概率论与数理统计部分.

一、~~第一章 随机事件及其概率~~

条件概率. $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$

乘法公式 $P(AB)=P(B)P(A|B)$.

全概率公式 若B_i为划分 $P(A)=\sum_{i=1}^{\infty}P(B_i)P(A|B_i)$

贝叶斯公式(逆概率公式) 若B_i为划分 $P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty}P(A|B_j)P(B_j)}$,执果索因

独立性 $P(AB)=P(A)P(B)$ 独立性可推广到$\boxed{\text{独立事件}}$上.

$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\xRightarrow{\text{可推}}$ 其余. (反之不可)

系统可靠性.

二、随机变量~~概率分~~与分布.

离散型:

两点分布 $P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}\ (k=0,1,\ 0<p<1)$ $X\sim B(1,p)$

二项分布 $P(X=k)=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\ (k=0,1,\cdots,n)$ $X\sim B(n,p)$

n很大,p很小 最可能成功次数$[(n+1)p]$,若为Z_+ 则$(n+1)p$,$(n+1)p-1$都是中心项

泊松分布 $P(X=k)=\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\ (\lambda>0,k=0,1,\cdots,n)$ $X\sim P(\lambda)$

事件总 次品

超几何分布 $P(X=k)=\frac{C_M^kC_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\ (k=0,1,\cdots,l;\ n<N-M,\ l=\min\{M,n\})$ $X\sim h(n,N,M)$

连续型

均匀分布 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{others}\end{cases}$ $X\sim U[a,b]$

指数分布 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}; & x\ge0\\ 0; & x<0\end{cases}\ (\lambda>0)$ $X\sim E(\lambda)$ 无记忆性

正态分布 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty<x<+\infty$ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $N(0,1)$ 标准正态分布

注: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 转换.

3σ原则. 0.6826 0.9546 0.9973

分布函数

特点：有界(0-1)，$F(-\infty)=0$，$F(+\infty)=1$，$\nearrow$，右连续 $F(x)=F(x+0)$

随机变量函数分布

离散型：计算出 y，对应概率重合的叠加，重整。

连续型：① $y=g(x)\nearrow$ $f_Y(y)=f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|$ 若 $h(y)=x$

② $y=g(x)$ 在不同段 $\nearrow$ $f_Y(y)=\sum_i f_X[h_i(y)]\cdot|h_i'(y)|$

三十四、随机向量与分布及数字特征

① 离散型

向量分布：

$P_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$ 二维离散型随机向量 (X,Y) 概率分布律。

联合分布

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	$P_{i\cdot}$
x_1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.05
x_2	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.1
x_3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.45	0.85
$P_{\cdot j}$	0.13	0.13	0.13	0.13	0.48	1

独立性 $\forall_{ij}$ $P_{i\cdot}\times P_{\cdot j}=P_{ij}$ 则独立。

边缘分布

函数分布 $W=X+Y$，$Z=XY$，找出 W，Z 所有可能取值，分别计算

$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min(X,Y)$ 求 (U,V) 列出所有可能取值

数字特征：要求 $\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|p_i$ 收敛

数学期望 $E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$

函数数学期望 $E(Y)=E[g(x)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)P_i$ 代换 X 即可

方差 $D(X)=\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-E(x))^2P_i=E(X^2)-(E(x))^2$

函数方差：具体分析

协方差 cov $cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

相关系数 ρ $\rho=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

② 连续型（二维）

△ 概率密度函数 $P\{a_1\le X\le b_1, a_2\le Y\le b_2\}=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dx\,dy$

性质：$f(x,y)\ge 0$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

△ 分布函数 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$

性质：单调不减，规范性，右连续性 性质4

☆ $P(x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2)=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$

反例：$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\ge 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$ 不是二维向量 (X,Y) 分布函数.

△ 联系：$F(x,y)=P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$.

$f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$

△ 边缘概率密度（函数） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ X的的一条切片

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$.

△ 边缘分布函数 $F_X(x)=P(X\le x, Y<+\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty} F(x,y)=F(x,+\infty)$

$F_Y(y)=P(X<+\infty, Y\le y)=\lim\limits_{x\to+\infty} F(x,y)=F(+\infty,y)$

或有 $F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dy\right]du$

$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dx\right]dv$

△ 独立性 充要条件 $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$，$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

若 X,Y 独立，则 $g(X),h(Y)$ 独立

若 $(X_1,X_2,\cdots X_m),(Y_1,Y_2,\cdots Y_n)$ 独立，则 X_i,Y_j 独立，$g(X_i),h(Y_j)$ 独立

△ 函数分布：若 $Z=g(X,Y)\to y=h(x,z)$ $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,h(x,z))\cdot\left|\frac{\partial h}{\partial z}\right|\cdot dx$.

$Z=X+Y$ 和分布：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx \xlongequal{X,Y独立} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot f_Y(z-x)\,dx$ 卷积公式

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,dy \xlongequal{X,Y独立} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)\,dy$

$Z=X/Y$ 商分布：$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)\,dy \xlongequal{X,Y独立} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(yz)\cdot f_Y(y)\,|y|\,dy$

瑞利分布：对于 X,Y 独立且 $\sim N(0,\sigma^2)$，$Z=\sqrt{X^2+Y^2}$ 有 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{z}{\sigma^2}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$

χ^2 分布：X,Y 独立且 $\sim N(0,1)$，$Z=X^2+Y^2$ $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{z}{2}}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}$.

对于 $U=\max\{X,Y\}$ $F_U(z)=F_X(z)\cdot F_Y(z)$ （X,Y 独立）

$V=\min\{X,Y\}$ $F_V(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

△ $\boxed{\text{期望}}$ $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx$

函数期望 对于 $Y=g(X)$ $E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\,dx$

对于 $Z=g(X,Y)$ $E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)\,dxdy$

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx$

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$.

期望性质: 线性性质 $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$

$E(C)=C$

独立条件下 $E(XY)=E(X)E(Y)$

柯西施瓦茨不等式 $E^2(XY)\le E(X^2)E(Y^2)$

△ $\boxed{\text{方差}}$ $D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} (x-E(X))^2 f(x)\,dx$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

方差性质 $D(c)=0$

$D(aX+b)=a^2D(X)$

独立 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$

△ $\boxed{\text{协方差}}$ $\mathrm{cov}(X,Y)=E[(X-E(X))(Y-E(Y))]$

$\mathrm{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)][y-E(Y)]f(x,y)\,dxdy$

☆ $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

$\mathrm{cov}(aX,bY)=ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$\mathrm{cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{cov}(X_1,Y)+\mathrm{cov}(X_2,Y)$

$\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$

△ $\boxed{\text{相关系数}}$ $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$.

$|\rho_{XY}|=1 \Leftrightarrow P\{Y=a+bX\}=1$

△等价命题 X与Y不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{cov}(X,Y)=0 \Leftrightarrow \rho_{XY}=0$

$\Leftrightarrow E(XY)=E(X)E(Y) \Leftrightarrow D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$

△矩. $E(X^k)$ k阶原点矩 $E(X)$ 一阶原点矩

$E([X-E(X)]^k)$ k阶中心矩 $E([X-E(X)]^2)$ 二阶中心矩

$E(X^kY^l)$ k+l阶原点混合矩

$E([X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l)$ k+l阶中心混合矩. $cov(X,Y)$ 2阶中心混合矩

※常见分布 $E(X), D(X)$

			$E(X)$	$D(X)$
两点分布	$B(1,p)$	$P(X=k)=p^kq^{1-k}$	p	pq
二项分布	$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^kp^kq^{n-k}$	np	npq
几何分布	$G(\lambda)$	$P(X=k)=pq^{k-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
泊松分布	$P(\lambda)$	$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$	λ	λ
均匀分布	$U[a,b]$	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & others\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2

△关于~~二元~~正态分布的结论.

① $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

② $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)\Rightarrow X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

③ $\rho=0$ 时 X,Y 独立.

④ 正态分布和分布 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$, $Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

(可以推广至多项)

⑤ 瑞利分布, X^2分布.

⑥ 对于二维正态随机向量(X,Y). XY不相关 $\Leftrightarrow$ XY相互独立.

机考注意：

1. $P(\xi=X)=0$ 成立，因为对连续型变量 X，$P(X=a)=0$

2. 只有 $f(x)$ 在 x 处连续时 $F'(x)=f(x)$.

大数定律与中心极限定理

① 切比雪夫不等式 $P\{|X-E(X)|\geq\varepsilon\}\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

$P\{|X-E(X)|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$

② ~~大数定律~~ $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geq\varepsilon\}=0$

依概率收敛 $X_n\xrightarrow{P}X$

③ 切比雪夫大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}E(X_i)|<\varepsilon\}=1$ (X_i相互独立)

$E(X_i)$, $D(X_i)$存在，且 $D(X_i)<C$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$ ($E(X_i)=\mu$, $D(X_i)=\sigma^2$)

伯努利大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{X}{n}-p|<\varepsilon\}=1$ X为n重试验中发生次数，p为发生概率。

辛钦大数定律 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu|<\varepsilon\}=1$ X_i独立同分布，不要求D，$E(X_i)=\mu$

考：$E(X_i)=\mu$ 就可推出 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$.

④ 中心极限定律

① $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\overset{近似}{\sim}N(n\mu,n\sigma^2)$ $(n\to\infty)$ ~~$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\overset{近似}{\sim}N(\mu,$~~ ~~$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}$~~

$(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\mu)/\sigma\sqrt{n}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$ $(n\to\infty)$

② ~~若~~ $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}\overset{近似}{\sim}N(0,1)$

6 样本和抽样分布

① 简单随机抽样：独立，$\boxed{\text{同分布}}$ $\rightarrow E(X_i^k)=E(X^k)$

② 统计量

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$

样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ $E(S^2)=\sigma^2$

样本k阶原点矩 $A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k$

样本k阶中心矩 $B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k$

$S^2=\frac{n}{n-1}B_2$

③ 重要抽样分布

χ^2分布：X_i相互独立 $\sim N(0,1)$ $Q=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

$E\chi^2(n)=n$ $D\chi^2(n)=2n$ $X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$

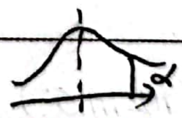
t分布：$T=\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim t(n)$，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$

F分布：$F=\frac{X_1/n_1}{X_2/n_2}\sim F(n_1,n_2)$，$X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$

$F\sim F(n_1,n_2)$ $\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

④ 相应概率分布分位点

~~关分布~~ $\Phi(z_\alpha)=1-\alpha$



t分布 $\begin{cases} n\le 45 & \text{查表} \\ n>45 & t_\alpha(n)=z_\alpha \end{cases}$

χ^2分布 $\begin{cases} n\le 45 & \text{查表} \\ n>45 & \chi^2_\alpha(n)=\frac{1}{2}\left(z_\alpha+\sqrt{2n-1}\right)^2 \end{cases}$

F分布 $F_\alpha(n_1,n_2)=\frac{1}{F_{1-\alpha}(n_2,n_1)}$

⑤ 抽样分布定理 若总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 则有

① $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

② $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$

7参数估计 & 8 假设检验

① 点估计方法

①矩估计法　样本矩 $A_m=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^m$ = 总体矩 $E(X^m)$

②最大似然估计法　"概率最大的最有可能发生"

$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

求 $\frac{dL(\theta)}{d\theta}$ 或 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}$ 最大

② ~~区间估计方法~~点估计评价标准

①无偏性　若 $E(\hat{\theta})=\theta$ 则$\hat{\theta}$无偏估计量

e.g. $D(\bar{X})=\frac{\sigma^2}{n}$　$E(\bar{X})=\mu$　$E(S^2)=\sigma^2$　$E(A_k)=\mu_k=E(X^k)$

②有效性　满足无偏性下 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$ 则 $\hat{\theta}_1$更好.

③ 区间估计：构造样本函数→由$(1-\alpha)$找(单)双侧分位点→解不等式

求μ　σ^2已知　$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$　$P\{|Z|<z_{\frac{\alpha}{2}}\}=1-\alpha$

　　　σ^2未知　$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$　$P\{|T|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$

求σ^2　μ已知　$\chi^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$　$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\}=1-\alpha$

　　　μ未知　$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$　$P\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\}=1-\alpha$