

# 伪方位投影的分析研究

胡 鹏

〔提要〕 伪方位投影具有闭合的变形曲线，它对于面积和角度变形都有相当要求的区域地图是较为适宜的。本文通过分析  $\rho$ 、 $\delta$  形式以及各个参数的作用，指出了下列几点：

- 1、 $\rho$ 、 $\delta$  形式及各个参数对变形大小及分布的规律性影响，揭示了其与方位投影的内在联系；
- 2、设计伪方位投影时， $\rho$ 、 $\delta$  形式确定及参数选取的原则；
- 3、按变形数值，设计一个良好的伪方位投影的途径；
- 4、从 4 个不同角度，给出了 4 个良好的中国全图伪方位投影设计方案。

伪方位投影是由苏联制图学者金兹布尔格 (Г. А. Гинзбург) 在 1952 年提出的。多年来有关这方面的讨论不多，〔1〕、〔2〕。

至今，该投影仍是地图投影中按正常位置下经纬线形状分类中研究得较少的一类投影。本文对伪方位投影作了分析并对确定一个良好的伪方位投影方案进行了一些研究。

## 一、伪方位投影的定义、公式推导及分类

如果把地球视为半径为  $R$  的球体，并以斜轴的球面坐标代替正轴情况下的地理坐标，就可以写出伪方位投影的一般极坐标公式

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \delta \\ y = \rho \cdot \sin \delta \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\rho$  是天顶距  $Z$  的函数

$$\rho = f_1(Z) \quad (2)$$

$\delta$  是  $Z$  和  $A$  的函数

$$\delta = f_2(Z, A) \quad (3)$$

因为  $\delta$  为  $A$  的奇函数，又因为  $\delta$  对  $\pi$  的周期性，并且  $k\pi$  方向不变（设  $K$  为整数）故：

$$\begin{cases} f_2(Z, -A) = -f_2(Z, A) \\ f_2(Z, k\pi) = k\pi \end{cases} \quad (4)$$

（上述各式中符号意义同一般地图投影书籍。）

于是一般伪方位投影变形公式为：

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{E}}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\rho^2 \left( \frac{\partial \delta}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{dZ} \right)^2} \quad (5)$$

$$\mu_2 = \frac{\sqrt{G}}{r} = \frac{\rho}{R \cdot \sin Z} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial A} \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho \cdot \frac{\partial \delta}{\partial Z}}{\frac{d\rho}{dZ}} \quad (7)$$

$$P = \mu_1 \cdot \mu_2 \cos \varepsilon = \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \frac{H}{\sqrt{EG}} = \frac{H}{R^2 \sin Z} \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \frac{w}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{P} - 2} \quad (9)$$

应该看到上述公式中(5)~(9), 并没有利用条件式(4), 因此, 精确地说上列(5)~(9)公式乃是伪圆锥投影变形公式。为得到伪方位投影公式可分析式(4): 从(4)式可知 $\delta$ 是 $A$ 的周期函数, 周期为 $\pi$ , 当 $A = k\pi$ 时,  $\delta = A = k\pi$ 。

上式可表示为某种正弦函数的函数, 显而易见:

$$\delta = A - \rho(Z) \sin kA$$

是符合条件式(4)的。

又当 $Z \rightarrow 0$ 时,  $Z$ 对 $\delta$ 影响极小, 也即 $Z$ 对 $\delta$ 的 $q+1$ 阶导数也无影响, 即有

$$\frac{\partial^{(q+1)} \delta}{\partial Z^{(q+1)}} = 0 - \rho(Z)^{(q+1)} \sin kA = 0$$

解之得:

$$\rho(Z) = bz^q, \quad b \text{ 为任意常数。}$$

为保证制图网格绘制的实际需要, 必须当 $q \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq Z \leq 2\pi$ 时,  $bz^q \sin kA \leq \Delta A_0$ 。

即方向角变化不超过一定值, 故可把 $b$ 分为 $c, z_\pi$ 两部分, 使 $\delta$ 成为:

$$\delta = A - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \sin kA \quad (10)$$

当 $Z_\pi$ 为制图区最大天顶距时, 可保证方向改变不超过某个预定值 $c$ , 这样我们可得到 $\delta$ 的一种较为通用的形式, 但它不是一切伪方位投影的普遍形式。

对于这种通用形式的 $\delta$ , 我们有:

$$\frac{\partial \delta}{\partial Z} = -\frac{c}{Z_\pi} q \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^{q-1} \sin kA \quad (11)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial A} = 1 - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \cos kA \cdot K \quad (12)$$

代入式(5)~(9), 可得 $\delta$ 形式如(10)的伪方位投影的变形公式:

$$P = \frac{H}{R^2 \sin Z} = \frac{\rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial A}}{R^2 \sin Z} = \frac{\rho \cdot \frac{d\rho}{dz} (1 - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \cos kA \cdot K)}{R^2 \sin Z} \quad (13)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{R} \sqrt{\rho^2 \left( \frac{\partial \delta}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} = \frac{1}{R} \sqrt{\rho^2 \left( \frac{c}{Z_\pi} \right)^q \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^{2(q-1)} \sin^2 kA + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2} \quad (14)$$

$$\mu_2 = \frac{\rho}{R \sin Z} \cdot \frac{\partial \delta}{\partial A} = \frac{\rho}{R \sin Z} (1 - c \left( \frac{Z}{Z_\pi} \right)^q \cos kA \cdot K) \quad (15)$$

$$\operatorname{tge} = \frac{\rho \cdot \left( \frac{-c}{Z\pi} \right)^q \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{q-1} \sin KA}{\frac{d\rho}{dz}} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} &= \frac{1}{4} [(\mu_1^2 + \mu_2^2)/p - 2] \\ &= \frac{\left[ \rho^2 \left( \frac{c}{Z\pi} \right)^2 q^2 \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{2(q-1)} \sin^2 KA + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right] \sin^2 z + \rho^2 \left( 1 - c \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)^2}{4\rho \frac{d\rho}{dz} \sin z (1 - C \cdot K \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA)} - \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (17)$$

对于去掉方位投影后的伪方位投影的分类, 由于本投影中等高圈表示为同心圆, 而又不被垂直圈等分, 因此无等角和等面积投影, 而只有任意投影。其中, 在式(5)中令  $\rho = RZ$ ,  $\delta = \varphi(A)$  并符合条件(4), 就可得到  $\mu_1 = 1$  即等距离的伪方位投影, 显然通用形式  $\delta$  函数式为(10)式且当  $q = 0$ , 则  $\delta = A - c \sin KA$  即是这一类投影, 另外它还包括相当广泛的别种类型, 例如  $\delta = A - c \cdot A \cdot \sin A$ 。

另一种分类是按  $\rho$  与  $\delta$  的函数形式分类, 其缺点是庞杂了一点。

由于以(10)式表示的  $\delta$  形式的伪方位投影在制图工作中运用较多, 故以下讨论基本上局限于这一形式。

## 二、 $\delta$ 、 $\rho$ 函数形式、参数及其意义

伪方位投影的性质是由  $\delta$ ,  $\rho$  的函数形式及其参数决定的:

### 〈一〉向径 $\rho$ 的函数形式对投影性质的影响

关于这问题在文献[3]中有过论述, 其要点是: 当同是  $\delta = A - c \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \sin KA$  的情况下, 对于同一制图象限而言, 有

表 一

$\rho$	$2R \sin \frac{Z}{2}$	$RZ$	$2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$
$P$	$P_1$	$P_2 > P_1$	$P_3 > P_2 > P_1$
$\varepsilon$	$\varepsilon_1 > \varepsilon_2$	$\varepsilon_2 > \varepsilon_3$	$\varepsilon_3$

根据(13)和(16)式, 则有

$$\frac{p_i}{p_j} = \frac{\rho_i \frac{d\rho_i}{dz}}{\rho_j \frac{d\rho_j}{dz}} \cdot \frac{\left( 1 - c \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)}{\left( 1 - c \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)} = \frac{\rho_i}{\rho_j} \cdot \frac{\frac{d\rho_i}{dz}}{\frac{d\rho_j}{dz}}$$

$$\frac{\tan \epsilon_i}{\tan \epsilon_j} = \frac{\rho_i \left( -\frac{c}{Z\pi} \cdot q \cdot \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{q-1} \sin KA \right)}{\frac{d\rho_i}{dz}} \bigg/ \frac{\rho_j \left( \frac{-c}{Z\pi} \cdot q \cdot \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{q-1} \sin KA \right)}{\frac{d\rho_j}{dz}}$$

$$= \frac{\rho_i}{\rho_j} \cdot \frac{d\rho_j/dz}{d\rho_i/dz} = \frac{\rho_i^2}{\rho_j^2} \cdot \frac{p_j}{p_i}$$

式中  $i, j$  为任意二个伪方位投影。

故有

表 二

$\rho$ 的形式	$KR \sin \frac{Z}{K}$ 当 $K_i \geq K_j$ 或 $\rho_i \geq \rho_j$	RZ $\rho_i \geq \rho_j$	$KR \lg \frac{Z}{K}$ $K_i \geq K_j$ 或 $\rho_i \leq \rho_j$
P	$P_i \geq P_j$	$P_i \geq P_j$	$P_i \leq P_j$
$\varepsilon$	视 $\frac{d\rho_j/dz}{d\rho_i/dz}$ 决定	$\varepsilon_i \geq \varepsilon_j$	视 $\frac{d\rho_j/dz}{d\rho_i/dz}$ 决定
注	i, j 为不同投影	i, j 为同一投影不同点	i, j 为不同投影

## (二) 函数式 $\delta = A - C\left(\frac{z}{Z_\pi}\right)^q \sin KA$ 对投影性质的影响

### 1、参数 C 的意义和作用

由  $\delta = A - C\left(\frac{z}{Z_\pi}\right)^q \sin KA$  , 取  $z = z_\pi$  ,

$$KA = \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } C\left(\frac{z}{Z\pi}\right) \sin KA = C = A - \delta, \text{ 故 } C$$

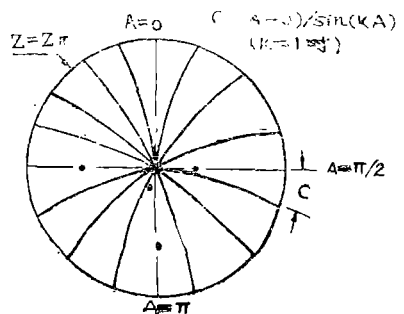
的意义是制图区边界上（也为全制图区）最大方

位角变异, 它发生在与轴径线方向成  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$

方向上。当  $K = 1$  时，这个数值如图一所示，以弧度为单位，顺时针为负，反时针为正。

同时为了保证  $\delta = A - C \sin KA$  是递增函数必须  $|C| \leq 1/K$ 。

由 (14) 式并对  $C$  求导数:



图一

$$\frac{\partial(P-1)}{\partial C} = \frac{-\rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \left( \frac{z}{Z\pi} \right)' \cos KA \cdot K}{R^2 \sin z} \quad (21)$$

当  $\cos KA = 0$  即  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  时,  $\frac{\partial(P-1)}{\partial C} = 0$ ,  $P-1$  不受  $C$  影响同方位投影。

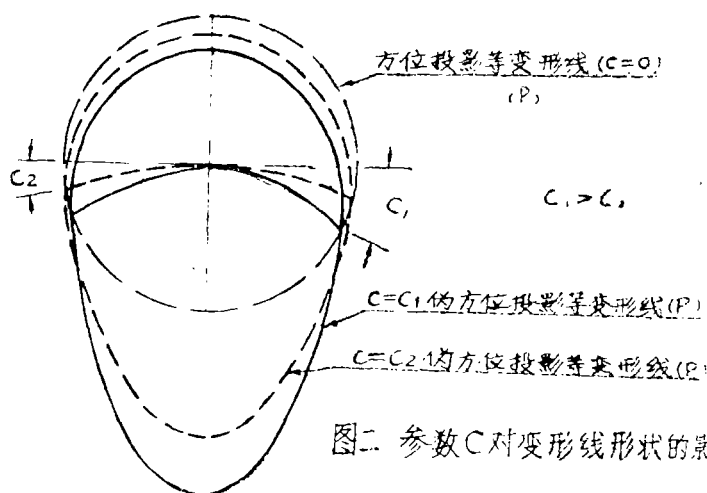
若设相同  $\rho$  形式的方位投影面积比为  $P_{\text{方}}$ , 则  $P_{\text{方}} = \rho \frac{d\rho}{dz} / R^2 \sin z$ ,

$$\frac{\partial |P - P_{\text{方}}|}{\partial C} = \frac{\partial \left| -C \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right|}{\partial C \cdot R^2 \sin z} \quad (22)$$

所以  $|P - P_{\text{方}}|$  为  $C$  的增函数,  $\cos KA = 0$  方向上  $P$  等于  $P_{\text{方}}$ 。其几何意义表示  $C$  越大, 伪方位投影与同  $\rho$  之方位投影面积比的差异越大。为讨论方便起见, 以后称  $-\frac{\pi}{2K} < A < \frac{\pi}{2K}$

为主域;  $\frac{\pi}{2K} < A < \frac{3\pi}{2K}$  为副域。主域中面积等变形线由圆形外凸; 副域中, 等变形线内

陷;  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$ , 变形线位置同方位投影。若  $K = 1$ , 变形线是卵形, 略如图二。| $C$ | 越大, 卵形特征愈甚。



图二 参数  $C$  对变形线形状的影响

由 (17) 式对  $C$  求导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg \frac{W}{2}}{\partial C} &= \frac{1}{4\rho \frac{d\rho}{dz}} \cdot \frac{\left( 1 - C \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) \left[ 2 C \frac{q^2}{Z\pi^2} \rho^2 \cdot \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{2(q-1)} \sin^2 KA \cdot \sin z \right]}{\left( 1 - C \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)^2} \\ &\quad - \frac{2\rho^2}{\sin z} \left( 1 - C \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K + \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \left[ \rho^2 \cdot \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{C}{Z\pi} \right)^2 q^2 \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^{2(q-1)} \sin^2 KA + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right] \sin z + \frac{\rho^2}{\sin z} \left( 1 - C \left( \frac{z}{Z\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) \end{aligned}$$

$$\left. \frac{d}{dK} \right)^2 \quad (23)$$

从式中可以看到, 当  $\cos KA = 0$  即  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向上的导数为:

$$\frac{1}{2} \frac{C q^2 (Z\pi)^{-q} \rho^2 z^{2q-1} \sin z}{\rho \frac{d\rho}{dz}},$$

故当  $C < 0$ ,  $\lg^2 \frac{W}{2}$  是  $C$  的减函数,  $C > 0$  时是增函数,  $C = 0$  时有极小值。

综上所述, 把  $C$  值变化范围及其影响列表:

C 参数对变形影响 表 三

项 目		C 变化范围		
		$-1/k$	$\rightarrow$	$0 \rightarrow 1/k$
P	主 区	$P_{\text{最大}}$	$\rightarrow$	$P_{\text{方}} \rightarrow P_{\text{最小}}$
	副 区	$P_{\text{最小}}$	$\rightarrow$	$P_{\text{方}} \rightarrow P_{\text{最大}}$
	$A = \pm \frac{\pi}{2k}$ 方向上	$P_{\text{方}}$		$P_{\text{方}}$
W	$A = \pm \frac{\pi}{2k}$ 方向上	$W_{\text{最大}}$	$\rightarrow$	$W_{\text{方(极小)}} \rightarrow W_{\text{最大}}$

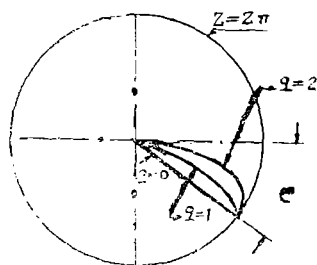
所以  $C$  值选取原则是: 制图区凸凹点天顶距相差大,  $C$  应取大, (为保证面积变形线与制图区形状大致一致), 并且  $C$  的绝对值愈小, 在  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向角度变形越小。

## 2、参数 $q$ 的意义和作用

从  $\delta = A - C \left( \frac{\pi}{Z\pi} \right)^q \sin KA$ , 可以看

到, 若  $q = 0$ , 则  $\delta = A - C \sin KA$ , 若  $q \rightarrow$

$\infty$ , 则对于非边界  $z < z_n$  各点有  $\delta = A$ , 而对边界上点, 则仍有  $\delta = A - C \sin KA$ 。如图三所示, 可见  $q$  是表示伪方位投影径线接近方位投影径线的程度。也即是方向线以  $q + 1$  次曲线趋近于边界点。



图三  $q$  变化对球面坐标线 ( $A$ ) 的影响

设  $Z_\pi = 1$ , 且  $\rho = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$  则有

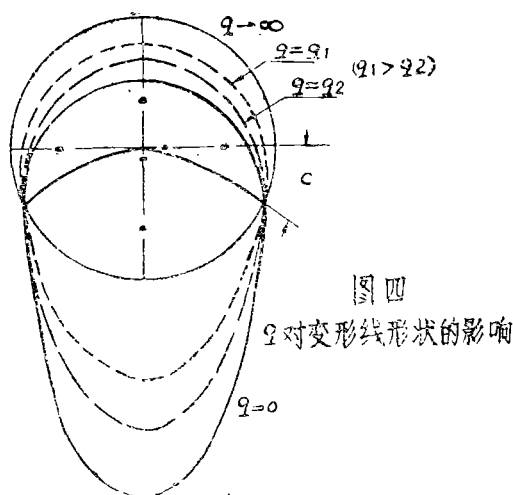
$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \left( 1 - C \cos KA \cdot K \left( \frac{z}{Z_\pi} \right)^q \right)}{R^2 \sin z} \\
 &= \frac{(a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots)(a_1 + 2a_1 z + \cdots)(1 - cz^q \cos KA)}{R^2 \sin z} \\
 &= \frac{a_1^2 z + 3a_1 a_2 z^2 + (4a_1 a_3 + 2a_2^2) z^2 + \cdots + [(q-1)a_q a_1 + (q-2)a_{q-1} a_2 + \cdots + a_1 a_q] \cdot z^q + \cdots}{R^2 \sin z}
 \end{aligned} \quad (24)$$

可见当  $q$  足够大时, 在一定  $z$  内, 不影响面积变形, 变形线形状与  $\rho$  形式一样的方位投影相同。 $q$  越大, 面积变形与方位投影差别愈小, 等变形线越“圆”, 无穷大时化为圆。而边界上相当于  $q=0$  的情况。当  $q$  愈小, 面积等变形线越窄,  $q \rightarrow 0$  时, 化为以投影中心为

中心的  $K$  叶玫瑰线,  $P = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} (1 - KC \cdot \cos KA)$ 。且有

$$\frac{d(P-1)}{dq} = \frac{-\rho \frac{d\rho}{dz} C \cdot \cos KA \cdot K \left( \frac{z}{Z_\pi} \right)^q L_1 \left( \frac{z}{Z_\pi} \right)}{R^2 \sin z} \quad (25)$$

故同样  $|P-1|$  为  $q$  的减函数。当  $K=1$  时,  $q$  的作用如图四所示, 很显然对面积变形,  $q$  和  $C$  都能起相当的作用,  $q \rightarrow \infty$  相当于  $C=0$ ,  $q$  变小的作用相当于  $C$  变大, 并且  $C$  对边界,  $q$  对内部作用较大。



图四

$q$  对变形线形状的影响

当  $\cos KA = 0$ , 即  $\Lambda = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向上

$$\frac{\partial \lg^2 \frac{W}{2}}{\partial q} = \frac{2\rho^2 \cdot \left(\frac{C}{Z\pi}\right)^2 q \left(\frac{z}{Z\pi}\right)^{2(q-1)} \sin^2 KA \sin z \left(1 + q \ln\left(\frac{z}{Z\pi}\right)\right)}{4\rho \cdot \frac{d\rho}{dz}} \quad (26)$$

当  $q > \frac{-1}{\ln\left(\frac{z_3}{Z\pi}\right)}$ , (26) 式为负, 故  $\lg^2 \frac{W}{2}$  为  $q$  的减函数,  $q < \frac{-1}{\ln\left(\frac{z_3}{Z\pi}\right)}$ , (26) 式为

正, 故  $\lg^2 \frac{W}{2}$  为  $q$  的增函数,  $q = \frac{-1}{\ln\left(\frac{z_3}{Z\pi}\right)}$ , (26) 式为 0, 故  $\lg^2 \frac{W}{2}$  有极大值。因此,  $q$

的选择原则是  $\left|q - \frac{-1}{\ln\left(\frac{z_3}{Z\pi}\right)}\right|$  越大越好,  $z_3$  为  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向上制图区最远点。若

$\frac{z}{Z\pi} < 1$ , 由 (17) 式可知当  $q \rightarrow \infty$  时

$$\lg^2 \frac{W}{2} \rightarrow \frac{\left[\left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2 \sin z + \frac{\rho^2}{\sin z}\right]}{4\rho \frac{d\rho}{dz}} - \frac{1}{2}, \text{ 当 } \rho = 2R \lg \frac{z}{2} \text{ 时, } \lg^2 \frac{W}{2} \rightarrow 0, \text{ 可见, 此}$$

时伪方位投影和等角方位投影相同。

综上所述, 把参数  $q$  的作用列表如下:

$C > 0$  时

表 四

项 目		q 值范围			
			0	$\rightarrow (0, \infty)$	$\rightarrow \infty$
P	主 区		$P_{\text{最小}}$	$\rightarrow$	$P_{\text{方}}$
	副 区		$P_{\text{最大}}$	$\rightarrow$	$P_{\text{方}}$
	$A = \pm \frac{\pi}{2k}$		$P_{\text{方}}$	$P_{\text{方}}$	$P_{\text{方}}$
W	$A = \pm \frac{\pi}{2k}$		$W_{\text{最小}}$	$\left(q = \frac{-1}{m \left(\frac{z_3}{Z\pi}\right)}\right)$ $\leftarrow W_{\text{最大}} \rightarrow$	$W_{\text{最小}}$



### 3、参数 K 的意义和作用

K 的意义是伪方位投影中轴径线条数, 实质上是轴径线条数的  $\frac{1}{2}$ 。

它的作用是把全制图区分成以投影中心为中心的  $2K$  个扇形区, 相邻两区对称于轴径线, 等变形线有  $K$  个隆起,  $K$  个凹陷。

### 4、 $z_{\pi}$ 的意义和作用

$z_{\pi}$  是制图区最大天顶距, 这个数值到底是取大还是取小有利? 对 (13) 式求导数得:

$$\frac{\partial(P-1)}{\partial z_{\pi}} = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz} cz^q \cos KA \cdot K \cdot z_{\pi}^{-(q+1)} q}{R^2 \sin z} \quad (27)$$

对 (17) 式求导数则在  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向有:

$$\frac{\partial \lg^2 \frac{W}{2}}{\partial z_{\pi}} = \frac{-2q^3 \cdot \rho \cdot c^2 z^2 (q-1) \sin z \cdot z_{\pi}^{-(2q+1)}}{4 \frac{d\rho}{dz}} < 0, \text{ 分析两式知 } z_{\pi} \text{ 作用与}$$

C 恰相反, 但实际上,  $z_{\pi}$  有小的变动, 对变形的影响数量不大, 故一般为计算方便起见, 取比制图区最大天顶距略大的整数。

### (三) 变形分布及 $\rho$ 、 $\delta$ 形式确定

由 (13) 式对 A 求导数, 我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial A} = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} C \cdot \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q K^2 \sin^2 KA \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial A^2} = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} C \cdot \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q K^3 \cos KA \quad (29)$$

由以上二式并考虑到 (13) 式, 故 P 是 A 的周期函数, 周期为  $\frac{2\pi}{K}$ ,  $C > 0$ ,  $A = 0$

时, 一阶导数为 0, 二阶导数大于 0, 故为最小面积比方向。  $A = \frac{\pi}{K}$  方向, 一阶导数为 0,

二阶导数小于 0, 为最大面积比方向。  $C < 0$  时, 则相反。  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  为与同  $\rho$  方位投影面积比相同方向。当  $z_1$ 、 $z_2$  足够大时,  $A = 0$  方向, 最大面积比为

$$P_{m1} = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} \left( 1 - KC \left( \frac{z_1}{z_{\pi}} \right)^q \right) \quad (30)$$

$A = \frac{\pi}{K}$  上, 最大面积比为

$$P_{m2} = \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} \left( 1 + KC \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right)^q \right) \quad (31)$$

其中  $z_1, z_2$  为这两个方向最大天顶距。  $C >$

0 时,  $A = \frac{\pi}{K}$  方向上, 最小面积比为

$$\left( \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} \right)_{z=0}, \text{ 并容易看出 } P \text{ 是天顶距 } z \text{ 的}$$

增函数;  $C < 0$  时, 则为  $A = 0$  方向  $P$  是天顶距  $z$  的增函数。图五表明了  $K = 3$  时,  $C > 0$  面积比分布的略图。

若对 (17) 式求  $A$  的导数, 则有

$$\frac{\partial \lg^2 \frac{W}{2}}{\partial A} = \frac{\left( 1 - C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) \left[ \sin z \cdot \rho^2 \cdot \left( \frac{C}{z_\pi} \right)^2 \cdot q^2 \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^{2(q-1)} 2 \sin KA \cdot \right.}{4 \rho \frac{d\rho}{dz} \left( 1 - C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)^2}$$

$$\frac{\cos KA \cdot K + \frac{2\rho^2}{\sin z} \left( 1 - \frac{Cz^q}{z_\pi^q} \cos KA \cdot A \right) \cdot C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q K^2 \cdot \sin KA}{-C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q K^2 \cdot \sin KA \left[ \rho^2 \left( \frac{C}{z_\pi} \right)^2 \cdot q^2 \cdot \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^{2(q-1)} \sin^2 KA + \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \right]}$$

$$\sin z + \frac{\rho^2}{\sin z} \left( 1 - C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right)^2 \quad (32)$$

当  $A = 0$ ,  $A = \frac{\pi}{K}$  为驻点, 当然, 一般可试算相同天顶距的这两个方向的点及任一方向

点的角度变形即可判断其是否角度变形极值方向。也可通过求二阶导数, 当  $A = 0$ ,  $\frac{\pi}{K}$  时为

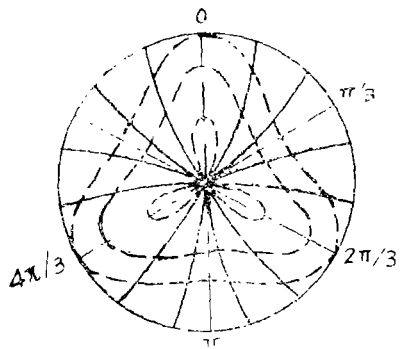
$$\left( \frac{d^2 \lg^2 \frac{W}{2}}{dA^2} \right)_{A = \frac{\pi}{K}} = \left( 1 \mp CK \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \right)^2 \left[ \left( 1 \mp CK \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \right) \sin z \rho^2 \left( \frac{C}{z_\pi} \right)^2 q^2 \right.$$

$$\left. \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^{2(q-1)} 2 K^2 \pm \frac{\rho^2}{\sin z} \left( 1 - C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) \cdot C \cdot \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \right.$$

$$\left. K^3 \mp C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q K^3 \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2 \sin z \right] \quad (33)$$

代入相应  $z, c, k, q, \rho$  可决定驻值方向之性质。

因为对决定投影意义最大的是最大天顶距上的角度变形, 故取  $z = z_\pi$ , 若  $\rho = z$ ,  $\rho' = 1$



图五

代入得:

$$\left( \frac{d^2 \operatorname{tg}^2 \frac{w}{2}}{dA^2} \right)_{A = \frac{0}{K} z = z_{\pi}} = \frac{(1 - CK)^2 [(1 - CK) \sin z_{\pi} \cdot C^2 \cdot q^2 \cdot 2K^2 \pm CK^3]}{4z_{\pi}(1 \mp CK)^4} \cdot (z_{\pi}^2 (1 \mp CK) / \sin z_{\pi} - \sin z_{\pi})] \quad (34)$$

驻值方向上, 角度变形可根据 (17) 式写出

$$\operatorname{tg}^2 \frac{w}{2} = \frac{\left[ \frac{d\rho}{dz} \sin z \right]^2 + \left[ \rho \left( 1 \mp C \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q K \right) \right]^2}{4 \left[ \frac{d\rho}{dz} \sin z \cdot \rho \cdot \left( 1 \mp C \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q K \right) \right]} - \frac{1}{2} \quad (35)$$

分析 (33) (34) (35) 式可知, 当  $C > 0$  时,  $A = 0$  为最小面积比方向, 并在  $\rho^2 (1 - CK) \geq \sin^2 z_{\pi} \cdot \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2$  的情况下 (充分条件) 为最小角度变形方向; 而  $A = \frac{\pi}{K}$  为最大面积变形方向, 并在  $C$  较小,  $K \cdot q$  不太大的情况下在  $\rho^2 (1 - CK) \gg \sin^2 z_{\pi} \cdot \left( \frac{d\rho}{dz} \right)^2$  条件下为最大角度变形方向 (指  $z = z_{\pi}$  而言)。并且在这两方向天顶距足够大时, 都为  $z$  的增函数。实际计算表明, 对于一般情况, 上述条件是满足的。

这样伪方位投影比方位投影优越之点就充分表现为: 可根据制图区特点, 把  $A = 0, \frac{\pi}{K}$  方向线安排在区域凸处、凹处, 使变形线外凸、内凹, 使变形配赋符合制图区边界走向。

因在  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向上, 伪方位投影面积比等于同  $\rho$  之方位投影。故原则上给定

$A = \pm \frac{\pi}{2K}$  方向上若干点的面积之变形值, 就可根据方位投影中图介解析法确定  $\rho$ , 见文献

[4]。确定了  $\rho$  就可给定  $A = 0$ ,  $A = \frac{\pi}{K}$  方向上一点或两点变形的三个条件, 按 (30)(31)

(35) 列出三个条件方程, 解出  $C \cdot q \cdot z_{\pi}$ , 然而解算  $z_{\pi}$  是较困难的, 一般可按前述之  $z_{\pi}$  确定原则, 指定  $z_{\pi}$ , 列出二个变形条件方程解算  $C, q$ 。

下面结合中国全图伪方位投影方案的选择讨论参数及  $\rho, \delta$  形式的确定问题。

中国全图有三个方向凸出, 故取  $K = 3$ , 根据方位投影中心确定原则, 确定  $\varphi_0 = 35^\circ$ ,  $\lambda_0 = 110^\circ$ ,  $z_{\pi}$  取比最大天顶距略大, 取  $z_{\pi} = 28^\circ$ ,  $z_2 = 13^\circ$ 。为讨论方便取  $R = 1$ , 并制图区凸出方向之垂直圈方位角  $A_0 = 0$ :

### 1、 $\rho = 2 \sin \frac{Z}{2}$ 伪方位投影之确定

根据 (30) 式, 并取  $Z_1 = Z_{\pi}$ , 则

$$C = \frac{1}{K} - \frac{P_{m1} R^2 \sin z}{K \rho_{\pi} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{\pi}} = \frac{1}{K} - \frac{P_{m1}}{K} \quad (36)$$

$$\text{若取 } |P - 1| = \left| \frac{\rho \frac{d\rho}{dz}}{R^2 \sin z} \left( 1 - KC \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q \cos KA \right) - 1 \right| = \left| -KC \left( \frac{z}{z_{\pi}} \right)^q \cos KA \right| \leq$$

$$\leq KC = 1 - P_{m1} = 0.01$$

所以  $C = 0.00333$ , 把  $C$  代入 (35) 式, 可得  $A = 0$  方向上  $z_{\pi}$  处的角度变形为  $2^{\circ}880$ , 令  $z_{\pi}$  点上角度变形为  $2^{\circ}880$ , 则按式 (35) 可解得  $A = \frac{\pi}{K}$  方向上有:

$$1 + C \left( \frac{z_2}{z_{\pi}} \right)^q K = 2 \left( \left( \lg^2 \frac{W}{2} + 0.5 \right) \cdot \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{z_2} \sin z_2 / \rho_{z_2} \pm \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{z_2} \sin z_2 / \rho_{z_2} \right. \\ \left. \cdot \sqrt{4 \left( \lg^2 \frac{W}{2} + 0.5 \right)^2 - 1} \right) \quad (37)$$

代入  $W_2$ , 得  $q_1 = -1.7427$ ,  $q_2$  不存在。 $q$  为负值这是不合理的, 这将破坏面积比假定。

由本文第三部分知  $q$  是表示变形线“陡峭”程度的参数, 愈小愈“陡”。而且在  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$

方向上的角度变形在  $q < q_3 = -1 / \ln \frac{z_3}{z_{\pi}} = -1 / \ln \frac{20}{28} = 2.9720$  时, 为  $q$  的增函数, 故  $q$  也

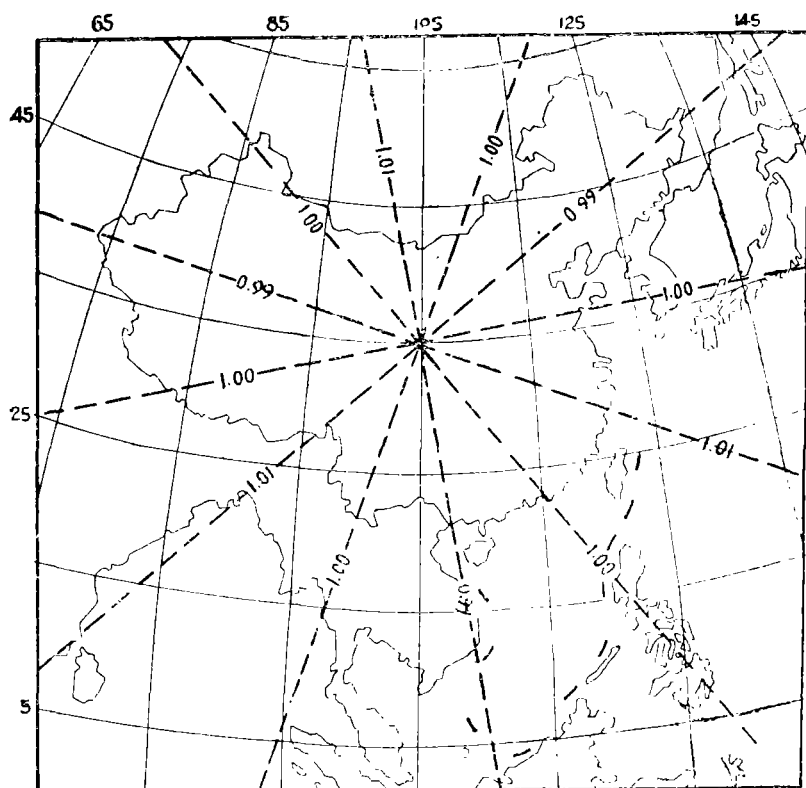
是愈小愈好。可以想象变形线经过  $A = \pm \frac{\pi}{2K}$  上各点时, 当  $q = 0$  达到最小值和最“陡峭”

状态。故取  $q = 0$ , 具体各部分变形如表五、图六。

(以下表中  $Z$ 、 $W$  单位为度)

表 五

A \ Z	0		7		13		20		26		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0	0.99	0.362	0.99	0.163	0.99	1.178	0.99	2.400	0.99	2.880	0.99
$\pm \frac{\pi}{2K}$	0	1.00	0.214	1.00	0.739	1.00	1.754	1.00	2.975	1.00	3.455	1.00
$\frac{\pi}{K}$	0	1.01	0.784	1.01	1.309	1.01	2.324	1.01	3.545	1.01	4.025	1.01



图六 面积变形略图  
P变形线呈放射状射线

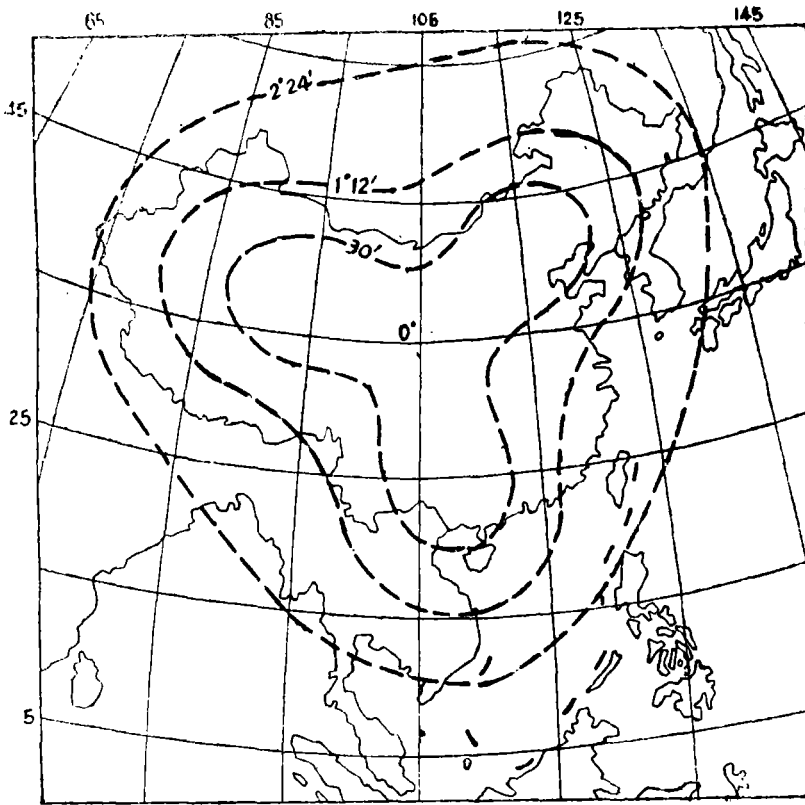
实际计算表明, 这是  $\rho = 2\sin\frac{Z}{2}$ , 面积变形  $\leq 1\%$  时使最大角度变形为最小的方位投影。同样的方法可确定面积变形为任意程度的前提下, 角度变形线“陡峭”适合边界形状或具最佳角度变形的伪方位投影。可见它比等面积方位投影在角度变形上有所改善。当然原则上也可指定  $Z_*$  点的角度变形为另一合理数值而标得  $q$ 。

2、 $\rho$  形式为  $2\lg\frac{Z}{2}$  时, 伪方位投影方案的确定

一般采用  $\rho = 2\lg\frac{Z}{2}$  形式对角度要求较高, 故若指定  $A=0$  方向上最大角度变形  $W_1$ , 并设其发生在  $Z_1 = Z_*$  处, 则类似 (37) 式, 可有

$$1 - CK = 2 \left( \lg^2 \frac{W_1}{2} + 0.5 \right) \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{Z_*} \sin Z_* / \rho_{Z_*} \pm \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{Z_*} \sin Z_* / \rho_{Z_*} .$$

$$\cdot \sqrt{4 \left( \lg^2 \frac{W_1}{2} + 0.5 \right)^2 - 1} = 2 \left( \lg^2 \frac{W_1}{2} + 0.5 \right) \pm \sqrt{4 \left( \lg^2 \frac{W_1}{2} + 1 \right) - 1} \quad (38)$$



图六 角度变形略图

设  $w_1 = 0.5^\circ$ ，则代入解得：

$C_1 = -0.002922$ ,  $C_2 = 0.002896$ 。若有面积比条件  $P_{m_1} = P_{m_2}$ ，则因为  $\rho = 2 \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ ，

$\frac{d\rho}{dz} = \sec^2 \frac{z}{2}$ ，代入 (14) 式可得： $P - 1 = \sec^4 \frac{z}{2} \left( 1 - C \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \cdot K \right) - 1$ ，

$$P_{m_1} = \sec^4 \frac{z_\pi}{z} (1 - KC) ;$$

$$P_{m_2} = \sec^4 \frac{z_2}{z} \left( 1 + KC \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right)^q \right) , \text{ 所以有:}$$

$$-\sec^4 \frac{z_\pi}{2} + \sec^4 \frac{z_2}{2} + \sec^4 \frac{z_2}{2} \cdot KC \cdot \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right)^q + \sec^4 \frac{z_\pi}{2} K \cdot C = 0 ;$$

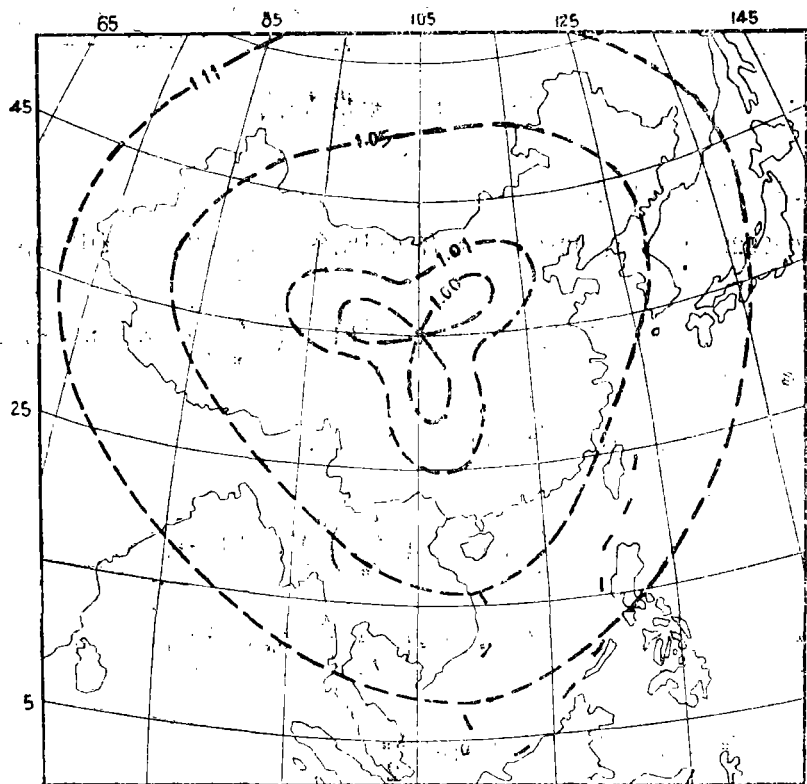
$$q = \ln \left[ \frac{\left( \sec^4 \frac{z_\pi}{2} - \sec^4 \frac{z_2}{2} \right) - KC \sec^4 \frac{z_\pi}{2}}{K \cdot C \cdot \sec^4 \frac{z_2}{2}} \right] \cdot \ln \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right) \quad (39)$$

代入  $C_1$  无解, 代入  $C_2$  得  $q = -3.04565$ , 不合题意, 同上部分一样, 取  $q = 0$ 。具体各部分变形如表六、图七。

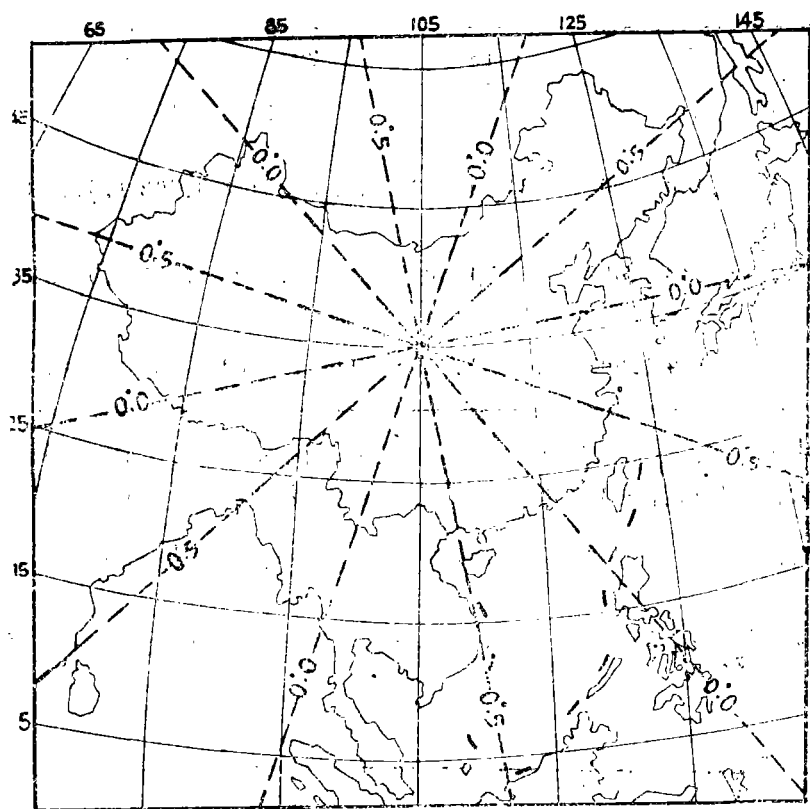
表 六

Z \ A	0		7		13		20		26		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0.500	1	0.500	0.9987	0.500	1.0172	0.500	1.0539	0.500	1.0998	0.500	1.1184
$\pm \frac{\pi}{2K}$	0.000	1	0.000	1.0075	0.000	1.0261	0.000	1.0631	0.000	1.1094	0.000	1.1282
$\frac{\pi}{K}$	0.495	1	0.495	1.0163	0.495	1.0350	0.495	1.0723	0.495	1.1190	0.495	1.1380

从表图可看出, 在全国范围内, 角度变形皆小于  $0.5^\circ$ , 面积变形不超过 11%。面积变形比等角方位投影略好。同样的方法可确定最大角度变形为任意值的伪方位投影, 它具有面积变形线与边界形状吻合或面积变形具最佳分布之特征 (走向相同)。



图七 面积变形线略图



图七 角度变形线形状略图

### 3、 $\rho$ 形式为 $Z$ 的伪方位投影方案的确定

① 指定最小面积比方向上最大天顶距处面积比  $P_{m1}$ ，并令区域凸、凹处面积比相等：

$$P = z, \rho' = 1, P = \frac{z}{\sin z} \left( -KC \left( \frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos KA \right)$$

$$P_{m1} = z_\pi / \sin z_\pi (1 - KC), P_{m2} = z_2 / \sin z_2 \left( 1 + KC \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right)^q \right)$$

若指定  $P_{m1} = 1.010$ ，则

$$C = 1/K - P_{m1} \sin z_\pi / z_\pi \cdot K = 0.009908 \quad (40)$$

若  $P_{m1} = P_{m2}$ ，则

$$\frac{z_\pi}{\sin z_\pi} - \frac{z_\pi}{\sin z_\pi} KC = \frac{z_2}{\sin z_2} + K \cdot C \frac{z_2}{\sin z_2} \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right)^q \quad \text{所以:}$$

$$q = 1.1 \left[ \left( \frac{z_\pi}{\sin z_\pi} - \frac{z_\pi}{\sin z_\pi} \cdot K \cdot C - \frac{z_2}{\sin z_2} \right) / \left( K \cdot C \cdot \frac{z_2}{\sin z_2} \right) \right] / 1.1 \left( \frac{z_2}{z_\pi} \right) \quad (41)$$

代入  $C$ ，可得  $q = 4.02352$ ，各部分变形及变形线略图见表七、图八

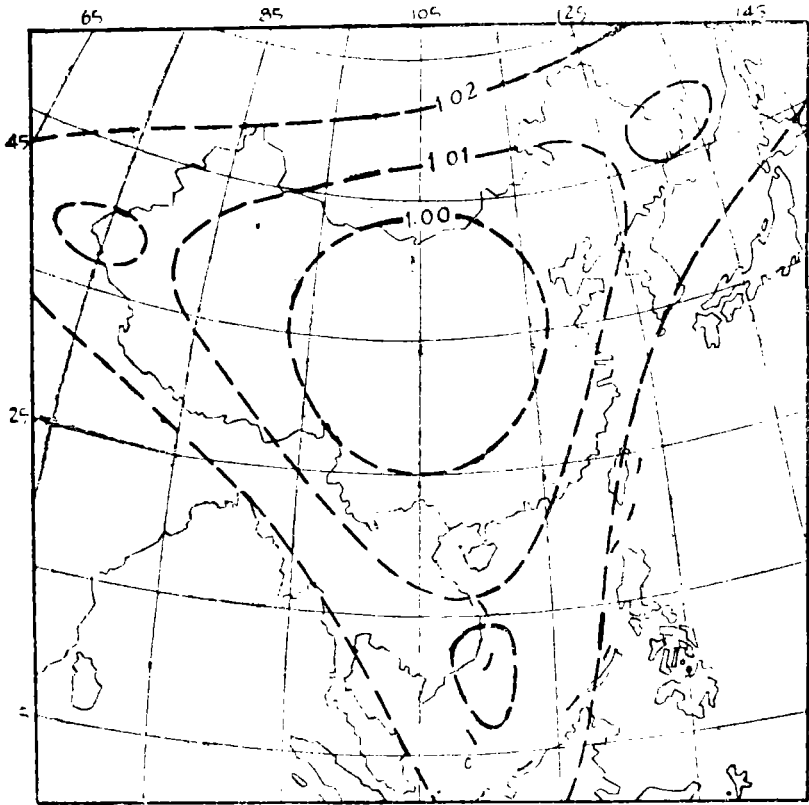


表 七

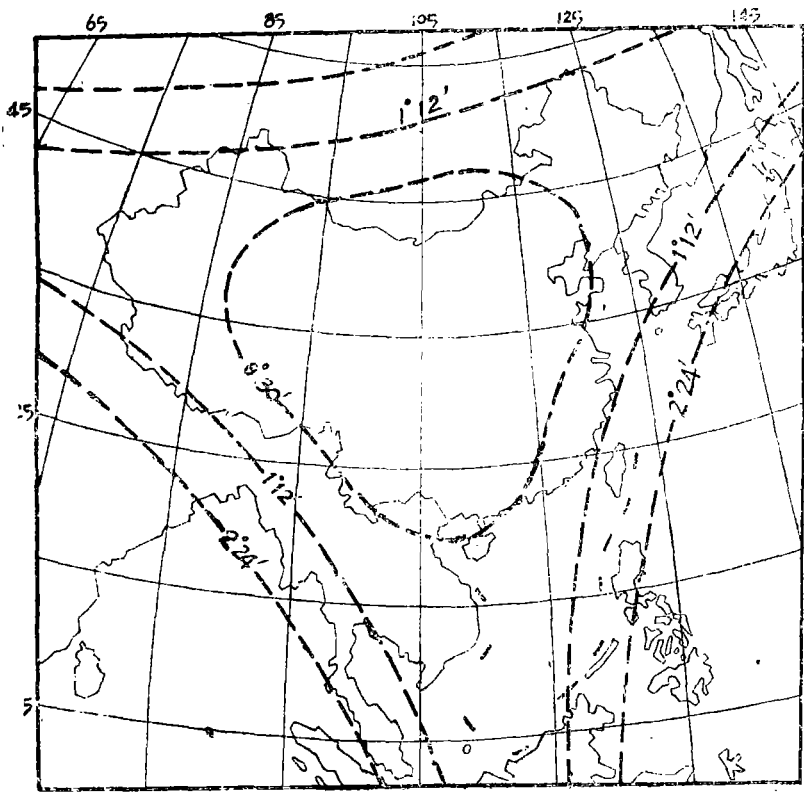
A \ Z	0		7		13		20		26		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0	1	0.136	1.0024	0.414	1.0073	0.726	1.0128	0.702	1.0123	0.570	1.0100
$\pm \frac{\pi}{2k}$	0	1	0.143	1.0025	0.503	1.0086	1.306	1.0206	2.587	1.0352	3.208	1.041
$\frac{\pi}{k}$	0	1	0.149	1.0026	0.570	1.010	1.606	1.0284	3.230	1.0581	3.996	1.072

从表及图中可以看到变形是良好的。在我国幅员范围内，面积变形除极少部分超过1.25%外，绝大部分地区都在1.25%以下，且角度变形都小于1°.3。

当然我们可以利用  $A = \pm \frac{\pi}{2k}$  上最大天顶距  $Z_3$  点，其面积变形同方位投影并不受  $c、q$  影响，令  $P_{m1} = \frac{Z_{\pi}}{\sin z_{\pi}} (-CK) = \frac{Z_3}{\sin z_3}$ ，再令  $P_{m1} = P_{m2}$  可得面积变形及分布更令人满意的



图八 面积变形略图



图八 角度变形略图

投影。如果， $z_3 = 18^\circ$ ，则  $z_3/\sin z_3 = 1.0166 = P_{m1}$ ，与前述方法相同可解得：

$c = 0.007795$  ,       $q = 1.4143$

表八列出了角度和面积变形数值。

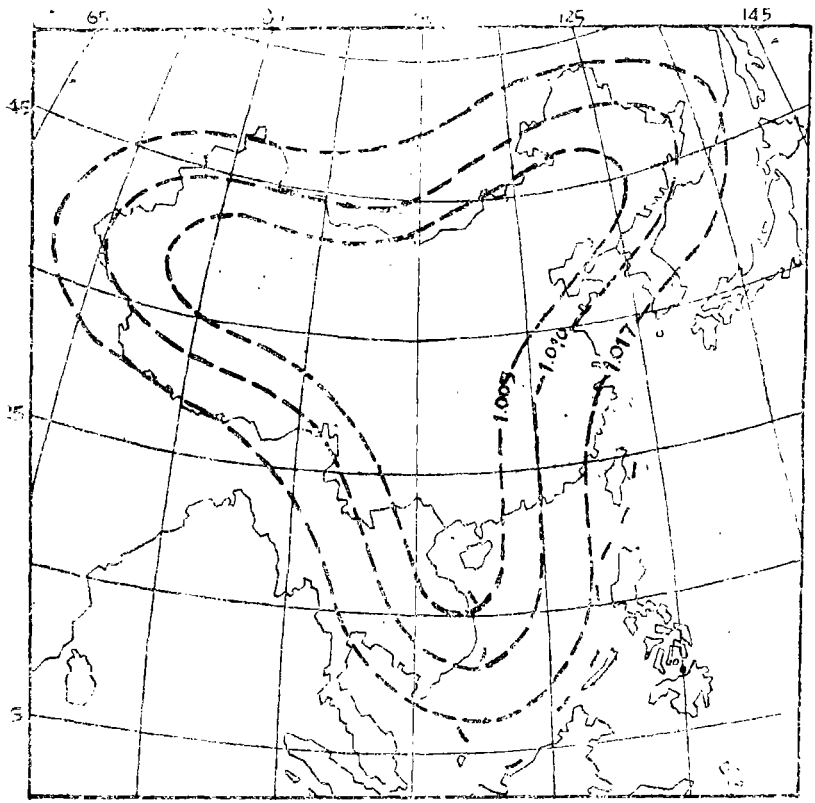
表 八

Z A	0		7		13		18		26		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0	1	0.046	0.999	0.038	1.0007	0.224	1.0039	0.761	1.0134	0.943	1.0166
$\pm \frac{\pi}{6}$	0	1	0.168	1.0025	0.536	1.0086	1.003	1.0166	2.057	1.0352	2.381	1.0410
$\frac{\pi}{3}$	0	1	0.311	1.005	0.943	1.0165	1.658	1.0293	3.174	1.0568	3.623	1.0654

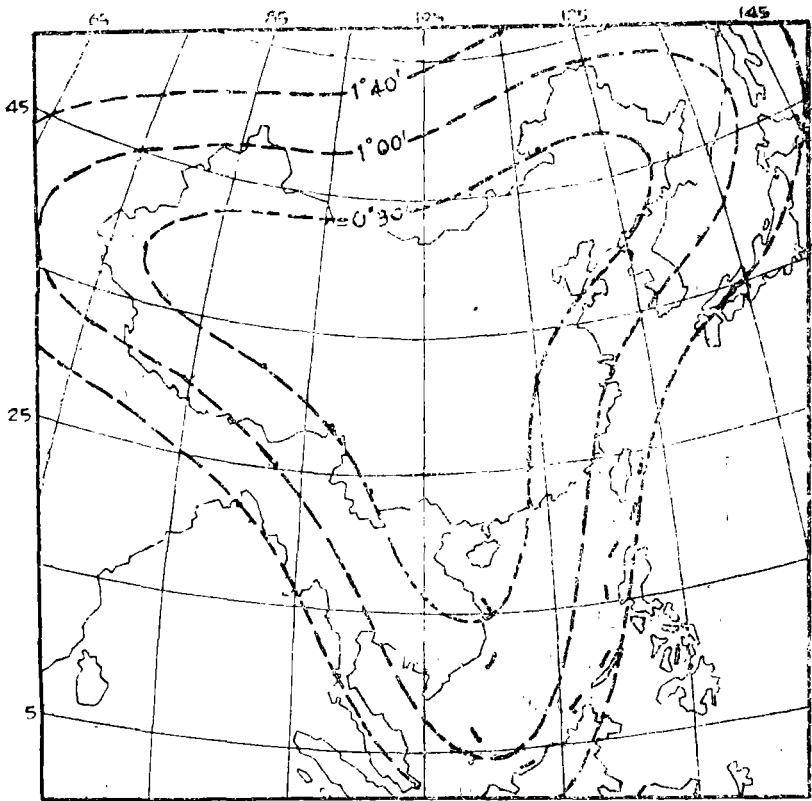
从表八及图九中，可以见到变形是良好的，它把我国全部幅员都包括在面积变形不超过 1.7% 及角度变形不超过  $1^{\circ}00'10''$  的范围内。用同样的方法可得到这种变形线在凹凸中间得到控制的投影，粗略地讲，它是符合  $\rho = Z$  的情况下最佳伪方位投影条件的。本方法我们称之为“三点法”。

② 指定最小角度变形方向上最大天顶距处的角度变形  $W_1$ ，并令区域凸、凹处面积比相等。

令  $W_1 = 1^{\circ}$ ，



图九 面积变形略图



图九 角度变形略图

可得其变形略表:

$c=0.007472$  ,  $q=1.20425$  表 九

A \ Z	0		13		20		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0	1	0.0196	0.9997	0.305	1.0053	1.000	1.0176
$\frac{\pi}{6}$	0	1	0.533	1.0086	1.217	1.0206	2.354	1.0409
$\frac{\pi}{3}$	0	1	1.000	1.0176	2.018	1.0359	3.569	1.0642

4、指令若干点面积变形确定  $\rho$ ，并根据面积比或角度变形条件确定  $\delta$  的伪方位投影

以上三种  $\rho$  形式的伪方位投影各有优点，但面积比被限制在  $\frac{Z_3}{\sin Z_3}$  的界限上，无论怎样确定  $c, q$ ，这一点是无法改变的，它仅受  $\rho$  形式的控制。为了充分发挥伪方位任意投影的长处，必须考虑  $\rho$  形式的选择。方位投影的图解解析法为这种方法提供了良好的基础。参阅文献 [4]。

$$\text{设 } R=1 \quad \rho = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, \quad \frac{d\rho}{dz} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^{i-1}$$

$$\text{则方位投影面积比 } P = \frac{\rho \cdot \frac{d\rho}{dz} \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right) \left( \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i z^{i-1} \right)}{R^2 \sin z} = \frac{\sin z}{\sin z}$$

故有

$$p_j \sin z_j = b_1 z_j^1 + b_2 z_j^2 + b_3 z_j^3 + \dots \quad (j \text{ 为指定点}) \quad (42)$$

若有  $K$  个方程, 只要它们不线性相关, 可唯一确定  $b_1 \dots b_k$  系数。其中  $b_1^{\frac{1}{2}} = a_1$ ,  $b_2/3a_1 = a_2$ ,  $(b_3 - 2a_2^2)/4a_1 = a_3 \dots$  解求出  $\rho$ 。

, 设  $Z=1^\circ$   $P=0.99$ ;  $Z=14^\circ$   $P=1.00$ ;

$Z=20^\circ$   $P=1.010$ ; 根据 (47) 式可列出方程组

$$\begin{cases} 0.01728 = 0.01745b_1 + 0.000305b_2 + 0.000005b_3 \\ 0.241922 = 0.244346b_1 + 0.0059705b_2 + 0.014589b_3 \\ 0.34544 = 0.349066b_1 + 0.121847b_2 + 0.042533b_3 \end{cases}$$

其系数行列式  $D=0.000011721$  解得  $b_1=0.990245$ ,

$$b_2=0.00211993, \quad b_3=0.011093707$$

可以  $a_1=0.99511$ ,  $a_2=0.000710115$ ,  $a_3=-0.002787307$

故得:  $P=0.99511z+0.00071z^2-0.002787z^3$

$$P'=0.99511+0.00142z-0.008361z^2$$

这样得到下列表十。

表 十

项目 \ Z	0	7	13	20	26	28
$\rho$	0	0.121581136	0.225787	0.347327	0.451452	0.486147
$\rho'$	0.9902	0.995158687	0.99500	0.994587	0.994033	0.993807
$\sin Z$	0	0.121869	0.224951	0.342020	0.438371	0.469472
P	0.9902	0.9928	0.9987	1.0100	1.023695	1.029106

可见其  $P$  是符合所要求的, 也即用上述  $\rho$  在伪方位投影中  $\frac{\pi}{2k}$  方向上的面积变形如表所示; 故我们只需令  $P_{m1}=1.010$ , 可用  $\rho=z$  的同样方式确定  $\delta$  形式:

$$C = \frac{1}{k} - \frac{p_{m1} \sin z_{\pi}}{k \rho_{\pi} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{\pi}} = 0.006189$$

$$q = 1_{\pi} \left[ \left( \frac{\rho_{\pi} \left( \frac{d\rho}{dz} \right)_{\pi}}{\sin z_{\pi}} - KC \frac{\rho'_{\pi} \cdot \rho_{\pi}}{\sin z_{\pi}} - \frac{\rho'_2 \cdot \rho_2}{\sin z_2} \right) \left( K \cdot C \cdot \frac{\rho_2 \cdot \rho'_2}{\sin z_2} \right) \right] 1_{\pi} \left( \frac{z_2}{z_{\pi}} \right) = 0.64565$$

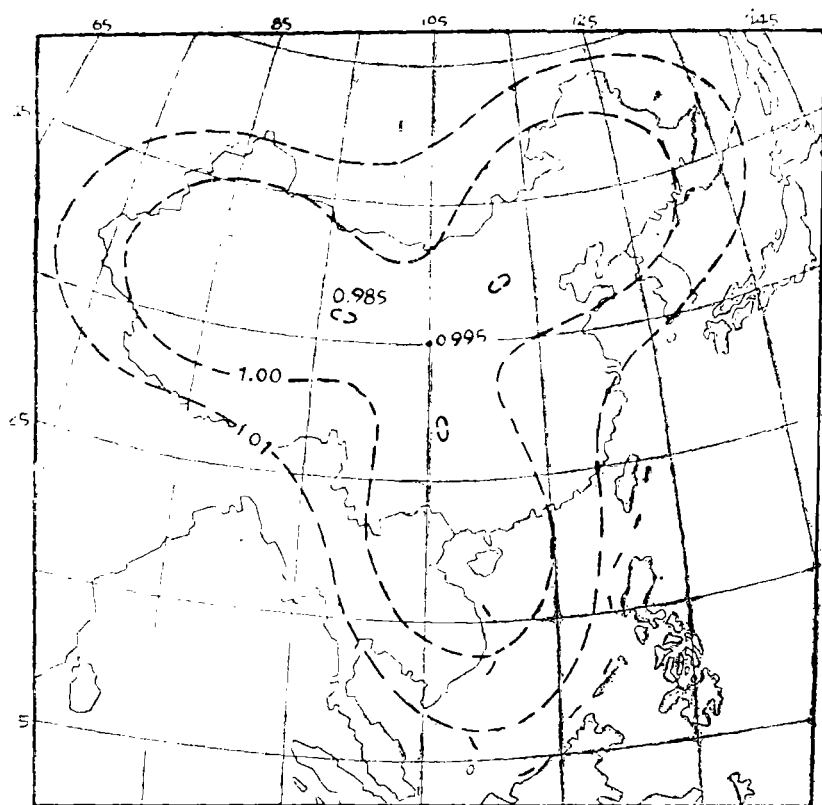
变形如表十一

$$c = 0.006189 \quad q = 0.64565$$

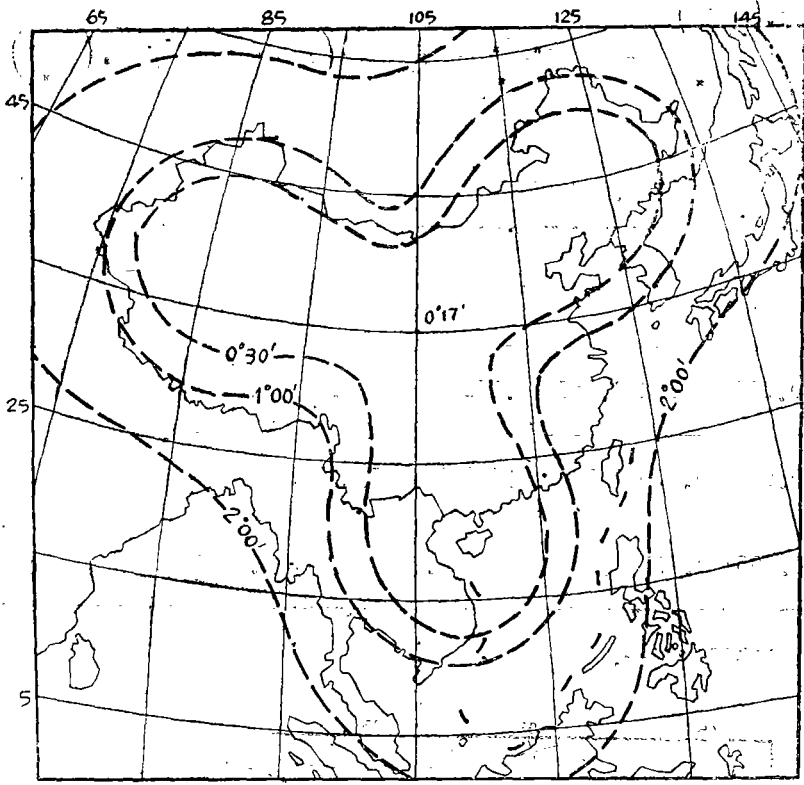
表十一

Z A	0		7		13		20		26		28	
	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P	W	P
0	0.281	0.9951	0.294	0.9853	0.152	0.9874	0.331	0.9949	1.004	1.0056	1.282	1.010
$\frac{\pi}{6}$	0.281	0.9951	0.170	0.9928	0.519	0.9987	1.207	1.0100	2.039	1.0237	2.366	1.0291
$\frac{\pi}{3}$	0.281	0.9951	0.575	1.0003	1.144	1.0100	2.043	1.0151	3.033	1.0418	3.409	1.0482

其等变形线略图如图十，



图十 面积变形略图



图十 角度变形略图

从表及图中可看出,除极小部分面积变形达到 1.5% 外,绝大部分区域面积变形都  $< 1\%$ , 并且角度变形不超过  $1^{\circ}18'$ 。变形 1% 的面积等变形线围绕边界,所以这个投影是良好的。这样,方位投影的图解解析法为伪方位投影的选择提供了相当灵活而又有效的手段。

#### 四、伪方位投影方案确定步骤和结论

综上所述,伪方位投影方案的确定步骤和原则如下:

1、按制图区形状的突出方向数,确定制图区轴经线条数  $K$ 。

2、确定投影中心之  $\varphi_0, \lambda_0$ 。投影中心需满足二条件:至各突出点距离相等,方向分布均匀。若角度和距离两若不能同时满足、首先满足各突出点对中心所张角大致相等的角度条件。

此外为计算  $z, a$  方便,尽可能使  $\varphi_0, \lambda_0$  取整度数。

3、 $A$  形式确定。以前我们假定某突出方向的  $A_0 = 0$  若突出方向  $A_0 = 17^{\circ}$ , 则为使突出方向成为驻值方向  $\Delta = -A_0 + a = -17^{\circ} + a$ , ( $a$  为象点实际方位角)。这样我们就得到了

$$\delta = a - c \left( \frac{z}{z_s} \right)^q \sin(-A_0 + a) \text{ 形式。}$$

4、 $\rho$  形式选择。这决定所编图变形要求。如要求面积变形较小,可选择  $\rho = 2R \sin \frac{z}{2}$ ,

这可使面积变形控制到任意精度,并尽量减少角度误差。同样,如对角度要求较高,可采用

$\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$  形式。若对角度和面积都有一定要求, 采用  $\rho = RZ$  形式。用文中方法和公式可处理界于这三者之中、各处的各种具高阶解析式的  $\rho$  形式, 也可指定变形, 解求有限多项式或分段连续多项式的  $\rho$ 。

5、根据指定突出方向的最大天顶距上的面积比或角度变形值解求  $C$ 。

6、根据两驻值方向面积或角度变形值相等, 或者面积或角度变形值解求  $q$ 。

7、复算各突出点及凹进点、及边界上几个重要点之面积比及角度变形, 以确定变形概况并判断其良好与否。

8、可对  $c \cdot q$  进行必要和适当的凑整, 再详细进行具体的投影计算, 以使计算方便。一般来讲, 尤其对  $q$  小改变, 灵敏度是不太高的。

对于角度和面积都有明确要求的任意投影我们建议采用三点计算方案。

## 结 论

伪方位投影对于任意投影而言是比较良好的。采用本文方法, 可确定一个对制图区角度和面积变形都有适当控制的、令人满意的投影方案。

## 参 考 文 献

- [1] 全兹布尔格著: 具有椭圆形和卵形等变形线的地图投影
- [2] 李国藻、刘家豪: 伪方位投影及其对中国全图的应用 测绘学报第2期 1963年
- [3] 胡毓巨: 关于伪方位投影中向径  $\rho$  的函数形式和变形关系的一点笔记 武测资料
- [4] 胡毓巨: 论探求方位投影的图解解析法 测绘学报, 5卷2期, 1962年

## An Analysis on the Pseudo-Azimuthal Projection

Hu Peng

### Abstract

The pseudo-azimuthal projection has a closed isoline of deformation. It is suitable for regional maps usually put forward certain requirements in both areal and angular deformations. In this paper, through analyzing the forms of  $\rho$  and  $\delta$ , and the functions of different parameters, following points have been discussed:

1, The influence of the forms of  $\rho$  and  $\delta$  and the value of parameters upon the size and distribution of deformations, and the interrelations between them.

2, The principles of defining the forms of  $\rho$  and  $\delta$  and of selecting parameters when designing a pseudo-azimuthal projection.

3, The approach to design a good pseudo-azimuthal projection in accordance with the predetermined values.

Lastly, based on different viewpoints, four pseudo-azimuthal projection schemes for the whole chinese territory have been suggested.