

## 线性代数 A 试卷

### 一、填空题（每题 5 分，共 40 分）

1、三阶行列式  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2、设  $A$  是三阶方阵，且  $|A| = 2$ ，则  $|2A^{-1} - 3A^*| = \underline{\hspace{2cm}}.$

3、设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha, \beta$  均为 4 维列向量， $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha), B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta)$ ，且

$|A| = 2, |B| = 3$ ，则  $|A + 2B| = \underline{\hspace{2cm}}.$

4、 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  是线性方程组  $AX = b (b \neq 0)$  的解，若要  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s$  也是线性方程组  $AX = b$  的解，需要满足的条件是  $\underline{\hspace{2cm}}.$

5、若三阶方阵  $A$  的特征值为  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ，则  $|A^{-1} + E| = \underline{\hspace{2cm}}.$

6、二次型  $f = X^T \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} X$  对应的矩阵为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

7、在  $R^3$  中，由基  $\alpha_1 = (1, 1, 1)^T, \alpha_2 = (0, 1, 1)^T, \alpha_3 = (0, 0, 1)^T$  到基

$\beta_1 = (1, 0, 1)^T, \beta_2 = (0, 1, -1)^T, \beta_3 = (1, 2, 0)^T$  的过渡矩阵为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

8、若二次型  $f = x_1^2 + 2x_2^2 + (1-k)x_3^2 + 2kx_1x_2 + 2x_1x_3$  为正定二次型，则  $k$  的取值为  $\underline{\hspace{2cm}}.$

### 二、计算题（每题 10 分，共 60 分）

9、计算  $n$  阶行列式  $D_n = \begin{vmatrix} a+a_1 & a & a & \cdots & a \\ a & a+a_2 & a & \cdots & a \\ a & a & a+a_3 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+a_n \end{vmatrix}$ , 这里  $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$ .

10、设  $AP = PB$ , 其中  $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ , 求  $A^n$ .

11、求向量组  $\alpha_1 = (1, -1, 2, 4)^T$ ,  $\alpha_2 = (0, 3, 1, 2)^T$ ,  $\alpha_3 = (3, 0, 7, 14)^T$ ,  $\alpha_4 = (1, -2, 2, 0)^T$ ,  $\alpha_5 = (2, 1, 5, 10)^T$  的秩及一个最大无关组, 并把其余向量用你选定的最大无关组线性表示.

12、设矩阵  $A$  与  $B$  相似, 其中  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,

求 (1)  $x$  与  $y$  的值;

(2) 求可逆矩阵  $P$ , 使得  $P^{-1}AP = B$ .

13、已知线性方程组  $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3\mu x_2 + x_3 = 9, \end{cases}$  问  $\lambda, \mu$  为何值时, 方程组无解、有唯一解、

有无穷多解? 并求出无穷多解时的通解.

14、已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = (1-a)x_1^2 + (1-a)x_2^2 + 2x_3^2 + 2(1+a)x_1x_2$  的秩为 2,

求 (1)  $a$  的值;

(2) 求一个正交矩阵  $P$ , 将二次型化为标准型;

(3) 判断二次曲面  $f(x_1, x_2, x_3) = 1$  的几何形状.