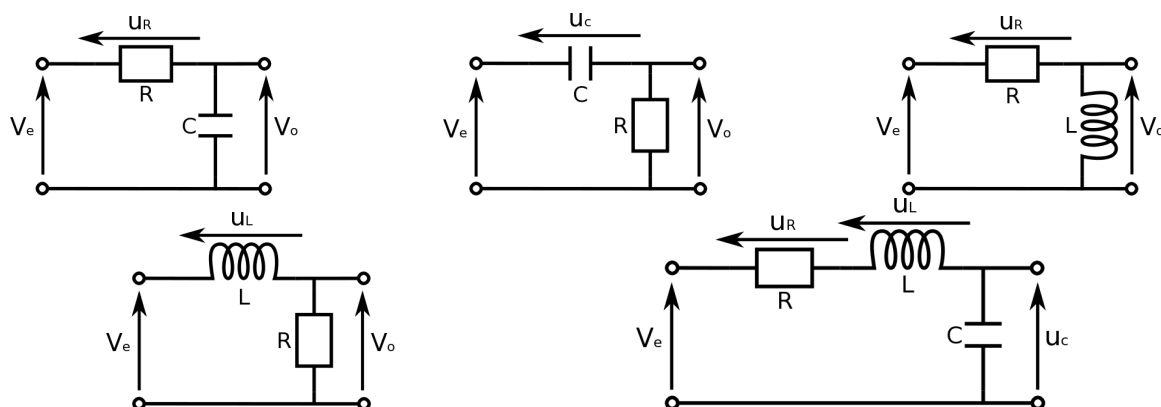


## P1 : SIMULATION DE CIRCUITS R, L, C

**Objectif du projet :** Calculer la réponse de circuits complexes composés par des éléments du type R, L et C dans le domaine temporel, pour une excitation arbitraire.

**Contact :** votre enseignant de TD

**Principe :** Dans un premier temps, on considérera un ensemble de différents circuits simples (dits “blocs”) de type RC, RL, RLC série, RLC parallèle, *etc.* On résoudra ensuite les équations différentielles ordinaires (EDO) relatives à chaque bloc par les différentes méthodes vues en cours (Euler, Runge-Kutta, différences finies). Le signal temporel d’entrée sera décrit dans un fichier texte et peut donc être obtenu à partir de n’importe quel système d’acquisition de signal (capteurs via un oscilloscope, audio *etc.*).



**Rappel :** La tension  $u_C$  aux bornes d’un condensateur  $C$  est donnée par  $u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t') dt'$ . Aux bornes d’une inductance  $L$ , la tension  $u_L$  est  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ .

1. **Filtre du premier ordre :** On s’intéresse dans un premier temps aux blocs de 1er ordre, c’est à dire aux circuits RC, CR, RL et LR série. On écrira les équations reliant la tension de sortie de chacun de ces blocs à la tension d’entrée puis on résoudra ces EDO en utilisant les différentes méthodes vues en cours (Euler, Runge-Kutta, *etc.*). On testera ces différentes méthodes pour des signaux de type créneau ou sinus.
2. **Filtre du second ordre :** On s’intéresse maintenant au bloc du 2nd ordre, c’est à dire au circuit RLC série. On écrira les équations reliant la tension d’entrée à la tension aux bornes de chaque composant. On résoudra ces EDO en utilisant les différentes méthodes vues en cours (Euler, Runge-Kutta, *etc.*). On testera ces différentes méthodes pour des signaux de type créneau ou sinus.
3. **Pour aller plus loin :**
  - (a) On pourra considérer des circuits complexes composés par les différents blocs cascades en supposant que des AOP-suiveurs sont utilisés pour découpler les blocs.
  - (b) Le pas d’échantillonnage de la tension d’entrée est parfois insuffisant pour résoudre correctement l’EDO. On interpolera donc la tension d’entrée pour obtenir un pas de temps suffisamment petit pour garantir la stabilité de la méthode de résolution.
  - (c) Cette méthode permet d’étudier les composants dont les caractéristiques varient dans le temps ou l’impact des variations temporelles du bruit sur le signal traité. Elle permet donc de simuler des circuits et des signaux réels, comme le fait le calculateur SPICE.

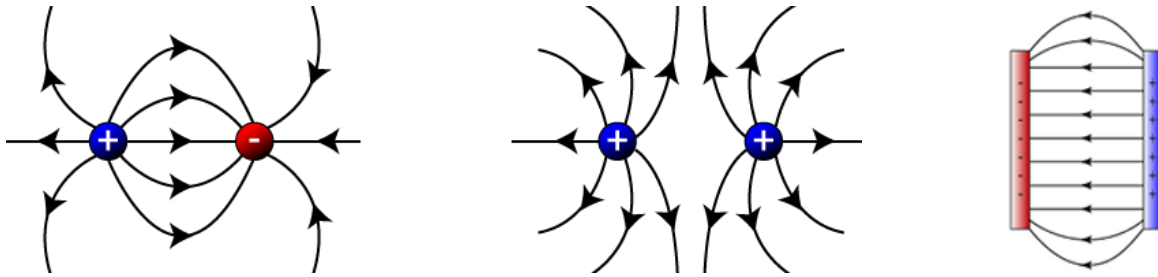
## P2 : CALCUL DE CHAMPS ÉLECTROSTATIQUES

**Objectif du projet :** Calculer le potentiel et le champ électrostatique associés générés par des distributions de charge en présence de conducteurs (simulation de capacités réelles : dimensions finies).

**Contact :** votre enseignant de TD

**Principe :** D'un point de vue numérique, on commencera par écrire l'équation aux dérivées partielles du problème électrostatique. Après la discrétisation de l'espace, la solution approchée est donnée par la résolution d'un système d'équations algébriques. On commencera par des distributions de charges simples (ponctuelles) puis des distributions plus complexes représentant une capacité réelle.

Dans ce projet, on s'intéressera à la fois à la distribution des potentiels électriques dans l'espace ainsi qu'aux lignes de champs électriques. Pour la visualisation du champ électrique, on pourra utiliser les fonctions `streamline`, `stream2` et `quiver` de Matlab.



Le champ électrique vérifie les équations :

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -\nabla V \\ \text{div}(\mathbf{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{E}$  est le champ électrique,  $\rho$  la densité volumique de charge,  $V$  le potentiel électrique et  $\varepsilon_0$  la permittivité du vide.

1. **Champ électrostatique dans le vide :** Si l'on considère des charges dans le vide, la combinaison des deux relations de l'équation (1) permet d'obtenir l'équation de Poisson-Laplace pour le potentiel électrique :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

- (a) On définira le problème en 2D en définissant un domaine  $\Omega$  de taille finie et en imposant un potentiel  $V$  sur ses bords (conditions de Dirichlet). On placera des charges ponctuelles ou linéiques à l'intérieur de  $\Omega$ .
- (b) La résolution du problème se fera par la méthode de Gauss-Seidel dans un premier temps puis par sur-relaxation successive [1] dans un second temps.

2. **Champ électrostatique dans un diélectrique :** Dans le cas où un diélectrique est présent dans le domaine, la seconde relation de l'équation (1) devient

$$\text{div}(\mathbf{D}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (3)$$

avec  $\mathbf{D} = \varepsilon_r \mathbf{E}$  et  $\varepsilon_r$  la permittivité relative du milieu.

- (a) On étudiera le champ électrique et la distribution des potentiels électriques dans et autour d'un condensateur plan. En plus de la tension aux bords du domaine, on imposera aussi celle des 2 plans du condensateur.
- (b) On pourra étudier l'influence de  $\varepsilon_r$  ainsi que de la taille du diélectrique dans le condensateur sur le champ électrique et sur le potentiel  $V$ .
- (c) À partir des distributions spatiales des champs, on peut calculer la capacité équivalente de la structure analysée.

## Références

- [1] J.R. Nagel *Solving the Generalized Poisson Equation Using the Finite-Difference Method (FDM)* (2012).

### P3 : CALCUL DU RAYONNEMENT D'ANTENNES

**Objectif du projet :** Calculer le champ électromagnétique rayonné dans l'espace par des antennes filaires (radio) et par des antennes cornets (radar, antennes paraboliques canal+, etc.).

**Contact :** massimiliano.casaletti@upmc.fr

**Principe :** Le champ électromagnétique (quantité vectorielle) rayonné par une antenne peut être exprimé comme la somme du champ rayonné par une infinité d'antennes, de taille infinitésimale  $dz$  (dipôle de Hertz) et parcourues par des courants constants  $I$  sur leur surface.

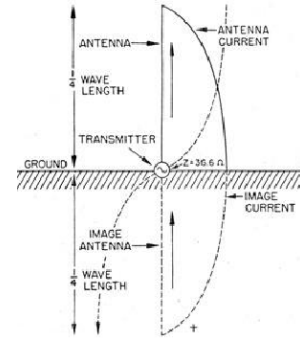
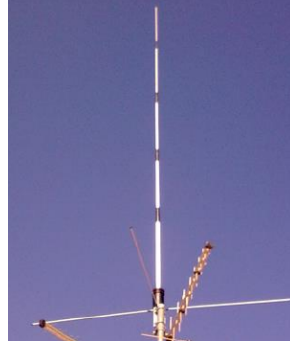


FIG. 1 – Antennes filaires

Le champ rayonné par un dipôle de Hertz est donné par :

$$\begin{cases} d\mathbf{E}(P) = dE_r(P)\mathbf{e}_r + dE_\theta(P)\mathbf{e}_\theta + dE_\phi(P)\mathbf{e}_\phi \\ d\mathbf{H}(P) = dH_r(P)\mathbf{e}_r + dH_\theta(P)\mathbf{e}_\theta + dH_\phi(P)\mathbf{e}_\phi \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} dE_r(P) = A\zeta \cos(\theta) \left( \frac{2}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) I(z) dz \\ dE_\theta(P) = A\zeta \sin(\theta) \left( 1 + \frac{1}{jkr} - \frac{1}{k^2 r^2} \right) I(z) dz \\ dH_\phi(P) = A \sin(\theta) \left( 1 + \frac{1}{jkr} \right) I(z) dz \\ dE_\phi(P) = dH_r(P) = dH_\theta(P) = 0 \end{cases}$$

où  $A = jk \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$ ,  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{c_0}{f}$ ,  $c_0$  est la vitesse de la lumière dans le vide (en m/s),  $\lambda$  la longueur d'onde (en m),  $f$  la fréquence (en Hz),  $\zeta = 120\pi \approx 377[\Omega]$

1. **Antenne filaire en champ lointain :** On considérera, dans un premier temps, le problème monodimensionnel d'une antenne filaire.

Les termes en  $1/r$  représentent le champ rayonné (prédominant quand  $r$  grand), les termes en  $1/r^2$  donnent les champs induits et les termes en  $1/r^3$  le champ électrostatique.

À grande distance, on suppose que  $\begin{cases} \theta' = \theta \\ r' = R - z \cos(\theta) \end{cases}$

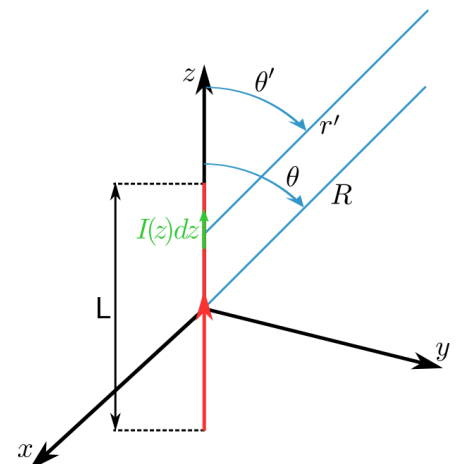
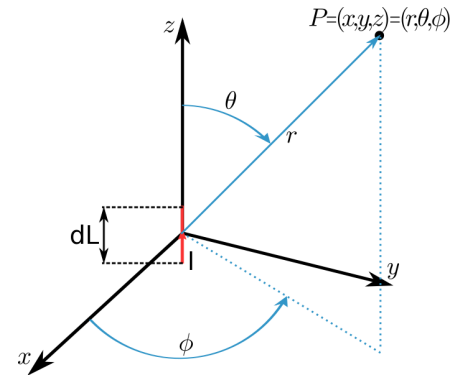
Le champ électromagnétique rayonné par le dipôle élémentaire devient :

$$\begin{cases} dE_r(P) \approx 0 \\ dE_\theta(P) \approx A\zeta \sin(\theta) I(z) dz \\ dH_\phi(P) \approx A \sin(\theta) I(z) dz \\ dE_\phi(P) = dH_r(P) = dH_\theta(P) = 0 \end{cases}$$

et on obtient

$$\mathbf{E}(P) = E_\theta(P)\mathbf{e}_\theta = \int_{-L/2}^{L/2} \left( A\zeta \sin(\theta) I(z) dz \right) \mathbf{e}_\theta = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} F(\theta, \phi) \mathbf{e}_\theta$$

où  $F(\theta, \phi)$  est le diagramme de rayonnement de l'antenne.



Une formule analytique approchée du diagramme de rayonnement, valide pour toutes les directions d'observation peut être obtenue par interpolation des valeurs numériques trouvées afin de tracer la courbe.

(a) On s'intéressera dans un premier temps au calcul de cette intégrale par les différentes méthodes vues

en cours.

- (b) À partir de la distribution spatiale du champ rayonné, on pourra calculer tous les paramètres d'antenne, notamment :
- le gain, utilisé pour faire le bilan de puissance des liaisons radio.
  - l'impédance d'entrée qui représente le circuit équivalent de l'antenne.

## 2. Interpolation :

- (a) Afin de diminuer les temps de calcul, on calculera le champ rayonné par l'antenne en un nombre limité de points et on interpolera les autres valeurs.
- (b) Si le nombre de points en  $\theta$  ou  $\phi$  est trop grand, une grande erreur d'interpolation peut apparaître sur les bords. Pour éviter cela, on pourra :
- utiliser les noeuds de Tchebychev pour définir les coordonnées angulaires
  - implémenter une interpolation par morceaux

3. **Pour aller plus loin :** On pourra s'intéresser au diagramme de rayonnement de réseaux d'antennes filaires (antenne dièdre ou Yagi-Uda).



FIG. 2 – Antennes dièdre et Yagi-Uda

## P4 : DIFFUSION DE LA CHALEUR

**Objectif du projet :** On souhaite modéliser la diffusion de la chaleur dans des composants électroniques.

**Contact :** votre enseignant de TD



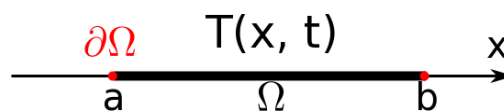
Soit  $\Omega$  un domaine de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega$  et  $T(\mathbf{r}, t)$  la température en  $\mathbf{r}$  à l'instant  $t$ . L'équation de la chaleur s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(\mathbf{r}, t) - \alpha(\mathbf{r}) \Delta T(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) & \mathbf{r} \in \Omega, t > t_0 \\ T(\mathbf{r}, t) = f_c(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \partial\Omega, t > t_0 \\ T(\mathbf{r}, t_0) = T_0(\mathbf{r}) & \mathbf{r} \in \Omega \end{cases} \quad (4)$$

où  $\alpha = \frac{K(\mathbf{r})}{\rho(\mathbf{r})C(\mathbf{r})}$ ,  $K(\mathbf{r})$  est la conductivité thermique (en  $[W(K m)^{-1}]$ ),  $C(\mathbf{r})$  est la capacité calorifique (en  $[J(kg K)^{-1}]$ ) et  $\rho(\mathbf{r})$  est la masse volumique (en  $[kgm^{-3}]$ ).

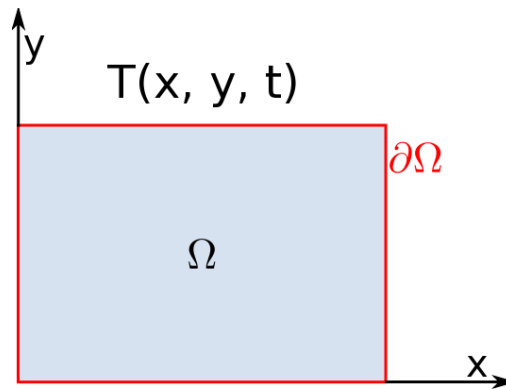
	Conductivité thermique $K [W(K m)^{-1}]$	Capacité calorifique $C [J(kg K)^{-1}]$	Masse volumique $\rho [kg m^{-3}]$
Aluminium	273	897	2700
Cuivre	390	385	8930
Air	0.026	1005	1.2

- Problème mono-dimensionnel :** Dans un premier temps, on considérera le problème monodimensionnel (fil homogène + source ponctuelle) et on résoudra l'équation aux dérivées partielles (EDP) en  $x$  et en  $t$  par différences finies.



$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) & x \in ]a; b[, t > t_0 \\ T(a, t) = T_a, T(b, t) = T_b, & t > t_0 \\ T(x, t_0) = T_0(x) & x \in [a; b] \end{cases} \quad (5)$$

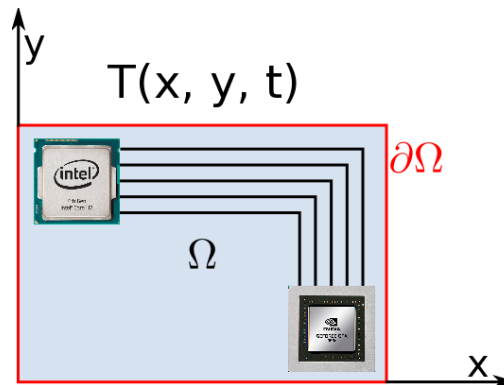
- Problème bi-dimensionnel :** On considérera ensuite des composants bidimensionnels (PCB et chips) et les sources correspondantes (ponctuelle ou linéaire).



$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, t) - \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}(x, y, t) \right) = f(x, y, t) & x \in ]0; a[, y \in ]0; b[, t > t_0 \\ T(0, y, t) = T_{x0}, T(a, y, t) = T_a, & y \in ]0; b[, t > t_0 \\ T(x, 0, t) = T_{y0}, T(x, b, t) = T_b, & x \in ]0; a[, t > t_0 \\ T(x, y, t_0) = T_0(x, y) & x \in [0; a], y \in [0; b] \end{cases} \quad (6)$$

### 3. Pour aller plus loin :

- (a) La résolution de l'équation de la chaleur en 2D est relativement lente. Pour diminuer les temps de calcul, on calculera le laplacien de la température  $\Delta T$  par différences finies puis on appliquera la méthode de Runge-Kutta 2 pour l'évolution temporelle.
- (b) On pourra considérer des matériaux inhomogènes ou des sources de chaleur variables en fonction du temps.

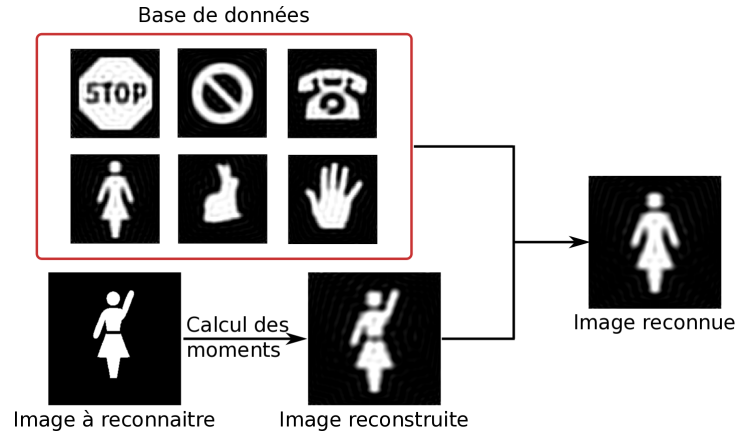


## P5 : RECONNAISSANCE DE FORMES - MOMENTS DE LEGENDRE

**Objectif du projet :** Retrouver dans une base de données, la forme la plus proche de l'image binaire qui sera donnée en entrée par l'utilisateur. Pour cela on utilisera les moments de Legendre tels que décrits dans [1, 2, 3].

**Contact :** thomas.dietenbeck@upmc.fr

**Applications possibles :** calculatrice «Paint», reconnaissance de plaque d'immatriculation, lecture d'un texte, reconnaissance de panneaux de circulation, ...



**Principe :** On représentera les formes par des images binaires (objet = 1, fond = 0) avec les définitions suivantes :  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ,  $\Omega_i = \{(x, y) \in \Omega | f(x, y) = 1\}$  et  $f : \Omega \mapsto \{0, 1\}$ .

### 1. Phase d'apprentissage :

(a) On calculera les moments géométriques d'une forme :  $M_{p,q} = \iint_{\Omega} x^p y^q f(x, y) dx dy$ . On s'arrêtera à l'ordre  $N$ , c'est à dire qu'on calculera tous les moments tels que  $p + q \leq N$ .

(b) Ces moments ne sont pas invariants en translation et mise à l'échelle et ne permettent donc pas de représenter correctement une forme. On utilisera donc les moments centrés et normés  $\eta_{p,q} = \iint_{\Omega} \frac{(x - \bar{x})^p (y - \bar{y})^q}{|\Omega_i|^{(p+q+2)/2}} f(x, y) dx dy$  avec  $|\Omega_i| = M_{0,0}$ ,  $\bar{x} = M_{1,0}/M_{0,0}$  et  $\bar{y} = M_{0,1}/M_{0,0}$ .

(c) La base canonique des polynômes ( $p_n^c(x) = x^n$ ) n'est pas orthogonale et ne permet pas une reconstruction de la forme à partir des moments. Pour palier à ce problème, on utilisera la base de Legendre :

$p_n^l(x) = \frac{1}{2^n n!} \times \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n)$ . On peut exprimer les moments de Legendre à partir des moments centrés et normés :  $\lambda_{p,q} = C_{pq} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{pi} a_{qj} \eta_{i,j}$ , où  $C_{pq} = \frac{(2p+1)(2q+1)}{4}$  est un coefficient de normalisation et  $p_n^l(x) = \sum_{i=0}^n a_{ni} x^i$ .

(d) Pour s'assurer du bon calcul des moments, on reconstruira l'image à partir des moments de Legendre à l'aide de la formule :  $\tilde{f}(x, y) = \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^{N-p} \lambda_{p,q} p_p^l(x) p_q^l(y)$ . On se servira aussi de cette reconstruction pour déterminer l'ordre maximal des moments.

### 2. Reconnaissance de formes :

(a) On utilisera la distance euclidienne entre les matrices de moments :  $d(\lambda^1, \lambda^2) = \sqrt{\sum_{p,q} (\lambda_{p,q}^1 - \lambda_{p,q}^2)^2}$

(b) Base de données : on génèrera la base de données en fonction de l'application (via un logiciel de traitement de texte ou de dessin par exemple).

(c) Pour reconnaître l'image donnée en entrée, on calculera la distance entre cette forme et toutes les formes de la base de données. On conservera la forme de distance minimale.

## Références

- [1] A. Foulonneau, P. Charbonnier & F. Heitz, *Contraintes géométriques de formes pour les contours actifs orientés région : une approche basée sur les moments de Legendre* (2004). Traitement du Signal, vol.21 (2), pp.109–128.

- 
- [2] A. Foulonneau, P. Charbonnier & F. Heitz *Affine-Invariant Geometric Shape Priors for Region-Based Active Contours* (2006). IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., vol 28 (8), pp.1352–1357.
  - [3] Y. Zhang, B.J. Matuszewski, A. Histace & F. Precioso, *Statistical Model of Shape Moments with Active Contour Evolution for Shape Detection and Segmentation* (2013). J. Math Imaging Vis. vol 47, pp.35–47.



## P6 : ESTIMATION DU MOUVEMENT

**Objectif du projet :** Estimer le mouvement appariant des pixels entre 2 images successives en utilisant des méthodes différentielles basées sur le flux optique [1, 2, 3].

**Contact :** thomas.dietenbeck@upmc.fr

**Applications possibles :** suivi d'objet, compression video, ...



**Principe :** On supposera que l'intensité d'un objet ne varie pas au cours du temps. Ainsi tout changement d'intensité est lié à un déplacement  $\Delta$  de l'objet et peut se traduire par :

$$I(\mathbf{p}) = I(\mathbf{p} + \Delta). \quad (7)$$

Si le déplacement est faible, on peut effectuer un développement de Taylor autour du pixel  $\mathbf{p} = (x, y, t)$

$$I(\mathbf{p} + \Delta) = I(\mathbf{p}) + \frac{\partial I}{\partial x}(\mathbf{p})\delta_x + \frac{\partial I}{\partial y}(\mathbf{p})\delta_y + \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{p})\delta_t \quad (8)$$

avec  $\Delta = (\delta_x, \delta_y, \delta_t)$ . En remplaçant (8) dans (7), on obtient l'équation du flux optique :

$$\begin{aligned} I(\mathbf{p} + \Delta) - I(\mathbf{p}) &= I_x(\mathbf{p})\delta_x + I_y(\mathbf{p})\delta_y + I_t(\mathbf{p})\delta_t = 0 \\ \Leftrightarrow I_x(\mathbf{p})u + I_y(\mathbf{p})v + I_t(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

où  $\mathbf{V} = (u, v, 1) = (\delta_x/\delta_t, \delta_y/\delta_t, 1)$  est la vitesse et  $\frac{\partial I_t}{\partial x} = I_x$ ,  $\frac{\partial I_t}{\partial y} = I_y$ ,  $\frac{\partial I_t}{\partial t} = I_t$  les gradients horizontal (suivant  $x$ ), vertical (suivant  $y$ ) et temporel (suivant  $t$ ).

1. **Méthode de Horn & Schunck [1] :** La résolution de l'équation (9) nécessite l'ajout de contraintes. En effet, le problème est sous déterminé puisqu'on dispose d'une seule équation pour 2 inconnues. Une solution consiste à supposer que le champ de mouvement est lisse, ce qui revient à minimiser l'énergie :

$$E(\mathbf{V}) = \iint_{\Omega} (I_x u + I_y v + I_t)^2 + \alpha (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) d\mathbf{p}$$

Chercher  $\mathbf{V}$  qui minimise  $E$  revient à annuler les dérivées premières de  $E$  par rapport à  $u$  et  $v$ , et on peut montrer qu'on obtient le système suivant :

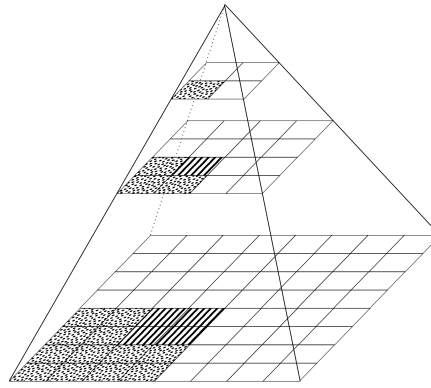
$$\begin{cases} (I_x^2 + \alpha) u + I_x I_y v &= \alpha \bar{u} - I_x I_t \\ I_x I_y u + (I_y^2 + \alpha) v &= \alpha \bar{v} - I_y I_t \end{cases} \quad (10)$$

où  $\bar{u}$  (resp.  $\bar{v}$ ) est la moyenne de  $u$  (resp.  $v$ ) autour du point  $\mathbf{p}$ .

- (a) On calculera les gradients horizontal  $I_x$ , vertical  $I_y$  et temporel  $I_t$  à partir de 2 images.
- (b) Résoudre le système et estimer  $u$  et  $v$  de manière itérative.

2. **Méthode de multi-résolution :** cette technique permet d'accélérer les calculs et d'estimer des mouvements plus importants en travaillant avec des images sous-échantillonnées.

- (a) On commencera par créer une pyramide d'image (3 niveaux de résolution : taille complète, sous-échantillonnage d'un facteur 2 et 4) et une méthode d'interpolation du champ  $\mathbf{V}$ .



(b) On estimera le mouvement par la méthode d'Horn & Schunck sur l'image la plus petite puis on interpolera le mouvement au niveau intermédiaire. On répètera l'opération pour arriver à pleine résolution.

3. **Pour aller plus loin :** On peut améliorer la robustesse de l'estimation en combinant des approches dites globale [1] et locale [2]. On cherche alors à minimiser [3]

$$E(\mathbf{V}) = \int \int_{\Omega} \mathbf{V}^T (W * (\nabla I \nabla I^T)) \mathbf{V} + \alpha (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) d\mathbf{p}$$

par le système suivant :

$$\begin{cases} (W * I_x^2 + \alpha) u + W * (I_x I_y) v = \alpha \bar{u} - W * (I_x I_t) \\ W * (I_x I_y) u + (W * I_y^2 + \alpha) v = \alpha \bar{v} - W * (I_y I_t) \end{cases} \quad (11)$$

où  $W$  est un filtre gaussien et  $*$  l'opérateur de convolution.

(a) On écrira une fonction faisant le produit terme à terme de matrice ainsi qu'une fonction effectuant la convolution entre une image et un filtre gaussien, puis on calculera le mouvement en résolvant le système (11).

## Références

- [1] B. Horn and B. Schunk *Determining optical flow* (1981). Artificial Intelligence, vol 17, pp.185–203.
- [2] B. Lucas and T. Kanade *An iterative image restoration technique with an application to stereo vision* (1981). Imaging Understanding Workshop, pp.121–130.
- [3] A. Bruhn and J. Weickert and C. Schnörr *Lucas/Kanade meets Horn/Schunck : Combining local and global optic flow methods* (2005). Intl. J. of Computer Vision, vol 61 (3), pp.211–231.

## P7 : SIMULATION DU SYSTÈME SOLAIRE

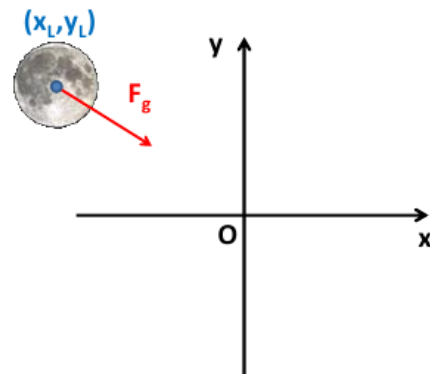
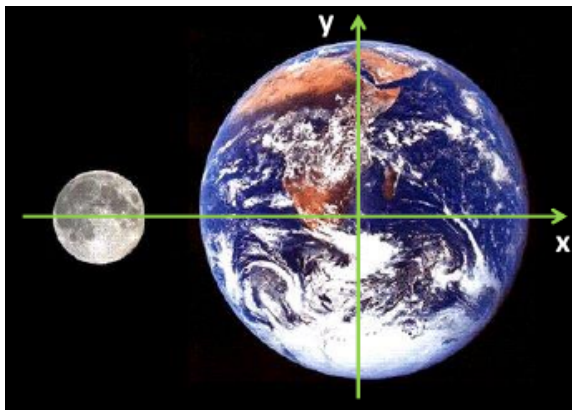
**Objectif du projet** : Modéliser la rotation des planètes du système solaire autour du Soleil.

**Contact** : votre enseignant de TD

**Remarque** : Durant tout le projet, on considèrera les planètes comme des masses ponctuelles.



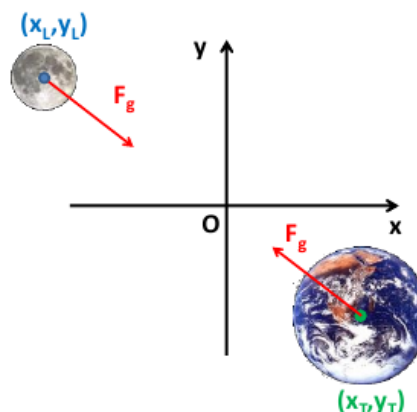
1. **Étape 1 (Système Terre-Lune simplifié)** : On commencera par modéliser dans un plan 2D, la rotation de la Lune autour de la Terre en supposant la Terre fixe. Ceci s'exprime sous la forme d'une équation différentielle en  $x$ ,  $y$  et  $t$  qui sera résolue par les méthodes numériques vues en cours (Euler, Runge-Kutta, Différences finies, ...).



$$M_L \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_L(t) = \mathbf{F}_g = \frac{GM_T M_L}{r^2(t)} \left( -\frac{\mathbf{r}_L(t)}{r(t)} \right) \quad (\text{Loi universelle de la gravitation}), \quad (12)$$

où  $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x_L(t) \\ y_L(t) \end{pmatrix}$  est la position de la lune,  $r(t) = \|\mathbf{r}_L(t)\|$ ,  $M_T$  est la masse de la Terre,  $M_L$  est masse de la Lune et  $G$  est la constante gravitationnelle.

2. **Étape 2 (Système Terre-Lune)** : On considèrera ensuite les interactions entre la Lune et la Terre et on cherchera à étudier la trajectoire de la Terre et de la Lune au cours du temps.



Cela se traduit par le système suivant (que l'on résoudra à l'aide de la méthode la plus stable étudiée à l'étape 1) :

$$\begin{cases} M_L \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}_g^L = \frac{GM_T M_L}{r^2(t)} \left( -\frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)} \right) \\ M_T \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}_g^T = \frac{GM_T M_L}{r^2(t)} \left( \frac{\mathbf{r}(t)}{r(t)} \right) \end{cases} \quad (\text{Loi universelle de la gravitation}), \quad (14)$$

où  $\mathbf{r}_L(t) = \begin{pmatrix} x_L(t) \\ y_L(t) \end{pmatrix}$  est la position de la Lune,  $\mathbf{r}_T(t) = \begin{pmatrix} x_T(t) \\ y_T(t) \end{pmatrix}$  est la position de la Terre,  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_L(t) - \mathbf{r}_T(t) = \begin{pmatrix} x_L(t) - x_T(t) \\ y_L(t) - y_T(t) \end{pmatrix}$ ,  $r(t) = \|\mathbf{r}(t)\|$ ,  $M_T$  est la masse de la Terre,  $M_L$  est masse de la Lune et  $G$  est la constante gravitationnelle.

3. **Étape 3 (Système solaire simplifié)** : On commencera par modéliser dans un plan 2D, la rotation des 8 planètes (Mercure, Venus, Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune) autour du Soleil en supposant le Soleil fixe et aucune interaction entre les planètes. Ceci s'exprime sous la forme d'un ensemble indépendant de 8 équations différentielles en  $x$ ,  $y$  et  $t$  qui sera résolue par la même méthode qu'à l'étape 2.

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_g^{Me} &= M_{Me} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Me}(t), & \mathbf{F}_g^{Ve} &= M_{Ve} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Ve}(t), & \mathbf{F}_g^{Te} &= M_{Te} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Te}(t), & \mathbf{F}_g^{Ma} &= M_{Ma} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Ma}(t), \\ \mathbf{F}_g^{Ju} &= M_{Ju} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Ju}(t), & \mathbf{F}_g^{Sa} &= M_{Sa} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Sa}(t), & \mathbf{F}_g^{Ur} &= M_{Ur} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Ur}(t), & \mathbf{F}_g^{Ne} &= M_{Ne} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_{Ne}(t) \end{aligned}$$

4. **Étape 4 (Système solaire)** : On considèrera ensuite les interactions entre toutes les planètes (et éventuellement la Lune) en gardant la position du Soleil fixe.