슬라이딩 모드 제어기(Sliding model control)

2012.12, by funmv

비선형 방정식의 일반적인 형태를 생각해 보자.

$$\dot{x} = f(x,t) + g(x,t)u \tag{1}$$

여기서, $x \in R^n$ (상태변수 x 는 n차원 벡터)는 시스템의 상태 벡터이고, $f \in R^n, g \in R^n \times R$ 이고, $u \in R$ 는 시스템에 인가되는 제어 입력이다. 가변구조 제어기는 일반적으로 다음과 같은 두 단계에 의해 설계된다.

(1) 원하는 특성을 갖는 슬라이딩 평면 설계

$$S = \{x \in R^n \mid s(x) = 0\} \tag{2}$$

(2) 시스템의 상태 벡터들을 슬라이딩 평면상에 위치하도록 하는 제어 입력 구성

$$u = \begin{cases} u^+(x) & when \quad s(x) > 0 \\ u^-(x) & when \quad s(x) < 0 \end{cases} \tag{3}$$

일단 슬라이딩 모드가 일어나면 시스템은 매개변수 불확실성과 외란에 둔감하게 된다. 그래서, 상태를 슬라이딩 평면으로 도달하게 하는 조건을 결정하는 것이 중요하다. 이러한 조건을 도달 조건(reaching condition)이라 부른다.
이러한 도달 조건을 구하기 위해 다음과 같은 Lyapunov function candidate를 정의하자.

$$V(x,t) = \frac{1}{2}s^2(x) \tag{4}$$

여기서, $s(x)$ 는 스위칭 함수이고, $x \in R^n$ 는 시스템의 상태 벡터이다. 슬라이딩 모드를 존재하게 하는 도달 조건은 다음과 같이 구해진다.

$$\dot{V}(x,t) = s(x)\dot{s}(x) < 0 \quad for \quad x \in R^n - S \tag{5}$$

$x \in R^n - S$: x 가 sliding plane $s(x)$ 을 제외한(빼버린) R^n 공간 상의 어떤 위치라면(즉, sliding면에 놓여있지 않다면) $\dot{V}(x,t) < 0$ 이므로 $s(x) = 0$ 인 슬라이딩 면으로 간다(즉, 소멸한다). $\dot{V}(x,t) = V(x,t+\Delta t) - V(x,t) < 0 \ \rightarrow V(x,t+\Delta t) < V(x,t)$: 식 (4)는 양수이므로 V는 양수이다. V는 시간이 가면 감소하니 결국 소멸된다.

일반적으로 가변 구조 제어 시스템의 동특성은 도달 모드와 슬라이딩 모드로 이루어 진다. 원하는 슬라이딩 모드 동특성은 적절한 스위칭 함수 $s(x)$ 를 설계함으로써 결정된다.
슬라이딩 모드 제어 설계에 있어서 중요한 부분이 도달 조건을 만족하는 제어 입력을 선정하는 것이다.
즉, 도달 모드 설계 시 원하는 시스템 동특성 뿐만 아니라 슬라이딩 모드를 얻을 수 있는 제어 입력을 결정하여야 한다.

일반적으로 다음과 같은 도달 법칙을 많이 사용한다.

$$\dot{s}(x) = -K\,\mathrm{sgn}(s), \qquad K > 0 \tag{6}$$

$\dot{s}(x) = -K\,\mathrm{sgn}(s)$ 라고 $\dot{s}(x)$ 값을 설정했다면,
$\left.\begin{array}{l} s>0: s(+)\cdot\dot{s}(-)<0 \\ s<0: s(-)\cdot\dot{s}(+)<0 \end{array}\right\}$,즉, 항상 $s\cdot\dot{s}<0$ 이다. 따라서 $\dot{s}$ 값의 선정은 적절하다.
$\mathrm{sgn}(s)$ 은 sign함수로 인자의 부호가 양수이면 +1, 음수이면 -1을 리턴해 준다.

여기서 수렴속도는 스위칭 이득 K 에 의해 결정된다.
스위칭 함수 $s(x)$ 를 식 (1)의 궤적에 따라 시간에 대해 미분하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\dot{s}(x) = \frac{\partial s}{\partial x} f(x) + \frac{\partial s}{\partial x} g(x)u = -K\,\mathrm{sgn}(s) \tag{7}$$

$\dot{s}(x) = \frac{\partial s(x(t))}{\partial t} = \frac{\partial s(x)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial x}\cdot\dot{x} = \frac{\partial s}{\partial x}\left(f + g\cdot u\right)$
이므로 식 (7)이 유도된다.

식 (7)을 제어 입력 u 에 대해 정리하면 다음의 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} u &= -\left[\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right]^{-1}\left[\frac{\partial s}{\partial x} f(x) + K\,\mathrm{sgn}(s)\right] \\ &= u_{eq} + u_s \end{aligned} \tag{8}$$

여기서 u_{eq} 는 등가 제어 입력이고, u_s 는 가변 제어 입력이다.

식 (8)과 같은 제어 입력을 가해 일단 슬라이딩 면에 도달하고 나면 $s=0$ 이되므로 식 (8)은 u_{eq} 항만 남게 된다.

보통 $s(x)$ 는 소멸시켜야 할 오차 항이나 오차 항들의 합으로 설정한다. 그런데 오차 항을 잡을 때, 식 (8)의 $\left[\frac{\partial s}{\partial x} g(x)\right]$ 항이 역행렬이 존재하도록 설정해 주어야 한다. 이것이 s 설정의 조건이 된다.

또한 sliding 면에서 채터링(chattering, 진동현상)을 제거해 주기 위해 평활화 항을 추가할 수 있다. 일반적으로 제어이득 K 를 작게 하면 채터링이 감소한다. 그래서 일단 시스템의 궤적이 슬라이딩 평면에 거의 도달하면 채터링을 줄이기 위해 가능한 한 K 를 작게 한다.

그러나 상태가 슬라이딩 면에서 멀리 떨어져 있는 경우는 빠르게 슬라이딩 모드에 도달 시키기 위해 K 값을 크게 선정하기 위해 퍼지규칙을 사용하기도 한다.