Homework3

王湘峰 PB19030861

1. 我们对钢条切割问题进行一点修改，除了切割下的钢条段具有不同价格 pi 外，每次切割还要付出固定的成本 c。这样，切割方案的收益就等于钢条段的价格之和减去切割的成本。设计一个动态规划算法解决修改后的钢条切割问题。

   解：仅需对 EXTEND-BOTTOM-UP-CUT-ROD 做改进：

```
EXTEND-BOTTOM-UP-CUT-ROD(p,s)
    let r[0......n]and s[0......n]be new arrays
    r[0]=0
    for j = 1 to n
        q = -∞
        for i = 1 to j
            if q < p[i]+r[j-i]-c
                q = p[i]+r[j-i]-c
                s[j] = i
        r[j] = q
    return r and s
```

2. 令$R(i,j)$表示在一次调用 MATRIX-CHAIN-ORDER 过程中，计算其他表项时访问表项$m[i,j]$的次数。证明：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}R(i,j)=\frac{n^3-n}{3}$$

解：经观察不难发现，只有计算$m[a,j](1\le a<i)$以及$m[i,b](j<b\le n)$时才会访问表项$m[i,j]$，因此$R(i,j)=n-1-(j-i)$，故

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}R(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}n-1-(j-i)=\frac{n^3-n}{3}$$

证毕。

3. 对输入链长度为 n 的矩阵链乘法问题，描述其子问题图：它包含多少个顶点？包含多少条边？这些边分别连接哪些顶点。

解： 每个顶点代表一条独一无二的矩阵链，因此一共有$C_n^2=\frac{n(n+1)}{2}$个顶点。每个非原子的顶点，对于分割$k(i<k<j)$，顶点$A_{1\ldots\ldots n}$都有两条边连接两个顶点$A_{1\ldots\ldots k}$和$A_{k+1\ldots\ldots n}$ 于是一共有$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}2(j-i)=\frac{n^3-n}{3}$条边。