

Homework 4

1. 假定你希望兑换外汇，你意识到与其直接兑换，不如进行多种外币的一系列兑换，最后兑换到你想要的那种外币，可能会获得更大收益。假定你可以交易 n 种不同的货币，编号为 $1, 2, \dots, n$ ，兑换从 1 号货币开始，最终兑换为 n 号货币。对每两种货币 i 和 j ，给定汇率 r_{ij} 。意味着你如果有 d 个单位的货币 i ，可以兑换 dr_{ij} 个单位的货币 j 。进行一系列的交易需要支付一定的佣金，金额取决于交易的次数。令 c_k 表示 k 次交易需要支付的佣金。证明：如果对所有 $k = 1, 2, \dots, n$, $c_k = 0$ ，那么寻找最优兑换序列的问题具有最优子结构。然后请证明：如果佣金 c_k 为任意值，那么问题不一定具有最优子结构。
2. 设计一个高效的算法，对实数线上给定的一个点集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ，求一个单位长度闭区间的集合，包含所有给定的点，并要求此集合最小。证明你的算法是正确的。
3. 一位公司主席正在向 Stewart 教授咨询公司聚会方案。公司的内部结构关系是层次化的，即员工按主管-下属关系构成一棵树，根结点为公司主席。人事部按“宴会交际能力”为每个员工打分，分值为实数。为了使所有参加聚会的员工都感到愉快，主席不希望员工及其直接主管同时出席。
公司主席向 Stewart 教授提供公司结构树，采用左孩子右兄弟表示法（参见课本 10.4 节）描述。每个节点除了保存指针外，还保存员工的名字和宴会交际评分。设计算法，求宴会交际评分之和最大的宾客名单。分析算法复杂度。
4. 考虑用最少的硬币找 n 美分零钱的问题。假定每种硬币的面额都是整数。设计贪心算法求解找零问题，假定有 25 美分、10 美分、5 美分和 1 美分四种面额的硬币。证明你的算法能找到最优解。