

# Homework 1

1. 假定  $f(n)$  与  $g(n)$  都是渐进非负函数, 判断下列等式或陈述是否一定是正确的, 并简要解释你的答案.

- a)  $f(n) = O(f(n)^2)$ .
- b)  $f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n)))$ .
- c)  $f(n) + O(f(n)) = \Theta(f(n))$ .
- d) if  $f(n) = \Omega(g(n))$ , then  $g(n) = o(f(n))$ . (注意是小  $o$ )

2. 时间复杂度

- a) 证明  $\lg(n!) = \Theta(n \lg n)$  (课本等式 3.19), 并证明  $n! = \omega(2^n)$  且  $n! = o(n^n)$ .
- b) 使用代入法证明  $T(n) = T(\lceil n/2 \rceil) + 1$  的解为  $O(\lg n)$ .
- c) 对递归式  $T(n) = T(n-a) + T(a) + cn$ , 利用递归树给出一个渐进紧确解, 其中  $a \geq 1$  和  $c > 0$  为常数.
- d) 主方法能应用于递归式  $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$  吗? 请说明为什么可以或者为什么不可以. 给出这个递归式的一个渐进上界.

3. 对下列递归式, 使用主方法求出渐进紧确解:

- a)  $T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$
- b)  $T(n) = 2T(n/4) + n^2$ .

4. 考虑以下查找问题:

**输入:**  $n$  个数的一个序列  $A = a_1, a_2, \dots, a_n$  和一个值  $v$ .

**输出:** 下标  $i$  使得  $v = A[i]$  或者当  $v$  不在  $A$  中出现时,  $v$  为特殊值  $NIL$ .

- a) 写出**线性查找**的伪代码, 它扫描整个序列来查找  $v$ . 使用一个 Loop Invariant (循环不变式) 来证明你的算法是正确的.
- b) 假定  $v$  等可能的为数组中的任意元素, 平均需要检查序列的多少元素? 最坏情况又如何呢? 用  $\Theta$  记号给出线性查找的平均情况和最坏运行时间.

5. 堆排序:

对于一个按升序排列的包含  $n$  个元素的有序数组  $A$  来说, HEAPSORT 的时间复杂度是多少? 如果  $A$  是降序的呢? 请简要分析并给出结果.

6. 快速排序:

- 1. 假设快速排序的每一层所做的划分比例都是  $1 - \alpha : \alpha$ , 其中  $0 < \alpha \leq 1/2$  且是一个常数. 试证明: 在相应的递归树中, 叶结点的最小深度大约是  $-\lg n / \lg \alpha$ , 最大深度大约是  $-\lg n / \lg(1 - \alpha)$  (无需考虑舍入问题).
- 2. 试证明: 在一个随机输入数组上, 对于任何常数  $0 < \alpha \leq 1/2$ , PARTITION 产生比  $1 - \alpha : \alpha$  更平衡的划分的概率约为  $1 - 2\alpha$ .