2020-2021-2 线性代数 A 参考解答

1 解 （法 1）$-A_{41}-2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}=\begin{vmatrix}1&2&-3&-4\\3&1&2&1\\1&0&2&3\\-1&-2&3&4\end{vmatrix}=0.$

（法 2）$\because A_{41}=-9,\ A_{42}=12,\ A_{43}=9,\ A_{44}=-3,$

故 $\qquad -A_{41}-2A_{42}+3A_{43}+4A_{44}==9-24+27-12=0.$

2 解 利用拉普拉斯展开定理，按最后一行展开，得

$$D_n=(-1)^{n+1}\beta\begin{vmatrix}0&\cdots&0&\alpha&\beta\\0&\cdots&\alpha&\beta&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\beta&0&\cdots&0&0\end{vmatrix}+\alpha\begin{vmatrix}0&0&\cdots&0&\alpha\\0&0&\cdots&\alpha&\beta\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\alpha&\beta&\cdots&0&0\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}[(-1)^{n+1}\beta^n+\alpha^n].$$

3. 解 令 $A_{11}=\begin{pmatrix}3&4\\4&-3\end{pmatrix}$，由于 $A_{11}^{-1}=\dfrac{1}{|A_{11}|}A_{11}^*=-\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-3&-4\\-4&3\end{pmatrix},$

同理 $\qquad \begin{pmatrix}4&-1\\-7&2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\7&4\end{pmatrix},$

故 $$A=\begin{pmatrix}\frac{3}{25}&\frac{4}{25}&0&0\\\frac{4}{25}&-\frac{3}{25}&0&0\\0&0&2&1\\0&0&7&4\end{pmatrix}.$$

4. 解 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ **能构成 R^4 空间的一组基.**

因为 $\qquad |A|=|\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4|=\begin{vmatrix}1&-1&2&3\\3&0&4&-2\\3&0&1&0\\1&2&1&-1\end{vmatrix}=-69\neq0,$

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可构成 R^4 空间的一组基.

注：也可利用向量组是满秩的来说明，只要判断 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关即可.

2020-2021-2 线性代数 A 参考解答

5. 解　因为 $\alpha=(1,-2,5)^{\mathrm{T}}$，　$\beta=(2,1,1)^{\mathrm{T}}$，

则
$$A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}(2\ 1\ 1)=\begin{pmatrix}2&1&1\\-4&-2&-2\\10&5&5\end{pmatrix},$$

$$\beta^{\mathrm{T}}\alpha=(2,1,1)\cdot(1,-2,5)^{\mathrm{T}}=5,$$

从而
$$A^5=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})^5=\alpha\beta^{\mathrm{T}}\cdot\alpha\beta^{\mathrm{T}}\cdots\alpha\beta^{\mathrm{T}}=5^4\alpha\beta^{\mathrm{T}}=5^4\begin{pmatrix}2&1&1\\-4&-2&-2\\10&5&5\end{pmatrix}.$$

6. 解
$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\4&1&0&2\\1&-1&-3&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-7&-4&2\\0&-3&-4&-6\\0&-3&-1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&-3&-4&-6\\0&-7&-4&-2\end{pmatrix}$$
$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&0&-3&-9\\0&0&-\frac{5}{3}&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-3&-1&3\\0&0&-3&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

故向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的秩为 3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是它的一个最大无关组.

注：所求最大无关组不唯一，比如 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 也是它的最大无关组.

7. 解　（1）由过渡矩阵的定义，$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)A$,

得
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}A,$$

2020-2021-2 线性代数 A 参考解答

故 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}.$

(2) 令 $\eta=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)X,$

则 $X=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}\eta=\begin{pmatrix}0&1&0\\ \frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$

8. 解 $\overline{A}=\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1&1\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\-1&-1&\lambda&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1&-1&\lambda&\lambda^2\\-1&\lambda&-1&-\lambda\\\lambda&-1&-1&1\end{pmatrix}$

$\to\begin{pmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\0&\lambda+1&-(\lambda+1)&-\lambda(\lambda+1)\\0&-(\lambda+1)&\lambda^2-1&\lambda^3+1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-\lambda&-\lambda^2\\0&\lambda+1&-(\lambda+1)&-\lambda(\lambda+1)\\0&0&(\lambda+1)(\lambda-2)&(\lambda+1)(\lambda-1)^2\end{pmatrix}.$

（1）当 $\lambda=2$ 时，$r(A)=2,\ r(\overline{A})=3,$此时原方程组无解；

（2）当 $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq2$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=3,$此时原方程组有唯一解；

（3）当 $\lambda=-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})=1<3,$此时原方程组有无穷多解，

$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&1&1&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$故通解为 $x=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$

注：该题也可先求系数行列式 $|A|=(\lambda+1)^2(\lambda-2)$，再讨论解的情况.

9. 解 因为 A 特征值分别为 $2,1,-1,\quad B=f(A)=A^2+3A-5E,$

故 $B=f(A)$ 的特征值分别为

$$f(2)=2^2+3\cdot2-5\cdot1=5,$$

$$f(1)=1^2+3\cdot 1-5\cdot 1=-1,$$

$$f(-1)=(-1)^2+3\cdot(-1)-5\cdot 1=-7,$$

从而 B 的行列式 $\quad |B|=5\cdot(-1)\cdot(-7)=35.$

10. 解　令　$P=(p_1,\ p_2,\ p_3)$,

则由 $\quad P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,

得

$$A=P\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&-2&2\\-3&0&3\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1&1\\-1&4&-1\\1&-1&4\end{pmatrix}.$$

注：P 不唯一，P 的列向量的排列次序与特征值的排列次序一致.

11　解　(1) 二次型对应的矩阵为 $\quad A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&3\end{pmatrix}$.

令 $\quad |\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow \lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0\ \ \Rightarrow \lambda_1=0,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=9.$$

(3) 当 $\lambda_1=0$ 时，解 $(A-\lambda_1 E)x=0,$ 得 $\lambda_1=0$ 的特征向量 $\xi_1=(-1,1,2)^{\mathrm T}$,

单位化，得 $\eta_1=\dfrac{1}{\sqrt6}(-1,1,2)^{\mathrm T}$;

同理得 $\lambda_2=4$ 的单位化特征向量 $\eta_2=\dfrac{1}{\sqrt2}(1,1,0)^{\mathrm T}$;

$\lambda_3=9$ 的单位化特征向量 $\quad \eta_3=\dfrac{1}{\sqrt3}(1,-1,1)^{\mathrm T}$.

令 $P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$，则正交变换 $x=Py$ 使二次型 f 化为标准型 $f=4y_2^2+9y_3^2$.

12. 证　因为 $B^{\mathrm{T}}=(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A=B$, 所以 B 是实对称矩阵.

又
$$x^{\mathrm{T}}Bx=x^{\mathrm{T}}(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)x=\lambda x^{\mathrm{T}}x+(Ax)^{\mathrm{T}}Ax,$$

当 $\lambda>0$, $x\neq 0$ 时　　$\lambda x^{\mathrm{T}}x>0$,　$(Ax)^{\mathrm{T}}Ax\geq 0$,

从而当 $\lambda>0$ 时，$x^{\mathrm{T}}Bx$ 为正定二次型.