ACP_bigmac

October 20, 2018

1 librairies utilisées

```
In [1]: import pandas as pd
        import numpy as  np
        from matplotlib import pyplot as plt
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
        import seaborn as sns
```

L'**ACP** est une technique de machine learning d'**apprentissage non supervisée**. Elle tire avantage de la variance des variables plus précisément de la corrélation entre elles en éliminant la redondance de l'information contenue dans les variables. Il faut faire attention à ce niveau, l'ACP ne permet pas d'éliminer des variables ! Elle opère à travers un procédé mathématique qui transforme un nombre important de variables qui sont probablement corrélées en un nombre inférieur de variables non corrélées appelées Composant Principal, du fait de leur caractère à absorber le maximum d'information ou de variance dans les variables de départ.

En résumé, l'analyse en composantes princales permet :

- d'identifier des "profils cachés" dans un jeu de données,
- de réduire les dimensions des données en enlevant la redondance des données,
- d'indentifier les variables corrélées

Concrètement, pour **p dimensions ou variables**, nous avons **p composants principaux** obéissant au principes suivants :

- La première composante principale, est une combinaison linéaire des variables d'origine, qui maximise la variance dans les données. Géométriquement parlant, cette dernière détermine le sens de variation maximale dans les données. En bref, c'est la composante principale qui absorbe le maximum d'information.
- La seconde composante principale est également une combinaison linéaire des variables d'origine, qui maximise la variance avec la condition de **non-corrélation** avec le précédent composant principal.
- Le reste des composantes, obéit à la règle de la second composante principale.

2 Formalisation

Considérons X, la matrice des données numériques de dimension $n \times p$, de moyenne μ et de variance ou covariance Σ, dans laquelle, chaque individu e_i est décrit par les variables numériques $X_1, X_2, ..., X_p$.

On appelle composante principale Z_i, la combinaison linéaire des variables qui s'exprime comme ceci :

$$Z_i = w_{i1}X_1 + w_{i2}X_2 + ... + w_{ip}X_p = W_i^T X_i$$

avec comme variance $\sigma^2(z)_i = W_i^T \Sigma W_i$ et W_i esr un vecteur de p constantes.

Nous devons trouver W_i et en suite Z_i, telle que $\sigma^2(z)_i$ soit maximale avec $|sum_j^p w_{ij}^2 = 1$ ou $W_i^T W^i = 1$ (cette contrainte est introduite pour éviter que $W_i \to \infty$)

- Pour la première composante principal Z_1, nous devons résoudre :

$$\begin{cases} Max & \sigma^2(z)_1 = W_1^T \Sigma W_1 \\ \text{sc.(sous contrainte) de} & W_1^T W_1 = 1 \end{cases}$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange on obtient que :

$$\Sigma W_1 = \lambda_1 W_1$$

- Pour la seconde composante principal Z_2, nous avons à résoudre :

$$\begin{cases} Max & \sigma^2(z)_2 = W_2^T \Sigma W_2 \\ \text{sc.(sous contrainte) de} & W_2^T W_2 = 1 \\ & W_2^T W_1 = 0 \end{cases}$$

En utilisant le multiplicateur de Lagrange on obtient que :

$$\Sigma W_2 = \lambda_2 W_2$$

- Pour le reste des composantes principaux, on utilise le problème de la seconde composante en incrémentant pour i allant de 3 à p composantes principal. On obtiendra de manière générale que :

$$\Sigma W_i = \lambda_i W_i$$

Remarque :

La première remarque que l'on fait c'est que pour que les équations de la forme $\Sigma W_i = \lambda_i W_i$ soient possibles, il faudrait que les vecteurs W_i et les valeurs λ_i soient respectivement des vecteurs et valeurs propres de Σ. Mieux encore on peut donc conclure que :

$$\sigma^2(z)_i = Var[W_i^T X] = W_i^T \Sigma W_i = \lambda_i$$

Autrement dit, la variance d'une composante principale est égale à la valeur propre de la matrice de variance – covariance Σ.

2.1 Critère de rétention d'un composant principal

Une fois, nos composants déterminer, nous devons retenir ceux ayant des variances importantes et ignorer ceux ayant de faibles variances. Pour ce faire on peut se baser sur les critères suivantes(ce ne sont pas des lois) :

- Retenir les k composants ayant une valeur propre supérieure à 1 (Critère de Kaiser – Guttman)
- Retenir les k composants dont les valeurs propres précédent la cassure de la courbe on parle aussi du coude
- Retenir les k premiers composants qui expliquent y% de la variance.
- Retenir les k premiers composants dont la part ou proportion de variance est supérieur à la moyenne $(y > \frac{1}{p})$

3 L'ACP ou PCA avec le jeu de données BigMac

In [2]:
```
mcdo = pd.read_csv("../BigMac2003.csv",sep=",")
print(type(mcdo))
mcdo.head()
mcdo.tail()
```

```
<class 'pandas.core.frame.DataFrame'>
```

Out[2]:
```
   Unnamed: 0  BigMac  Bread  Rice  FoodIndex   Bus   Apt  TeachGI  TeachNI  \
64      Tokyo      10     20    18      129.4  1.64  1010     45.8     38.3
65    Toronto      14     12    10       61.0  1.31   850     26.5     18.5
66     Vienna      15     13    10       76.4  1.70  1020     28.9     19.8
67    Vilnius      62     25    23       33.8  0.24   340      3.7      2.6
68     Warsaw      44     17    16       36.0  0.62   440      5.3      3.4

    TaxRate  TeachHours
64  16.3755          49
65  30.1887          49
66  31.4879          37
67  29.7297          32
68  35.8491          26
```

In [3]:
```
#nombre d'observations
n = mcdo.shape[0]
#nombre de variables quantitatives
p = mcdo.shape[1]-1

mcdo.shape
```

Out[3]:
```
(69, 11)
```

```
In [4]: # Type des variables
        print(mcdo.dtypes)
```

```
Unnamed: 0     object
BigMac          int64
Bread           int64
Rice            int64
FoodIndex     float64
Bus           float64
Apt             int64
TeachGI       float64
TeachNI       float64
TaxRate       float64
TeachHours      int64
dtype: object
```

Notre jeu de données comporte 69 observations pour 11 variables.
On renomme la variable *Unamed:0* en *City* :

```
In [5]: mcdo = mcdo.rename(columns={mcdo.columns[0]:"City"})
        mcdo.head()
        mcdo.index = mcdo["City"]
        mcdo = mcdo.drop(columns="City")
```

Ensuite nous allons avec la fonction ***describe()*** obtenir une description statistique des données, nous avons les principaux indicateurs de tendance centrale et de dispersion :

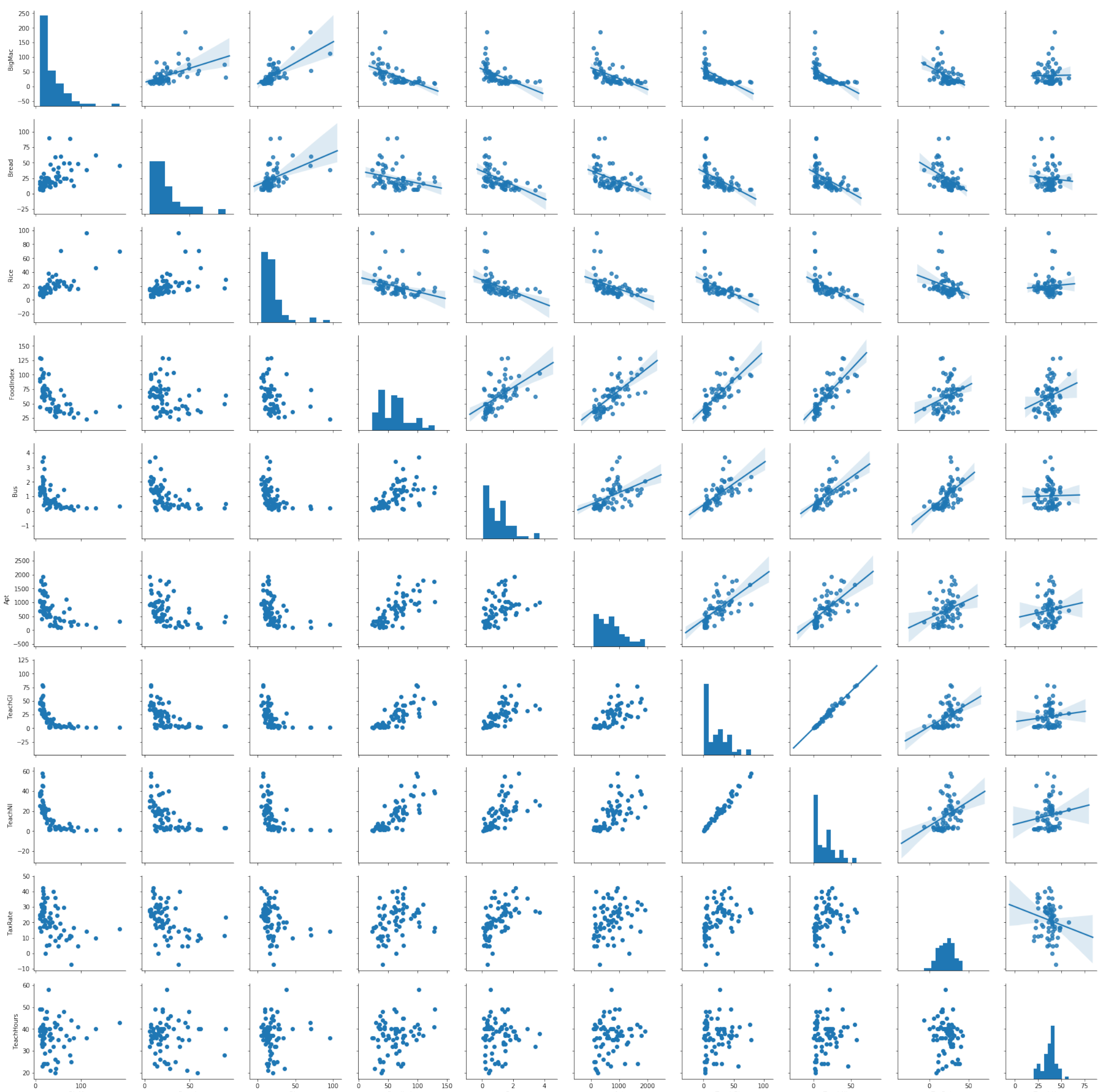
```
In [6]: mcdo.describe()
```

```
Out[6]:            BigMac      Bread       Rice   FoodIndex        Bus          Apt  \
        count   69.000000  69.000000  69.000000   69.000000  69.000000    69.000000
        mean    37.275362  24.579710  19.942029   61.930435   1.041159   713.913043
        std     31.420714  17.807307  15.236261   24.585477   0.801046   461.841638
        min     10.000000   6.000000   5.000000   23.500000   0.090000    90.000000
        25%     16.000000  13.000000  12.000000   41.200000   0.360000   320.000000
        50%     25.000000  19.000000  16.000000   62.600000   0.830000   700.000000
        75%     48.000000  28.000000  22.000000   75.300000   1.490000   950.000000
        max    185.000000  90.000000  96.000000  129.400000   3.700000  1930.000000

                 TeachGI    TeachNI    TaxRate  TeachHours
        count  69.000000  69.000000  69.000000   69.000000
        mean   21.220290  15.778261  21.481858   36.739130
        std    19.205028  14.076262  10.296695    7.417492
        min     0.600000   0.500000  -7.317070   20.000000
        25%     4.100000   3.400000  15.000000   33.000000
        50%    17.800000  12.600000  21.739100   38.000000
        75%    32.300000  22.500000  28.806600   40.000000
        max    78.500000  57.600000  42.352900   58.000000
```

Pour la visualisation graphique compte tenu du nombre de variables, les projeter individuellement nous donnerait un travail de longue haleine. Heureusement, avec la fonction PairGrid() de la librairie seaborn nous pouvons faire une analyse graphique des variables prises deux à deux et même visualiser la distribution de ces dernières.

```
In [7]: g = sns.PairGrid(mcdo)
        g.map_upper(sns.regplot)
        g.map_lower(plt.scatter)
        g.map_diag(plt.hist)
        plt.show()
```

```
/home/djebali/anaconda3/lib/python3.6/site-packages/scipy/stats/stats.py:1713: FutureWarning: U
  return np.add.reduce(sorted[indexer] * weights, axis=axis) / sumval
```



3.1 Standardisation des données

Dans l'analyse en composantes principales, les variables sont souvent normalisées. Ceci est particulièrement recommandé lorsque les variables sont mesurées dans différentes unités (par exemple: kilogrammes, kilomètres, centlitres, ...); sinon, le résultat de l'ACP obtenue sera fortement affecté.

L'objectif est de rendre les variables comparables. Généralement, les variables sont normalisées de manière à ce qu'elles aient au final :
1. un écart type égal à un et
2. une moyenne égale à zéro.

Techniquement, l'approche consiste à transformer les données en soustrayant à chaque valeur une valeur de référence (la moyenne de la variable) et en la divisant par l'écart type. A l'issue de cette transformation les données obtenues sont dites données centrées-réduites. L'ACP appliquée à ces données transformées est appelée ACP normée.

La standardisation des données est une approche beaucoup utilisée dans le contexte de l'analyse des données d'expression de gènes avant les analyses de type PCA et de clustering.

Lors de la normalisation des variables, les données peuvent être transformées comme suit:

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - mean(x_j)}{sd(x_j)}$$

Où $mean(x_j) = \bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ est la moyenne des valeurs de la variable x_j, et $sd(x_j) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2}$ est l'écart type (SD).

Nous utilisons la classe ***StandardScaler*** pour normaliser les données.

Avant cela nous allons exclure les variables qualitatives et convertir les variables quantitatives en float.

```
In [8]: X = mcdo

        # Conversion des variables en float
        # Les variables seront converties en float32
        X = X.apply(pd.to_numeric,downcast='float',errors='ignore')
        print("Après conversion\n",X.dtypes,"\n")
        # Cast des variables en float32 vers float64
        X = X.astype(dtype='float64')
        print("Après cast de float32 à float64\n",X.dtypes,"\n")
```

```
Après conversion
 BigMac        float32
Bread         float32
Rice          float32
FoodIndex     float32
Bus           float32
Apt           float32
TeachGI       float32
TeachNI       float32
TaxRate       float32
TeachHours    float32
```

```
dtype: object

Après cast de float32 à float64
 BigMac        float64
Bread         float64
Rice          float64
FoodIndex     float64
Bus           float64
Apt           float64
TeachGI       float64
TeachNI       float64
TaxRate       float64
TeachHours    float64
dtype: object
```

```
In [9]: #classe pour standardisation
        from sklearn.preprocessing import StandardScaler

        #instanciation
        sc = StandardScaler()

        #Avant normalisation on convertit toutes la variables float

        #transformation - centrage-réducation
        z = sc.fit_transform(X)
        X = pd.DataFrame(z, index=X.index, columns=X.columns)
        X.head()
```

```
Out[9]:              BigMac     Bread      Rice  FoodIndex       Bus       Apt  \
        City
        Amsterdam -0.682073 -0.881315 -0.723418   0.162643  1.205754  0.384065
        Athens    -0.521777 -0.711611 -0.062281   0.064309 -0.542189 -0.204834
        Auckland  -0.585895 -0.315634 -0.723418  -0.267568  0.665024  0.144143
        Bangkok    0.407943  0.985433  0.334401  -0.636319 -0.718240 -1.295388
        Barcelona -0.489717 -0.315634 -0.657305   0.039725 -0.164935 -0.270268

                    TeachGI   TeachNI   TaxRate  TeachHours
        City
        Amsterdam  0.686046  0.337897  1.834445    0.307035
        Athens    -0.090231  0.008712 -0.295482   -1.051006
        Auckland   0.040897  0.023024  0.522054    0.442840
        Bangkok   -0.892734 -0.842876 -1.635714   -0.236181
        Barcelona  0.224476  0.309273 -0.029873    0.307035
```

Examinons de nouveau les données en regardant les moyennes et les écarts-types.

```
In [10]: X.describe()
```

```
Out[10]:             BigMac         Bread          Rice     FoodIndex           Bus  \
         count  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01
         mean   4.062773e-17  8.286447e-17  1.609019e-18 -1.190674e-16  1.609019e-18
         std    1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00
         min   -8.744290e-01 -1.051020e+00 -9.878733e-01 -1.574587e+00 -1.196095e+00
         25%   -6.820732e-01 -6.550426e-01 -5.250772e-01 -8.493757e-01 -8.565668e-01
         50%   -3.935395e-01 -3.156338e-01 -2.606223e-01  2.743365e-02 -2.655357e-01
         75%    3.438244e-01  1.934794e-01  1.360601e-01  5.477834e-01  5.644229e-01
         max    4.735948e+00  3.700704e+00  5.028476e+00  2.764390e+00  3.343527e+00

                        Apt       TeachGI       TeachNI       TaxRate    TeachHours
         count  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01  6.900000e+01
         mean  -3.218038e-17 -4.827057e-18  2.735332e-17 -1.415937e-16 -9.975917e-17
         std    1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00  1.007326e+00
         min   -1.360821e+00 -1.081558e+00 -1.093344e+00 -2.817400e+00 -2.273243e+00
         25%   -8.591666e-01 -8.979791e-01 -8.858137e-01 -6.341205e-01 -5.077894e-01
         50%   -3.034584e-02 -1.793982e-01 -2.274428e-01  2.516591e-02  1.712313e-01
         75%    5.149310e-01  5.811437e-01  4.810214e-01  7.165799e-01  4.428396e-01
         max    2.652416e+00  3.004388e+00  2.992849e+00  2.041815e+00  2.887314e+00
```

4 ACP avec Scikit Learn

```
In [11]: #classe pour l'ACP
         from sklearn.decomposition import PCA

         #instanciation
         acp = PCA(svd_solver = 'full')

         #affichage des paramètres
         print(acp)
```

```
PCA(copy=True, iterated_power='auto', n_components=None, random_state=None,
  svd_solver='full', tol=0.0, whiten=False)
```

Le paramètre ***(svd_solver = 'full')*** indique l'algorithme utilisé pour la décomposition en valeurs singulières. Nous choisissons la méthode ''exacte'', sélectionnée de toute manière par défaut pour l'appréhension des bases de taille réduite.

D'autres approches sont disponibles pour le traitement des grands ensembles de données. Le nombre de composantes (K) n'étant pas spécifié (n_components = None), il est par défaut égal au nombre de variables (K = p).

Nous pouvons lancer les traitements dans un second temps. La fonction ***fit_transform()*** renvoie en sortie les coordonnées factorielles F_{ik} que nous collectons dans la variable coord. Nous affichons le nombre de composantes générées (K), il est bien égal à p = 10.

```
In [12]: #calculs
         coord = acp.fit_transform(z)
```

```
#nombre de composantes calculées
print(acp.n_components_)
```

```
10
```

4.0.1 Valeurs propres et scree plot

La propriété **.explained_variance_** semble faire l'affaire pour obtenir les variances (valeurs propres, $_k$) associées aux axes factoriels.

```
In [13]: #variance expliquée
         print(acp.explained_variance_)
```

```
[5.43783801e+00 1.33855617e+00 8.34946366e-01 8.01252999e-01
 5.30237340e-01 4.66594603e-01 3.38215247e-01 2.69523580e-01
 1.26125397e-01 3.76910852e-03]
```

On ne retrouve pas les même valeurs que sous **R**, il faut appliquer une petite correction.

```
In [14]: #valeur corrigée
         eigval = (n-1)/n*acp.explained_variance_
         print(eigval)
```

```
[5.35902876e+00 1.31915681e+00 8.22845694e-01 7.89640636e-01
 5.22552741e-01 4.59832362e-01 3.33313577e-01 2.65617441e-01
 1.24297492e-01 3.71448376e-03]
```

On aurait pu obtenir directement les bonnes valeurs propres en passant par les valeurs singulières **.singular_values_** issues de la factorisation de la matrice des données centrées et réduites

```
In [15]: #ou bien en passant par les valeurs singulières
         print(acp.singular_values_**2/n)
```

```
[5.35902876e+00 1.31915681e+00 8.22845694e-01 7.89640636e-01
 5.22552741e-01 4.59832362e-01 3.33313577e-01 2.65617441e-01
 1.24297492e-01 3.71448376e-03]
```

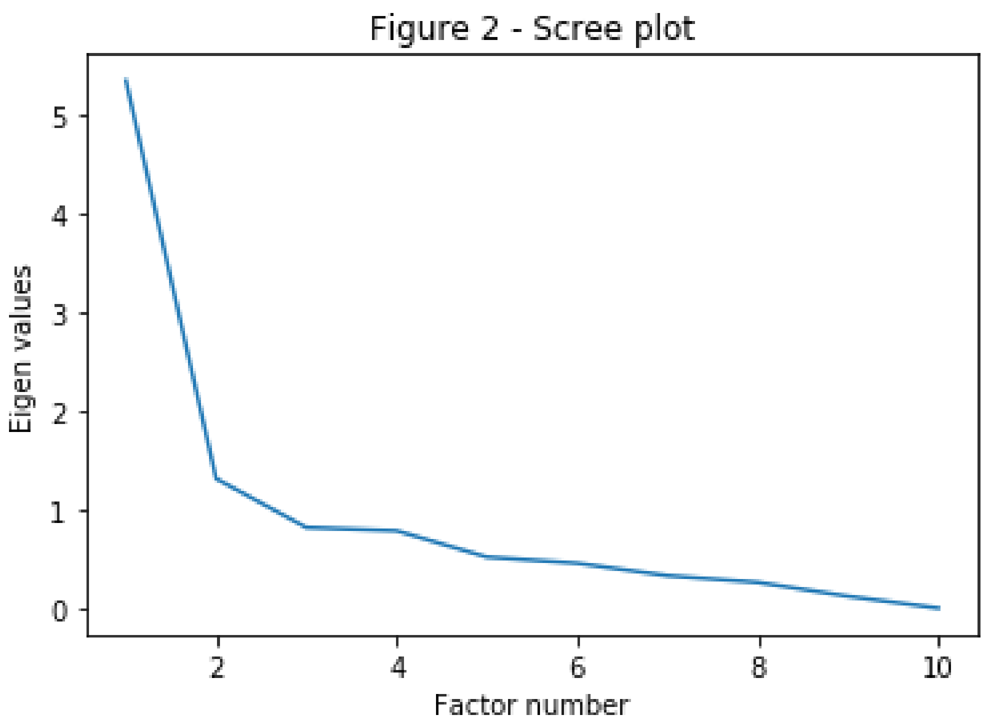
PCA fournit également les proportions de variance associées aux axes. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une correction dans ce cas.

```
In [16]: #proportion de variance expliquée
         print("proportion de variance expliquée\n",acp.explained_variance_ratio_)
         print("\n% de variances expliquer par les 5 premières variables")
         print(acp.explained_variance_ratio_[0]+acp.explained_variance_ratio_[1]\
               +acp.explained_variance_ratio_[2]+acp.explained_variance_ratio_[3]\
               +acp.explained_variance_ratio_[4])
```

```
proportion de variance expliquée
 [5.35902876e-01 1.31915681e-01 8.22845694e-02 7.89640636e-02
 5.22552741e-02 4.59832362e-02 3.33313577e-02 2.65617441e-02
 1.24297492e-02 3.71448376e-04]

% de variances expliquer par les 5 premières variables
0.8813224643880584
```

La première composante accapare 53.60% de l'information disponible. Les 5 premières variables (**BigMac, Bread, Rice, FoodIndex, Bus**).
Nous disposons des éléments permettant de construire le graphique "Scree plot" (éboulis des valeurs propres) (Figure 2).

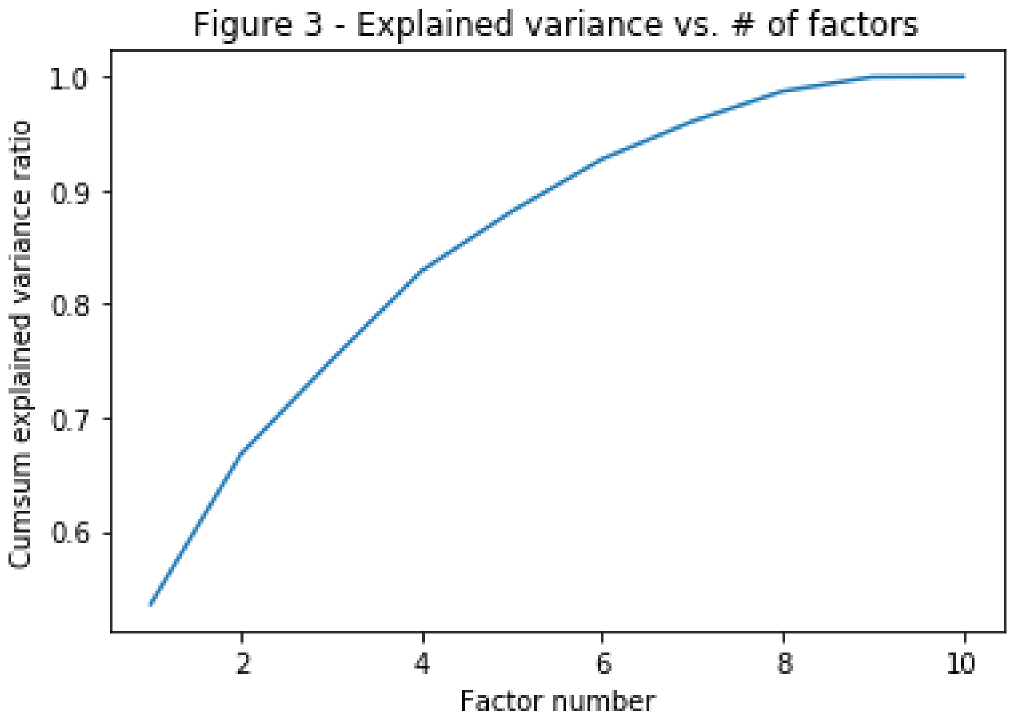
```
In [17]: #scree plot
         plt.plot(np.arange(1,p+1),eigval)
         plt.title("Figure 2 - Scree plot")
         plt.ylabel("Eigen values")
         plt.xlabel("Factor number")
         plt.show()
```



Le graphique du cumul de variance restituée selon le nombre de facteurs peut être intéressant également (Figure 3).

```
In [18]: #cumul de variance expliquée
         plt.plot(np.arange(1,p+1),np.cumsum(acp.explained_variance_ratio_))
```

```
plt.title("Figure 3 - Explained variance vs. # of factors")
plt.ylabel("Cumsum explained variance ratio")
plt.xlabel("Factor number")
plt.show()
```



4.0.2 Détermination du nombre de facteur à retenir

Les “cassures” dans les graphiques ci-dessus (Figure 2, Figure 3) sont souvent évoquées (règle du coude) pour identifier le nombre de facteurs K* à retenir. La solution (K* = 2) semble s'imposer ici.

D'autres pistes existent pour répondre à cette question toujours délicate qui conditionne l'interprétation de l'ACP, notamment le ń test des bâtons brisés ż de Legendre & Legendre(1983). Les seuils sont définis par :

$$b_k = \sum_{m=k}^{p} \frac{1}{m}$$

Le facteur nřk est validé si $({}_k > b_k)$, où ${}_k$ est la valeur propre associée à l'axe nřk.

Calculons ces seuils :

```
In [19]: #seuils pour test des bâtons brisés
         bs = 1/np.arange(1,p+1)
         bs = np.cumsum(bs)
         bs = bs[0]
```

Puis affichons conjointement les valeurs propres et les seuils :

```
In [20]: #test des bâtons brisés
         print(pd.DataFrame({'Val.Propre':eigval,'Seuils':bs}))

   Val.Propre  Seuils
0    5.359029     1.0
1    1.319157     1.0
2    0.822846     1.0
3    0.789641     1.0
4    0.522553     1.0
5    0.459832     1.0
6    0.333314     1.0
7    0.265617     1.0
8    0.124297     1.0
9    0.003714     1.0
```

Avec cette procédure, seul le premier facteur est valide. Le cercle des corrélations que nous construirons par la suite (Figure 5) semble aller dans le même sens.

Néanmoins, par commodité (pas seulement en réalité, cette étude est plus subtile qu'elle n'en a l'air, nous choisissons K* = 2 pour pouvoir représenter les individus et les variables dans le plan.

4.0.3 Représentation des individus – Outils pour l'interprétation

Coordonnées factorielles. Les coordonnées factorielles (F_{ik}) des individus ont été collectées dans la variable **coord** (Section 3.3.1). Nous les positionnons dans le premier plan factoriel avec leurs labels pour situer et comprendre les proximités entre les véhicules.

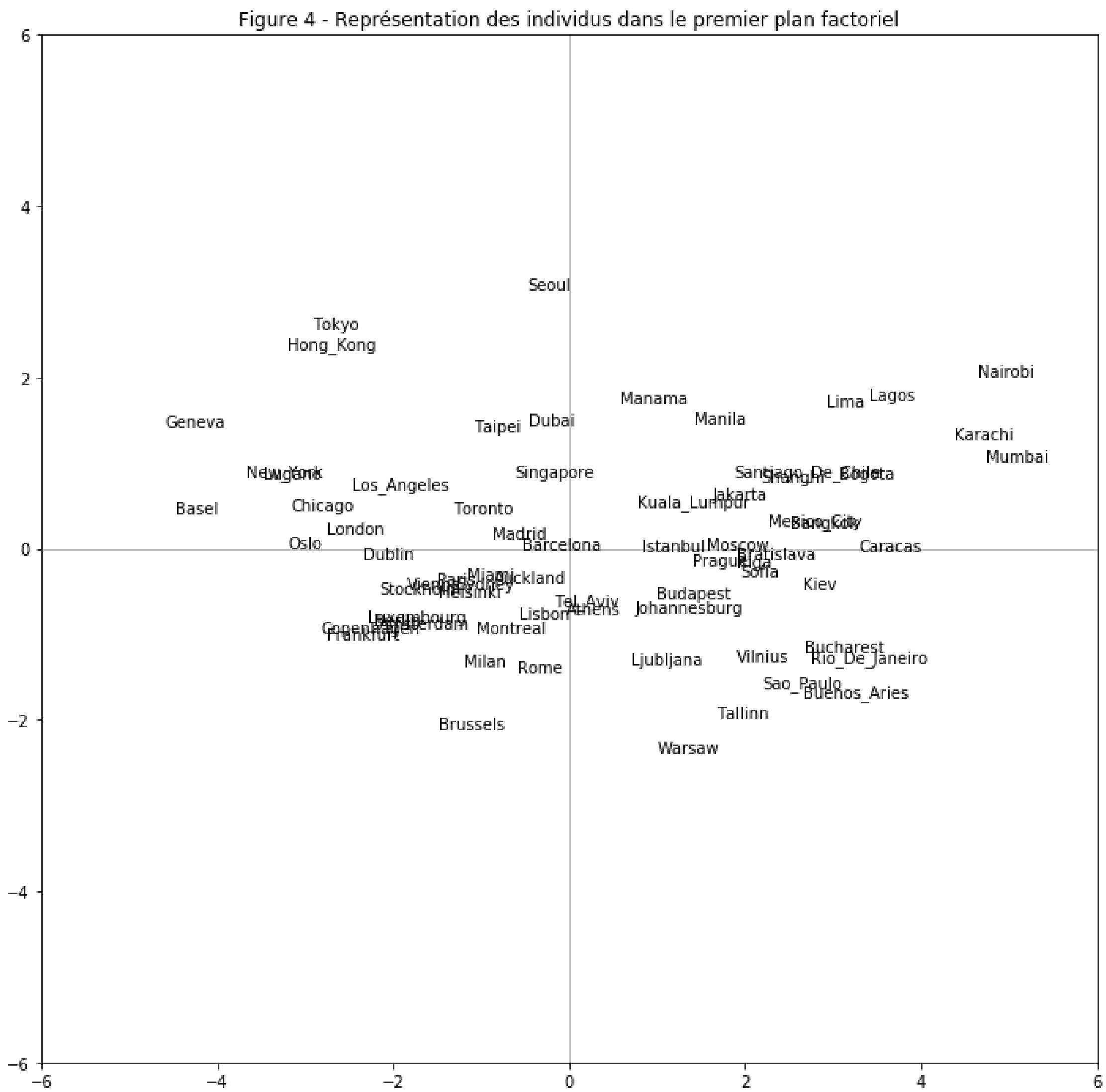
Je ferai deux commentaires au préalable :

1. L'ajout d'une étiquette dans un graphique nuage de points n'est pas très pratique sous Python (librairie Matplotlib), ma solution a le mérite de fonctionner, je ne sais pas s'il y a plus simple (j'ai cherché pourtant).

2. Les outils graphiques calculent souvent automatiquement les échelles en fonction des plages de valeurs. Ce n'est pas une bonne idée en ce qui concerne l'ACP. En effet, les axes n'ont pas la même importance (% de variance restituée). Pour ne pas fausser la perception des proximités, il est très important de veiller à ce que les échelles soient identiques en abscisse et en ordonnée. Respecter cette règle nous dispense de faire afficher les pourcentages de variance portés par les axes. Nous nous rendons compte directement dans notre graphique que les dispersions des individus sont nettement plus marquées sur le premier axe, en abscisse (Figure 4).

```
In [21]: #positionnement des individus dans le premier plan
         fig, axes = plt.subplots(figsize=(12,12))
         axes.set_xlim(-6,6) #même limites en abscisse
         axes.set_ylim(-6,6) #et en ordonnée

         #placement des étiquettes des observations
         for i in range(n):
             plt.annotate(X.index[i],(coord[i,0],coord[i,1]))
```

```python
#ajouter les axes
plt.plot([-6,6],[0,0],color='silver',linestyle='-',linewidth=1)
plt.plot([0,0],[-6,6],color='silver',linestyle='-',linewidth=1)
# ajout du titre
plt.title("Figure 4 - Représentation des individus dans le premier plan factoriel")
#affichage
plt.show()
```



Qualité de représentation – Les $\cos^2$ **(cosinus carré).** Pour calculer la qualité de représentation des individus sur les axes, nous devons d'abord calculer les carrés des distances à l'origine des individus, qui correspondent également à leur contribution dans l'inertie totale.

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^{p} z_{ij}^2$$

```
In [22]: #contribution des individus dans l'inertie totale
         di = np.sum(z**2,axis=1)
         print(pd.DataFrame({'ID':X.index,'d_i':di}))
```

```
              ID        d_i
0      Amsterdam   7.437368
1         Athens   2.322722
2       Auckland   1.971709
3        Bangkok   8.086880
4      Barcelona   1.114525
5          Basel  25.646006
6         Berlin   7.821026
7         Bogota  12.971844
8     Bratislava   4.890904
9       Brussels   7.898610
10     Bucharest  11.179346
11      Budapest   4.160065
12  Buenos_Aries  11.916827
13       Caracas  21.154843
14       Chicago  10.854057
15    Copenhagen  10.618668
16         Dubai   7.609229
17        Dublin   6.413068
18     Frankfurt  13.923234
19        Geneva  26.092601
20      Helsinki   3.943845
21     Hong_Kong  19.176009
22      Istanbul   2.241653
23       Jakarta   6.347321
24  Johannesburg   3.006511
25       Karachi  24.218974
26          Kiev   9.964277
27  Kuala_Lumpur   5.247486
28         Lagos  22.221993
29          Lima  15.077863
..           ...        ...
39   Mexico_City   8.300815
40         Miami   3.635658
41         Milan   8.975678
42      Montreal   2.956762
43        Moscow   6.822257
44        Mumbai  39.103890
45       Nairobi  39.814171
```

```
46           New_York  16.909480
47               Oslo  16.868892
48              Paris   3.846811
49             Prague   5.017557
50               Riga   5.883199
51     Rio_De_Janeiro  15.149402
52               Rome   6.825944
53  Santiago_De_Chile   6.279323
54          Sao_Paulo  11.698074
55              Seoul  13.196467
56            Shanghi  16.687178
57          Singapore   2.293197
58              Sofia   6.186276
59          Stockholm   9.057696
60             Sydney   2.563399
61             Taipei   6.975777
62            Tallinn   7.663470
63           Tel_Aviv   2.014329
64              Tokyo  16.755962
65            Toronto   5.311742
66             Vienna   4.059275
67            Vilnius   6.477402
68             Warsaw   7.648928

[69 rows x 2 columns]
```

Nous pouvons alors déduire la qualité de représentation des individus sur l'axe nřk avec :

$$\cos^2_{ik} = \frac{F^2_{ik}}{d^2_i}$$

```
In [23]: #qualité de représentation des individus - COS2
         cos2 = coord**2
         for j in range(p-1):
             cos2[:,j] = cos2[:,j]/di
         print(pd.DataFrame({'id':X.index,'COS2_1':cos2[:,0],'COS2_2':cos2[:,1]}))
```

```
                   id    COS2_1    COS2_2
0           Amsterdam  0.625761  0.116406
1              Athens  0.000332  0.255047
2            Auckland  0.368735  0.081200
3             Bangkok  0.778829  0.007249
4           Barcelona  0.252413  0.000041
5               Basel  0.781904  0.006372
6              Berlin  0.632467  0.102443
7              Bogota  0.729809  0.050885
8          Bratislava  0.740107  0.002784
9            Brussels  0.280066  0.565424
```

10	Bucharest	0.643276	0.128747
11	Budapest	0.234881	0.080571
12	Buenos_Aries	0.588784	0.251607
13	Caracas	0.510472	0.000068
14	Chicago	0.920826	0.018903
15	Copenhagen	0.747502	0.092091
16	Dubai	0.027973	0.274852
17	Dublin	0.855249	0.002508
18	Frankfurt	0.544657	0.080162
19	Geneva	0.805899	0.077983
20	Helsinki	0.552041	0.080763
21	Hong_Kong	0.537774	0.285809
22	Istanbul	0.312493	0.000366
23	Jakarta	0.419544	0.052298
24	Johannesburg	0.189791	0.185572
25	Karachi	0.790430	0.067827
26	Kiev	0.712263	0.021931
27	Kuala_Lumpur	0.115948	0.047524
28	Lagos	0.523335	0.134446
29	Lima	0.567245	0.184883
..	...	...	...
39	Mexico_City	0.614388	0.009866
40	Miami	0.375753	0.034395
41	Milan	0.159668	0.212613
42	Montreal	0.376238	0.329661
43	Moscow	0.361426	0.000004
44	Mumbai	0.574480	0.026115
45	Nairobi	0.540413	0.101459
46	New_York	0.797172	0.042703
47	Oslo	0.606900	0.000005
48	Paris	0.580457	0.045612
49	Prague	0.389420	0.008221
50	Riga	0.612808	0.008410
51	Rio_De_Janeiro	0.495891	0.115847
52	Rome	0.050450	0.304056
53	Santiago_De_Chile	0.562260	0.116361
54	Sao_Paulo	0.414876	0.220242
55	Seoul	0.017170	0.692968
56	Shanghi	0.284497	0.035600
57	Singapore	0.167627	0.304142
58	Sofia	0.615453	0.016605
59	Stockholm	0.510551	0.030713
60	Sydney	0.644016	0.088980
61	Taipei	0.167920	0.269015
62	Tallinn	0.367274	0.511736
63	Tel_Aviv	0.016235	0.212087
64	Tokyo	0.508242	0.393910
65	Toronto	0.325046	0.032823

```
66              Vienna  0.838055  0.054469
67            Vilnius  0.561867  0.267623
68             Warsaw  0.133296  0.747090

[69 rows x 3 columns]
```

Les $\cos^2$ pour les deux premiers facteurs sont affichés. Conformément à la théorie, pour chaque individu, la somme des $\cos^2$ sur l'ensemble des facteurs est égale à 1.

$$\sum_{k=1}^{p} \cos^2_{ik} = 1$$

```
In [24]: #vérifions la théorie - somme en ligne des cos2 = 1
         print(np.sum(cos2,axis=1))
```

```
[1.00862165 1.00010389 1.00082883 1.00420275 1.00015746 1.00082652
 1.01048173 1.00061373 1.00008257 1.0058893  1.00158729 1.00258806
 1.00010425 1.00001702 1.00000011 1.03455486 1.00856204 1.00000061
 1.00268074 1.00995211 1.00015307 1.01728649 1.00006198 1.00381699
 1.00041678 1.00001535 1.00001547 1.0000803  1.00718154 1.01368063
 1.00152992 1.00045504 1.00013069 1.00094277 1.00088443 1.01015249
 1.00066833 1.00127526 1.00013321 1.00052753 1.00145955 1.00002206
 1.00018569 1.01172715 1.00000733 1.00221762 1.01909298 1.00129232
 1.00011742 1.00039026 1.00123461 1.00208894 1.00000032 1.00031982
 1.00146624 1.00003797 1.00145182 1.00026163 1.0001831  1.0005775
 1.00021535 1.00001638 1.0062769  1.00021955 1.008286   1.00000199
 1.000307   1.0054141  1.00928747]
```

Contribution des individus aux axes (CTR). Elles permettent de déterminer les individus qui pèsent le plus dans la définition de chaque facteur.

$$CTR_{ik} = \frac{F^2_{ik}}{n \times \lambda_k}$$

```
In [25]: #contributions aux axes
         ctr = coord**2
         for j in range(p):
             ctr[:,j] = ctr[:,j]/(n*eigval[j])
         print(pd.DataFrame({'id':X.index,'CTR_1':ctr[:,0],'CTR_2':ctr[:,1]}))
```

```
                id     CTR_1         CTR_2
0        Amsterdam  0.012586  9.511513e-03
1           Athens  0.000002  6.508360e-03
2         Auckland  0.001966  1.758944e-03
3          Bangkok  0.017033  6.440751e-04
4        Barcelona  0.000761  5.025930e-07
5            Basel  0.054230  1.795310e-03
```

6	Berlin	0.013377	8.802393e-03
7	Bogota	0.025602	7.251779e-03
8	Bratislava	0.009789	1.496050e-04
9	Brussels	0.005982	4.906588e-02
10	Bucharest	0.019448	1.581277e-02
11	Budapest	0.002642	3.682435e-03
12	Buenos_Aries	0.018975	3.294108e-02
13	Caracas	0.029204	1.583175e-05
14	Chicago	0.027029	2.254132e-03
15	Copenhagen	0.021466	1.074342e-02
16	Dubai	0.000576	2.297704e-02
17	Dublin	0.014833	1.767112e-04
18	Frankfurt	0.020508	1.226206e-02
19	Geneva	0.056867	2.235497e-02
20	Helsinki	0.005888	3.499340e-03
21	Hong_Kong	0.027888	6.021277e-02
22	Istanbul	0.001894	9.010031e-06
23	Jakarta	0.007202	3.646922e-03
24	Johannesburg	0.001543	6.129575e-03
25	Karachi	0.051771	1.804724e-02
26	Kiev	0.019193	2.400810e-03
27	Kuala_Lumpur	0.001645	2.739805e-03
28	Lagos	0.031450	3.282346e-02
29	Lima	0.023130	3.062614e-02
..	...	...	...
39	Mexico_City	0.013792	8.997074e-04
40	Miami	0.003694	1.373821e-03
41	Milan	0.003876	2.096585e-02
42	Montreal	0.003008	1.070876e-02
43	Moscow	0.006668	2.768831e-07
44	Mumbai	0.060752	1.121914e-02
45	Nairobi	0.058187	4.437965e-02
46	New_York	0.036454	7.933024e-03
47	Oslo	0.027687	9.815169e-07
48	Paris	0.006039	1.927669e-03
49	Prague	0.005284	4.531599e-04
50	Riga	0.009750	5.435504e-04
51	Rio_De_Janeiro	0.020316	1.928126e-02
52	Rome	0.000931	2.280186e-02
53	Santiago_De_Chile	0.009548	8.027423e-03
54	Sao_Paulo	0.013125	2.830541e-02
55	Seoul	0.000613	1.004675e-01
56	Shanghi	0.012839	6.526529e-03
57	Singapore	0.001040	7.662536e-03
58	Sofia	0.010296	1.128554e-03
59	Stockholm	0.012506	3.056303e-03
60	Sydney	0.004465	2.505898e-03
61	Taipei	0.003168	2.061693e-02

```
62            Tallinn  0.007612  4.308498e-02
63           Tel_Aviv  0.000088  4.693525e-03
64              Tokyo  0.023031  7.251385e-02
65            Toronto  0.004669  1.915420e-03
66             Vienna  0.009200  2.429128e-03
67            Vilnius  0.009842  1.904491e-02
68             Warsaw  0.002757  6.278096e-02

[69 rows x 3 columns]
```

On voit que Geneva, Basel, Nairobi sont relativement déterminants pour le premier axe; pour le second Brussels, Hong Kong et Warsaw.

Les sommes en ligne sont égales à l'unité ici :

$$\sum_{i=1}^{n} CTR_{ik} = 1$$

```
In [26]: #vérifions la théorie
         print(np.sum(ctr,axis=0))

[1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.]
```

4.0.4 Représentation des variables – Outils pour l'aide à l'interprétation

Nous avons besoin des vecteurs propres pour l'analyse des variables. Ils sont fournis par le champ **.components_**

```
In [27]: #le champ components_ de l'objet ACP
         print(acp.components_)

[[ 3.46674765e-01  2.90131511e-01  2.83299743e-01 -3.42929401e-01
  -3.39122374e-01 -3.32207857e-01 -3.97749168e-01 -3.90091415e-01
  -2.45810922e-01 -4.02023478e-02]
 [ 1.65523187e-01  1.83728995e-01  2.34471434e-01  3.51848517e-01
  -1.37561241e-01  2.00615246e-01  1.16642957e-01  1.80729313e-01
  -4.38443838e-01  6.80000194e-01]
 [ 3.58752181e-01  2.23953095e-01  6.50239050e-01  1.96355081e-01
   2.83001889e-01 -4.56090819e-02  1.88254584e-01  1.31834183e-01
   4.34260879e-01 -1.90270690e-01]
 [-6.60964122e-02  5.34580824e-01 -1.37583507e-01  2.79723780e-01
  -1.89275681e-01  2.31053469e-01  9.53632354e-02  1.45116847e-01
  -3.46916311e-01 -6.10708630e-01]
 [-2.78076240e-01  6.42171366e-01 -2.83040849e-01  1.88082962e-01
   2.35597214e-01 -2.38592230e-01 -1.66771070e-01 -2.14081845e-01
   3.33039982e-01  3.12746964e-01]
 [-1.50716727e-01 -5.19290113e-02  1.77688996e-01  1.55709750e-01
  -3.69362989e-01  6.56646888e-01 -3.11857321e-01 -3.38012023e-01
```

```
  3.72909838e-01  2.42058654e-02]
 [ 4.60100901e-01  5.96291553e-02 -2.45865707e-01 -1.53576186e-01
   6.12082169e-01  4.62415375e-01 -1.86569686e-01 -2.11925128e-01
  -1.80287694e-01 -4.38328078e-03]
 [-5.21293087e-01 -1.61558890e-01  4.35487669e-01  2.08040523e-01
   4.22015643e-01 -7.90527591e-02 -2.71168415e-01 -2.17187748e-01
  -3.85995000e-01 -1.23208625e-01]
 [-3.68128123e-01  3.18198687e-01  2.47406719e-01 -7.17345700e-01
   7.03876198e-02  2.92801583e-01  2.12706040e-01  1.94421325e-01
  -2.20538870e-02  1.14975099e-01]
 [-1.86347620e-02 -1.21538589e-02  5.41461266e-03  2.70046678e-02
  -2.29412507e-02 -2.02405750e-03  7.10636398e-01 -6.97682492e-01
  -8.03181794e-02 -3.19789090e-04]]
```

Attention, par rapport à R, les facteurs sont en ligne, les variables en colonne. Nous devons en tenir compte pour obtenir les corrélations (variables x facteurs, r_{jk}) en les multipliant par la racine carrée des valeurs propres :

In [28]:
```python
#racine carrée des valeurs propres
sqrt_eigval = np.sqrt(eigval)

#corrélation des variables avec les axes
corvar = np.zeros((p,p))

for k in range(p):
    corvar[:,k] = acp.components_[k,:] * sqrt_eigval[k]

#afficher la matrice des corrélations variables x facteurs
print(corvar)
```

```
[[ 8.02537388e-01  1.90110915e-01  3.25427126e-01 -5.87344128e-02
  -2.01015223e-01 -1.02202430e-01  2.65631507e-01 -2.68664484e-01
  -1.29786697e-01 -1.13572473e-03]
 [ 6.71642151e-01  2.11021114e-01  2.03149739e-01  4.75037747e-01
   4.64211614e-01 -3.52135509e-02  3.44258887e-02 -8.32643612e-02
   1.12183650e-01 -7.40735951e-04]
 [ 6.55826897e-01  2.69301115e-01  5.89837320e-01 -1.22259079e-01
  -2.04604030e-01  1.20492579e-01 -1.41946425e-01  2.24442013e-01
   8.72253405e-02  3.30002041e-04]
 [-7.93867028e-01  4.04114037e-01  1.78115348e-01  2.48567379e-01
   1.35961053e-01  1.05588246e-01 -8.86646246e-02  1.07220106e-01
  -2.52906320e-01  1.64584174e-03]
 [-7.85053923e-01 -1.57995347e-01  2.56713398e-01 -1.68193637e-01
   1.70308065e-01 -2.50468516e-01  3.53375332e-01  2.17498789e-01
   2.48157533e-02 -1.39819042e-03]
 [-7.69047109e-01  2.30415742e-01 -4.13723824e-02  2.05318101e-01
  -1.72473097e-01  4.45278429e-01  2.66967730e-01 -4.07422797e-02
```

```
   1.03229685e-01 -1.23359352e-04]
 [-9.20772465e-01  1.33969745e-01  1.70767319e-01  8.47414171e-02
  -1.20555153e-01 -2.11473382e-01 -1.07712866e-01 -1.39755013e-01
   7.49913214e-02  4.33108473e-02]
 [-9.03045091e-01  2.07575843e-01  1.19587898e-01  1.28953335e-01
  -1.54755076e-01 -2.29209131e-01 -1.22351403e-01 -1.11934411e-01
   6.85448897e-02 -4.25213512e-02]
 [-5.69041866e-01 -5.03572706e-01  3.93921702e-01 -3.08275822e-01
   2.40747308e-01  2.52873667e-01 -1.04086064e-01 -1.98934439e-01
  -7.77528520e-03 -4.89511713e-03]
 [-9.30667313e-02  7.81011175e-01 -1.72596146e-01 -5.42686230e-01
   2.26077930e-01  1.64142249e-02 -2.53061334e-03 -6.34993681e-02
   4.05354478e-02 -1.94900465e-05]]
```

Comme on peut le voir les variables sont maintenant en ligne, les facteurs en colonne.
Si l'on s'en tient spécifiquement aux deux premiers facteurs :

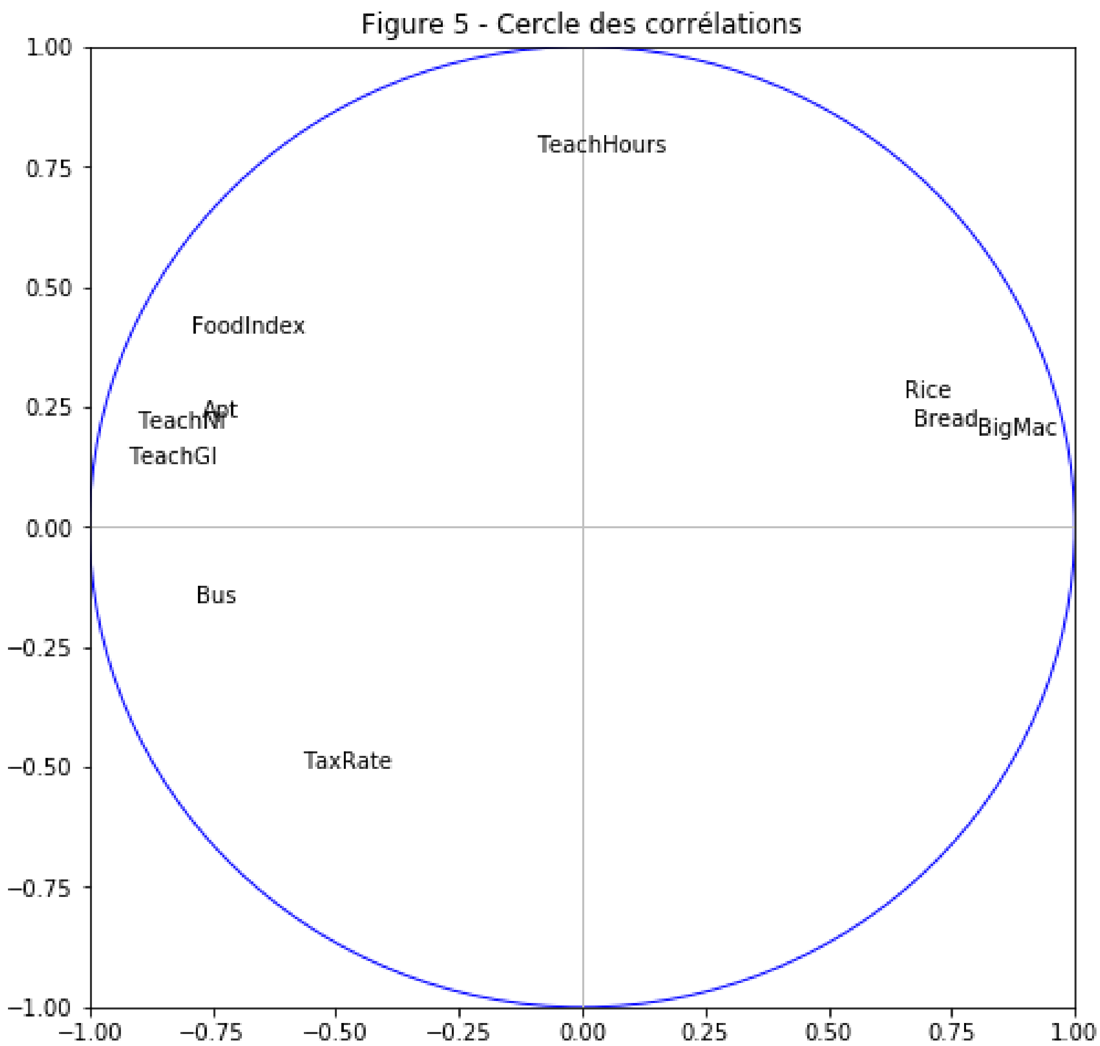
```
In [29]: #on affiche pour les deux premiers axes
         print(pd.DataFrame({'id':X.columns,'COR_1':corvar[:,0],'COR_2':corvar[:,1]}))
```

```
          id     COR_1     COR_2
0     BigMac  0.802537  0.190111
1      Bread  0.671642  0.211021
2       Rice  0.655827  0.269301
3  FoodIndex -0.793867  0.404114
4        Bus -0.785054 -0.157995
5        Apt -0.769047  0.230416
6    TeachGI -0.920772  0.133970
7    TeachNI -0.903045  0.207576
8    TaxRate -0.569042 -0.503573
9  TeachHours -0.093067  0.781011
```

Les signes sont opposés par rapport à R. Mais ce n'est pas un problème, ce sont les concomitances et oppositions qui comptent. De ce point de vue, les résultats sont complètement cohérents.
Nous pouvons dessiner maintenant le cercle des corrélations (Figure 5).

```
In [30]: #cercle des corrélations
         fig, axes = plt.subplots(figsize=(8,8))
         axes.set_xlim(-1,1)
         axes.set_ylim(-1,1)

         #affichage des étiquettes (noms des variables)
         for j in range(p):
             plt.annotate(X.columns[j],(corvar[j,0],corvar[j,1]))

         #ajouter les axes
         plt.plot([-1,1],[0,0],color='silver',linestyle='-',linewidth=1)
```

```
plt.plot([0,0],[-1,1],color='silver',linestyle='-',linewidth=1)

#ajouter un cercle
cercle = plt.Circle((0,0),1,color='blue',fill=False)
axes.add_artist(cercle)

#ajout d'un titre
plt.title("Figure 5 - Cercle des corrélations")

#affichage
plt.show()
```



On perçoit clairement l'effet TeachGI, TeachM et BigMac sur le premier axe, TeachGI, TeachM corrélées négativement par rapport à BigMac : Les personnes cultivées consomment moins de BigMac.

Qualité de représentation des variables ($\cos^2$) On peut calculer la qualité de représentation des variables en montant la corrélation au carré :

$$\cos^2_{jk} = r_2^{jk}$$

```
In [31]: #cosinus carré des variables
         cos2var = corvar**2
         print(pd.DataFrame({'id':X.columns,'COS2_1':cos2var[:,0],'COS2_2':cos2var[:,1]}))
```

```
          id    COS2_1    COS2_2
0     BigMac  0.644066  0.036142
1      Bread  0.451103  0.044530
2       Rice  0.430109  0.072523
3  FoodIndex  0.630225  0.163308
4        Bus  0.616310  0.024963
5        Apt  0.591433  0.053091
6    TeachGI  0.847822  0.017948
7    TeachNI  0.815490  0.043088
8    TaxRate  0.323809  0.253585
9 TeachHours  0.008661  0.609978
```

La somme des $\cos^2$ en ligne est égale à 1 (la somme des COS2 d'une variable sur l'ensemble des facteurs est égale à 1; $\sum_{k=1}^{p} \cos^2_{jk} = 1$).

Contribution des variables aux axes (CTR). La contribution est également basée sur le carré de la corrélation, mais relativisée par l'importance de l'axe

$$CTR_{jk} = \frac{r^2_{jk}}{\lambda_k}$$

```
In [32]: #contributions
         ctrvar = cos2var
         for k in range(p):
             ctrvar[:,k] = ctrvar[:,k]/eigval[k]

         #on n'affiche que pour les deux premiers axes
         print(pd.DataFrame({'id':X.columns,'CTR_1':ctrvar[:,0],'CTR_2':ctrvar[:,1]}))
```

```
          id     CTR_1     CTR_2
0     BigMac  0.120183  0.027398
1      Bread  0.084176  0.033756
2       Rice  0.080259  0.054977
3  FoodIndex  0.117601  0.123797
4        Bus  0.115004  0.018923
5        Apt  0.110362  0.040246
6    TeachGI  0.158204  0.013606
7    TeachNI  0.152171  0.032663
8    TaxRate  0.060423  0.192233
9 TeachHours  0.001616  0.462400
```