第 3 章 刚体的定轴转动　习题解答

一、选择题

1. C、2.B、3. D、4. C、5.A 、6.D、7. C、8. B、9. C、10. B

二、填空题

1. 62.5；1.67 s　　　　2. 4.0 rad

3. $\dfrac{I_A(\omega_A-\omega)}{\omega}$

4.否；在棒的自由下摆过程中，转动惯量不变，但使棒下摆的力矩随摆的下摆而减小．由转动定理知棒摆动的角加速度也要随之变小.

5. $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$;变角速;角动量

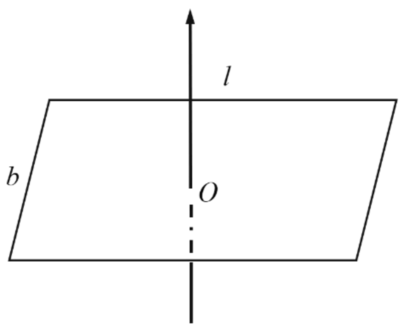
6. $\dfrac{1}{2}\mu gl$

7. $\dfrac{1}{3}\omega_0$

8. $2E_0$

三、计算题

1. 如图所示，有一质量密度为σ 的均匀矩形板,试证通过与面板垂直的几何中心轴线的转动惯量为$\dfrac{\sigma}{12}lb(l^2+b^2)$,其中$l$为矩形板的长，$b$为它的宽.



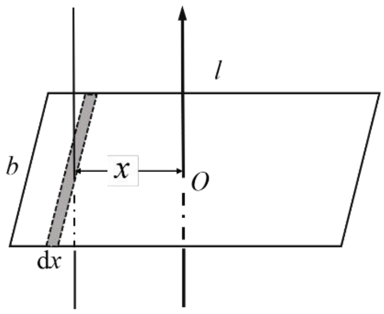
计算题第 1 题图

解:如计算题第一题解图所示，将矩形板分割为一系列宽为$\mathrm{d}x$的小矩形条,在距与板面垂直的几何中心轴O为x处任取一小矩形，它的质量可表示为$\mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}s=\sigma b\mathrm{d}x$，它对通过其质心轴的转动惯量为：

$$\mathrm{d}I_c=\frac{1}{12}b^2\mathrm{d}m=\frac{b^3}{12}\sigma\mathrm{d}x$$

由平行轴定理，小矩形对几何中心 O 轴的转动惯量为：

$$\mathrm{d}I_O=\mathrm{d}I_C+x^2\mathrm{d}m=\frac{b^3}{12}\sigma\mathrm{d}x+x^2\sigma b\mathrm{d}x$$



计算题第 1 题解图

均质矩形板对几何中心 O 轴的转动惯量为：

$$I_O=\int\mathrm{d}I_C+x^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}(\frac{b^3}{12}\sigma\mathrm{d}x+x^2\sigma b\mathrm{d}x)$$

$$=\frac{\sigma}{12}lb(l^2+b^2)$$

2.均质圆轮 A 的质量为 M_1，半径为 R_1，以角速度ω绕 OA 杆的 A 端转动，此时，将其放置在另一质量为 M_2 的均质圆轮 B 上，B 轮的半径为 R_2．B 轮原来静止，但可绕其几何中心轴自由转动．放置后，A 轮的重量由 B 轮支持．略去轴承的摩擦与杆 OA 的重量，并设两轮间的摩擦因素为μ，问自 A 轮放在 B 轮上到两轮间没有相对滑动为止，需要经过多长时间？

解：圆轮 A 对 B 的压力为 $N = M_1 g$，

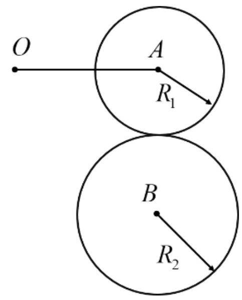
两轮之间的摩擦力大小为 $f = \mu N = \mu M_1 g$，

对 A 的力矩大小为 $M_A = fR_1 = \mu M_1 g R_1$，

对 B 的力矩大小为 $M_B = fR_2 = \mu M_1 g R_2$，

设 A 和 B 的角加速度分别为 β_A 和 β_B，转动惯量分别为 I_A 和 I_B，根据转动定理得方程

$$\beta_A = M_A / I_A，\ \beta_B = M_B / I_B .$$



计算题第 2 题图

当两轮没有相对滑动时，具有相同的线速度 v，

A 的角速度为 $\omega_A = \dfrac{v}{R_1}$，$B$ 的角速度为 $\omega_B = \dfrac{v}{R_2}$.

得 $\omega_A - \omega = -\beta_A t$，$\omega_B = \beta_B t$，

即 $\dfrac{v}{R_1} - \omega = -\beta_A t$，$\dfrac{v}{R_2} - \omega = -\beta_B t$，

化简可得 $v - \omega R_1 = -\beta_A R_1 t$，$v = \beta_B R_2 t$，

将后式减前式得 $\omega R_1 = (R_1\beta_A + R_2\beta_B)t$，解得

$$t = \frac{\omega R_1}{R_1\beta_A + R_2\beta_B} = \frac{\omega R_1}{R_1 M_A / I_A + R_2 M_B / I_B}$$

$$= \frac{\omega R_1}{\dfrac{R_1 \mu M_1 g R_1}{\frac{1}{2}M_1 R_1^2} + \dfrac{R_2 \mu M_1 g R_2}{\frac{1}{2}M_2 R_2^2}} = \frac{\omega R_1}{2\mu g + 2\mu g M_1 / M_2}$$

经过的时间为 $t = \dfrac{\omega M_2 R_1}{2\mu g (M_1 + M_2)}$.

3. 一转动惯量为I的圆盘绕一固定轴转动，起初角速度为ω_0．设它所受阻力矩与转动角速度成正比，即 $M = -k\omega$ (k 为正的常数)，求圆盘的角速度从ω_0变为$\dfrac{1}{2}\omega_0$时所需的时间．

解：根据转动定理： $$I\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=-k\omega$$

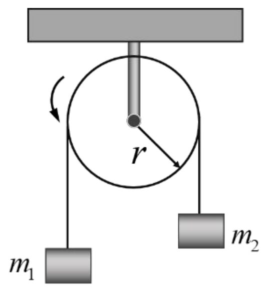
可得 $$\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=-\frac{k}{I}\mathrm{d}t$$

两边积分： $$\int_{\omega_0}^{\omega_0/2}\frac{1}{\omega}\mathrm{d}\omega=-\int_0^t\frac{k}{I}\mathrm{d}t$$

得： $$\ln 2=\frac{kt}{I}$$

即： $$t=\frac{I\ln 2}{k}$$

4.如图所示，设两重物的质量分别为 m_1 和 m_2，且 $m_1>m_2$，定滑轮的半径为 r，对转轴的转动惯量为 I，轻绳与滑轮间无滑动，滑轮轴上摩擦不计．设开始时系统静止，试求 t 时刻滑轮的角速度．



计算题第 4 题图

解：作示力图．两重物加速度大小 a 相同，方向如计算题第 4 题解图所示。

$$m_1g-T_1=m_1a$$
$$T_2-m_2g=m_2a$$

设滑轮的角加速度为 ，则 $(T_1-T_2)r=I$

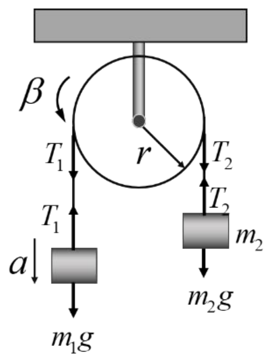
且有 $$a=r\beta$$

由以上四式消去 T_1，T_2 得：

$$\beta=\frac{(m_1-m_2)gr}{(m_1+m_2)r^2+I}$$

开始时系统静止，故 t 时刻滑轮的角速度．

$$\omega=\beta\ t=\frac{(m_1-m_2)grt}{(m_1+m_2)r^2+I}$$



计算题第 4 题解图

5.一匀质细棒长为 $2L$，质量为 m，以与棒长方向相垂直的速度 v_0 在光滑水平面内平动时，与前方一固定的光滑支点 O 发生完全非弹性碰撞．碰撞点位于棒中心的一侧 $\frac{1}{2}L$ 处，如图所示．求棒在碰撞后的瞬时绕 O 点转动的角速度 ．(细棒绕通过其端点且与其垂直的轴转动时的转动惯量为 $\frac{1}{3}ml^2$，式中的 m 和 l 分别为棒的质量和长度．)

解：碰撞前瞬时，杆对 O 点的角动量为

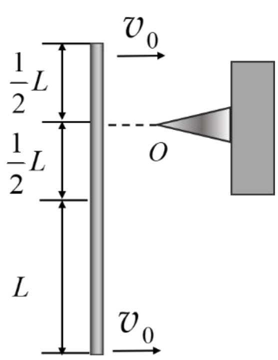
$$\int_0^{3L/2}\rho v_0x\,\mathrm{d}x-\int_0^{L/2}\rho v_0x\,\mathrm{d}x=\rho v_0L^2=\frac{1}{2}mv_0L$$

式中 ρ 为杆的线密度．碰撞后瞬时，杆对 O 点的角动量为

$$I\omega=\frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}m\left(\frac{3}{2}L\right)^2+\frac{1}{4}m\left(\frac{1}{2}L\right)^2\right]\omega=\frac{7}{12}mL^2\omega$$

因碰撞前后角动量守恒，所以

$$7mL^2\omega/12=\frac{1}{2}mv_0L$$



计算题第 5 题图

解得 $$\omega = \frac{6v_0}{7L}$$

6. 一质量均匀分布的圆盘，质量为 M，半径为 R，放在一粗糙水平面上(圆盘与水平面之间的摩擦系数为μ)，圆盘可绕通过其中心 O 的竖直固定光滑轴转动．开始时，圆盘静止，一质量为 m 的子弹以水平速度 v_0 直于圆盘半径打入圆盘边缘并嵌在盘边上，求

(1) 子弹击中圆盘后，盘所获得的角速度．

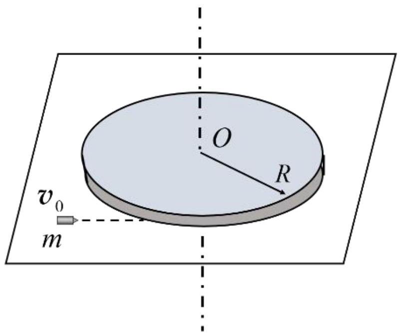
(2) 经过多少时间后，圆盘停止转动．

(圆盘绕通过 O 的竖直轴的转动惯量为$\frac{1}{2}MR^2$，忽略子弹重力造成的摩擦阻力矩)

解：(1) 以子弹和圆盘为系统，在子弹击中圆盘过程中，对轴 O 的角动量守恒．

$$mv_0R=(\frac{1}{2}MR^2+mR^2)$$

$$\omega=\frac{mv_0}{\left(\frac{1}{2}M+m\right)R}$$



计算题第 6 题图

(2) 设σ 表示圆盘单位面积的质量，可求出圆盘所受水平面的摩擦力矩的大小为

$$M_f=\int_0^R r\mu g\sigma\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}\,r=\frac{2}{3}\pi\mu\sigma gR^3=\frac{2}{3}\mu MgR$$

设经过 t 时间圆盘停止转动，则按角动量定理有

$$M_f\Delta t=0-I\omega=-(\frac{1}{2}MR^2+mR^2)\omega=-mv_0R$$

解得 $$\Delta t=\frac{mv_0R}{M_f}=\frac{mv_0R}{(2/3)\mu MgR}=\frac{3mv_0}{2\mu Mg}$$

四、研讨题

1. 为什么在计算一个刚体对某转轴的转动惯量时，一般不能认为它的质量集中于其质心，当作一个质点，然后再计算这个质点对该轴的转动惯量？举例说明你的结论。

答：不能．因为刚体的转动惯量 $\sum r_i^2\Delta m_i$ 与各质量元和它们对转轴的距离有关．如一匀质圆盘对过其中心且垂直盘面轴的转动惯量为$\frac{1}{2}mR^2$，若按质量全部集中于质心计算，则对同一轴的转动惯量为零．

2. 刚体定轴转动时，它的动能的增量只决定于外力对它做的功而与内力的作用无关。对于非刚体也是这样吗？为什么？

答：根据动能定理可知，质点系的动能增量不仅决定于外力做的功，还决定于内力做的功。

由于刚体内任意两质元间的距离固定，或说在运动过程中两质元的相对位移为零，所以每一对内力做功之和都为零。故刚体定轴转动时，动能的增量就只决定于外力的功而与内力的作用无关。

非刚体的各质元间一般都会有相对位移，所以不能保证每一对内力做功之和都为零，故动能的增量不仅决定于外力做的功，还决定于内力做的功。

3. 绕固定轴作匀变速转动的刚体，其上各点都绕转轴作圆周运动. 试问刚体上任意一点是否有切向加速度？是否有法向加速度？切向加速度和法向加速度的大小是否有变化？为什么？

答: 设刚体上任一点到转轴的距离为r，刚体转动的角速度为ω，角加速度为β，则由运动学关系有：

$$切向加速度\ a_\tau = r\beta$$

$$法向加速度\ a_n = r\omega^2$$

对匀变速转动的刚体来说$\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 常量 \neq 0$，因此$\mathrm{d}\omega = \beta \mathrm{d}t \neq 0$，$\omega$ 随时间变化，即

$$\omega = \omega(t).$$

所以，刚体上的任意一点，只要它不在转轴上（$r \neq 0$），就一定具有切向加速度和法向加速度. 前者大小不变，后者大小随时间改变.

4. 乒乓球运动员在台面上搓动乒乓球，为什么乒乓球能自动返回？

答：乒乓球（设乒乓球为均质球壳）的运动可分解为球随质心的平动和绕通过质心的轴的转动. 乒乓球在台面上滚动时，受到的水平方向的力只有摩擦力. 若乒乓球平动的初始速度v_C的方向如研讨题第 4 题解图所示，则摩擦力 F_r的 方向一定向后. 摩擦力的作用有二，对质心的运动来说，它使质心平动的速度v_C逐渐减小；对绕质心的转动来说，它将使转动的角速度ω逐渐变小.

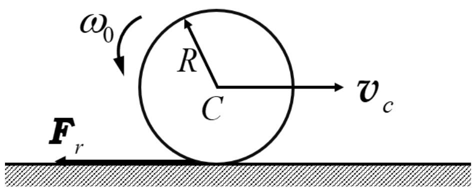
当质心平动的速度$v_C = 0$而角速度$\omega \neq 0$时，乒乓球将返回. 因此，要使乒乓球能自动返回，初始速度v_C和初始角速度ω_0的大小应满足一定的关系：

由质心运动定理:$-F_r = m\dfrac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t}$

因$F_r = \mu mg$, 得 $v_C = v_{C0} - \mu g$ (1)

由对通过质心的轴（垂直于平面）的转动定理 $M = I\beta$

$-RF_r = (\dfrac{2}{3}mR^2)\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$, 得 $\omega = \omega_0 - \dfrac{3}{2R}\mu gt$ (2)



研讨题第 4 题解图

由(1),(2) 两式可得 $\omega = \omega_0 - \dfrac{3}{2}\dfrac{v_{c0} - v_c}{R}$，令

$v_c = 0$；$\omega > 0$

可得 $\omega_0 > \dfrac{3v_{c0}}{2R}$

这说明当$v_C = 0$和ω_0的大小满足此关系时，乒乓球可自动返回.