

续表

$\Delta\lambda/(\circ)$	$\varphi/(\circ)$	x/cm	y/cm
120	30	40.211	105.130
150	30	43.725	129.104
180	30	47.796	152.128
0	60	67.488	0.000
30	60	68.081	22.592
60	60	69.786	44.432
90	60	72.492	65.466
120	60	76.092	85.707
150	60	80.479	104.993
180	60	85.551	123.432
0	90	103.257	0.000
30	90	103.477	14.960
60	90	104.111	29.448
90	90	105.119	43.452
120	90	106.461	56.966
150	90	108.100	69.983
180	90	110.000	82.500

表 2 等差分纬线多圆锥投影的纬圈半径 ρ 和边缘经线上的极角 $\delta\varphi_i$ 的值

φ	ρ/cm	$\delta\varphi_i$
10°	2 399.943	3°54'10.5"
15°	1 643.348	5°38'9.5"
20°	1 201.174	7°35'46.0"
回归线	1 024.159	8°47'52.0"
30°	807.634	10°51'26.0"
40°	618.060	13°29'8.5"
45°	556.629	14°31'58.5"
50°	507.561	15°24'15.5"
60°	430.763	16°39'4.0"
极圈	388.633	17°12'31.5"
70°	375.478	17°5'27.0"
75°	372.030	16°11'0.5"
80°	388.525	14°28'57.5"
90°	508.062	9°20'42.5"

表 1、表 2 中的数据是基于 1: 10 000 000 的世界地图的 (x, y) 坐标和 ρ 的单位为厘米。

对地图上某一点从经纬度坐标变换为直角坐标(正解变换)的过程是: 根据该点的纬度值和边缘经线的函数式求出该点所在纬线与边缘经线的交点 (x_n, y_n) , 这样就可以确定相应的纬圈半径 ρ ; 根据 ρ 和 y_n 计算交点 (x_n, y_n) 的极角 $\delta\varphi_n$ (如图 1 所示); 利用式 (2) 计算该点的极角 $\delta\varphi_i$; 最后利用式 (3) 计算其直角坐标值。

二、边缘经线的拟合函数模型

国家测绘地理信息局在网上正式发布的世界地

图没有给出具体的投影参数和正反解变换公式^[2], 因此有些文献提出了各自采用多项式拟合确定边缘经线函数式的方法。

文献 [2] 从国家测绘地理信息局发布的等差分纬线多圆锥投影的世界地图上选择参考点, 采用三次拟合确定边缘经线的函数式

$$\left. \begin{aligned} x_n &= k_{x1} + k_{x2}\varphi + k_{x3}\varphi^2 \\ y_n &= k_{y1} + k_{y2}\varphi + k_{y3}\varphi^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

文献 [3] 根据文献 [1] 中给出的该投影的设计参数, 分析了投影后 (x, y) 的分布情况, 综合考虑精度和计算量, 确定 x 的拟合曲线应为奇次方程, 采用一元五次多项式拟合; y 的拟合曲线应为偶次方程, 采用一元六次多项式拟合

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + a_5\varphi^5 \\ y &= b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 + b_5\varphi^5 + b_6\varphi^6 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

文献 [4—5] 介绍了苏联中央测绘科学研究所广义多圆锥投影方案 (1950 年) 中的边缘经线的设计函数, 其纵坐标 x 的方程式为纬度的奇次多项式, 横坐标 y 的方程式为纬度的偶次多项式

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0\varphi + a_1\varphi^3 + a_2\varphi^5 + \cdots \\ y &= b_0\varphi^2 + b_1\varphi^4 + b_2\varphi^6 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

虽然文献 [4—5] 中没有指出式 (6) 可以用于等差分纬线多圆锥投影, 但因为等差分纬线多圆锥投影的边缘经线与该方案的边缘经线的对称性质相同, 因此可将此拟合函数模型用于等差分纬线多圆锥投影。

分析上述三种边缘经线拟合函数模型可以发现, 在式 (4)、式 (5) 基础上通过移轴并考虑到边缘经线的对称性后, 可推导得出如下结果

$$\left. \begin{aligned} x &= a_0 + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + \cdots \\ y &= b_0 + b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

将投影后的直角坐标原点水平移至边缘经线的中点, 则去除了常数项, 式 (7) 变为

$$\left. \begin{aligned} x &= a_1\varphi + a_2\varphi^2 + a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 + \cdots \\ y &= b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

设 $x = fx(\varphi)$ 根据边缘经线的对称性, 有

$$\begin{aligned} fx(-\varphi) &= -fx(\varphi) - a_1\varphi + a_2\varphi^2 - a_3\varphi^3 + a_4\varphi^4 - \cdots = \\ &= -a_1\varphi - a_2\varphi^2 - a_3\varphi^3 - a_4\varphi^4 - \cdots a_2\varphi^2 + \\ &= a_4\varphi^4 + \cdots = \\ &= -a_2\varphi^2 - a_4\varphi^4 + \cdots \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} a_2\varphi^2 &= -a_2\varphi^2 \\ a_4\varphi^4 &= -a_4\varphi^4 \\ &\cdots \end{aligned}$$

为使上述等式成立 a_2, a_4, a_6 等偶次项的系数只能为 0。

$$\begin{aligned} \text{同理, 设 } y = f_y(\varphi) \text{ 根据边缘经线的对称性, 有} \\ f_y(-\varphi) = f_y(\varphi) - b_1\varphi + b_2\varphi^2 - b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 - \cdots = \\ b_1\varphi + b_2\varphi^2 + b_3\varphi^3 + b_4\varphi^4 + \cdots - b_1\varphi - b_3\varphi^3 + \cdots = \\ b_1\varphi + b_3\varphi^3 + \cdots \end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned} -b_1\varphi &= b_1\varphi \\ -b_3\varphi^3 &= b_3\varphi^3 \\ \cdots \end{aligned}$$

为使上述等式成立 b_1, b_3, b_5 等奇次项的系数只能为 0。这样式(7)就推导成为式(6)。

实际上, 即使在边缘经线拟合中不考虑其对称性, 采用式(7)这种一般的曲线拟合模型, 由于边缘经线上已知点数据本身的对称性, 使得解出的待定系数中 a_2, a_4, a_6, \cdots 和 b_1, b_3, b_5, \cdots 的系数也接近于 0, 表现出了其对称性。但这相当于减少了参与拟合的多项式的项数, 因此与使用相同已知点数据和多项式项数但采用式(6)进行边缘经线拟合的结果相比, 式(7)的拟合误差明显增大。即使为保证两式的最高次项的方次相近, 将式(7)的项数增至式(6)的两倍, 式(7)的拟合误差仍大于式(6)。

三、拟合误差对比

在边缘经线的多项式拟合中, 一般采用最小二乘拟合, 如文献[3]中利用 1stOpt 软件进行边缘经线多项式拟合。也可以采用分段拟合方法, 如文献[6]中选用与投影点的纬度值较近的 3~4 个已知点进行多项式拟合, 这样做虽然在已知点上的拟合误差较小, 但因为分段拟合, 边缘经线的连续性稍差。

下面对式(6)和式(7)这两种不同的拟合函数模型进行最小二乘拟合误差对比。程序中采用正规方程组法解出最小二乘拟合后的多项式系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{M-1}, b_0, b_1, \cdots, b_{M-1}$, 根据这些系数确定了式(6)、式(7)的边缘经线多项式, 再传入已知点的纬度值求出拟合后的点, 计算它与已知点的距离作为拟合误差进行对比。

已知点数据: 对表 2 中的 14 个点, 根据边缘经线对称性, 计算出其纬度为负值的对称点, 再加上表 1 中的 $\Delta\lambda$ 为 180° 、 φ 为 0° 的点, 共 29 个点作为已知点。

多项式项数和方次: 经过测试, 式(6)取 5 项, 项数过多时高次项会导致多项式拟合中的震荡现

象, 造成投影结果变形。式(7)在两种条件下与式(6)进行对比。第一种条件下两式的项数相同, 同为 5 项。第二种条件下两式的 x 和 y 的最高次项方次尽可能相近, 测试中 x 的最高次项的方次可以与式(6)一样取 9, 而 y 的最高次项方次与式(6)相同取 10 时, 拟合结果出现震荡现象, 因此 y 的最高次项方次取 9 次, 这样 x 和 y 的多项式项数均为 10 项, 为式(6)的二倍, 计算时间也相应地增加。

拟合后式(6)的多项式系数为:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.676\ 261\ 862\ 750\ 15 \\ a_1 &= -0.000\ 110\ 734\ 568\ 663\ 173 \\ a_2 &= 1.954\ 477\ 061\ 124\ 52\text{E}-8 \\ a_3 &= -2.668\ 551\ 264\ 636\ 22\text{E}-12 \\ a_4 &= 1.344\ 174\ 925\ 330\ 45\text{E}-16 \\ b_0 &= -0.017\ 050\ 852\ 472\ 941\ 4 \\ b_1 &= 3.941\ 869\ 059\ 706\ 5\text{E}-6 \\ b_2 &= -1.099\ 928\ 618\ 801\ 22\text{E}-9 \\ b_3 &= 1.439\ 009\ 388\ 859\ 4\text{E}-13 \\ b_4 &= 6.823\ 147\ 812\ 808\ 01\text{E}-18 \end{aligned}$$

式(7)取 5 项时拟合后的多项式系数为:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.271\ 571\ 248\ 610\ 32\text{E}-14 \\ a_1 &= 1.616\ 105\ 121\ 194\ 76 \\ a_2 &= 2.224\ 643\ 055\ 051\ 45\text{E}-17 \\ a_3 &= -4.983\ 172\ 137\ 650\ 04\text{E}-5 \\ a_4 &= 2.82518\ 709\ 304\ 736\text{E}-21 \\ b_0 &= 163.845\ 946\ 891\ 866 \\ b_1 &= -1.469\ 684\ 263\ 135\ 46\text{E}-17 \\ b_2 &= -0.012\ 379\ 068\ 753\ 132\ 9 \\ b_3 &= 2.030\ 902\ 730\ 958\ 03\text{E}-20 \\ b_4 &= 2.952\ 177\ 662\ 935\ 74\text{E}-7 \end{aligned}$$

式(7)取 10 项时拟合后的多项式系数为:

$$\begin{aligned} a_0 &= 4.745\ 577\ 324\ 584\ 05\text{E}-13 \\ a_1 &= 1.673\ 862\ 577\ 481\ 37 \\ a_2 &= -1.689\ 756\ 693\ 362\ 57\text{E}-15 \\ a_3 &= -0.000\ 111\ 052\ 837\ 763\ 137 \\ a_4 &= 1.029\ 503\ 409\ 078\ 15\text{E}-18 \\ a_5 &= 1.989\ 551\ 012\ 425\ 34\text{E}-8 \\ a_6 &= -2.033\ 715\ 263\ 461\ 02\text{E}-22 \\ a_7 &= -2.650\ 154\ 786\ 566\ 88\text{E}-12 \\ a_8 &= 1.251\ 941\ 337\ 157\ 33\text{E}-26 \\ a_9 &= 1.269\ 199\ 712\ 877\ 04\text{E}-16 \\ b_0 &= 164.593\ 495\ 751\ 958 \\ b_1 &= -9.532\ 554\ 139\ 680\ 61\text{E}-14 \\ b_2 &= -0.014\ 617\ 851\ 141\ 999 \\ b_3 &= 1.618\ 156\ 840\ 527\ 21\text{E}-16 \end{aligned}$$

$$b_4 = 1.418\,656\,989\,887\,4\text{E} - 6$$

$$b_5 = -7.333\,870\,717\,170\,98\text{E} - 20$$

$$b_6 = -1.870\,472\,805\,776\,91\text{E} - 10$$

$$b_7 = 1.229\,392\,976\,687\,05\text{E} - 23$$

$$b_8 = 9.911\,129\,417\,695\,13\text{E} - 15$$

$$b_9 = -6.829\,140\,038\,805\,23\text{E} - 28$$

式(7)的两种拟合结果中,纵坐标 x 的 a_0, a_2 等偶次项系数和横坐标 y 的 b_1, b_3 等奇次项系数均近于 0,可见关于横轴对称的已知点数据迫使拟合后的多项式对称于横轴。

已知点与对应的拟合后的点之间的距离误差(本文中称拟合误差)见表 3。由于式(6)与拟合数据特性相同,也关于横轴对称,而式(7)无此特性,因此表 3 中式(7)的拟合误差远大于式(6),其平均值在多项式项数相同条件下是式(6)的 9 倍,在最高次项方次相近的条件下是式(6)的 4 倍。

表 3 式(6)与式(7)的拟合误差对比 cm

φ	式(6)的拟合误差	式(7)取 5 项时的拟合误差	式(7)取 10 项时的拟合误差
90°	0.013 2	0.984 4	0.414 7
80°	0.077 0	0.557 0	0.491 3
75°	0.005 9	0.350 7	0.277 4
70°	0.121 8	0.272 3	0.389 6
极圈	0.089 4	0.381 5	0.245 4
60°	0.188 2	0.727 9	0.264 0
50°	0.073 0	0.385 5	0.442 7
45°	0.022 8	0.330 1	0.270 8
40°	0.082 3	0.685 6	0.149 7
30°	0.079 2	1.048 6	0.361 8
回归线	0.068 2	0.958 5	0.345 0
20°	0.042 7	0.809 4	0.191 9
15°	0.224 9	0.581 5	0.185 5
10°	0.026 1	0.911 9	0.209 2
0°	0.000 0	1.154 1	0.406 5
平均值	0.074 3	0.675 9	0.309 7

四、结束语

在等差分纬线多圆锥投影正解变换中,边缘经线拟合函数模型的选择对拟合结果影响很大。文献[2—3]中用于另一种广义多圆锥投影的拟合函数模型,考虑到了边缘经线的对称性,因为等差分纬线多圆锥投影的边缘经线具有同样性质,因此应该选用该拟合函数模型进行正解变换。对比结果表明,这种拟合函数模型与拟合数据的契合度高,因此拟合误差较小。

参考文献:

- [1] 胡毓钜,龚剑文,黄伟. 地图投影[M]. 北京:测绘出版社,1981:159-163.
- [2] 董曼,李胜乐. 世界地图等差分纬线多圆锥投影的正反解变换[J]. 大地测量与地球动力学,2008,28(2):95-99.
- [3] 叶远智. 栅格数据的等差分纬线多圆锥投影转换[J]. 测绘通报,2012(9):68-70.
- [4] 黄国寿. 地图投影[M]. 北京:测绘出版社,1983:199-201.
- [5] 孙达,蒲英霞. 地图投影[M]. 南京:南京大学出版社,2005:119-121.
- [6] 李家,赵晴晴. 等差分纬线多圆锥投影正解变换的参数和方法[J]. 地理空间信息,2012,10(2):38-40.
- [7] 国家测绘地理信息局. 《世界地图》[EB/OL]. [2013-05-20]. <https://map.sbsm.gov.cn/mcp>.
- [8] 钟业勋. 不等分经纬线多圆锥投影的设计与解析计算方法[J]. 测绘学报,1965,8(3):219.
- [9] 钟业勋,童新华,李占元. 椭圆边经线多圆锥投影[J]. 测绘工程,2012,21(2):1-5,8.
- [10] 张晓盼,齐欢. 地图投影的最小二乘二元多项式拟合的误差估计[J]. 测绘科学,2003,28(3):49-51.