Tarea 2_2 de Econometría

Wolfgang A. Resendiz Martínez

2023-02-21

Tarea 2_2

Ejercicio 5

Una compañía fabrica propulsores para uso en motores de turbina. Una de las operaciones consiste en esmerilar el terminado de una superficie particular con una aleación de titanio. Pueden emplearse dos procesos de esmerilado y, ambos pueden producir partes que tienen la misma rugosidad superficial promedio.

Al ingeniero de manufactura le gustaría seleccionar el proceso que tenga la menor variabilidad en la rugosidad de la superficie. Para ello, toma una **muestra de tamaño igual a 12** partes del primer proceso, la cual tiene una estimación de la **desviación estándar igual 5.1** μin y; una **segunda muestra aleatoria de tamaño igual a** 15 partes del segundo proceso, la cual tiene una **estimación de la desviación estándar igual a 4.7** μin.

Se desea encontrar un intervalo de confianza del 90% para el cociente de las dos varianzas $\left(\frac{\sigma_2^1}{\sigma_2^2}\right)$.

Suponer que los dos procesos son independientes y que la rugosidad de la superficie está distribuida de manera Normal.

1. Exponga la evidencia muestral e información poblacional proporcionada en el ejercicio, por ejemplo: tamaño de la muestra, estimadores, parámetros, etc.

Parámetro	Valor
Tamaño de muestra para el proceso 1	$n = 12$
Tamaño de muestra para el proceso 2	$m = 15$
Desviación estándar para el proceso 1	$S_X = 5.1 \mu in$
Desviación estándar para el proceso 2	$S_Y = 4.7 \mu in$
Suposiciones	Los dos procesos son independientes y normalmente distribuídos
Intervalo de confianza	90%
α	0.1
Parámetro a estimar	$\left(\frac{\sigma_2^1}{\sigma_2^2}\right)$.

2. Exponga la ecuación del intervalo de confianza a emplear y en dicha ecuación sustituya los valores correspondientes.

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim N\left(\mu_X, \sigma_X^2\right)$ y $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \sim N\left(\mu_Y, \sigma_Y^2\right)$. Entonces:

$$\implies P\left[F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \cdot \frac{S_Y^2}{S_X^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)\right] = 1 - \alpha$$

$$\implies \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)} \frac{S_X^2}{S_Y^2} \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1) \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 1 - \alpha$$

Sustituyendo:

```
alpha <- 0.1
n <- 12
m <- 15
s2_X <- (5.1)^2
s2_Y <- (4.7)^2


a_val <- 1 / qf( (alpha / 2), n - 1, m - 1)
b_val <- qf(alpha / 2, m - 1, n - 1)

l_val <- (s2_X / s2_Y) * a_val
u_val <- (s2_X / s2_Y) * b_val

print(l_val)
```

```
## [1] 3.224637
```

```
print(u_val)
```

```
## [1] 0.4589581
```

$$P\left(0.46 \leq \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \leq 3.22\right) = 0.90$$

3. Conclusiones

Con un nivel de confianza del 90%, podemos afirmar que $(sigma1^2/sigma2^2)$ está entre 0.459 y 3.225. Dado que el intervalo de confianza contiene el valor de 1, no hay diferencias significativas en la variabilidad de la rugosidad entre los dos procesos.

Ejercicio 6

Un fabricante de componentes para televisores afirma que se necesitan menos de $250\mu A$ de corriente para alcanzar cierto grado de brillantez en un tipo de televisor en particular. Una muestra de 20 aparatos produce un promedio muestral de corriente de $\bar{x} = 257.3$.

Denotemos por μ el verdadero promedio de corriente necesaria para alcanzar la brillantez deseada con aparatos de este tipo. Supongamos que μ es la media de una población normal y, que se sabe por experiencia previa que $\sigma = 15$.

Pruebe con un valor $\alpha = 0.05$, la hipótesis nula de que μ alcance un valor máximo de 250, contra la hipótesis alternativa apropiada.

1. Establecer las hipótesis

Usando prueba de hiótesis para medias (prueba unilateral derecha)

$$H_0 : \mu \leq 250$$

$$H_1 : \mu > 250$$

2. Muestral la evidencia muestral e información poblacional

Parámetro	Valor
media muestral	$\bar{x} = 257.3$
α	0.05

Parámetro	Valor
Tamaño de muestra	$n = 20$
Desviación estándar	$\sigma = 15$

3. Al nivel de significancia establecido encontrar la región de rechazo.

La regla de decisión es:

$$\begin{cases} H_0 \text{ es rechazada si } Z_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \geq z_{1-\alpha} \\ H_0 \text{ no es rechazada si } Z_0 = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z_{1-\alpha} \end{cases}$$

```r
x_bar <- 257.3
alpha <- 0.05
n <- 20
sigma <- 15

mu_0 <- 250

Z_0 <- (x_bar - mu_0) / (sigma / sqrt(n))
Z1_alpha <- qnorm (1-alpha)

print(Z_0)
```

```
## [1] 2.176439
```

```r
print(Z1_alpha)
```

```
## [1] 1.644854
```

Sustituyendo:

$$Z_0 = 2.176439 > 1.644854$$

Por lo tanto, se rechaza H_0.

4. Conclusiones

Afirmamos con una significancia del 5% que el promedio de corriente necesaria para alcanzar la brillantez deseada es mayor a 250.

Ejercicio 7

Una muestra de 50 lentes utilizadas en anteojos produce un grosor medio muestral de $3.05mm$, y una desviación estándar muestral de $0.34mm$. El promedio verdadero deseado de grosor de tales lentes es de $3.20mm$ ¿Sugiere la información que el verdadero promedio de grosor de tales lentes es diferente al grosor deseado? Pruebe usando $\alpha = 0.05$

1. Establecer las hipótesis

$$H_0 : \mu = 3.20$$

$$H_1 : \mu \neq 3.20$$

2. Muestral la evidencia muestral e información poblacional

Parámetro	Valor
media muestral	$\bar{x} = 3.05$
α	0.05
Tamaño de muestra	$n = 50$
Desviación estándar muestral	$S = 0.34$
μ	3.20

3. Al nivel de significancia establecido encontrar la región de rechazo.

Al ser σ desconocida, se usa la distribución t-student.

$\frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

La regla de decisión es:

Si $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$ ó $\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq -t_{\frac{\alpha}{2},n-1}$, sí se rechaza H_0 Si $-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} < \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} < t_{\alpha,n-1}$, no se rechaza H_0

```
x_bar <- 3.05
alpha <- 0.05
n <- 50
s <- 0.34
mu_0 <- 3.20

t <- qt(1 - alpha / 2, n - 1)
t_0 <- (x_bar - mu_0) / (s / sqrt(n))

print(t)
```

```
## [1] 2.009575
```

```
print(t_0)
```

```
## [1] -3.119589
```

Así, sabemos que

$-t_{\frac{\alpha}{2},n-1} = -2.009575 > \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = -3.1195$ Por lo que se rechaza H_0.

4. Conclusiones

Rechazamos la hipótesis nula. El verdadero promedio de grosor de las lentes utilizadas en anteojos es diferente del valor verdadero deseado de $3.20mm$.

Ejercicio 8

Las personas que tienen síndrome de Reynaud están propensas a sufrir un repentino deterioro de circulación sanguínea en los dedos de manos y pies.

En un experimento para estudiar la magnitud de este deterioro, cada persona introdujo su dedo índice en agua y se midió la salida resultante de calor.

Para $n_1 = 10$ personas con el síndrome, el promedio de salida de calor fue $\bar{x_1} = 0.64$ y; para $n_2 = 10$, pacientes que no tienen el padecimiento, el promedio de salida fue $\bar{x_2} = 2.05$.

Denotemos por μ_1 la media poblacional para el caso de personas con el síndrome y μ_2 la media poblacional para el caso de personas sin el síndrome. Pruebe la hipótesis donde se presuma que la diferencia entre mu_1 y mu_2 sea inferior a -1. Supongamos que las dos distribuciones de salida de calor son normales con $\sigma_1 = 0.2$ y $\sigma_2 = 0.4$.

Considere un nivel de significancia de 5%.

1. Establecer las hipótesis

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq -1$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 < -1$$

2. Muestral la evidencia muestral e información poblacional

Parámetro	Valor
α	0.05
Tamaño de muestra	$n_1 = 10$
Tamaño de muestra	$n_2 = 10$
σ_1	0.2
σ_2	0.4
$\bar{X}_1$	0.64
$\bar{X}_2$	2.05

3. Al nivel de significancia establecido encontrar la región de rechazo.

el estadístico de prueba es:

Si

$$Z_o = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < z_\alpha$$

Se rechaza la hipótesis nula.

```
alpha <- 0.05
n1 <- 10
n2 <- 10
s1 <- 0.2
s2 <- 0.4
x_bar1 <- 0.64
x_bar2 <- 2.05
D_0 <- -1

z <- qnorm(alpha)
z_0 <- (x_bar1 - x_bar2 - D_0) / sqrt((s1^2 / n1) + (s2^2 / n2))

print(z)
```

```
## [1] -1.644854
```

```
print(z_0)
```

```
## [1] -2.899138
```

Así, sabemos que

$z_\alpha = -1.644854 > \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = -3.1195$ Por lo que se rechaza H_0.

4. Conclusiones

Podemos rechazar la hipótesis nula, lo que sugiere que la diferencia entre μ_1 y μ_2 es menor que -1.

Así, hay una diferencia significativa en la magnitud del deterioro de la circulación sanguínea en los dedos de manos y pies entre personas con el síndrome de Reynaud y personas sin el síndrome.

Ejercicio 8.BIS

Suponga que μ_A y μ_B son las verdaderas distancias medias de parada a velocidad de 50 $\left(\frac{m}{h}\right)$ para automóviles de cierto tipo.

Dichos autos están equipados con dos tipos diferentes de sistemas de frenos: el sistema de freno A, que en 6 pruebas tuvo una estimación de la media igual a $2m$ y una estimación de la desviación estándar igual a $1.8m$. Mientras que el sistema de freno B, en 6 pruebas, tuvo una estimación de la media igual a $2.5m$ y una estimación de la desviación estándar igual a $2.2m$.

Utilice la prueba t al nivel de significancia de 0.01 para probar si la media de la distancia de parada del sistema de freno B excede por más de $0.5m$ a la media de la distancia de parada del sistema »(Hint: Investigue y aplique la variación del estadístico t-student con la corrección de grados de libertad a la Satterthwaite)

1. Establecer las hipótesis

$$H_0 : \mu_B - \mu_A \leq 0.5$$
$$H_1 : \mu_B - \mu_A > 0.5$$

2. Muestral la evidencia muestral e información poblacional

Parámetro	Valor
α	0.01
Tamaño de muestra	$n_A = 6$
Tamaño de muestra	$n_B = 6$
s_A	1.8
s_B	2.2
$\bar{X}_A$	2
$\bar{X}_B$	2.5
D_0	0.5

3. Al nivel de significancia establecido encontrar la región de rechazo.

El estadístico de prueba es:

$$t = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B - d_0}{\sqrt{\frac{s_B^2}{n_B} + \frac{s_A^2}{n_A}}}$$

Utilizando la distribución t con la corrección Satterthwaite de grados de libertad aproximados

la región de rechazo es:

$t \geq t_{\alpha,\nu}$, donde ν es el número de grados de libertad aproximados:

$$\nu \approx \frac{\left(\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}\right)^2}{\frac{(s_A^2/n_A)^2}{n_A - 1} + \frac{(s_B^2/n_B)^2}{n_B - 1}}$$

```r
n_a <- 6
x_bar_a <- 2
s_a <- 1.8
n_b <- 6
x_bar_b <- 2.5
s_b <- 2.2
alpha <- 0.01
d_0 <- 0.5

v <- ((s_a^2/n_a + s_b^2/n_b)^2) / ( (s_a^2/n_a)^2 / (n_a - 1) + (s_b^2/n_b)^2 / (n_b - 1) )

t_0 <- (x_bar_a - x_bar_b - d_0)/sqrt((s_b^2/n_b) + (s_a^2/n_a))

t_alpha <- qt(1-alpha, v)

print(v)
```

```
## [1] 9.622677
```

```r
print(t_0)
```

```
## [1] -0.8617275
```

```r
print(t_alpha)
```

```
## [1] 2.783888
```

4. conclusiones

Como $t_0 = -0.86 < t_{0.99,v} = 2.82$ no se rechaza H_0. Por lo tanto, no hay suficiente evidencia para afirmar que la media de la distancia de parada del sistema de freno B excede por más de $0.5m$ a la media de la distancia de parada del sistema A al nivel de significancia de 0.01.

Ejercicio 9

Un fabricante de baterías para automóvil afirma que sus baterías durarán, en promedio, tres años con una varianza de un año y medio. Si con cinco de estas baterías se calcula una varianza muestral de 1.66, pruebe si la afirmación del fabricante de que $\sigma^2 = 1.5$ es válida. Suponga que la población de duraciones de las baterías se distribuye de forma aproximadamente normal. >Utilice $\alpha = 0.02$

1. Establecer las hipótesis

$$H_0 : \sigma^2 = 1.5$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 1.5$$

2. Muestral la evidencia muestral e información poblacional

Parámetro	Valor
α	0.02
Tamaño de muestra	$n = 5$
μ	3
S^2	1.66
σ^2	1.5

3. Al nivel de significancia establecido encontrar la región de rechazo.

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$

La región de rechazo para una prueba de dos colas con nivel de significancia α es:

$$\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,n-1} \text{ o } \chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2,n-1}$$

```
alpha <- 0.02
n <- 5
s2 <- 1.66
sigma0_2 <- 1.5

chi2 <- (n-1)*s2^2/sigma0_2

chi_alpha_2 <- qchisq(alpha/2, df = n-1)
chi_1_alpha_2 <- qchisq(1-alpha/2, df = n-1)

print(chi2)
```

```
## [1] 7.348267
```

```
print(chi_alpha_2)
```

```
## [1] 0.2971095
```

```
print(chi_1_alpha_2)
```

```
## [1] 13.2767
```

Así, $7.34 < 0.29$ o $7.34 > 13.27$. Por lo tanto, la hipótesis nula H_0 se rechaza al nivel de significancia $\alpha = 0.02$.

4. conclusiones

No hay suficiente evidencia para afirmar que la varianza de la duración de las baterías es distinta de 1.5 años.