202009 月 线性代数 A 试卷参考答案

一、填空题

1、-28， 2、-32， 3、216， 4、$k_1+k_2+\cdots+k_s=1$，5、24， 6、$\begin{bmatrix}1&3&5\\3&5&7\\5&7&9\end{bmatrix}$，

7、$\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&-2&-2\end{bmatrix}$， 8、$-1<k<0$。

二、计算题

9、解：采用加边法

$$D_n=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\0&a+a_1&a&\cdots&a\\0&a&a+a_2&\cdots&a\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&a&a&\cdots&a+a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\-1&a_1&0&\cdots&0\\-1&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1+a\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}&a&a&\cdots&a\\0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&a_n\end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\cdot(1+a\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$$

10、解：$\because\ |P|=-1\neq 0,\ \therefore\ P$ 可逆。

故 $AP = PB \Rightarrow A = PBP^{-1}$

$\therefore A^n = PB^nP^{-1}$

而 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

当 n 为奇数时：

$$A = PB^nP^{-1} = PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

当 n 为偶数时：

$$A = PB^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

11、解: $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \to$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore R(A) = 3.$ 可选 α_1， α_2， α_4 为其最大无关组

此时有 $\alpha_3 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_5 = 2\alpha_1 + \alpha_2.$

12、解（1） $\because A$与B 相似， $\therefore |A| = |B|$

而 $|A| = -2,\quad |B| = -2y \quad \therefore y = 1$

即 B 有特征值 2，1，-1，故 A 也有特征值 2，1，-1

$$\therefore \left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda-x\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left[\lambda^2-x\lambda-1\right]=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)\text{，}$$

故　$x=0$。

（2）当 $\lambda_1=2$时，$2E-A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

可得对应于 $\lambda_1=2$ 的特征向量为 $\xi_1=(1,0,0)^T$

同理可得对应于 $\lambda_2=1,\quad \lambda_3=-1$ 的特征向量分别为 $\xi_2=(0,1,1)^T,\quad \xi_3=(0,1,-1)^T$,

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求可逆矩阵，且有 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$

13、解：

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 1 & 4\\ 1 & \mu & 1 & 3\\ 1 & 3\mu & 1 & 9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & 2\mu & 0 & 6\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & \mu & 0 & 3\end{bmatrix}$$

$$\left|A\right|=\begin{vmatrix}1 & \mu & 1\\ 0 & 1-\lambda\mu & 1-\lambda\\ 0 & \mu & 0\end{vmatrix}=-\mu(1-\lambda)$$

（1）当 $\lambda\neq 1$ 且 $\mu\neq 0$ 时，方程组有唯一解；

（2）当 $\mu=0$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 1-\lambda & 4-3\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，方程组无解；

（3）当 $\lambda=1$ 时，$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1-\mu & 0 & 1\\ 0 & \mu & 0 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1-\mu & 0 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & \mu & 1 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 4\mu-3\end{bmatrix}$

当 $\mu=\dfrac{3}{4}$ 时，方程组有无穷解，

当 $\mu \neq \frac{3}{4}$ 时，方程组无解。

当 $\lambda = 1$，$\mu = \frac{3}{4}$ 时，$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，

非齐次的特解为 $\xi_0 = (0,4,0)^T$，

对应的齐次方程组的基础解系为 $\xi_1 = (-1,0,1)^T$

故原方程的通解为 $\xi = \xi_0 + k\xi_1, k \in R.$

14、解：（1）$A = \begin{bmatrix} 1-a & 1+a & 0 \\ 1+a & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$，$\because R(A) = 2,\quad \therefore |A| = 2 \cdot \left[(1-a)^2 - (1+a)^2\right] = 0$

得 $a = 0$，即 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

（2）$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 \cdot \lambda$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

当 $\lambda_1 = 0$ 时，（$\lambda E - A$）$X = 0$，得基础解系 $\xi_1 = (1,-1,0)^T$

单位化，$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^T$，

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ 时，（$2E - A$）$X = 0$，得基础解系 $\xi_2 = (0,0,1)^T$，$\xi_3 = (1,1,0)^T$

正交化单位化有，$\eta_2 = (0,0,1)^T$，$\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$

令 $P = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$，则 $\boldsymbol{P}$ 即为所求正交矩阵，在正交变换 $X = PY$ 下的标准形为

$$f = 2{y_2}^2 + 2{y_3}^2$$

（3）$f(x_1, x_2, x_3) = 1$，在三维空间为一个圆柱面。