文章编号：1674-9057（2011）03-0391-04

若干常规地图投影的数学定义

钟业勋[1,2]，童新华[1]，李占元[1,2]

（1. 广西师范学院 资源与环境科学学院，南宁 530001；2. 广西测绘局，南宁 530023）

摘　要：在引入合同图形和曲线自然方程的基础上，通过曲率和弧长的约束条件和曲线集 $X=\{S_i,S_j\}$ 从属的合同图形类型，对包括圆锥投影、伪圆锥投影、方位投影、伪方位投影、圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影等7种常规地图投影的经纬线自然方程分别给出了数学定义，从而揭示了不同地图投影的数学本质和内在联系。

关键词：地图投影；数学定义；曲线自然方程；合同图形

中图分类号：P282　　**文献标志码**：A

现代逻辑又称数理逻辑，得名于数学方法的引入。数学方法首先在于形式化，形式化包括两个方面：符号化和形式系统。符号化在于用符号表示概念[1]。地图投影中的多圆锥投影、伪圆柱投影、圆柱投影常用作世界地图的数学基础，方位投影、伪方位投影、圆锥投影、伪圆锥投影也在制图实践中经常使用，这几类投影的正轴投影，可谓经典的地图投影[2-5]。鉴于这几类地图投影教科书中还只是对其经纬网的特点作文字描述，尚未有数学表述和揭示其内在联系，本文就这些地图投影的数学定义进行研究和探讨。

1　用于建立地图投影数学模型的基本概念

1.1　合同图形[6]

定义1　镜像合同　存在图形 F_1 和 F_2，若 $F_1\cap F_2=l_0$，使得 $p\in l_0\Rightarrow p(x,0)$，则称 l_0 为 F_1 和 F_2 的对称轴，满足条件

$$\forall P_i(x_i,y_i)\in F_1\Rightarrow P_{i'}(x_i,-y_i)\in F_2。\quad(1)$$

则称 F_1 和 F_2 为镜像合同图形。

以纵坐标轴 l_0 为对称轴的镜像合同图集合记为 A_x；若图形 $F_1\cap F_4=S_0$，使得 $p\in S_0\Rightarrow p(0,y)$，则称 S_0 为 F_1 和 F_4 的横对称轴，满足条件

$$\forall P_i(x_i,y_i)\in F_1\Rightarrow P_{i'}(-x_i,y_i)\in F_4。\quad(2)$$

则称 F_1 和 F_4 为横向镜像合同图形。

以横坐标轴 S_0 为对称轴的镜像合同图集合记为 A_y。

1.2　中心对称

定义2　中心对称　若 $F_1,F_2\in A_x,F_3,F_4\in A_x\wedge F_1,F_4\in A_y,F_2,F_3\in A_y$，则称 $l_0\cap S_0=C$ 为对称中心，即 F_1,F_2,F_3,F_4 具有中心对称。中心对称图的集合记为 A_C。

1.3　曲线的自然方程

多圆锥投影、伪圆柱投影、伪圆锥投影和伪方位投影的经线为对称于中央经线的曲线。这几类投影的经线都具有离中央经线愈远，其曲率愈大、曲线愈长的特点。图1为赤道至任意纬线 φ_j 区间的经度 λ_i 与 $\lambda_{i'}$ 的经线弧长 S_i 与 $S_{i'}$ 的关系。S_i 与 $S_{i'}$ 分别交 φ_j 于 A、B 点，交赤道于 E、D 点，A、B 的点垂足为 C、H，过 A 点作 $AF//CD$，交 $S_{i'}$ 的弦 BD 于 F，过 F 作 AE 的平行线 $FG//AE$。经线向两极收敛的特点，使 $ACDF$ 必定为下底大上底小的梯形，G 点必定落在 D 点的内侧。由图1可知，$AE=FG<FD<BD$，因 AE 为 S_i 的弦，BD 为 $S_{i'}$ 的弦，若 S_i 的曲率为 k_i，$S_{i'}$ 的曲率为 $k_{i'}$，当 $k_i=k_{i'}$ 时，$S_i<S_{i'}$；当 $k_i<k_{i'}$ 时，$S_{i'}$ 弧会更弯曲，$S_{i'}$ 更长，从而也使 $S_i<S_{i'}$。

收稿日期：2010-09-20
基金项目：广西自然科学基金项目（桂科自0448037）
作者简介：钟业勋（1939—），教授，研究方向：地图学理论，gxzyxun@163.com。
引文格式：钟业勋，童新华，李占元．若干常规地图投影的数学定义［J］．桂林理工大学学报，2011，31（3）：391-394.

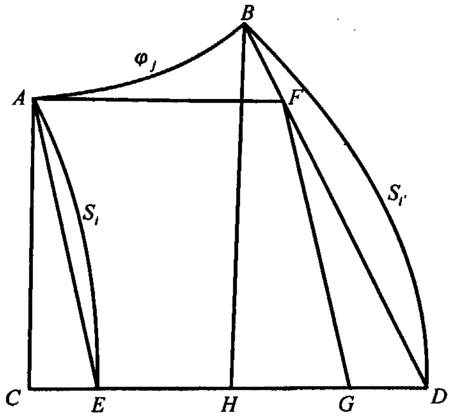

图1 赤道与纬度 φ_j 区间的相邻经线的弧长 S_i 与 $S_{i'}$ 关系

Fig. 1 Relationship of neighboring meridian length S_i and $S_{i'}$ at interval equator and latitude φ_j

地图投影的经纬网是地球面上的经纬网满足某种条件下的拓扑像，平面曲线 S_i 和 $S_{i'}$ 的自然方程为[6]

$$\left.\begin{aligned} S_i &= k_i(S_i) \\ S_{i'} &= k_{i'}(S_{i'}) \end{aligned}\right| k_i = k_{i'} \vee k_i < k_{i'}。 \tag{3}$$

式中：k_i、$k_{i'}$ 分别为曲线 S_i 和 $S_{i'}$ 的曲率；S_i、$S_{i'}$ 为弧长。

由于经线向两极收敛的特点，使 $k_{i'}$ 只能等于或大于 k_i，不能小于 k_i，否则 $S_{i'}$ 将随纬度的增加而愈加偏离 S_i，这违背地图投影经线的变化规律。

同理可证纬弧长 S_j 随纬度增加而缩短的规律。

2 若干地图投影的数学定义

符号规则：任意经线的经度为 λ_i，i 的标号集为 I，该经线的弧长为 S_i，其曲率为 k_i，λ_i 的邻接经度为 $\lambda_{i'}$，其弧长为 $S_{i'}$，曲率为 $k_{i'}$，中央经线特用 l_0 表示；任意纬线的纬度为 φ_j，j 的标号集为 J。该纬线的弧长为 S_j，其曲率为 k_j；φ_j 的邻接纬度为 $\varphi_{j'}$，其弧长为 $S_{j'}$，曲率为 $k_{j'}$。赤道特用 S_0 表示。

2.1 正圆锥投影

正圆锥投影的纬线为同心圆弧，经线为交于一点的直线，即圆弧的半径[2-5]（图2）。

定义3 正圆锥投影 $\exists l_0 \in X$，若 $i \neq 0, j \neq 0$ 时下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} & i < i' \Rightarrow S_i = S_{i'} \wedge S_i \cap S_{i'} \\ & \qquad = C \mid k_i = k_{i'} = 0, \mid i \mid \in (0,E], \\ & j < j' \Rightarrow S_j > S_{j'} \mid k_j < k_{j'}, \mid j \mid \in [\varphi_S, \varphi_N], \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_x$ 为圆锥投影，E 为投影的最大经度；l_0 为中央经线；φ_S 为最南纬线，其弧长最大；φ_N 为最北纬线，弧长最小；C 为纬线的圆心和所有经线的交点。

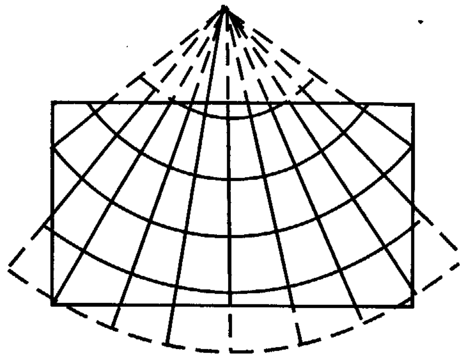

图2 圆锥投影网

Fig. 2 Net of conic projection

2.2 伪圆锥投影

伪圆锥投影的纬线为同心圆弧，经线为对称于中央经线的曲线[2-5]（图3）。

定义4 伪圆锥投影 $\exists l_0 \in X$，若 $i \neq 0, j \neq 0$ 时下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} & i < i' \Rightarrow S_i < S_{i'} \wedge S_i \cap S_{i'} \\ & \qquad = C \mid k_i < k_{i'}, \mid i \mid \in (0,E], \\ & j < j' \Rightarrow S_j > S_{j'} \mid k_j < k_{j'}, \mid j \mid \in [\varphi_S, \varphi_N], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_x$ 为伪圆锥投影。E 为投影的最大经度；φ_S 为最南纬线，其弧长最长；φ_N 为最北纬线，其弧长最短。

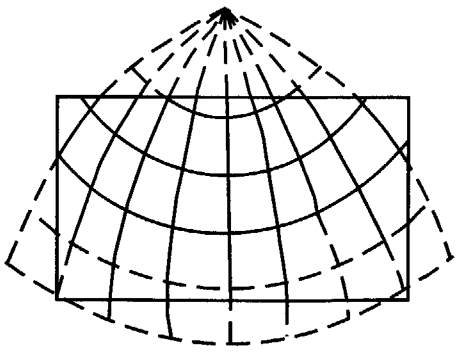

图3 伪圆锥投影网

Fig. 3 Nets of pseud-conic projection

2.3 正方位投影

正方位投影的纬线为同心圆，经线为同心圆的半径[2-5]（图4）。

定义5 正方位投影 $\forall i, i' \in I$，若 $j, j' \in J$ 时下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} i < i' \Rightarrow S_i &= S_{i'} \wedge S_i \cap S_{i'} \\ &= C \mid k_i = k_{i'} = 0, \mid i \mid \in (0,180], \\ j < j' \Rightarrow S_j &> S_{j'} \wedge S_j = 2\pi r_j, S_{j'} \\ &= 2\pi r_{j'} \mid k_j < k_{j'}, \mid j \mid \in [0, 90], \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_C$ 为以 C 为极点投影中心的正方位投影。

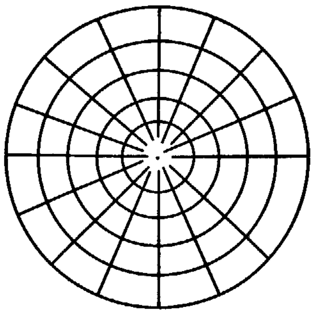

图4　正方位投影网

Fig. 4　Nets of azimuthal projection

2.4　伪方位投影

伪方位投影的纬线为同心圆，经线为对称于中央经线的曲线[2-5]（图5）。

定义6　伪方位投影　$\exists l_0 \in X$，若 $i \neq 0$ 时，下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} i < i' \Rightarrow S_i &< S_{i'} \wedge S_i \cap S_{i'} \\ &= C \mid k_i < k_{i'}, \mid i \mid \in (0,180], \\ j < j' \Rightarrow S_j &> S_{j'} \wedge S_j = 2\pi r_j, S_{j'} \\ &= 2\pi r_{j'} \mid k_j < k_{j'}, \mid j \mid \in [0,90], \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_X$ 为以中央经线 l_0 为对称轴的伪方位投影，C 为极点投影。

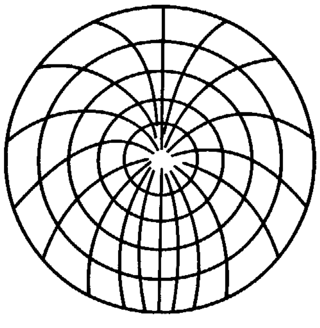

图5　伪方位投影网

Fig. 5　Nets of pseud-azimuthal projection

2.5　正圆柱投影

正圆柱投影的经线为中央经线的平行线，纬线为赤道的平行线[2-5]（图6）。

定义7　正圆柱投影　$\forall i, i' \in I, j, j' \in J$，若下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} i < i' \Rightarrow S_i = S_{i'} \wedge k_i = k_{i'} = 0, \mid i \mid \in [0,90], \\ j < j' \Rightarrow S_j = S_{j'} \wedge k_j = k_{j'} = 0, \mid j \mid \in [0,90], \end{aligned}\right\} (8)$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_C$ 为正圆柱投影。其中央线 l_0 和赤道 s_0 的交点 C 为投影中心和坐标原点。

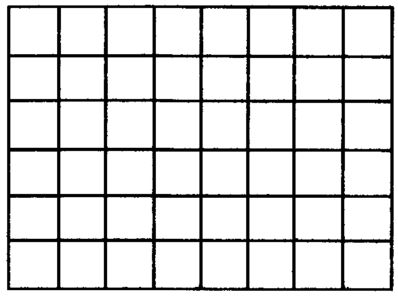

图6　圆柱投影网

Fig. 6　Nets of cylindrical projection

2.6　伪圆柱投影

伪圆柱投影的纬线为赤道的平行线，经线为对称于中央经线的曲线[2-5]（图7）。

定义8　伪圆柱投影　设中央经线为 l_0，赤道为 s_0，$l_0 \cap s_0 = C$ 为坐标原点，$\forall i, i' \in (0,180], j, j' \in (0,90]$，若下列条件满足

$$\left.\begin{aligned} i < i' \Rightarrow S_i < S_{i'} \mid k_i \leqslant k_{i'}, \mid i \mid \in (0,180], \\ j < j' \Rightarrow S_j > S_{j'} \mid k_j = k_{j'} = 0, \mid j \mid \in (0,90], \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_C$ 为伪圆柱投影。

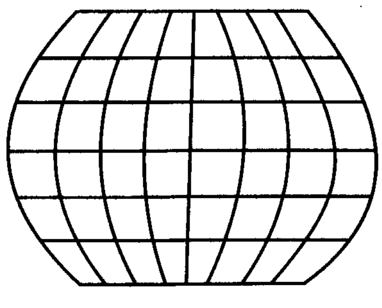

图7　伪圆柱投影网

Fig. 7　Nets of pseud-cylindrical projection

2.7　多圆锥投影

多圆锥投影的纬线为同轴圆弧，圆心位于中央经线（或延长线）上，经线为对称于中央经线的曲线[2-5]（图8）。

定义9　多圆锥投影　设中央经线为 l_0，赤道为 s_0，$l_0 \cap s_0 = C$ 为坐标原点。$\forall i, i' \in (0,180], j, j' \in (0,90]$，若下列条件满足

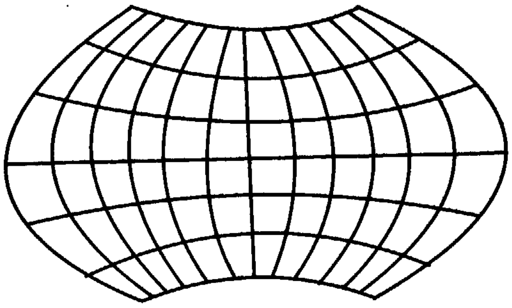

图8 多圆锥投影图
Fig. 8 Nets of polyconic projection

$$\left.\begin{array}{l} i < i' \Rightarrow S_i < S_{i'} \mid k_i \leqslant k_{i'}, \mid i \mid \in (0,180], \\ j < j' \Rightarrow S_j > S_{j'} \mid k_j < k_{j'}, \mid j \mid \in (0,90], \end{array}\right\} \tag{10}$$

则称集合 $X = \{S_i, S_j\} \subset A_C$ 为多圆锥投影。

3 结束语

常见的圆锥投影、伪圆锥投影、方位投影、伪方位投影、圆柱投影、伪圆柱投影和多圆锥投影，其图形具有合同图形的特点。经纬线也都表现为曲线族或直线族。本文在论述了合同图形和曲线自然方程的基础上，分别对上述 7 种地图投影给出了数学定义，从而使这些常见地图投影概念获得了定量描述和数学形式，揭示了其本质特征和内在联系。本文同基本地貌形态数学定义、地图网络的数学定义和基于符号层次不等权的专题地图现势性度量公式等成果表明，数学在地图学的理论研究中十分重要。

参考文献：

[1] 周昌忠. 科学思维学 [M]. 上海：上海人民出版社，1988.

[2] 胡毓钜. 数学制图学 [M]. 北京：中国工业出版社，1964：19-20.

[3] 胡毓钜，龚剑文. 地图投影集 [M]. 2 版. 北京：测绘出版社，1992：54.

[4] 胡毓钜，龚剑文. 地图投影图 [M]. 3 版. 北京：测绘出版社，2006：15-63.

[5] 钟业勋. 数理地图学[M]. 北京：测绘出版社，2007：48.

[6] 谷超豪. 数学词典 [M]. 上海：上海辞书出版社，1992：143-214

[7] 钟业勋，胡宝清，朱根雄. 基本地貌形态数学定义体系研究 [J]. 桂林工学院学报，2009，29 (4)：481-484.

[8] 钟业勋，童新华. 地图网络数学定义的研究 [J]. 海洋测绘，2009，29 (3)：19-20.

[9] 吴丽芳，钟业勋，胡宝清. 基于符号层次不等权的专题地图现势性度量公式 [J]. 桂林理工大学学报，2010，30 (4)：123-125.

[10] 钟业勋，胡宝清，乔俊军. 数学在地图学中的应用 [J]. 桂林理工大学学报，2010，30 (1)：93-98.

[11] 钟业勋，胡宝清，朱亚荣. 地图投影设计中地球椭球基本元素的计算及应用 [J]. 桂林理工大学学报，2010，30 (2)：246-249.

[12] 钟业勋，吴丽芳，胡宝清. 关于比率量表可以表达为间隔量表，顺序量表和定名量表的数学证明 [J]. 桂林理工大学学报，2011，31 (1)：96-99.

[13] 钟业勋，胡宝清，郑红波. 地图符号的基本结构和功能 [J]. 桂林理工大学学报，2011，31 (2)：229-232.

Mathematical Definition of Some Conventional Projections

ZHONG Ye-xun[1,2], TONG Xin-hua[1], LI Zhan-yuan[1,2]

(1. *School of Resource and Environment Science*, *Guangxi Teachers College*, *Nanning* 530001, *China*; 2. *Guangxi Regional Bureau of Surveying and Mapping*, *Nanning* 530023, *China*)

Abstract: The concept of congruent figures and intrinsic equation are introduced. The constrained condition of curvature, arc length of curve and curve set $X = \{S_i, S_j\}$ belong to the type of congruent figures. The mathematical definitions of 7 conventional intrinsic equations of meridian and parallel lines of map projections are deduced, which are conic, pseudo-conic, azimuthal, pseudo-azimuthal, cylindrical, pseudo-cylindical and polyconic projection, respectively. They indicate the mathematical essence and internal relations between different projections.

Key words: map projection; mathmatical definition; intrinsic equation; congruent figures