

DOI:10.19352/j.cnki.issn1671-4679.2017.03.001

基于镜射变换的地图投影新定义体系

刘佳奇<sup>1</sup>,钟业勋<sup>1,2,3</sup>,胡宝清<sup>2</sup>,边少锋<sup>1</sup>,李厚朴<sup>1</sup>

(1.海军工程大学 导航工程系,湖北 武汉 430043;2.广西师范学院 北部湾环境演变与资源利用省部共建教育部重点实验室;广西地表过程与智能模拟重点实验室,广西 南宁 530001;3.广西测绘地理信息局,广西 南宁 530023)

**摘 要:**为了揭示正方位投影、伪方位投影、正圆锥投影、伪圆锥投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影等常规地图投影的构图规律,采用比较分析的方法,发现这 7 类投影的图形具有镜射变换关系。不同类型的投影满足不同的变换条件。根据镜射变换满足的不同条件,可对上述 7 种地图投影进行定义,从而建立基于镜射变换的常规地图投影定义体系。  
**关键词:**镜射变换;地图投影;中央经线;经线;纬线;定义  
**中图分类号:**P22      **文献标识码:**A      **文章编号:**1671-4679(2017)03-0001-04

New definition system of map projection based on reflex transformation

LIU Jiaqi<sup>1</sup>,ZHONG Yexun<sup>1,2,3</sup>,HU Baoqing<sup>2</sup>,BIAN Shaofeng<sup>1</sup>,LI Houpu<sup>1</sup>

(1.Department of Navigation Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430043, China; 2. 2a, Key Laboratory of Beibu Gulf Environment Change and Resources Use, Ministry of Education, China; 2b, Guangxi Key Laboratory of Earth Surface Processes and Intelligent Simulation (Guangxi Teachers Education University), Nanning 530001, China; 3. Guangxi Regional Geographical Information Bureau of Surveying and Mapping, Nanning 530023, China)

**Abstract:** In order to reveal the composition regularity of regular map projection such as azimuth projection, pseudo azimuth projection, positive conic projection, pseudo-conic projection, normal cylindrical projection, pseudo-cylindrical projection and multi-conic projection, the paper uses a method of comparative analysis and concludes that these seven types of projections have the relationship of reflex transformation. The transformation conditions that different projections satisfy are different. According to the different conditions that reflex transformation can meet, this paper defines the above seven map projections, thus establishing a new definition system of general map projections based on reflex transformation.

**Key words:** reflex transformation; map projection; central meridian; meridian; parallel; definition

刺孔球面与二维平面同胚是建立地图投影的基本原理。同胚也即拓扑变换,拓扑变换规定的正反函数都是连续的双一一函数关系,使球面上的点不包括极点,因为在这一点上是地轴上无限多的点与唯一的投影点对应,不满足拓扑变换的条件,所谓“刺孔”,也就是要除去这一点<sup>[1]</sup>。地图投影正常

位置下按经纬网形状分类可分为正方位投影、伪方位投影、正圆锥投影、伪圆锥投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影七大类<sup>[2-3]</sup>,这是各种地图投影教材通常都介绍的地图投影,只不过大多数教材只局限于对投影作定性的文字描述。地图投影可以从经纬线曲率变化的规律的角度定义<sup>[4]</sup>,也可以从不同经纬线类型组合的观点定义<sup>[5-6]</sup>。比较法在探索研究对象本质和规律中尤为重要;模型的建立是在分析与综合的基础上,通过归纳、演绎、比较等主要环节实现的;比较法在比较地图学中无处不

收稿日期:2016-11-20  
基金项目:国家自然科学基金项目(41671459;41361022;41571441);广西科技开发项目(2014DD29090);广西北部湾重大基础专项子课题(2012GXNSFEA053001)  
作者简介:刘佳奇(1981—),女,硕士研究生,研究方向:海图投影。

在,它的广泛应用显示了其方法论优势<sup>[7]</sup>。比较构成了所有科学解释的核心(Armer,1973;Bailey,1982)。所有科学本质上是比較的(Klingman,1980)。有的学者认为,没有比较就没有科学思想(Swanson,1971)<sup>[8]</sup>。基本地貌形态中岛屿等概念的提出,基于恒定空间地物演化规律的发现,都蕴含着比较因素<sup>[9-10]</sup>。通过比较发现,这 7 种地图投影都可以从某对称轴的一边经过镜射变换获得另一半,然后由原像与镜像合成得到,但不同的投影其经纬线满足的条件不同,这不同就决定了彼此的差异。据此,可以建立基于镜射变换的地图投影定义体系。

1 镜射变换的定义

1.1 镜射变换

对平面上的定直线  $l$ ,使得原像点  $M$  与像点  $M'$  之间的线段  $MM'$  被  $l$  垂直平分的变换叫做以  $l$  为轴的镜射变换,简称镜射(也称反射),轴为  $l$  的镜射常记为  $M_l$ 。

测绘学中纵向为  $X$  而横向为  $Y$ ,所以地图投影中以中央经线  $\lambda_0$  为纵轴的直角坐标系  $O-xy$  下,镜射的变换关系为

$$M_{\lambda_0}:x'=x \wedge y'=-y. \tag{1}$$

以赤道  $s_0$  为横轴的直角坐标系  $O-xy$  下,镜射的变换关系为<sup>[11]</sup>

$$M_{s_0}:x'=-x \wedge y'=y. \tag{2}$$

1.2 中心对称

若两图形上的点一一对应,对应点连线被某一定点平分,则称此图形关于上述定点成中心对称,该定点称为对称中心。若一个图形关于某一定点成中心对称的图形是这一图形本身,则此图形称为中心对称图形,该定点仍称为对称中心<sup>[12]</sup>。

2 基于镜射变换的常规地图投影的数学定义

2.1 正方位投影

$\exists \lambda=\{y=0\} \in X \wedge \lambda \cap \lambda=O \mid \lambda \in \mathfrak{X}, \tau$  为  $\lambda$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'$  的曲率,若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} &\forall M_{xy} \in \lambda \supset M_{xy} \Rightarrow \exists M'_{x'y'} \in \\ &\lambda' \supset M'_{x'y'} O \wedge \tau = \tau' = 0 \\ &\wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi = 2\pi R_j \mid R_j = \\ &M_{xy} O, \lambda \in \mathfrak{X}, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ) \end{aligned} \right\} \tag{3}$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其中心对称像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_1 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $O$  为投影中心的正轴方位投影。 万方数据

显然,第 1 个条件表达了投影的经线为以  $O$  为投影中心的同心圆的直径的特点。第 2 个条件表达了投影的纬线为同心圆,如图 1 所示。

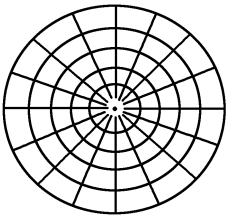


图 1 正方位投影网

2.2 伪方位投影

$\exists \lambda=\{y=0\} \in X \wedge \lambda \cap \lambda=O \mid \lambda \in \mathfrak{X}, \tau$  为  $\lambda$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'$  的曲率,若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} &\forall M_{xy} \in \lambda \neq M_{xy} \Rightarrow \exists M'_{x'y'} \in \\ &\lambda' \neq M'_{x'y'} O \wedge \tau = \tau' \neq 0 \\ &\wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi = 2\pi R_j \mid R_j = \\ &M_{xy} O, \lambda \in \mathfrak{X}, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ) \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_2 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $O$  为圆心,以  $\lambda$  为中央经线的伪方位投影。

显然,第 1 个条件表达了投影的经线为以  $\lambda$  为对称轴的曲线,第 2 个条件表达了投影的纬线为同心圆,如图 2 所示。

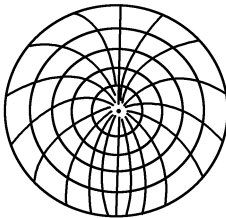


图 2 伪方位投影网

2.3 正圆锥投影

$\exists \lambda=\{y=0\} \in X \wedge \lambda \cap \lambda=O \mid \lambda \in \mathfrak{X}, \tau$  为  $\lambda$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'$  的曲率,若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} &\forall M_{xy} \in \lambda \supset M_{xy} \Rightarrow \exists M'_{x'y'} \in \\ &\lambda' \supset M'_{x'y'} O \wedge \tau = \tau' = 0 \\ &\wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi \in 2\pi R_j \mid R_j = \\ &M_{xy} O, \lambda \in \mathfrak{X}, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ) \end{aligned} \right\} \tag{5}$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_3 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $\lambda$  为中央经线的正轴圆锥投影。

显然,第 1 个条件表达了投影的经线为以  $O$  为投影中心的同心圆弧的直径的特点。第 2 个条件表达了投影的纬线为同心圆弧,如图 3 所示。

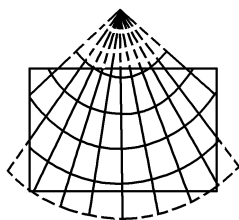


图 3 正圆锥投影网

2.4 伪圆锥投影

$\exists \lambda = \{y=0\} \in X \wedge \lambda \cap \lambda = O \mid \lambda \in \mathcal{X}, \tau$  为  $\lambda_i$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'_i$  的曲率, 若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \forall M_{xy} \in \lambda \neq M_{xy} O \Rightarrow \exists M'_{x'y'} \in \\ \lambda' \neq M'_{x'y'} O \wedge \tau = \tau' \neq 0 \\ \wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi \in 2\pi R_j \mid R_j = \\ M_{xy} O, \lambda \in \mathcal{X}, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_4 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $\lambda_0$  为中央经线的伪圆锥投影。

显然, 第 1 个条件表达了投影的经线为以  $\lambda_0$  为对称轴的曲线, 第 2 个条件表达了投影的纬线为同心圆弧, 如图 4 所示。

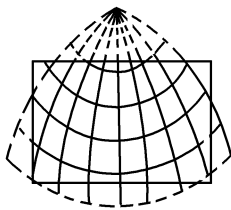


图 4 伪圆锥投影网

2.5 正圆柱投影

$\exists \lambda = \{y=0\} \in X \wedge s_0 = \{x=0\} \in Y$ , 若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \forall M_{xy} = (\lambda \cap \varphi) \in \lambda \Rightarrow \exists M'_{x'y'} = \\ (\lambda' \cap \varphi) \in \lambda' \wedge \lambda \cap \lambda' = \emptyset \\ \wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi \wedge \varphi \perp \lambda \mid \varphi \in \\ [0^\circ, 90^\circ), \lambda \in \mathcal{X} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_5 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $\lambda \cap s_0 = O$  为对称中心的正圆柱投影。

显然, 第 1 个条件表达了投影的经线为相互平行的直线, 第 2 个条件表达了投影的纬线均垂直于经线的直线, 也即各纬线相互平行, 如图 5 所示。

2.6 伪圆柱投影

$\exists \lambda = \{y=0\} \in X \wedge s_0 = \{x=0\} \in Y$ ,  $\tau$  为  $\lambda_i$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'_i$  的曲率, 若满足下列条件:

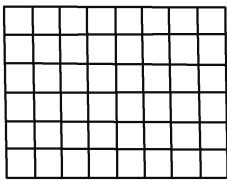


图 5 正圆柱投影网

$$\left. \begin{aligned} \forall M_{xy} = (\lambda \cap \varphi) \in \lambda \Rightarrow \exists M'_{x'y'} = \\ (\lambda' \cap \varphi) \in \lambda' \wedge \tau = \tau' \neq 0 \\ \wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi \wedge \varphi \perp \lambda \mid \varphi \in \\ [0^\circ, 90^\circ), \lambda \in \mathcal{X} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_6 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $\lambda_0$  为对称轴的正轴伪圆柱投影。

显然, 第 1 个条件表达了投影的经线为对称于中央经线  $\lambda_0$  的曲线, 第 2 个条件表达了投影的纬线为相互平行的直线, 如图 6 所示。

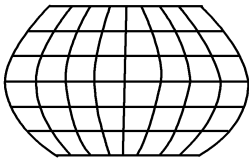


图 6 伪圆柱投影网

2.7 多圆锥投影

$\exists \lambda = \{y=0\} \in X \wedge s_0 = \{x=0\} \in Y \wedge \lambda \cap s_0 = O$ ,  $\tau$  为  $\lambda_i$  的曲率,  $\tau'$  为  $\lambda'_i$  的曲率, 若满足下列条件:

$$\left. \begin{aligned} \forall M_{xy} = (\lambda \cap \varphi) \in \lambda \Rightarrow \exists M'_{x'y'} = \\ (\lambda' \cap \varphi) \in \lambda' \wedge \tau = \tau' \neq 0 \\ \wedge M_{xy}, M'_{x'y'} \in \varphi \in 2\pi R_j \mid R_j = f(\varphi), \\ \lambda \in \mathcal{X}, \varphi \in [0^\circ, 90^\circ) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

则称  $\{M_{xy}\}$  与其镜像  $\{M'_{x'y'}\}$  构成的图形  $F_7 = \{M_{xy}\} \cup \{M'_{x'y'}\}$  为以  $O$  为对称中心的多圆锥投影。

显然, 第 1 个条件表达了投影的经线为以  $\lambda_0$  为对称轴的曲线, 第 2 个条件表达了投影的纬线为同轴圆弧, 纬线半径  $R_j$  为纬度  $\varphi_j$  的函数, 如图 7 所示。

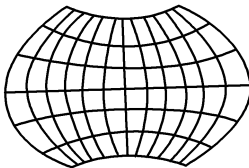


图 7 多圆锥投影网

### 3 结束语

地图投影正常位置下按经纬网形状分类可分为正方位投影、伪方位投影、正圆锥投影、伪圆锥投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影七大类。揭示这七类地图投影的构图规律是地图投影理论研究的一个重要课题。比较方法是科学研究中普遍使用的方法。比较方法在地图学诸多领域中的广泛应用充分显示了其方法论优势。通过比较发现,七类常规地图投影都具有以中央经线  $\lambda$  为对称轴的共性。正方位投影、正圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影还具有中心对称的共性。轴对称和中心对称的图形都具有镜射变换关系,地图投影的网格可由镜射变换的原像和镜像合成。不同类型的地图投影,需要满足不同的变换条件,不同投影的经纬网结构特征,是不同变换条件的图形表现。根据各类投影需要满足的变换条件,可以构建常规地图投影的基于镜射变换的定义体系。

#### 参考文献

[1] 钟业勋,童新华,韦清嫒.地图投影的拓扑学原理[J].桂林理工大学学报,2014,34(3):510-514.

[2] 胡毓钜,龚剑文.地图投影[M].2版.北京:测绘出版社,2006.

[3] 钟业勋.数理地图学[M].北京:测绘出版社,2007.

[4] 钟业勋,童新华,李占元.若干常规地图投影的数学定义[J].桂林理工大学学报,2011,31(3):391-394.

[5] 钟业勋,胡毓钜,童新华.基于不同经纬线类型组合的地图投影新定义[J].海洋测绘,2012,32(6):13-16.

[6] 钟业勋,胡宝清,童新华,等.地图学概念的数学表述研究[M].北京:科学出版社,2015.

[7] 钟业勋,胡毓钜.比较地图学在中国的研究与进展[J].地图,1991,5:10-14.

[8] [瑞士]丹尼尔·卡拉曼尼.基于布尔代数的比较法导论[M].蒋勤,译.上海:格致出版社,上海人民出版社,2012.

[9] 钟业勋,胡宝清.基本地貌形态数学定义的改进[J].黑龙江工程学院学报,2014,28(5):1-2.

[10] 钟业勋,王家耀,胡宝清.基于恒定空间的地物演化规律[J].黑龙江工程学院学报,2015,29(6):1-4.

[11] 罗森,严虹,廖义琴.几何学概论[M].北京:清华大学出版社,2011.

[12] 谷超豪.数学词典[M].上海:上海辞书出版社,1992.

[责任编辑:郝丽英]

## 本 刊 声 明

为适应我国信息化建设,扩大本刊及作者知识信息交流渠道,本刊已成为北京万方数据股份有限公司、万方数据电子出版社、中国学术期刊(光盘版)电子杂志社、重庆维普资讯有限公司中文科技期刊等数据库全文收录期刊。来稿一经录用,均视为作者已将该作品全文的数字化方式复制权、发行权、汇编权、翻译权以及信息网络传播权授予本刊编辑部。编辑部已将作者著作权使用费与本刊稿酬一次性结清。作者向本刊提交文章发表的行为即视为接受我刊上述声明的条款。如作者不同意将文章编入该数据库,请在来函中声明,本刊将做适当处理。