第 1 章 质点运动学 习题解答

一、选择题

1. D、2.D、3 .A、4.D、5.D、6.D、7. D、8.C、9. D、10. B

二、填空题

1. A，1.19 s，0.67 s

2. 8 m，10 m

3. $50(-\sin 5t\boldsymbol{i}+\cos 5t\boldsymbol{j})$ m / s，0，圆

4. 23 m / s

5. $16Rt^2$，4 rad / s

6. $\dfrac{1}{v}=\dfrac{1}{2}kt^2+\dfrac{1}{v_0}$

7. $\dfrac{\left(v_t^2-v_0^2\right)^{1/2}}{g}$

8. $A\mathrm{e}^{-\beta t}\left[\left(\beta^2-\omega^2\right)\cos\omega t+2\beta\omega\sin\omega t\right]$，$\dfrac{1}{2}\left(2n+1\right)\pi/\omega$, $\left(n=0,\ 1,\ 2,\ldots\right)$

9. $4t^3-3t^2$ (rad/s)，$12t^2-6t$ (m/s^2)

10. 抛物线， 抛物线

三、计算题

1.有一质点沿 x 轴作直线运动，t 时刻的坐标为 $x=4.5t^2-2t^3$（SI 单位），试求：
（1）第 2 秒内的平均速度；
（2）第 2 秒末的瞬时速度；
（3）第 2 秒内的路程。

答案：(1) $\overline{v}=\Delta x/\Delta t=-0.5$ m/s

(2) $v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=9t-6t^2$，$v\left(2\right)=-6$ m / s

(3) $S=\left|x\left(1.5\right)-x\left(1\right)\right|+\left|x\left(2\right)-x\left(1.5\right)\right|=2.25$ m.

2. 一质点沿 x 轴运动，其加速度为 $a=4t$（SI 单位），已知 $t=0$ 时，质点位于 $x_0=10$ m 处，初速度 $v_0=0$. 试求其位置和时间的关系式.

解：
$$a=\mathrm{d}v/\mathrm{d}t=4t\ ,\qquad \mathrm{d}v=4t\mathrm{d}t$$
$$\int_0^v\mathrm{d}v=\int_0^t 4t\,\mathrm{d}t\qquad v=2t^2$$
$$v=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=2t^2\qquad \int_{x_0}^x\mathrm{d}x=\int_0^t 2t^2\,\mathrm{d}t$$
$$x=\frac{2}{3}t^3+10\ (\mathrm{m})$$

3. 一质点沿 x 轴运动，其加速度 a 与位置坐标 x 的关系为 $a = 2 + 6x^2$ (SI 单位)，如果质点在原点处的速度为零，试求其在任意位置处的速度.

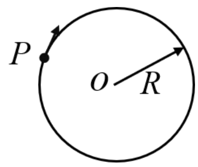
解：设质点在 x 处的速度为 v，

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2 + 6x^2$$

$$\int_0^v v\,\mathrm{d}v = \int_0^x \left(2 + 6x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$v = 2\left(x + x^3\right)^{1/2}$$

4. 如图所示，质点 P 在水平面内沿一半径为 $R = 2\ \mathrm{m}$ 的圆轨道转动. 转动的角速度与时间 t 的函数关系为 $\omega = kt^2$ (k 为常量). 已知 $t = 2\ \mathrm{s}$ 时，质点 P 的速度值为 $32\ \mathrm{m/s}$. 试求 $t = 1\ \mathrm{s}$ 时，质点 P 的速度与加速度的大小.



计算题第 4 题图

解：根据已知条件确定常量 k

$$k = \omega / t^2 = v / \left(Rt^2\right) = 4\ \mathrm{rad/s^2}$$

$$\omega = 4t^2, \qquad v = R\omega = 4Rt^2$$

$t = 1s$ 时， $$v = 4Rt^2 = 8\ \mathrm{m/s}$$

$$a_\tau = dv/dt = 8Rt = 16\ \mathrm{m/s^2}$$

$$a_n = v^2 / R = 32\ \mathrm{m/s^2}$$

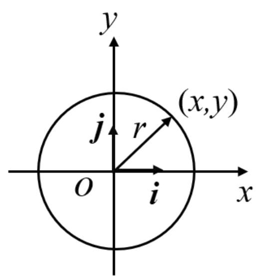
$$a = \left(a_\tau^2 + a_n^2\right)^{1/2} = 35.8\ \ \mathrm{m/s^2}$$

5.对于在 xy 平面内，以原点 O 为圆心作匀速圆周运动的质点，已知在 $t = 0$ 时，$y = 0, x = r$，角速度　如图所示；

(1)试用半径 $\boldsymbol{r}$、角速度　和单位矢量 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示其 t 时刻的位置矢量.

(2)由(1)导出速度 $\boldsymbol{v}$ 与加速度 $\boldsymbol{a}$ 的矢量表示式；

(3)试证加速度指向圆心.



计算题第 5 题图

解：(1) $$\boldsymbol{r} = x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} = r\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + r\sin\omega t\,\boldsymbol{j}$$

(2) $$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -r\omega\sin\omega t\,\boldsymbol{i} + r\omega\cos\omega t\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -r\omega^2\cos\omega t\,\boldsymbol{i} - r\omega^2\sin\omega t\,\boldsymbol{j}$$

(3) $$\boldsymbol{a} = -\omega^2\left(r\cos\omega t\,\boldsymbol{i} + r\sin\omega t\,\boldsymbol{j}\right) = -\omega^2\,\boldsymbol{r}$$

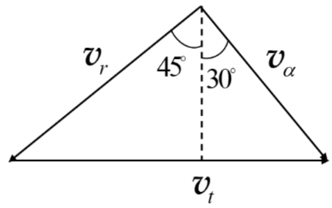
负号说明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 方向相反，即 $\boldsymbol{a}$ 指向圆心 .

6. 当火车静止时，乘客发现雨滴下落方向偏向车头，偏角为 30°，当火车以 35 m/s 的速率沿水平直路行驶时，发现雨滴下落方向偏向车尾，偏角为 45°，假设雨滴相对于地的速度保持不变，试计算雨滴相对地的速度大小.

解：　选地为静系，火车为动系．雨滴对地速度$\boldsymbol{v}_a$的方向偏前 30°，火车行驶时，雨滴对火车的相对速度$\boldsymbol{v}_r$偏后 45°，火车速度$v_t = 35\ \mathrm{m/s}$，方向水平．

$$v_a \sin 30^\circ + v_r \sin 45^\circ = v_t$$

$$v_a \cos 30^\circ = v_r \cos 45^\circ$$



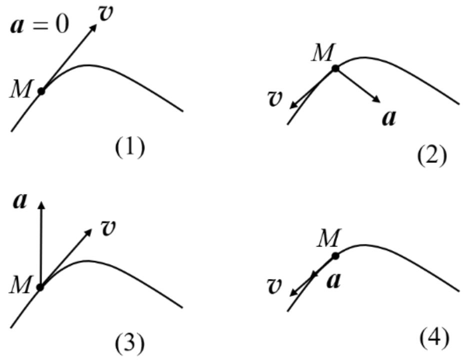
计算题第 6 题解图

由此二式解出：

$$v_a = \frac{v_t}{\sin 30^\circ + \sin 45^\circ \dfrac{\cos 30^\circ}{\cos 45^\circ}} = 25.6\ \mathrm{m/s}$$

四、研讨题

1. 在下列各图中质点 M 作曲线运动，指出哪些运动是不可能的？



研讨题第 1 题图

答案：

(1)、(3)、(4)是不可能的．

(1) 曲线运动有法向加速度，加速度不可能为零；

(3) 曲线运动法向加速度要指向曲率圆心；

(4) 曲线运动法向加速度不可能为零．

2. 设质点的运动方程为$x = x(t)$，$y = y(t)$在计算质点的速度和加速度时：

第一种方法是，先求出$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，然后根据 $v = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 及 $a = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 而求得结果；

第二种方法是，先计算速度和加速度的分量，再合成求得结果，即

$$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \quad 和 \quad a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}\ .$$

你认为两种方法中哪种方法正确？

答案：

第二种方法是正确的。因为速度和加速度都是矢量，根据定义，

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}$$

所以　$v = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$，　$a = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$.

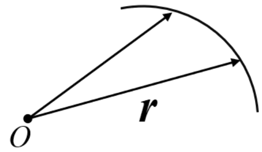
第一种方法是错误的，问题的关键在于位移、速度、加速度的矢量性

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \cdot \boldsymbol{r}^0) = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^0 + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}$$　（$\boldsymbol{r}^0$为$\boldsymbol{r}$方向的单位矢量），

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{r}^0+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}+r\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t^2}.$$

问题的关键：$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}=?$

在第二种方法中，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0,$ 如果在第一种方法的讨论中，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}=0,$ 那么



研讨题第 2 题解图

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\cdot\boldsymbol{r}^0)=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^0+r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}==\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{r}^0,$$ 则 $\upsilon=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 也成立！

注意：若 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}=0,$ 则 $\boldsymbol{r}^0$ 必须是大小与方向均不随时间改变的常矢量。根据质点的运动方程为 $x=x(t)$，$y=y(t)$，质点作平面曲线运动，如图所示，$\boldsymbol{r}^0$ 大小不变，但方向改变！

所以 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}\neq 0,$ 即第一种方法是错误的！

只有在直线运动中，$\boldsymbol{r}^0=\boldsymbol{i}$（显然 $\boldsymbol{i}$ 是大小与方向均不随时间改变的常矢量）$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^0}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t}=0,$

速度的大小才等于 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.对加速度的大小 $a\neq\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$ 也可以用同样方法加以讨论.

3. 速度为零的时刻，加速度是否一定为零？加速度为零的时刻，速度是否一定为零？
答案：速度为零的时刻，加速度可以不为零.如质点做竖直上抛运动到达最高点的时刻，质点的速度为零，但加速度不为零（加速度等于重力加速度）。

加速度为零的时刻，速度也可以不为零.如物体做匀速直线运动时，加速度为零，而速度不为零。

4. 一人在以恒定速度运动的火车上竖直向上抛出一石子，此石子能否落入人的手中？如果石子抛出后，火车以恒定的加速度前进，结果又将如何？
答：匀速前进的火车可视作相对地面运动的惯性系.水平方向上，相对火车静止的所有物体相对地面具有与火车相同的水平运动速度。在车上竖直上抛的石子相对火车没有水平运动速度，因此，石子抛出后一定能落入人的手中。

地面观察者对石子运动的描述为斜抛运动，但因为石子运动速度的水平分量与火车相同，因而能够落入车上那人的手中.如果石子抛出后，火车以恒定的加速度前进，那么火车成为非惯性系。在空中的石子相对火车有了水平运动速度，将回不到车上人的手中.地面观察者对石子运动的描述仍为斜抛运动，但因为石子运动速度的水平分量与火车的不同，因而不能落入车上那人的手中。