Tarea 2: Intervalos de Confianza y Distribuciones de Muestreo - Econometría I - CIDE - Semestre de Primavera 2023

Resendiz Martínez Wolfgang

2023-02-17

Problema 1

Una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ se extrae de una población con $\sigma^2 = 5.1$. Dado que la media muestral $\bar{x} = 21.6$, construye un intervalo de confianza del 95 para la media de la población μ:

1. *Exponga la evidencia muestral e información poblacional proporcionada en el ejercicio, por ejemplo: tamaño de la muestra, estimadores, parámetros, etc. Tamaño de muestra $n = 100$.*

Tamaño de la muestra $n =$	100
Varianza poblacional $\sigma^2 =$	5.1
Media muestral $\bar(x) =$	21.6
Intervalo de confianza =	95%
$\implies \alpha =$	0.05
Parámetro a estimar	μ
Tipo de distribución	normal

2. Exponga la ecuación del intervalo de confianza a emplear y en dicha ecuación sustituya los valores correspondientes.

$$P\left(Z_1 \leq Z \leq Z_2\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(Z_1 \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_2\right) = 1 - \alpha$$

donde:

$$Z_1 = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{y} \quad Z_2 = Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

$$P\left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha$$

substituyendo:

$$P\left(Z_{1-\frac{0.05}{2}} \leq \frac{21.6-\mu}{\sqrt{5.1}/\sqrt{100}} \leq Z_{\frac{0.05}{2}}\right) = 0.95$$

Simplificando:

$$P\left(Z_{0.975} \leq \frac{21.6-\mu}{0.51} \leq Z_{0.025}\right) = 0.95$$

Ahora busquemos los valores de encuentra que $Z_{0.975}$ y $Z_{0.025}$.

```
z_upper <- qnorm(0.975)
print(z_upper)
```

```
## [1] 1.959964
```

```
z_lower <- qnorm(0.025)
print(z_lower)
```

```
## [1] -1.959964
```

Sustituyendo los valores.

```
print(-z_lower*0.51+21.6)
```

```
## [1] 22.59958
```

```
print(-z_upper*0.51+21.6)
```

```
## [1] 20.60042
```

$$\implies P(20.60042 > \mu > 22.59958) = 0.05$$

3. Conclusiones

Podemos concluir con un Intervalo de confianza del 95% que la media de la población μ se encuentra en el intervalo $(20.60042, 22.59958)$.

Problema 2

La pérdida promedio en el peso de $n = 16$ *aspas después de cierto intervalo de tiempo en un molino de aspas es* 3.42 *gramos, con una desviación estándar estimada igual a* 0.68 *gramos. Construye un intervalo con un Intervalo de confianza del* 99 *para la pérdida promedio real del peso de las aspas en las condiciones establecidas.*

1. *Exponga la evidencia muestral e información poblacional proporcionada en el ejercicio, por ejemplo: tamaño de la muestra, estimadores, parámetros, etc.*

Tamaño de la muestra $n =$	16
Varianza muestral $S^2 =$	$(0.68)^2$
Media muestral $\bar{(x)} =$	3.42
Intervalo de confianza $=$	99%
$\implies \alpha =$	0.01
Parámetro a estimar	μ

Tipo de distribución	t de student*

*dado que la varianza poblacional es desconocida

2. *Exponga la ecuación del intervalo de confianza a emplear y en dicha ecuación sustituya los valores correspondientes.*

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$$

$$P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(\bar{X} - t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right) \leq \mu \leq \bar{X} + t_{\frac{\alpha}{2},n-1}\left(\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1 - \alpha$$

Sustituyendo los valores:

$$P\left(3.42 - (2.946713)\left(\frac{0.68}{\sqrt{16}}\right) \leq \mu \leq 3.42 + (2.946713)\left(\frac{0.68}{\sqrt{16}}\right)\right) = 0.99$$

Buscando t de Student con 15 grados de libertad:

```
t_val = qt(1 - 0.01/2, 15)
t_val
```

```
## [1] 2.946713
```

$$P\left(3.42 - (2.946713)\left(\frac{0.68}{\sqrt{16}}\right) \leq \mu \leq 3.42 + (2.946713)\left(\frac{0.68}{\sqrt{16}}\right)\right) = 0.99$$

Simplificando:

```
i_low = 3.42 - t_val*(0.68/(sqrt(16)))
i_low
```

```
## [1] 2.919059
```

```
i_upp =3.42+t_val*(0.68/(sqrt(16)))
i_upp
```

```
## [1] 3.920941
```

$$P(2.919059 \leq \mu \leq 3.920941) = 0.99$$

3. *Conclusiones*

Podemos concluir con un Intervalo de confianza del 99% que verdadera pérdida promedio de peso de las aspas μ se encuentra en el intervalo $(2.919059, 3.920941)$.

Problema 3

3. *Una comparación del desgaste de neumáticos para automóvil se llevó a cabo rodando $n_1 = n_2 = 100$ neumáticos de cada tipo. El número de kilómetros (vida de cada neumático) se registró, en donde $km - vida$ fue definido como el kilometraje andado antes de que el neumático quedase en un cierto estado de desgaste inaceptable. Para el primer tipo de neumático se estimó una media igual a $26,400$ km y una varianza estimada igual a $1,440,000$; por otra parte, para el segundo tipo de neumático se estimó una media igual $25,100$ km y una varianza estimada igual a $1,960,000$.*

Estime μ_1 - μ_2 y establezca un intervalo de confianza del 99 para la diferencia de los $km - vida$ promedio. Asuma que las varianzas son distintas. (Hint: Investigue y aplique la variación del estadístico t-student con la corrección de grados de libertad a la Satterthwaite)

1. *Exponga la evidencia muestral e información poblacional proporcionada en el ejercicio, por ejemplo: tamaño de la muestra, estimadores, parámetros, etc.*

Tamaño de la muestra $n_1 = n_2 =$	100
Media muestral 1 $\bar(x_1) =$	26,400
Varianza muestral 1 $S_1^2 =$	1,440,000
Media muestral 2 $\bar(x_2) =$	25,100
Varianza muestral 2 $S_2^2 =$	1,960,000
Intervalo de confianza =	99%
$\implies \alpha =$	0.01
Parámetro a estimar	$\mu_1 - \mu_2$
Tipo de distribución	t-student**

** con la corrección de grados de libertad a la Satterthwaite

2. *Exponga la ecuación del intervalo de confianza a emplear y en dicha ecuación sustituya los valores correspondientes.*

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}$$

$$P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X}_1 - \bar{X}_2 + t_{1-\frac{\alpha}{2},df}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\left(P(26,400 - 25,100 - t_{1-(\alpha/2),df}\sqrt{\frac{1,440,000}{100} + \frac{1,960,000}{100}})\right)$$

$$< \mu_1 - \mu_2 <$$

$$\left(26,400 - 25,100 + t_{(\alpha/2),df}\sqrt{\frac{1,440,000}{100} + \frac{1,960,000}{100}}\right) = 0.99$$

Calculando df:

```
s_1 <- 1440000
s_2 <- 1960000
n1 <- 100
n2 <- 100

df <- ((s_1 / n1 + s_2 / n2)^2) / ((s_1 / n1)^2 / (n1 - 1) +
                                     (s_2 / n2)^2 / (n2 - 1))
df
```

```
## [1] 193.4744
```

Calculando $t_1 1 - \alpha/2, df$

```
t = qt(1 - 0.01/2, 100)
t
```

```
## [1] 2.625891
```

$$26,400 - 25,100 - t_{0.995,193}\sqrt{\frac{1,440,000}{100} + \frac{1,960,000}{100}}$$

```
t_low = qt(0.995, df)
(26400 - 25100 - t * sqrt((1440000/100) + (1960000/100)))
```

```
## [1] 815.8097
```

```
t_upp = qt(0.995, df)
(26400 - 25100 + t * sqrt((1440000/100) + (1960000/100)))
```

```
## [1] 1784.19
```

Así:

$$P(815.8097 < \mu_1 - \mu_2 < 1784.19) = 0.99$$

3. *Conclusiones*

Podemos concluir con un Intervalo de confianza del 99% que desgaste promedio de los neumáticos $\mu_1 - \mu_2$ se encuentra en el intervalo $(815.8097, 1784.19)$.

Problema 4

1. *Un fabricante de detergente líquido está interesado en la uniformidad de la maquina utilizada para llenar las botellas. De manera específica, es deseable que la* σ^2 *del proceso de llenado sea menor que* 0.25 *onzas de líquido. Supóngase que la distribución de llenado es aproximadamente Normal. Al tomar una muestra aleatoria de* 20 *botellas, se obtiene una estimación de la varianza igual a* 0.0153 *(onzas de fluido cuadradas). Calcule un intervalo de confianza del* 95 *para el valor de la varianza* (σ^2) *del llenado.*

2. *Exponga la evidencia muestral e información poblacional proporcionada en el ejercicio, por ejemplo: tamaño de la muestra, estimadores, parámetros, etc.*

Tamaño de la muestra $n =$	20
Varianza muestral $S^2 =$	0.0153
Intervalo de confianza =	95%
$\implies \alpha =$	0.05
Parámetro a estimar	σ^2
Tipo de distribución	$Normal$***

3. *Exponga la ecuación del intervalo de confianza a emplear y en dicha ecuación sustituya los valores correspondientes.*

$$(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\implies P\left(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}\right) = 1-\alpha$$

$$\implies P\left(\frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}} \leq \sigma^2 \leq \frac{S^2(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right) = 1-\alpha$$

Calculemos

```r
chi_1 = qchisq(.05/2, df = 20 - 1)
chi_1
```

```
## [1] 8.906516
```

```r
chi_1 = qchisq(1-.05/2, df = 20 - 1)
chi_1
```

```
## [1] 32.85233
```

Así:

$$P\left(\frac{0.0153 \times (20-1)}{8.906516} \leq \sigma^2 \leq \frac{0.0153 \times (20-1)}{32.85233}\right) = 1 - 0.05$$

Simplificand0:

$$\implies P\left(0.09 \leq \sigma^2 \leq 0.033\right) = 95\%$$

3. *Conclusiones* Con un nivel de confianza del 95%, se puede afirmar que el verdadero valor de la varianza poblacional σ^2 se encuentra en el intervalo (0.009, 0.033)