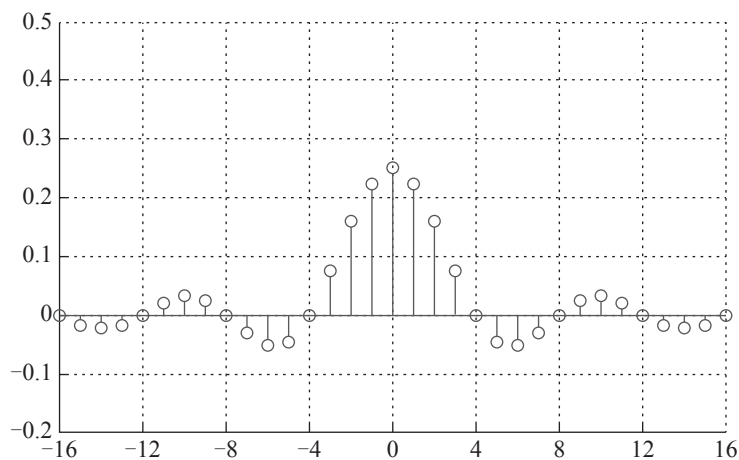


图 2-102 占空比为 1/4 的周期矩形信号的频谱

由于周期增大一倍, 基波频率减小一半, 谱线间隔也随之减小一半。

## 2) 占空比为 1/8 的周期矩形信号

保持脉宽不变, 周期再增大一倍, 得到占空比为 1/8 的周期矩形信号, 如图 2-103 所示。

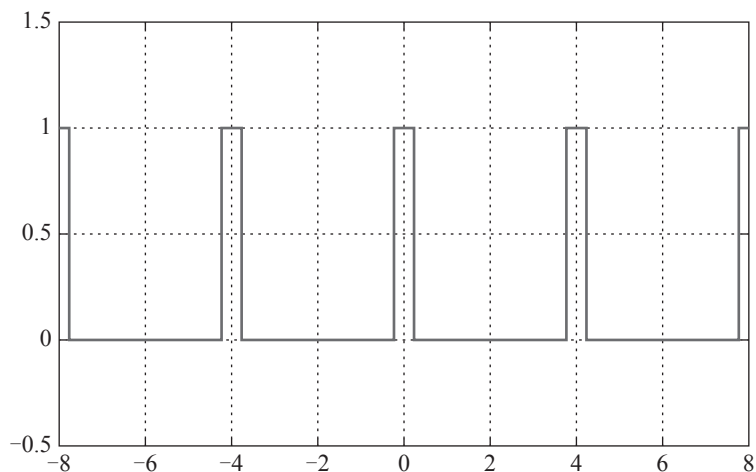


图 2-103 占空比为 1/8 的周期矩形信号

周期： $T=4$ ，脉冲宽度： $\tau=0.5$ ，占空比： $1/n=\tau/T=1/8$

根据周期矩形信号傅里叶系数表达式：

$$c_k = \frac{1}{n} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{n} \right)$$

将  $n=8$  代入，得

$$c_k = \frac{1}{8} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{8} \right)$$

其三维频谱如图 2-104 所示。

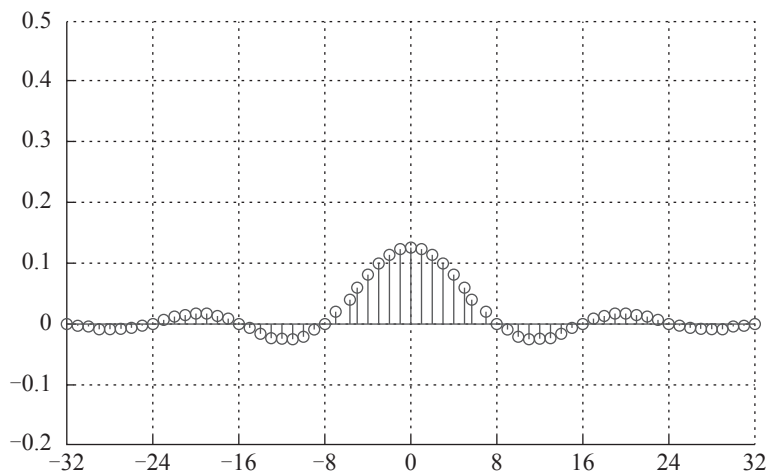


图 2-104 占空比为 1/8 的周期矩形信号的频谱

由于周期又增大一倍，基波频率又减小一半，谱线间隔也随之减小一半。

### 3) 频谱对比

将脉宽相同、占空比不同的三个周期矩形信号的波形画到一起，如图 2-105 所示。

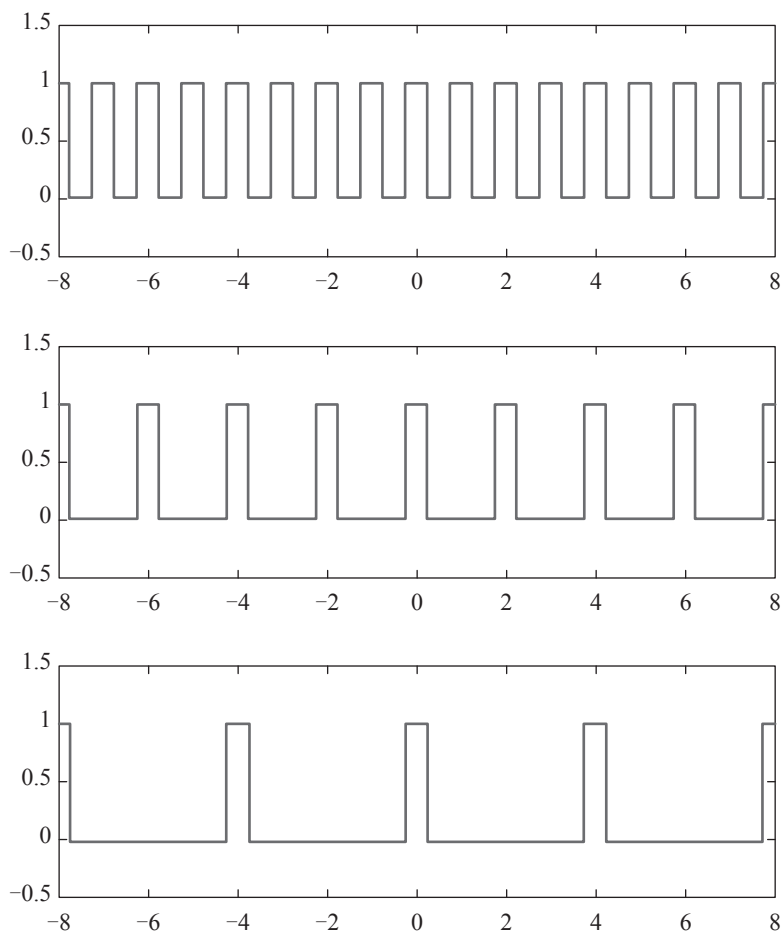


图 2-105 不同占空比的周期矩形信号波形对比

对应的频谱也画到一起，如图 2-106 所示。

很明显，周期每扩大一倍，谱线的数量也扩大一倍，谱线间隔和谱线长度都会减小一半。随着周期的不断增大，谱线间隔越来越小，谱线长度也越来越短。

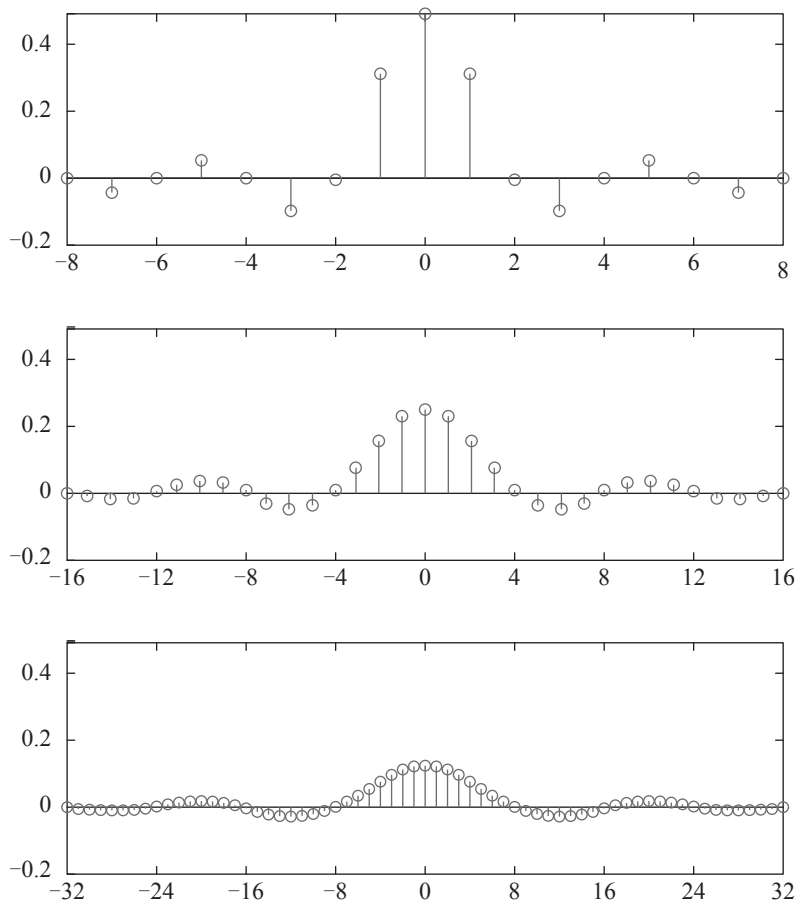


图 2-106 不同占空比的周期矩形信号频谱对比

注：虽然三个频谱图横轴的刻度不同，但是坐标轴相同位置对应的频率是相同的。

## 2.8 非周期信号的连续谱

下面以非周期矩形信号为例，来研究一下非周期信号的频谱。

### 一、非周期矩形脉冲信号的离散谱

对于周期矩形信号，保持脉宽  $\tau$  不变，当周期  $T$  趋于无穷大时，周期矩形信号将变成非周期矩形脉冲信号，如图 2-107 所示。换句话说，非周期矩形脉冲信号可以看



成是周期矩形信号的周期趋于无穷大得到的。

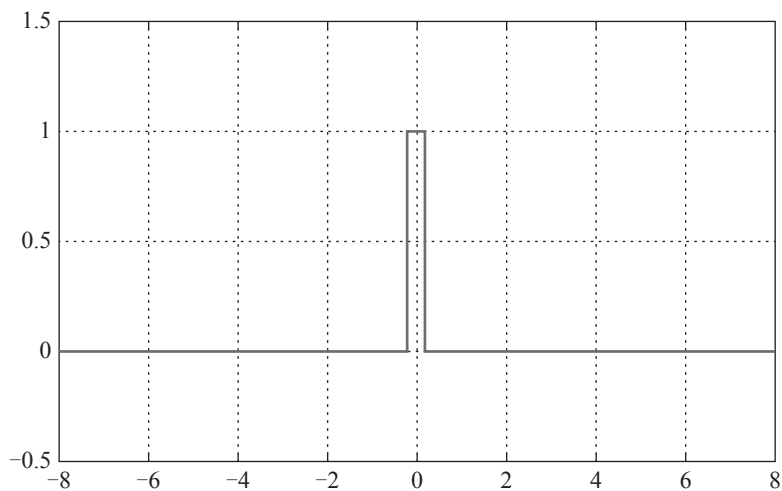


图 2-107 矩形脉冲信号

根据周期矩形信号傅里叶系数表达式：

$$c_k = \frac{1}{n} \operatorname{sinc}\left(\frac{k}{n}\right)$$

$T$  趋于无穷大时， $n$  也趋于无穷大，因此频谱的谱线间隔和长度都将趋近于零，如图 2-108 所示。

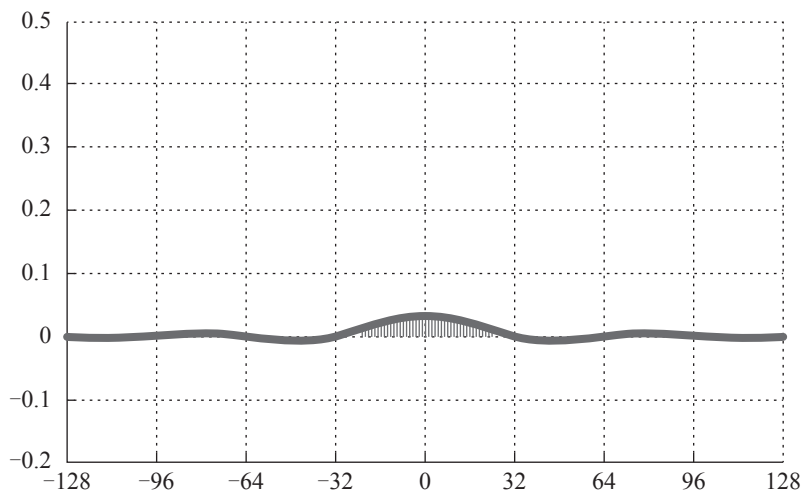


图 2-108 矩形脉冲信号的离散谱

这给非周期信号的频谱分析带来了很大麻烦。

有没有什么办法可以解决这给问题呢？

前面我们分析周期矩形信号的频谱时，发现这样一个规律：周期每扩大一倍，谱线数量也扩大一倍，谱线间隔和谱线长度都会减小一半。设想一下：如果我们用谱线间隔去除谱线长度会怎么样呢？二者的商不会随周期的增大而变化。

这就引出了连续谱。

## 二、非周期矩形脉冲信号的连续谱

对于周期矩形信号来讲，谱线的长度等于  $c_k$ ，谱线的间隔等于基波频率  $f_0$ ，二者的商就等于： $c_k/f_0$ 。如果以  $kf_0 \sim (k+1)f_0$  为底边，画一个宽为  $f_0$ 、面积为  $c_k$  的矩形， $c_k/f_0$  就是该矩形的高，如图 2-109 所示。

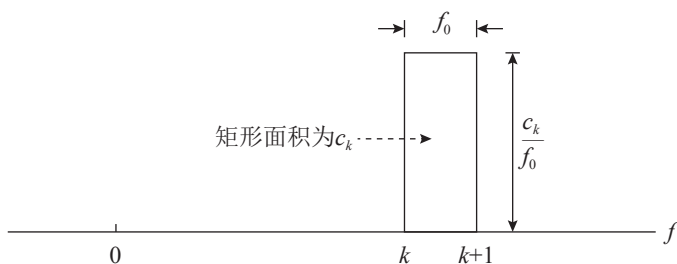


图 2-109 用矩形面积表示傅里叶系数

把周期矩形信号所有的  $c_k$  都用矩形面积表示出来，并将所有矩形顶端连接起来，将得到一条阶梯状折线。下面看一下这条阶梯状折线。

先来推导一下  $c_k/f_0$  表达式。

由周期矩形信号傅里叶系数表达式：

$$c_k = \frac{1}{n} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{n} \right)$$

得：

$$\frac{c_k}{f_0} = \frac{1}{nf_0} \operatorname{sinc} \left( \frac{k}{n} \right)$$

将:

$$n = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{\tau f_0}$$

代入, 得

$$\frac{c_k}{f_0} = \tau \operatorname{sinc}(\tau k f_0)$$

也就是说:  $c_k/f_0$  的取值就是对  $\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$  的平顶采样, 采样间隔为  $f_0$ 。

将幅度为 1、脉宽  $\tau=0.5$ 、周期分别为 1、2、4 的周期矩形信号的  $c_k/f_0$  阶梯状折线和离散谱画在一起, 如图 2-110 所示。

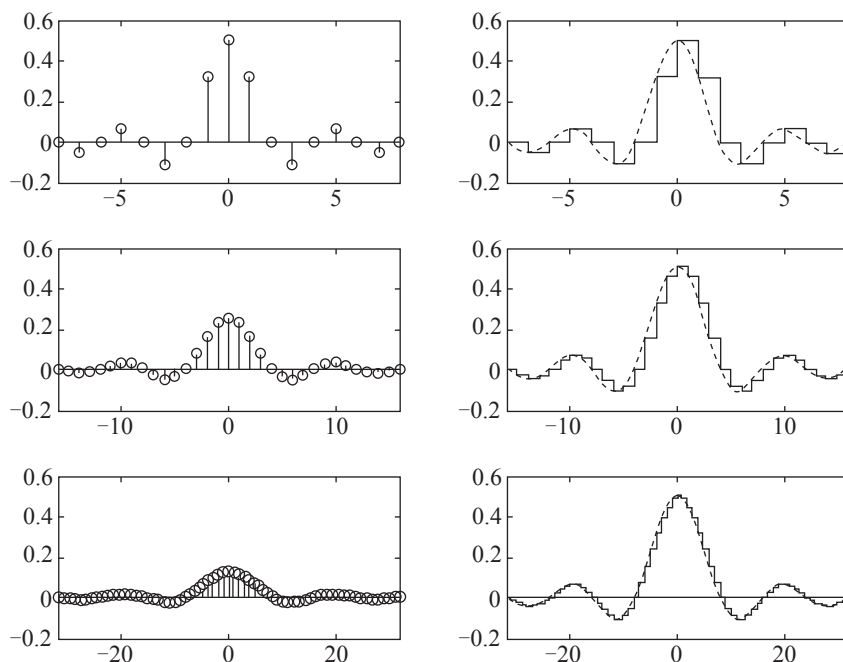


图 2-110 不同周期的周期矩形信号的离散谱(左)和阶梯状折线(右)

很明显, 随着周期的增大, 阶梯状折线逐渐逼近  $\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$  这条曲线。可以想象: 当  $\tau \rightarrow \infty$  时, 周期矩形信号演变为非周期矩形脉冲信号, 二者将完全重合。

由此引出定义:

幅度为 1、脉宽为  $\tau$  的非周期矩形脉冲信号的连续频谱是:  $X(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$

幅度为 1、脉宽  $\tau=0.5$  的矩形脉冲信号的连续谱如图 2-111 所示。

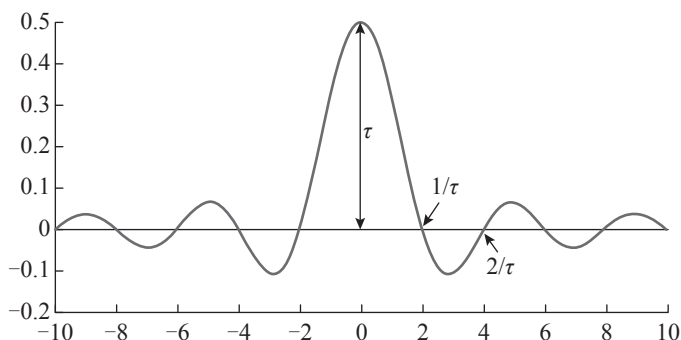


图 2-111 非周期矩形信号的连续谱

## 2.9 傅里叶变换

前面以矩形脉冲信号为例介绍了非周期信号的连续谱。如果是一般的非周期信号，如何求其连续谱呢？这就引出了傅里叶变换。

### 一、傅里叶正变换

将推导非周期矩形信号连续谱的方法推广到一般非周期信号，如图 2-112 所示。

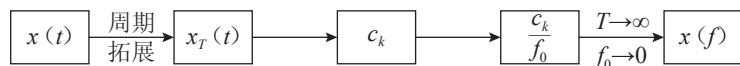


图 2-112 非周期信号连续谱的推导方法

- (1) 以  $T$  为周期，对非周期信号  $x(t)$  进行周期性拓展得到周期信号  $x_T(t)$ 。
- (2) 求出周期信号  $x_T(t)$  的傅里叶系数。

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

将  $T=1/f_0$ ,  $\omega_0=2\pi f_0$  代入  
得

$$c_k = f_0 \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt$$

(3) 由  $c_k$  求  $c_k/f_0$

$$\frac{c_k}{f_0} = \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk2\pi f_0 t} dt$$

(4)  $T$  趋于无穷大时,  $f_0$  趋于 0,  $c_k/f_0$  演变为  $X(f)$ ,  $x_T(t)$  演变为  $x(t)$ ,  $kf_0$  演变为  $f$ , 由此得到非周期信号  $x(t)$  的连续谱:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

这个式子就是傅里叶正变换。

## 二、傅里叶逆变换

如何由连续谱  $X(f)$  求对应的非周期信号  $x(t)$  呢? 方法如图 2-113 所示。

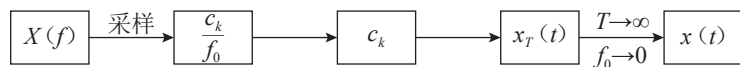


图 2-113 由连续谱求对应非周期信号的方法

(1) 根据连续谱  $X(f)$  的含义, 只要以  $f_0$  为间隔对  $X(f)$  进行采样, 采样结果乘以  $f_0$ , 即可得到一个周期信号的傅里叶系数  $c_k$ , 该周期信号的周期  $T=1/f_0$ 。

$$c_k = f_0 X(kf_0)$$

(2) 已知  $c_k$ , 利用傅里叶级数展开式, 就可以求得周期信号  $x_T(t)$ 。

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}$$

将  $c_k = f_0 X(kf_0)$  代入, 得:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi f_0 t} f_0$$

(3) 令周期  $T$  趋于无穷大, 即可得到非周期信号  $x(t)$ 。

$T$  趋于无穷大, 也就意味着  $f_0$  趋于 0,  $kf_0$  趋于  $f$

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi f_0 t} f_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

即

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

这个式子就是傅里叶逆变换。

上述推导过程中用到了一个微积分的知识，那就是： $f(x)$  的积分可以用一系列的矩形面积来逼近，矩形的宽为  $\Delta x$ ，高为  $f(k\Delta x)$ 。如图 2-114 所示。

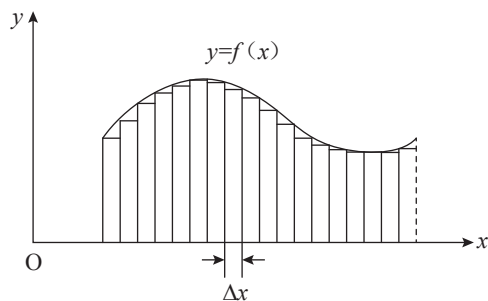


图 2-114 函数的积分

当  $\Delta x \rightarrow 0$  时，所有矩形的面积之和就等于  $f(x)$  的积分。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\Delta x) \Delta x$$

由此式很容易得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df = \lim_{f_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(kf_0) e^{jk2\pi f_0 t} f_0$$

### 三、傅里叶变换

傅里叶正变换：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

傅里叶逆变换：

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

二者被统称为傅里叶变换。

上面的傅里叶变换表达式中使用的变量是  $f$ ，有时候傅里叶变换表达式也使用  $\omega$  作为变量。由  $\omega=2\pi f$ ，得到： $f=\omega/2\pi$ ，代入上面的傅里叶变换表达式，很容易得到变量为  $\omega$  的傅里叶变换表达式。

傅里叶正变换：

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

傅里叶逆变换：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

## 四、非周期信号的傅里叶变换

### 1. 矩形脉冲信号

矩形脉冲信号的傅里叶变换是 sinc 函数。

脉冲幅度为 1、脉冲宽度为  $\tau$  的矩形脉冲信号及其傅里叶变换如图 2-115 所示。

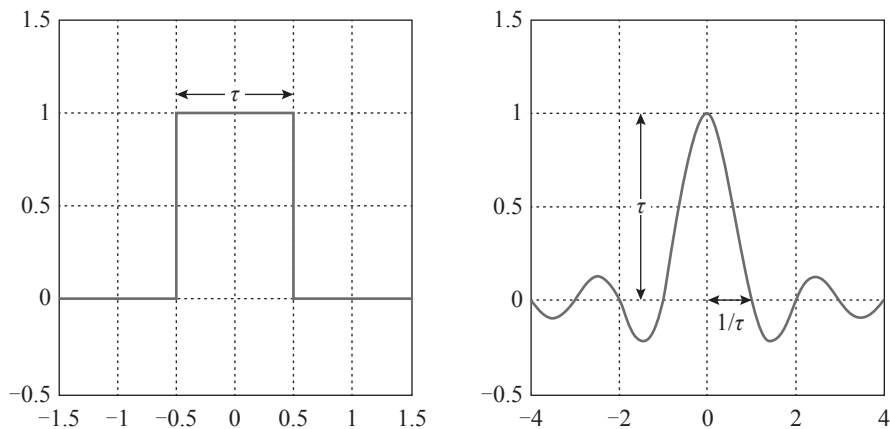


图 2-115 矩形脉冲信号（左）及其傅里叶变换（右）

### 2. sinc 脉冲信号

sinc 脉冲信号  $\tau \text{sinc}(\tau t)$  的傅里叶变换是矩形函数，如图 2-116 所示。

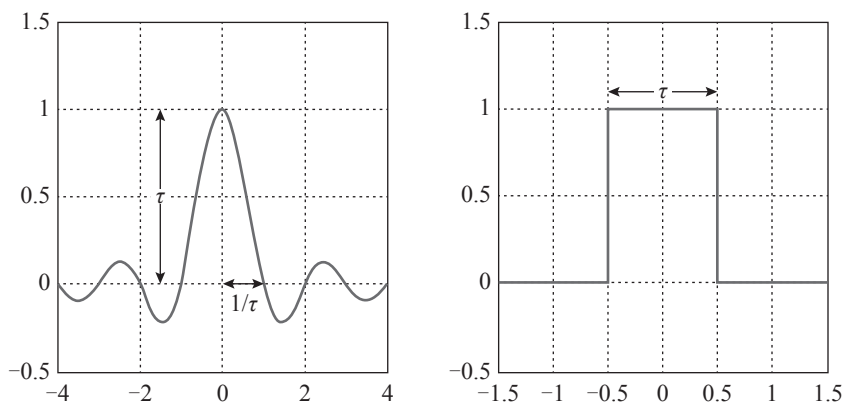


图 2-116 sinc 脉冲信号 (左) 及其傅里叶变换 (右)

### 3. 单位冲激信号

前面介绍了 sinc 脉冲信号  $\tau \text{sinc}(\tau t)$  的傅里叶变换, 只要令脉冲幅度  $\tau$  趋于无穷大, 就可以得到单位冲激信号的傅里叶变换。

当  $\tau$  趋于无穷大时, 幅度为  $\tau$  的 sinc 脉冲信号将演变成单位冲激信号, 如图 2-117 所示。

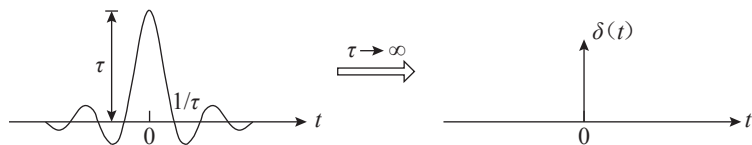


图 2-117 sinc 脉冲信号演变成单位冲激信号

其频谱将演变成一个常数, 如图 2-118 所示。

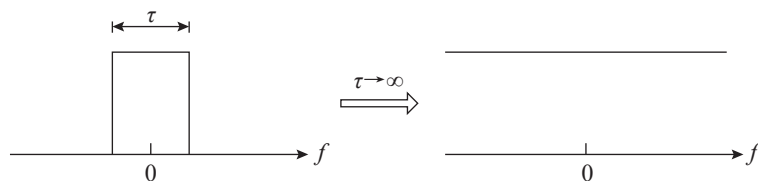


图 2-118 矩形函数演变为常数

由此我们得到了单位冲激信号及其傅里叶变换, 如图 2-119 所示。



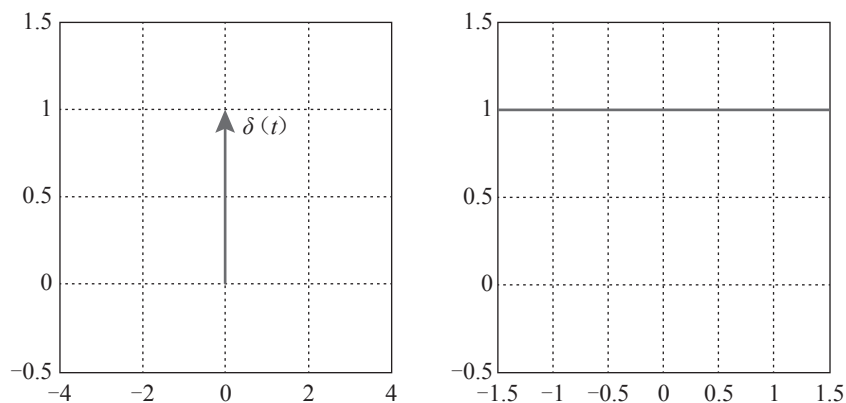


图 2-119 单位冲激信号（左）及其傅里叶变换（右）

**TIPS: 单位冲激函数**

一个矩形脉冲，持续时长为  $\Delta$ ，幅度为  $1/\Delta$ ，面积为 1。当  $\Delta$  趋于 0 时，矩形脉冲将演变为一个单位冲激信号  $\delta(t)$ ，如图 2-120 所示。

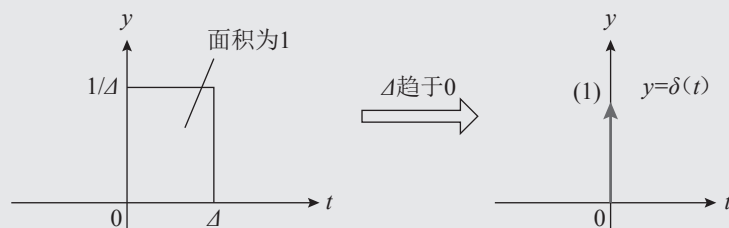


图 2-120 矩形脉冲信号演变成单位冲激信号

单位冲激信号满足如下两个条件：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0, t \neq 0 \end{cases}$$

从上面的定义可以看出，单位冲激信号有 3 个特点：

- 幅度：  $t=0$  时幅度无穷大，  $t \neq 0$  时幅度为 0。
- 宽度：为 0。
- 面积：为 1。

单位冲激信号除了可以由矩形脉冲信号演变而来，也可以由其他脉冲信号演变而来，例如 sinc 脉冲信号  $\tau \text{sinc}(\tau t)$ ，如图 2-121 所示。

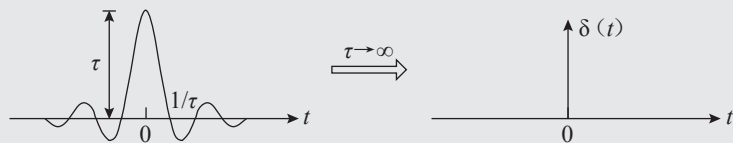


图 2-121 sinc 脉冲信号演变成单位冲激信号

下面我们再利用傅里叶变换公式推导一下单位冲激信号的傅里叶变换。

将  $x(t)=\delta(t)$  代入傅里叶变换公式：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

根据单位冲激函数的定义我们知道：

只有  $t=0$  时， $\delta(t)$  才不为 0，而  $t=0$  时， $e^{-j2\pi ft} = e^0 = 1$

代入上式后得到：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

由此得出：

$$F[\delta(t)] = 1$$

## 五、周期信号的傅里叶变换

傅里叶变换是由非周期信号引出的，对周期信号是否适用呢？如果对周期信号也适用，则周期信号和非周期信号的频谱分析就可以统一到傅里叶变换这一种方法了。

先来看一下直流信号的傅里叶变换。

### 1. 直流信号的傅里叶变换

前面介绍了矩形脉冲信号的傅里叶变换，只要令脉宽  $\tau$  趋于无穷大，就可以得到直流信号的傅里叶变换。

幅度为 1、脉宽为  $\tau$  的矩形脉冲信号，当  $\tau$  趋于无穷大时，将演变成直流信号 1，如图 2-122 所示。

其傅里叶变换  $X(f)=\tau \operatorname{sinc}(\tau f)$  将演变为一个单位冲激函数： $\delta(f)$ ，如图 2-123 所示。

由此我们得到：幅度为 1 的直流信号的傅里叶变换是位于  $f=0$  的单位冲激函数  $\delta(f)$ ，如图 2-124 所示。

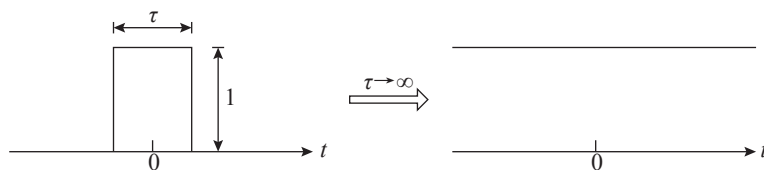


图 2-122 矩形脉冲信号演变成直流信号

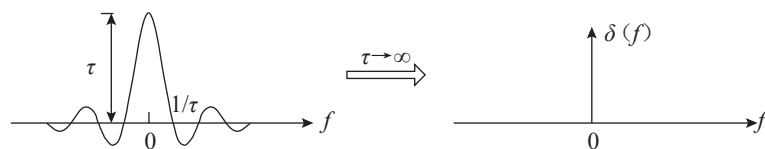


图 2-123 sinc 函数演变为单位冲激函数

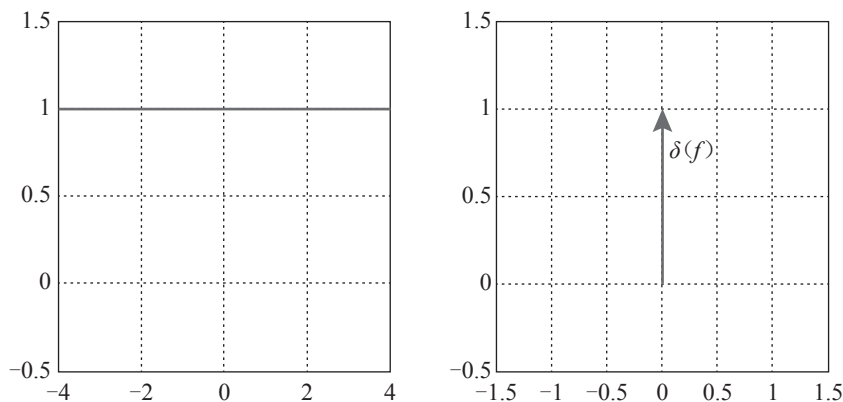


图 2-124 直流信号（左）及其傅里叶变换（右）

要想用傅里叶变换的公式直接推导出  $\mathcal{F}[1] = \delta(f)$ ，还真有点难，我们换个角度：假定某个信号的频谱是  $\delta(f)$ ，求这个信号。

根据傅里叶逆变换的公式：

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df$$

由单位冲激函数的定义我们知道：

只有  $f=0$  时， $\delta(f)$  才不为 0，而  $f=0$  时， $e^{-j2\pi ft} = e^0 = 1$

代入上式后得

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f) df = 1$$

由此得

$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(f)] = 1$$

进一步得到:

$$\mathcal{F}[1] = \delta(f)$$

## 2. 复指数信号的傅里叶变换

由

$$\mathcal{F}[1] = \delta(f)$$

可以得到:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f)$$

将  $f$  替换为  $f-f_0$ , 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f-f_0)$$

复指数信号  $e^{j2\pi f_0 t}$  的傅里叶变换:

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi(f-f_0)t} dt = \delta(f-f_0)$$

即

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f-f_0)$$

换句话说: 复指数信号  $e^{j2\pi f_0 t}$  的傅里叶变换是位于  $f=f_0$  的单位冲激函数  $\delta(f-f_0)$ , 如图 2-125 所示。

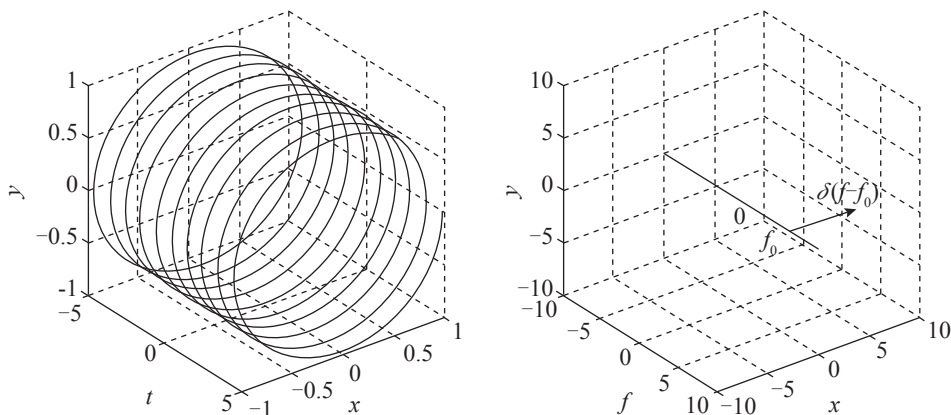


图 2-125 复指数信号 (左) 及其傅里叶变换 (右)

下面再来看一下余弦信号  $\cos 2\pi f_0 t$  的傅里叶变换。

### 3. 余弦信号的傅里叶变换

因为：

$$\cos 2\pi f_0 t = \frac{1}{2}(e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t})$$

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$$

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0)$$

所以：

$$\mathcal{F}[\cos 2\pi f_0 t] = \frac{1}{2}[\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

余弦信号及其傅里叶变换如图 2-126 所示。

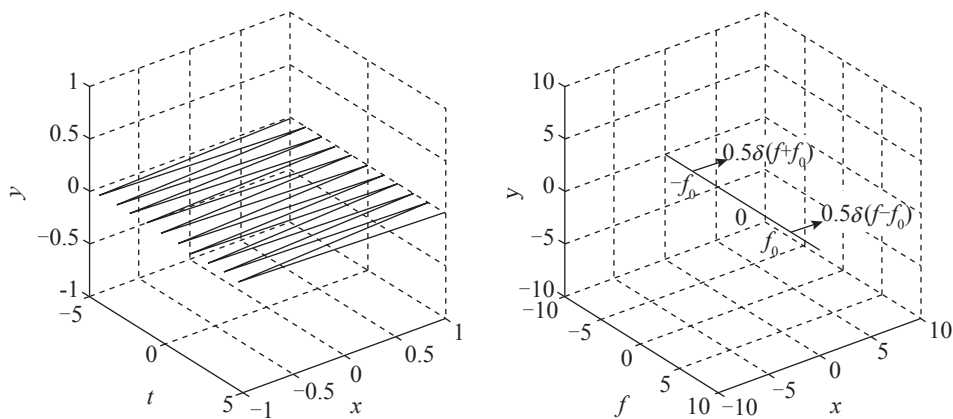


图 2-126 余弦信号（左）及其傅里叶变换（右）

下面看一下正弦信号  $\sin 2\pi f_0 t$  的傅里叶变换。

### 4. 正弦信号的傅里叶变换

因为：

$$\sin 2\pi f_0 t = -\frac{j}{2}(e^{j2\pi f_0 t} - e^{-j2\pi f_0 t})$$

$$\mathcal{F}[e^{j2\pi f_0 t}] = \delta(f - f_0)$$

$$\mathcal{F}[e^{-j2\pi f_0 t}] = \delta(f + f_0)$$

所以：

$$\mathcal{F}[\sin 2\pi f_0 t] = \frac{j}{2} [\delta(f + f_0) - \delta(f - f_0)]$$

正弦信号及其傅里叶变换如图 2-127 所示。

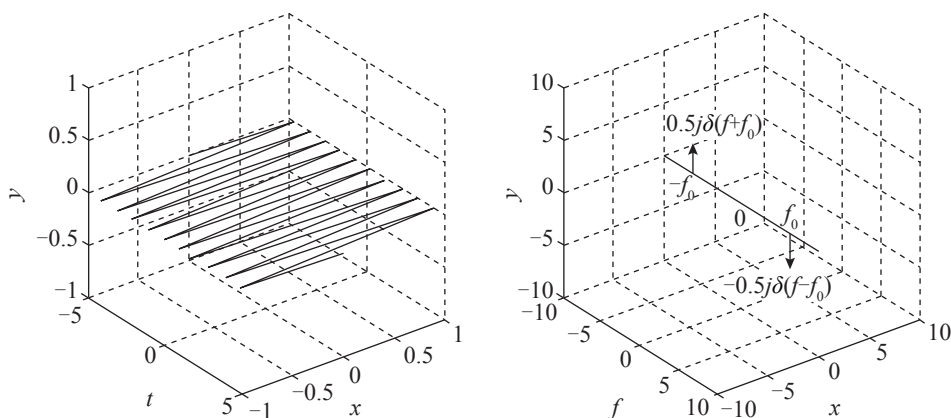


图 2-127 正弦信号（左）及其傅里叶变换（右）

### 5. 一般周期信号的傅里叶变换

根据傅里叶级数展开，周期信号可以分解为一系列复指数信号 $e^{jk2\pi f_0 t}$ 之和：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t}$$

根据傅里叶变换的定义：

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

将  $x(t)$  代入，得

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_0 t} \right) e^{-j2\pi ft} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt$$

其中积分部分就是求复指数信号 $e^{jk2\pi f_0 t}$ 的傅里叶变换。

复指数信号 $e^{j2\pi f_0 t}$ 的傅里叶变换在前面介绍过：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi ft} dt = \delta(f - f_0)$$

用  $kf_0$  替换  $f_0$ ，即可得到  $e^{jk2\pi f_0 t}$  的傅里叶变换：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} dt = \delta(f - kf_0)$$

代入后，得

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta(f - kf_0)$$

也就是说：

周期信号的傅里叶变换是由一系列的冲激函数构成，这些冲激位于信号的基波和各谐波频率处，冲激的强度是傅里叶系数  $c_k$ 。

周期为 1 秒的方波信号的傅里叶变换如图 2-128 所示。

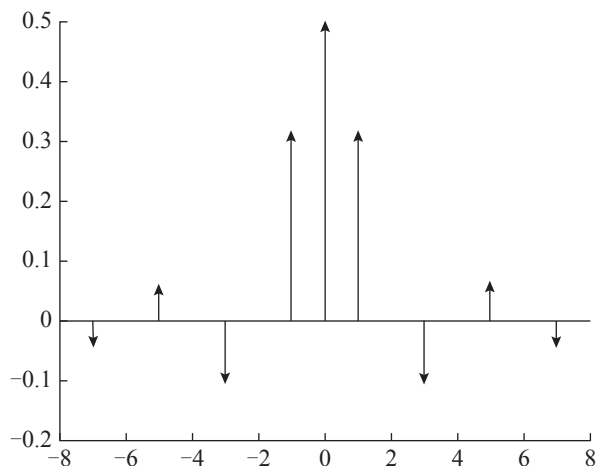


图 2-128 方波信号的傅里叶变换

## 六、傅里叶变换的对称性

前面讲了直流信号的傅里叶变换：

$\mathcal{F}[1] = \delta(f)$ ，即：“1 的傅里叶变换是单位冲激函数”。

又讲了单位冲激信号的傅里叶变换：

$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$ ，即：“单位冲激信号的傅里叶变换是 1”。

把这两个信号及其傅里叶变换画到同一张图中，可以发现二者具有很明显的对称关系，如图 2-129 所示。

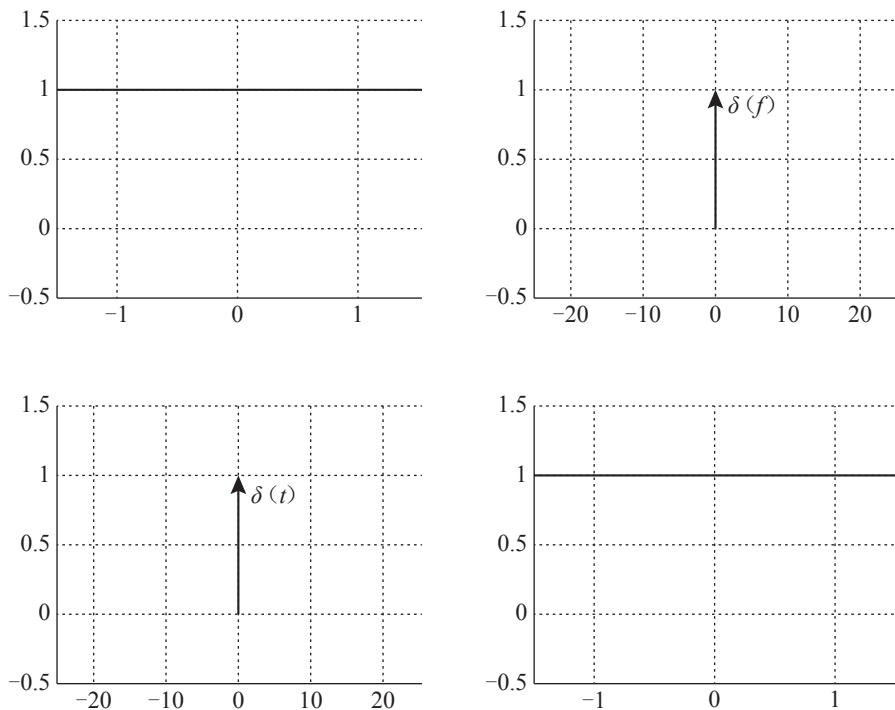


图 2-129 傅里叶变换的对称性 (1)

这就是傅里叶变换的对称性:

如果函数  $x(t)$  的傅里叶变换是  $y(f)$ , 则  $y(t)$  的傅里叶变换是  $x(-f)$ 。

换句话说就是:

若:  $\mathcal{F}[x(t)] = y(f)$  则:  $\mathcal{F}[y(t)] = x(-f)$

为什么傅里叶变换会有这种对称性呢?

我们来看一下傅里叶正、逆变换的表达式:

$$y(f) = \mathcal{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt \quad (\text{傅里叶正变换})$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[y(f)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(f) e^{j2\pi ft} df \quad (\text{傅里叶逆变换})$$

暂且抛开  $t$ 、 $f$ 、 $x(t)$  和  $y(t)$  的物理意义不谈, 只把  $x(t)$  和  $y(t)$  看作两个自变量不同的一般函数, 则傅里叶正变换和逆变换的表达式只差了一个负号。

由

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(f) e^{j2\pi ft} df$$



可得

$$x(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(f) e^{-j2\pi ft} df$$

将  $f$  和  $t$  对调:

$$x(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

上式的右端正好是  $y(t)$  的傅里叶变换表达式。

由此我们证明了:

$$x(-f) = F[y(t)]$$

更进一步, 如果函数  $x(t)$  是个偶函数:  $x(-f)=x(f)$ , 可以得到:

如果函数  $x(t)$  是个偶函数, 其傅里叶变换是  $y(f)$ , 则  $y(t)$  的傅里叶变换是  $x(f)$ 。

下面以矩形脉冲信号的傅里叶变换和 sinc 脉冲信号的傅里叶变换为例, 再看一下傅里叶变换的对称性, 如图 2-130 所示。

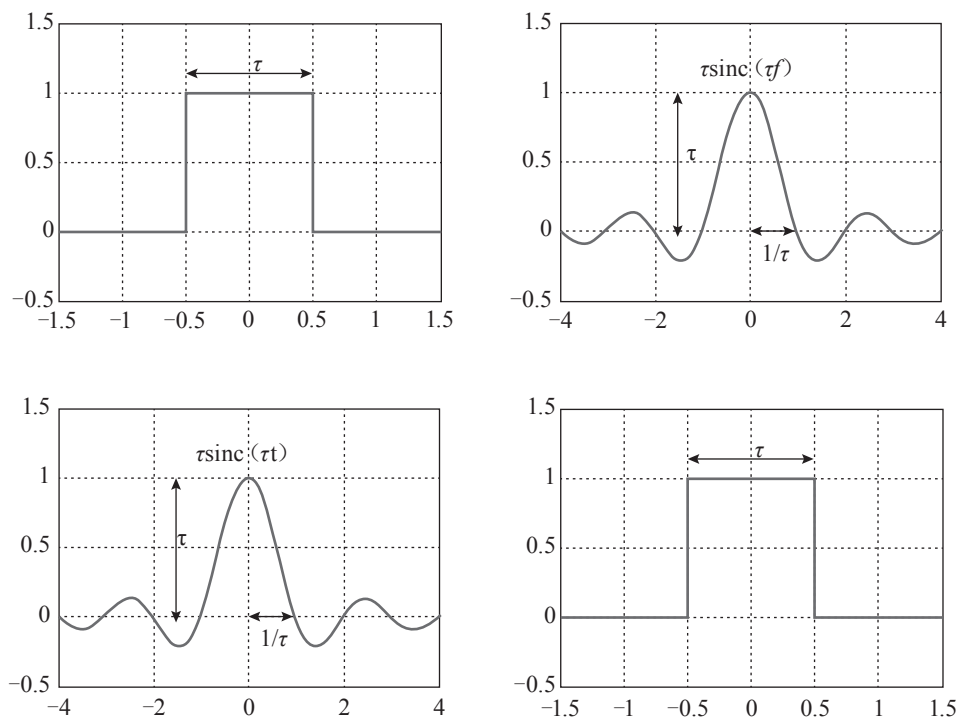


图 2-130 傅里叶变换的对称性 (2)

## 七、延迟信号的傅里叶变换

### 1. 傅里叶变换的时移特性

信号  $x(t-t_0)$  由  $x(t)$  延迟  $t_0$  时间得到。

若:  $\mathcal{F}[x(t)] = X(f)$

则:  $\mathcal{F}[x(t-t_0)] = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$

也就是说: 信号  $x(t)$  在时域中延迟  $t_0$  等价于在频域中乘以因子  $e^{-j2\pi f t_0}$ 。这就是傅里叶变换的时移特性。简单讲就是: 时域延迟等价于频域旋转。

将  $x(t)$  的频谱做一下旋转即可得到  $x(t-t_0)$  的频谱:

$f > 0$  部分, 顺时针旋转;

$f < 0$  部分, 逆时针旋转;

旋转的角度大小为  $|2\pi f t_0|$ , 与频率  $f$  成正比。

### 2. 傅里叶变换时移特性的证明

由傅里叶变换的定义, 得

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi f t} dt = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0)e^{-j2\pi f (t-t_0)} d(t-t_0)$$

令  $\tau = t - t_0$ , 得

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = e^{-j2\pi f t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j2\pi f \tau} d\tau = e^{-j2\pi f t_0} X(f)$$

至此我们得到了:

$$\mathcal{F}[x(t-t_0)] = X(f)e^{-j2\pi f t_0}$$

### 3. 矩形脉冲延迟信号的傅里叶变换

下面看一下矩形脉冲信号及其延迟信号的频谱。

矩形脉冲信号  $x(t)$  及其延迟信号  $x(t-t_0)$  的波形如图 2-131 所示。脉冲宽度  $\tau=1$ , 时间延迟  $t_0=0.1$ 。

矩形脉冲信号  $x(t)$  的傅里叶变换为:  $\mathcal{F}[x(t)] = \tau \text{sinc}(\tau f)$ , 其频谱如图 2-132 所示。

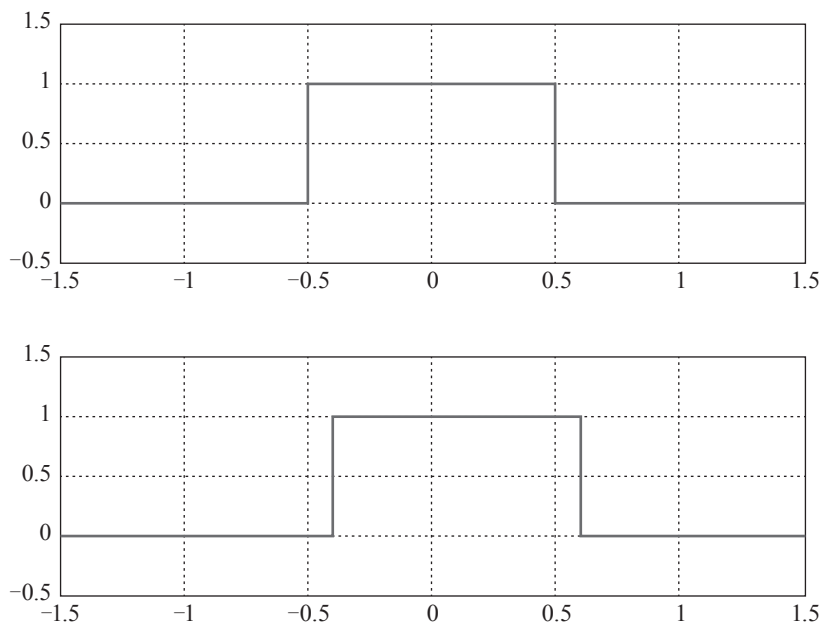


图 2-131 矩形脉冲信号及其延迟信号

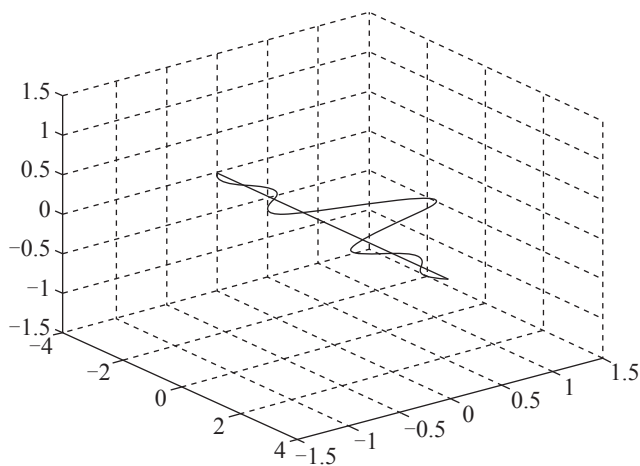


图 2-132 矩形脉冲信号的频谱

矩形脉冲延迟信号  $x(t-t_0)$  的傅里叶变换为:  $\mathcal{F}[x(t-t_0)] = \tau \operatorname{sinc}(\tau f) e^{-j2\pi f t_0}$ , 其频谱如图 2-133 所示。

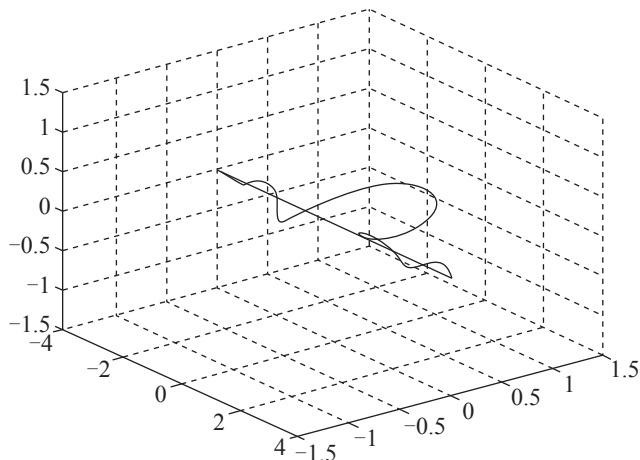


图 2-133 矩形脉冲延迟信号的频谱

可以看出正频率部分频谱发生了顺时针旋转，负频率部分频谱发生了逆时针旋转，频率越高旋转的角度越大。

## 八、信号乘积的傅里叶变换

前面介绍了单个信号的频谱。在通信系统中，经常会涉及两个信号相乘。两个信号乘积的频谱与两个信号的频谱之间是什么关系呢？

答案是：卷积！

### 1. 什么是卷积

为了便于理解，先来看一下信号频谱为离散谱的情况。

假定有 2 个周期信号：

$$f(t) = e^{j2\omega t} + 5e^{j\omega t} + 6, \text{ 其傅里叶系数为: } [1, 5, 6]$$

$$g(t) = 3e^{j\omega t} + 2, \text{ 其傅里叶系数为: } [3, 2]$$

这 2 个信号的乘积为：

$$y(t) = f(t)g(t) = 3e^{j3\omega t} + 17e^{j2\omega t} + 28e^{j\omega t} + 12, \text{ 其傅里叶系数为: } [3, 17, 28, 12]$$

这 2 个周期信号的傅里叶系数与其乘积的傅里叶系数之间是什么关系呢？

为了看得更清楚，将  $e^{j\omega t}$  用  $x$  来表示：

$$f(t) = x + 5x + 6$$

$$g(t) = 3x + 2$$

$$y(t) = f(t)g(t) = (x^2 + 5x + 6)(3x + 2) = 3x^3 + 17x^2 + 28x + 12$$

这样处理之后，信号相乘就转换为多项式乘法，傅里叶系数就是多项式的系数，傅里叶系数之间的关系就转换为多项式系数的关系。

多项式乘法一般都是通过先逐项相乘再合并同类项的方法得到的，要得到结果多项式中的某个系数，需要两步操作才行，如图 2-134 所示。

有没有办法一步操作就可以得到一个系数呢？

图 2-135 所示的计算方法就可以做到。

$$\begin{array}{r} x^2+5x+6 \\ \times \quad 3x+2 \\ \hline 2x^2+10x+12 \\ + \quad 3x^3+15x^2+18x \\ \hline 3x^3+17x^2+28x+12 \end{array}$$

图 2-134 多项式乘法计算方法（1）

$$\begin{array}{r} 6+5x+x^2 \\ \hline 3x+2 \\ \hline 3x^3 \end{array} \Rightarrow 3x^3$$

$$\begin{array}{r} 6+5x+x^2 \\ \hline 3x+2 \\ \hline 15x^2+2x^2 \end{array} \Rightarrow 17x^2$$

$$\begin{array}{r} 6+5x+x^2 \\ \hline 3x+2 \\ \hline 18x+10x \end{array} \Rightarrow 28x$$

$$\begin{array}{r} 6+5x+x^2 \\ \hline 3x+2 \\ \hline 12 \end{array} \Rightarrow 12$$

图 2-135 多项式乘法计算方法（2）

这种计算方法总结起来就是：

反褶：一般多项式都是按  $x$  的降幂排列，这里将其中一个多项式的各项按  $x$  的升幂排列。

平移：将按  $x$  的升幂排列的多项式每次向右平移一个项。

相乘：垂直对齐的项分别相乘。

求和：相乘的各结果相加。

反褶、平移、相乘、求和，这就是通信原理中常用的一个概念“卷积”的计算过程。

至此可以回答这个问题了：2 个周期信号的傅里叶系数与其乘积的傅里叶系数之间是什么关系？答案就是：卷积。

也就是说，假定有 2 个周期信号：

$$f(t) = e^{j2\omega t} + 5e^{j\omega t} + 6, \text{ 其傅里叶系数为: } [1, 5, 6]$$

$$g(t) = 3e^{j\omega t} + 2, \text{ 其傅里叶系数为: } [3, 2]$$

这 2 个信号的乘积为：

$$y(t)=f(t)g(t)=3e^{j3\omega t}+17e^{j2\omega t}+28e^{j\omega t}+12$$

这个乘积信号的傅里叶系数不需要先在时域做相乘运算，再求傅里叶系数，可以直接用 2 个周期信号的傅里叶系数的卷积计算出来：

$[3,17,28,12]=[1,5,6]*[3,2]$ ，其中“\*”表示卷积。

换句话说：

对于两个周期信号，时域相乘相当于频域卷积。

## 2. 离散序列的卷积

任意两个序列  $x[n]$  和  $y[n]$  的卷积为：

$$x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]y[n-k]$$

下面以图 2-136 所示的  $x[n]$  和  $y[n]$  为例，看一下卷积的计算过程。

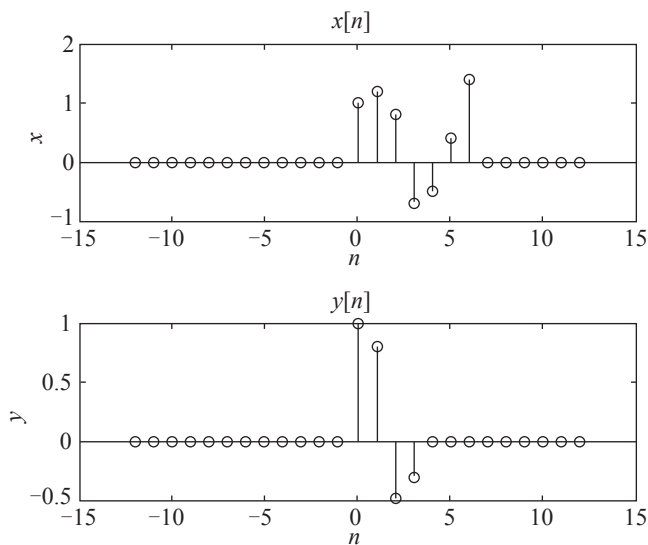
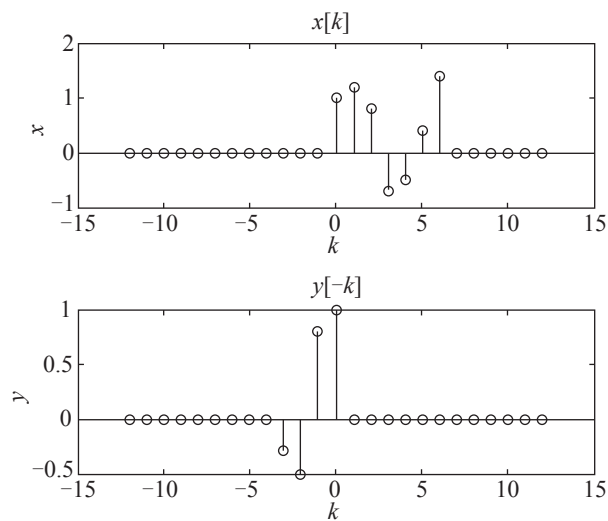
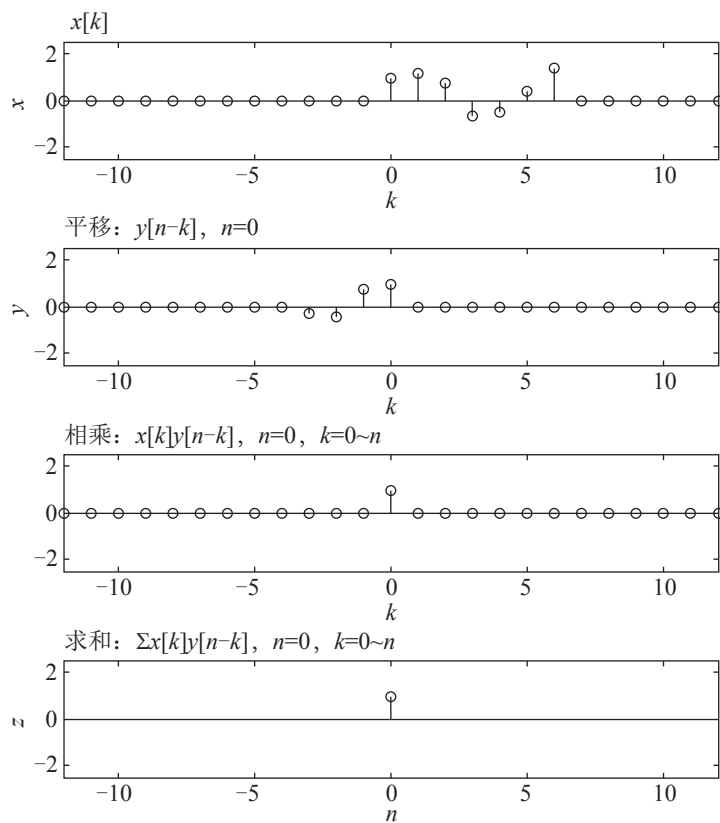


图 2-136  $x[n]$  和  $y[n]$

反褶：对  $y[k]$  进行反褶得到  $y[-k]$ ，这就是“卷积”中所谓的“卷”。 $x[k]$  和  $y[-k]$  如图 2-137 所示。

平移 0： $n=0$ ， $y[-k]$  平移 0 得到  $y[0-k]$ ，与  $x[k]$  相乘（ $k=0 \sim n$ ），再求和得到  $z[0]=x[0]y[0]$ ，如图 2-138 所示。

图 2-137  $x[k]$  和  $y[-k]$ 图 2-138  $x[n]$  和  $y[n]$  的卷积 ( $n=0$ )

平移 1:  $n=1$ ,  $y[-k]$  向右平移 1 得到  $y[1-k]$ , 与  $x[k]$  相乘 ( $k=0 \sim n$ ), 再求和得到  $z[1]=x[0]y[1]+x[1]y[0]$ , 如图 2-139 所示。

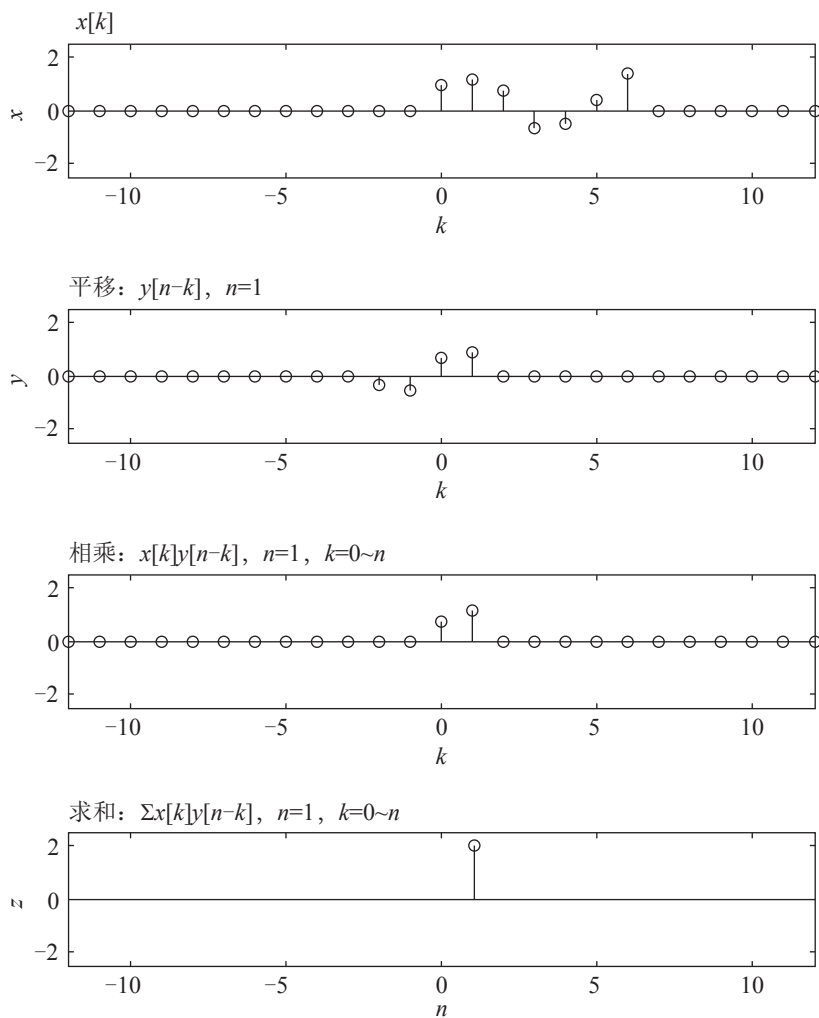
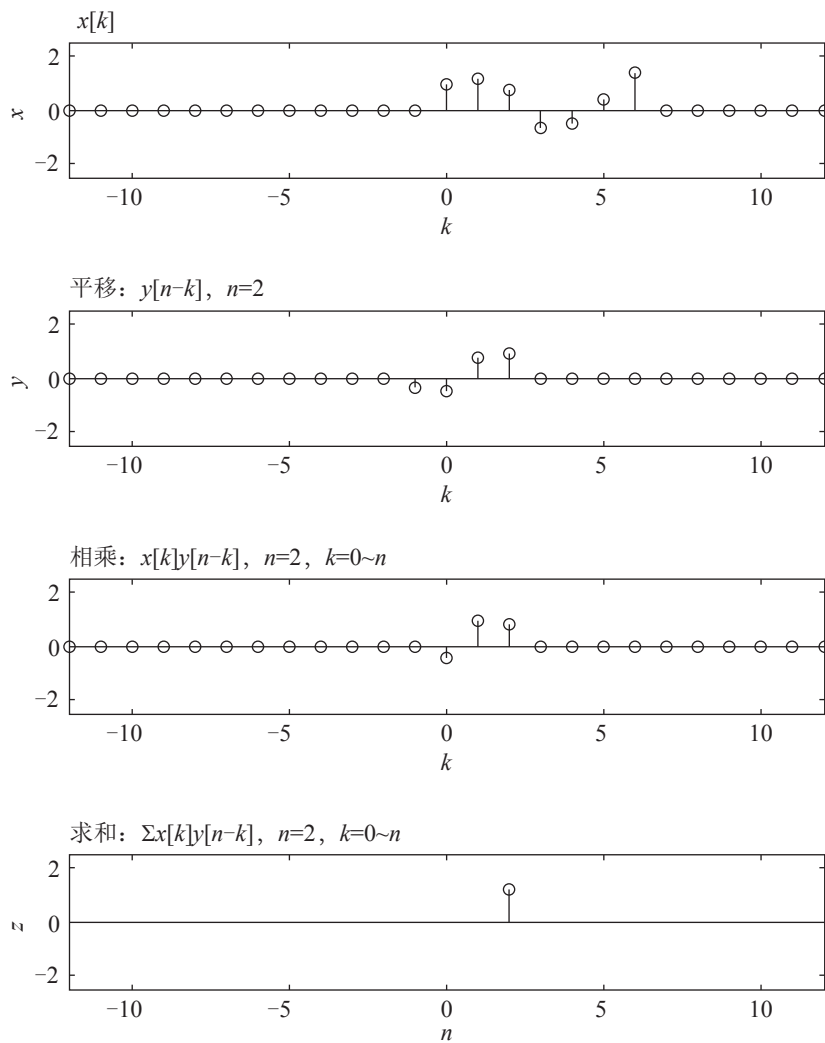


图 2-139  $x[n]$  和  $y[n]$  的卷积 ( $n=1$ )

平移 2:  $n=2$ ,  $y[-k]$  向右平移 2 得到  $y[2-k]$ , 与  $x[k]$  相乘 ( $k=0 \sim n$ ), 再求和得到  $z[2]=x[0]y[2]+x[1]y[1]+x[2]y[0]$ , 如图 2-140 所示。



图 2-140  $x[n]$  和  $y[n]$  的卷积 ( $n=2$ )

平移 3:  $n=3$ ,  $y[-k]$  向右平移 3 得到  $y[3-k]$ , 与  $x[k]$  相乘 ( $k=0 \sim n$ ), 再求和得到  $z[3]=x[0]y[3]+x[1]y[2]+x[2]y[1]+x[3]y[0]$ , 如图 2-141 所示。