线 性 代 数 A 卷 答 案

1．3； 2. 0； 3. 10； 4. 9； 5. $7^{2016}A$； 6. $X=k(1,1,\cdots,1)^T$，k为任意常数；
7. $\frac{9}{4}$； 8. 3.

9.首先将D_{n+1}的第一行与以下各行交换（共 n 次）得到一个行列式，再将该行列式的第二行与以下 n-1 行（除最后一行外）交换（共 n-1 次），…, 以此类推，得到以下范德蒙德行列式：

$$D_{n+1}=(-1)^{n+(n-1)+\cdots+1}\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a & a+1 & \cdots & a+n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1}\\ a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n\end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Pi_{0\le i<j\le n}(j-i)$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}1!2!\cdots(n-1)!n!.$$

注.如果用第 1 行与第 n+1 行对换，第 2 行与第 n 行对换，前面的符号错误就酌情扣 2 分.

10．对$ABA^{-1}=-BA^{-1}+2E$，左乘A^*,右乘A,得到$A^*AB=-A^*B+2A^*A$

所以$|A|B+A^*B=2|A|E$，而且$|A^*|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=8$，

$|A^*|=|A|^{4-1}=|A|^3$，所以$|A|=2$，故

$(2E+A^*)B=4E$，$B=4(2E+A^*)^{-1}=4\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 5\end{bmatrix}^{-1}=4\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

11.作初等行变换：

$$\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_2\\ \alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_3-\alpha_2\\ \alpha_4-4\alpha_2\\ \alpha_5+3\alpha_2\end{matrix} \to \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}\alpha_2\\ \alpha_1-\alpha_2\\ \alpha_3-\alpha_2-2(\alpha_1-\alpha_2)\\ \alpha_4-4\alpha_2-(\alpha_1-\alpha_2)\\ \alpha_5+3\alpha_2+2(\alpha_1-\alpha_2)\end{matrix}$$

故该向量组的秩为 2，一个最大无关组为α_1,α_2

用该最大无关组表示其余向量得：

$\alpha_3 = 2\alpha_1 - \alpha_2$， $\alpha_4 = 3\alpha_2 + \alpha_1$， $\alpha_5 = -2\alpha_1 - \alpha_2$.

12. 设由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 的过渡矩阵为 C ，则

$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C$，故

$$C = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

设向量$\gamma = 3\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$在基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标为$y_1,y_2,y_3$，则

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = C^{-1}\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$$

13. 对方程组的增广矩阵用初等行变换得：

$$(AB) = \begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ -1 & 4 & -5 & a\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ -1 & 2 & b-2 & -1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & -3 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & b+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a-1\end{bmatrix}$$

故当$a \neq 1, b$任意取值时， $R(AB) \neq R(A)$，方程组无解；

当$a = 1, b \neq -1$时， $R(AB) = R(A) = 3$，方程组有唯一解；

当$a = 1, b = -1$时， $R(AB) = R(A) = 2 < 3$，方程组有无穷多解，由

$$(AB)=\begin{bmatrix}1&-3&4&0\\-1&4&-5&a\\2&-1&3&5\\-1&2&b-2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&3\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

即$\begin{cases}x_1+x_3=3\\x_2-x_3=1\end{cases}$得到通解为：$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}k+\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}$， k 为任意常数.

14. 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&a\end{bmatrix}$， 因为 $R(A)=2$， 所以 $|A|=0$，

求得 $a=3$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)=0$ 得到 A 的特征值为 0,4,9.

对 $\lambda_1=0$,由（λE - A）$X=0$求得特征向量$p_1=$(-1,1,2)$^{\mathrm{T}}$,单位化得$q_1=(\frac{-1}{\sqrt6},\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6})^T$，

对 $\lambda_2=4$,由（λE - A）$X=0$求得特征向量$p_2=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$,单位化得$q_2=(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0)^T$，

对 $\lambda_3=9$,由（λE - A）$X=0$求得特征向量$p_3=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$,单位化得$q_3=(\frac{1}{\sqrt3},\frac{-1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3})^T$，

得到正交矩阵 $Q=(q_1,q_2,q_3)$ 以及正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$， 故二次型 f 经过

该正交变换后的标准型为 $f=4{y_2}^2+9{y_3}^2$.

$f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示椭圆柱面.

15.证明. 充分性$\Leftarrow$)：假设存在 n 阶方阵 P,Q 使得 $A=PB$，$B=QA$， 如果

X_0是方程组$AX=0$的解，即$AX_0=0$，故$BX_0=QAX_0=0$，即X_0是方程组$BX=0$的解，同理方程组$BX=0$的解也是方程组$AX=0$的解，故两个方程组同解.

必要性$\Rightarrow$)：因为方程组$\begin{cases}AX=0\\BX=0\end{cases}$与方程组$AX=0$与同解，所以$R\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=R(A)$，即$B$的行向量可由$A$的行向量线性表示，故存在$n$阶方阵$Q$使得$B=QA$.

同理存在n阶方阵P使得$A=PB$.