

伪方位投影及其对中国全图的应用

刘家豪 李国藻

提 要

本文从按制图区域的形状选择投影的原则出发,在研究中国疆界形状的基础上,提出投影中某种变形的方程式具有 $\rho = a + \frac{a}{k} \cos 3\varphi$ 时,该投影则可认为是中国区域的较理想的投影。随后,作者进一步研究了伪方位投影;讨论了伪方位投影向径 ρ 的确定;分析了此投影中各参数的意义,并提出了科学的确定这些参数的方法。此后,为中国全图拟定了一套投影方案,这是一种近似等距离的伪方位投影,其面积变形和最大角度变形的等变形线的形状,几乎完全一致,并与中国区域之形状大致一致,从而减小了中国区域内的各种变形。文章中,将所拟定的投影与等距离方位投影和等距离圆锥投影作了简单的比较,证明在面积变形和角度变形方面都有很大的改善。考虑到伪方位投影在应用上还存在着一定的局限性,因此又进一步研究了组合伪方位投影,提出了进行组合的四条原则,作为应用组合伪方位投影的基础。作者并根据中国疆域形状的特点,为中国全图拟定了一套组合伪方位投影的方案。这也是采用近似等距离的伪方位投影。其投影变形具有前一方案的优点,并在许多地方有所改善。作者最后指出,伪方位投影具有很大的灵活性,经过本文进一步完善后,更扩大了其应用前景。

一、前 言

地图投影这一门学科的发展,到了廿世纪的四十年代,已进入到一个新的阶段。打破了一定要由投影公式来计算坐标的常规,而可以根据预先给定的变形分布,构成新的地图投影。根据变形分布探求投影的基本原则之一,是使投影的等变形线与制图区域的轮廓形状一致。当然,这同样也是选择投影的一般原则。满足于这样的原则的投影,公认为是该区域最适宜的投影。

中华人民共和国地图集和区域地图集的编制,进一步推动了我国地图投影理论的研究。并且,对我国不同地区,不同类型的地图,拟定了一系列的投影方案。在选择投影及拟定投影方案时,都尽量考虑到了区域形状特点。对于中国全图,也提出了不少投影方案。这许多方案归纳起来,不外乎两大类投影,即方位投影和圆锥投影。当然,在适当地确定其投影常数后,都可以使所确定之投影方案,在某些方面,能得到比较令人满意的结果,这正是这些方案各自的成功之处。但是,如果我们从根本问题上来考查,即从这两类投影的等变形线的形状来看,就会发现这两类投影,无论如何,也不能使其等变形线与中国区域之轮廓形状一致。因为正圆锥投影的等变形线为平行于纬线的圆弧,而方位投影的等变形线为圆。这些都是投影本身所固有的特点,无论怎样来选择常数,也不能改变这种形状。但是我们知道,中国区域的形状(包括南中国海在内),大致是三个方向凸出,三

个方向凹进的不規則的形状。它既不是沿緯綫成带状分布,也不呈圓形。因而,就按区域形状选择投影的原則来衡量,上述两类投影都不可能得到很好的滿足。

如果我們对中国区域的輪廓形状,加以深入地分析研究,就会发现,它可以用一种数学曲綫表示出来。

我們知道,在极坐标中,三叶玫瑰綫的方程为:

$$\rho = a \cos 3\varphi. \quad (1)$$

其形象如图 1。

在此基础上,如果将曲綫方程式加以适当的变化,就会出现我們所希望的形状。例如,将曲綫方程变为:

$$\rho = a + \frac{a}{K} \cos 3\varphi. \quad (2)$$

当給定 $K = 3$ 时,則 $\rho = a + \frac{a}{3} \cos 3\varphi$ 所代表的曲綫的形状如图 2 所示。

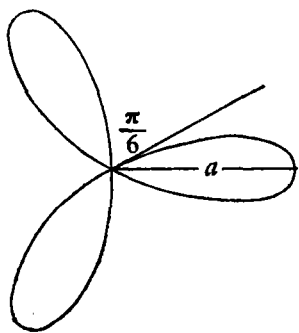


图 1

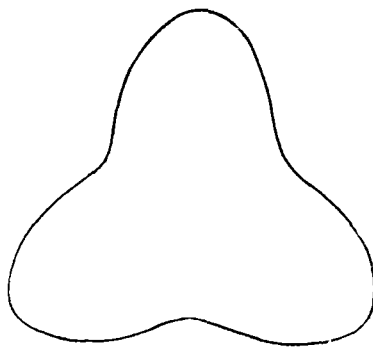


图 2

研究这些曲綫給我們提供了一个很有意义的方向,那就是如果我們能使得某种投影的变形的方程式,具有(2)式的形式时,則其等变形綫必有图 2 所示之形状。因此,就能使等变形綫形状最大限度地接近于中国区域的輪廓形状,从而也就求得了适于中国区域形状特点的中国全图的投影。

有了上述方向以后,要具体地构成具有这种形状的等变形綫的投影,大致有以下两种途径。一种是根据已有的变形公式,反求投影公式,或根据此变形公式,給定了制图区域的变形之后,以数值方法,直接确定各制图网交点的坐标,而不求投影方程式。可以說,这条道路是比较艰难的,甚至会遇到难以克服的困难。另一种途径是,分析現有的各种投影,能否通过某种变化,将其某种变形的方程化为与(2)式所表达的形式相同。如果这条道路能行得通,相对于前一途径而言,就可以說是一条捷径。实际研究証明,这条道路是可以走得通的,能够得到理想的结果。从分析現有的各种投影中发现,廿世紀五十年代才出現的、現在还不很完善阶段的伪方位投影,具有很大的灵活性,适当地确定它的常数,可以得到我們所希望的结果。因此,本文的中心就是在討論伪方位投影的基础上,提出适合于我国区域的投影方案。

二、伪方位投影

鉴于这种投影过去在我国是很少采用的, 因此, 在这里对这种投影作一简单介绍, 并对其中某些问题作进一步的讨论, 这是有必要的。

现用的伪方位投影的公式, 是苏联制图学家 Г. А. 金兹布尔格 (Гинзбург) 在文献 [1] 中提出的。如果单就等变形线形状而论, 在更早的时期就已出现了具有椭圆形和卵形等变形线的投影^[2], 不过那时是由等面积方位投影, 通过仿射变换而求得的, 没有象 Г. А. 金兹布尔格所提出的能够通用的一般公式。

Г. А. 金兹布尔格在文献 [1] 中, 以方位投影为出发点, 用概念上的分析和归纳的方法, 给出了这种投影的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta, \\ y &= \rho \sin \delta, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\rho = f_1(z), \quad (4)$$

$$\delta = a - c \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \sin ka, \quad (5)$$

其中 c, q, k, z_π 都是投影参数。其 ρ 的形式可以根据具体情况, 选择 $\rho = KR \sin \frac{z}{K}$,

$\rho = Rz$, $\rho = KR \operatorname{tg} \frac{z}{K}$ 中的一种即可。

很显然, 这里所列的一般公式与我们常见的其他投影的一般公式的获得方法根本不同, 即既没有规定制图网的形状, 又未给出一定的投影条件, 可以认为这些公式都是经验公式。

把这种投影的一般公式代入地图投影变形的一般公式, 就不难求得伪方位投影变形的一般公式, 令 $R = 1$ (以后的比例尺和变形公式均如此), 有

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &= \frac{d\rho}{dz}, \\ \mu_1 &= \mu_0 \sec \varepsilon = \sqrt{E} = \sqrt{\rho^2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{d\rho}{dz} \right)^2}, \\ \mu_2 &= \sqrt{G} \operatorname{cosec} z = \rho \frac{\partial \delta}{\partial a} \operatorname{cosec} z, \\ p &= \mu_0 \mu_2, \\ |\operatorname{tg} \varepsilon| &= \frac{F}{H} = \frac{\rho \frac{\partial \delta}{\partial z}}{\frac{d\rho}{dz}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

在 Г. А. 金兹布尔格的文章里, 认为把这种投影叫做伪方位投影是不恰当的, 所以, 他把这种投影叫做具有椭圆形和卵形等变形线的地图投影。我们觉得这样的名称反而更不恰当, 因为就名称上来看, 只有等变形线为椭圆形或卵形的投影, 才属于这种投影。而

等变形綫为其他形状时，即使是由这种投影直接推导出来的，也不能包括在这种投影里面。因此，这样的命名，限制了这种投影的运用和发展，所以，我們认为用伪方位投影命名，还是比较恰当的。

对于这类投影，后来在 A. B. 格拉烏尔(Γpayp)的数学制图学中^[3]，才给出明确的定义，即“这类投影的緯綫描写成封閉的同心圓，而經綫描写成对称于直的軸經綫的某种曲綫”。

这种投影能不能构成单独的一个投影类，现在还没有得到制图界的公認。目前，仅在1956年出版的格拉烏尔的“数学制图学”和北京測繪学院吳忠性教授所編的“数学制图学”上，列为独立的投影类。这所以还不能得到制图界的公認，一方面是由于这种投影才出現不久，还不很完善；另一方面，这种投影本身只存在着任意投影。由于經緯綫不正交，而不存在等角投影，因两条緯綫(在正投影的情况下)間的間隔相等，經綫間的間隔不等，而沒有等面积性質的投影，因而，不能象現有的投影类一样，根据某种投影条件求得投影。这样就不得不根据經驗来給定公式中的一些参数，再从計算中来逐步檢驗，这就显得有些繁瑣。而且这种投影还不易为某些制图人員乐于采用的原因，也正是这种投影还不完全成熟的表现。为了进一步完善这种投影，有必要进行深入的研究，以便找出便于理解和使用这种投影的規律来。

首先应该討論一下函数 ρ 的形式。如以上所叙， ρ 可以采用 $\rho = KR \sin \frac{z}{K}$ ， $\rho = Rz$ ， $\rho = KR \operatorname{tg} \frac{z}{K}$ 中的一种。在文献[1]中指出，在其他条件相同的情况下， $\rho = 2R \sin \frac{z}{2}$ 的面积变形为最小； $\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ 的角度变形为最小； $\rho = Rz$ 的变形界于两者之間。应该认为，当决定伪方位投影的常数时，使其极近似于方位投影，这种規律是存在的。但是，在选择 ρ 的时候，还应考虑到伪方位投影只有任意投影，而无等角及等面积性質的投影。因此，在投影的某些部分，采用 $\rho = 2R \sin \frac{z}{2}$ 时，会出现其面积变形比 $\rho = Rz$ 的面积变形大；采用 $\rho = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2}$ 时，会出现其角度变形比采用 $\rho = Rz$ 时大的情况。所以說，在一般的情况下，应选 $\rho = Rz$ ，这样可以使各种变形都比较均衡，投影計算也比较简单，而且各种等变形綫都几乎具有相同的形状。这些特点，对于我们应用投影都是十分有利的。在伪方位投影中， $\rho = Rz$ 是一种近似等距离的投影¹⁾。当然按具体情况也可以采用其他形式的 ρ 。

下面，再对 $\delta = a - c \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \sin ka$ 作进一步地討論。

金茲布尔格在文献[1]中，对 δ 表达式內的参数的作用已经作了一些說明。大意是： z_π 为描写区域的最大的天頂距； q 主要是影响制图网的垂直圈的弯曲程度，当 q 大的时候，在中心点附近就愈接近方位投影，在边界上的弯曲愈強烈， k 的值一般应取正整数，它决定直的軸經綫的条数。对 c 的意义，未作說明。

所有上述說明，无疑是正确的，但是还不很完善，因为没有指出确定常数的方法，这就使得在应用时，要经过反复試驗、摸索，而不能充分掌握和运用这种投影本身所存在的內

1) 在伪方位投影中，垂直圈和等高圈不正交，故 μ_1, μ_2 不是极值比例尺，而且在这种投影里 μ_1 也是近似地等于1。

在規律。

我們知道,在拟定投影方案时,都要使用一些条件,来求得自己所希望的投影。象等角条件、等面积条件、等距离条件、以及某一緯綫不变形、中緯和边緯变形相等、长度均方变形为最小等許許多多的条件。而这些条件应用于伪方位投影都有一定的困难。但是伪方位投影可以运用一个很理想的条件,那就是等变形綫与制图区域形状一致的条件。

在伪方位投影中,可以視制图区域大小、形状之不同而有規律的确定自己的投影常数。

制图区域的大小,决定了参数 z_π 的大小,一般地說, z_π 为制图区域的最大极距。在計算过程中,要将其化为弧度值。

制图区域的形状决定参数 k, q 和 c 的选择。

首先可以討論一下 k 的选择。若制图区域为卵形或椭圆形,則 k 可选为 1 或 2;若制图区域为三角形、或是三方向凸出,三方向凹入者,可将 k 选为 3;若制图区域之形状为方形,或四个方向突出、四个方向凹入者,可将 k 选为 4;依此类推。

至于談到参数 q 和 c ,那就不是大致分析一下就可决定的,为了使等变形綫与区域之輪廓形状一致,必須通过計算来决定 q 和 c ,特别是 c 。如果說,欲使投影面积等变形綫与制图区域之輪廓形状一致,則可使輪廓的凸出方向的最远点和凹入方向上的最近点的面积变形值相等(这两点的极距 z 和方位角 α 都是已知的),列一方程式。另外可給定凸出方向上的最远点(或凹入方向上的最近点)的面积变形为某一恰当的值,又可列一方程。将此二方程联立求解,即可求得精确的、符合我們要求的 c 和 q 值。在实用上,常常感到这样所确定的 q 值不为整数,使用很不方便,因此可以預先給定 q 为某个整数值。在这时,只需令凸出方向的最远点,和凹入方向的最近点之面积变形相等,列一方程即可解出 c 值。实践証明,这样并不影响等变形綫与制图区域的輪廓形状的一致。不过在給定 q 值的时候,要考虑到 q 越大时,最外边界上的角度变形将会增大。

为了避免不必要的重复,这里对于常数的确定就不再作更詳細的討論了。因为在研究伪方位投影对中国区域全图的应用时,还有作具体的說明。

三、伪方位投影对中国全图的应用

我們知道,中国疆域的外輪廓綫,在新疆西藏方向、东北方向和南中国海方向为三个向外突出的方向;中蒙边界中部、渤海、黄海方向和中緬印三国交界处,为三个凹进的方向。并且可以大致认为三个突出的方向間的夹角是相同的,即 120° ,三个凹入的方向也是这样。

首先,为了使各种变形都不大, ρ 的形式选定为 $\rho = Rz$,也就是选择一种近似等距离的伪方位投影,作为中国全图的投影。

对于等距离伪方位投影,其一般的坐标公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta, \\ y &= \rho \sin \delta, \\ \rho &= Rz, \\ \delta &= a - c \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \sin ka. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

因此有：

$$\begin{aligned} d\rho &= R dz, \\ \frac{\partial \delta}{\partial a} &= 1 - kc \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos ka. \end{aligned}$$

代入(6)式,则得等距离伪方位投影变形的一般公式为:

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 &= \sec \varepsilon, \\ \mu_2 &= \frac{z}{\sin z} \left(1 - kc \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \cos ka \right), \\ p &= \mu_2, \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\rho \cdot \frac{\partial \delta}{\partial z}}{\frac{d\rho}{dz}}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

我们看到,公式中 p 的形式,与(2)相似,由此可以确信,所选的投影,其面积等变形线将具有图 2 所示的形状。

根据前面的分析,不难求得 δ 表达式内的各种参数。

先以东北方向为依据,当中心点为 $\lambda_0 = 105^\circ$ 、 $\varphi_0 = 35^\circ$ 时,则 $z_\pi = 26^\circ$ 。

又根据 k 值确定的原理,对于中国全图,应该选定 $k = 3$, 并为使边缘角度变形不至过大,我们选定 $q = 1$ 。剩下的问题,就是确定 c 的值。我们已经知道两突出方向之间夹角为 120° , 一个凹入方向与邻近的一个突出方向的夹角为 60° , 即可假定凹入方向之 $a = 0^\circ$, 凸出方向之 $a = 60^\circ$, 又突出方向最远点的极距选为 26° , 凹入方向的最近点平均选为 14° 。这时, 如令区域轮廓凸出方向之最近点与凹入方向之最近点的面积变形相等, 则由(8)式,而得:

$$\frac{14^\circ}{\sin 14^\circ} \left(1 - 3c \frac{14^\circ}{26^\circ} \cos 0^\circ \right) = \frac{26^\circ}{\sin 26^\circ} \left(1 - 3c \frac{26^\circ}{26^\circ} \cos 180^\circ \right)$$

所以

$$c = \frac{\frac{14^\circ}{\sin 14^\circ} - \frac{26^\circ}{\sin 26^\circ}}{3 \left(\frac{14^\circ}{\sin 26^\circ} \cdot \frac{14^\circ}{26^\circ} + \frac{26^\circ}{\sin 26^\circ} \right)} = -0.005308.$$

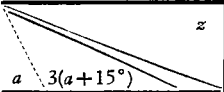
根据中国制图区域形状的特点,欲使等变形线与区域轮廓一致,在计算 δ 的时候,还必须将由球面坐标变换所求得之方向角,加上 15° , 也就是把方位角的起算方向反时针旋转 15° 。

因此,我们求得了适合中国区域的等距离伪方位投影的公式为:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \rho \cos \delta, \\
 y &= \rho \sin \delta, \\
 \rho &= Rz, \\
 \delta &= a + \frac{0.005308}{0.453786} \cdot z \cdot \sin 3(15^\circ + a), \\
 \mu_1 &= \sec \varepsilon, \\
 \mu_2 &= \frac{z}{\sin z} \left[1 + 3 \cdot \frac{0.005308}{0.453786} \cdot z \cdot \sin 3(15^\circ + a) \right], \\
 p &= \mu_2, \\
 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}, \\
 \operatorname{tgs} &= \frac{0.005308}{0.453786} \cdot z \cdot \sin 3(15^\circ + a).
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

此投影之变形列于表 1。

表 1

			0°	5°	10°	15°	20°	26°
0°	0°	p	0.9964	1.0007	1.0076	1.0171	1.0294	
		ω	0	16'	37'	1°11'	1°58'	
20°	60°	p	0.9964	0.9992	1.0045	1.0125	1.0231	
		ω	0	10'	29'	56'	1°32'	
40°	120°	p	0.9964	0.9961	0.9984	1.0032	1.0107	1.0232
		ω	0	0'	10'	26'	50'	1°33'
60°	180°	p	0.9964	0.9946	0.9953	0.9986	1.0045	1.0150
		ω	0	1'	4'	8'	28'	1°4'

说明：由于这种伪方位投影的变形，对称于凸出部分的最远点的方向线和凹进部分的最近点的方向线，因此，变形仅计算整个投影面的六分之一部分即可。

从等变形线图(如图 3 和图 4)上,可以很明显的看出,面积变形等变形线的形状与最大角度变形等变形线的形状,几乎完全相同,且等变形线的形状与中国疆界形状大致相似。就面积变形而论,变形为 1.5% 的等变形线,几乎包括了整个的中国区域(仅南中国海的最南端和台湾部分地区不在内),且中心点的变形仅为 -0.36%,在三个突出的方向线上,各有一点的变形达 -0.5%。就最大角度变形而论,变形为 1° 的等变形线,包括了上述面积变形为 1.5% 的整个区域、中心点的角度变形为零,在三个凸出方向各有一点的变形仅到 5' (在最大角度变形为零的等变形线内)。

与其他投影所作之中国区域图的变形比较,更能看出这种投影的优点。如等距离方位投影,中心点的变形达 -1%;边缘部分的变形达 2.2%;最大角度变形在边缘部分为 1.8°。又如等距离圆锥投影,其面积变形为 -1% 到 5%;最大角度变形可从 0.6° (在标准纬线以内)到 3°。由此可见,采用这种投影,大大的减小了中国区域的投影变形,从而,使整个中国区域,都能保证在中等量测精度要求的范围内。

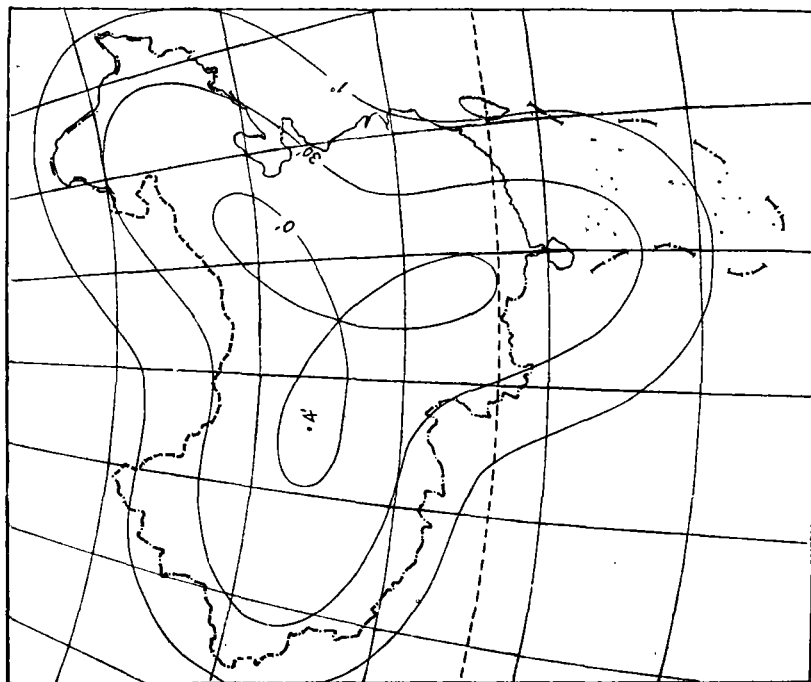


图 4 角度最大变形等变形线

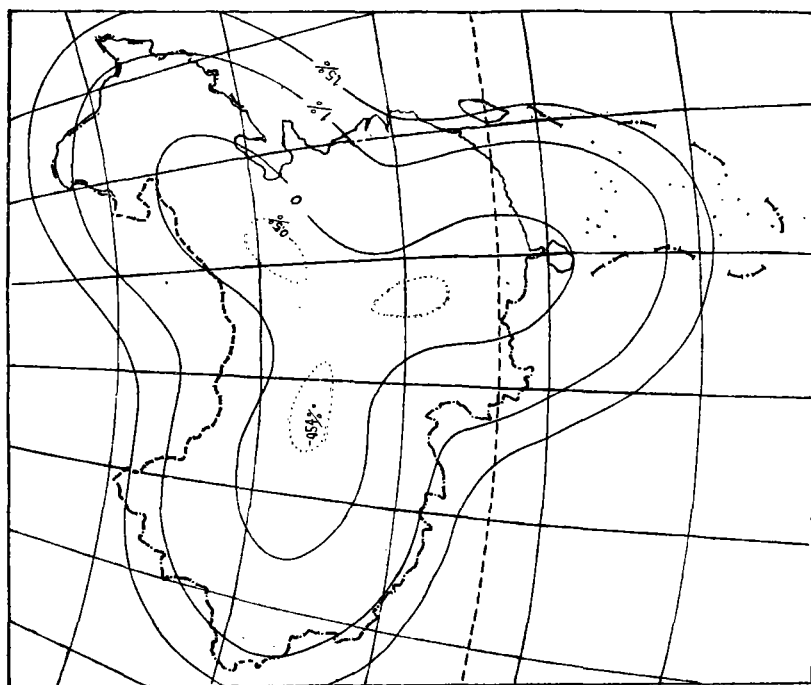


图 3 面积变形等变形线

四、組合偽方位投影及对中国全图的应用

如前所述,偽方位投影能够較好地适用于制图区域輪廓形状为卵形、橢圓形、三角形(或三方向凸出,三方向凹进的图形)、四角形(或四方凸出,四方凹进的图形)等,因此,偽方位投影具有很大的灵活性,有广闊的应用前景。但是,只能在这些图形为对称形时,应用这种投影才是比較滿意的,如果不对称,还是不够理想的。这就使我們想到以組合偽方位投影、来解决偽方位投影本身的这种不足。

这里簡略地說明一下組合偽方位投影的含意。我們已經知道,根据制图区域的輪廓图形的不同,而首先决定所用的偽方位投影应具有几条直的軸經綫,如三角形区域应使投影具有三条直的軸經綫,投影常数 $k=3$, 四角形区域应使投影具有四条直的軸經綫, $k=4$ 等, 投影公式本身决定了这些軸經綫之間的夹角是相等的。如 $k=3$ 时, 軸經綫之間的夹角为 120° , $k=4$ 时, 軸經綫之間的夹角为 90° 。所謂組合偽方位投影, 就是使整个制图网上, 軸經綫之間的夹角不等, 如图 5。这是为了使等变形綫的形状更好地与制图区域輪廓形状相一致。

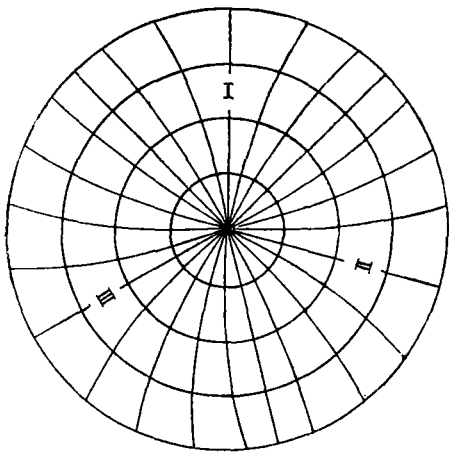


图 5 組合偽方位投影之制图网形状
I 为 $k=4$, II 为 $k=3$, III 为 $k=2.4$

組合偽方位投影进行組合的基本原則为:

1. 在整个投影面上(組合投影的各部分), 其向径 ρ 应采用相同的函数形式;
2. 应使各組合部分的交界綫为直綫, 即在交界綫上, 两部分投影均在該方向上, 經綫描写为直綫, 即在此直綫上 $\delta = a$;
3. 要使整个制图网的形状, 滿足于偽方位投影的定义: “緯綫描写成封閉的同心圓, 經綫描写成对称于直的軸經綫的某种曲綫”。在这里, 一个十分重要的問題就是要使整个制图网不产生裂隙。为此, 可以将 k 采用分数(这一点对于非組合偽方位投影而言是不容許的);

4. 各部分可根据各自的制图区域的輪廓形状

的特点, 根据偽方位投影常数确定的原理, 选定自己的常数。

有了上述基本原理, 对組成組合偽方位投影不会再有更多的疑惑和困难了。可能最使人不放心的, 仍是能否保証在两个投影的交綫上, 由两种投影所計算出来的坐标, 完全保証相等, 这一点, 由于有了前面的基本原則, 可以完全保証作到。这就說明, 整个制图网不会产生間断現象。虽然在两种投影的交界处, 有些变形值不相等, 可能会出现兩投影交界处, 制图网的图形的曲率略有变化, 但在制图区域不大时, 这种曲率的变化有时甚至不容易察觉出来。如果我們可以把兩投影的交界部分, 放在制图区域的凸出部分, 也就是在投影等变形綫的凸出部分, 更可以相对减小交界处的变形, 减小坐标的突然变化。

下面, 我們还是結合中国全图的投影选择, 談談組合偽方位投影的应用問題。

假如要更近似地分析中国疆域形状的三个凸出方向和凹入方向, 則應該认为其間之夹角是不相等的。新疆方向与东北方向之間, 其夹角約为 90° (以后簡称这二方向所夹之

区域为 I 部分); 东北方向与南中国海之間的方向, 夹角为 120° (以后简称这二方向所夹之区域为 II 部分); 南海方向与新疆方向之間, 夹角約为 150° (以后简称这二方向所夹之区域为 III 部分)。如果将投影中心点选在 $\lambda_0 = 105^\circ$, $\varphi_0 = 32^\circ$, 則三凸出部分的最远点都将近为 27° , 即对于这三部分都有 $z_\pi = 27^\circ$ 。另外, 对于 I, II, III 部分內, 三个凹方向的最近点分别为 10° 、 17° 、 10° , 三部分的各項常数(除 z_π 外), 均需分別独立进行选取。

为了使投影的各种变形都不很大, 我們首先确定这三部分的向径 ρ 的函数形式为 $\rho = Rz$ 。从而使这三部分都滿足了組合伪方位投影的第一条原則。以下再分別討論各部分的各种参数的选取。

对 于 I 部 分

这一部分的中心綫, 約为 $\lambda_0 = 105^\circ$ 的中央經綫, 但是, 为了使等变形綫更好地与这一部分的制图区域輪廓一致, 应该在計算 δ 时, 使后面的附加項 $c \left(\frac{z}{z_\pi} \right)^q \sin k a$ 的起算方向反时針轉 5° 。在此基础上, 再来討論 k 值的选取。

为了滿足組合伪方位投影的第二条原則, 应以 $a = -5^\circ$ 为起算方向, 使距起算方向为 $a_1 = \pm 45^\circ$ 的两个方向上(即 $a = 40^\circ$ 和 $a = -50^\circ$), 有 $a = \delta$, 这就是要求这时 $\sin k a_1 = 0$, 因此 $k = 4$ 。

在組合伪方位投影第四条原則的要求下, 根据凸出部分的最远点 $z = 27^\circ$, $k a_1 = 180^\circ$ 及凹进部分最近点 $z = 10^\circ$, $k a_1 = 0^\circ$, 依前述 c 值确定的原理即可确定 c 为(考虑到簡便而又不影响投影質量的条件, 我們选定 $q = 1$, 在 II, III 部分均如此):

$$c = -0.005832.$$

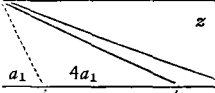
所以, 这一部分的投影方程和变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta, \\ y &= \rho \sin \delta, \\ \rho &= Rz, \\ \delta &= a + \frac{0.005832}{0.471239} \cdot z \sin 4(a + 5^\circ), \\ \mu_1 &= \sec \epsilon, \\ \mu_2 &= \frac{z}{\sin z} \left[1 + \frac{0.023328}{0.471239} \cdot z \cos 4(a + 5^\circ) \right], \\ P &= \mu_2, \\ \operatorname{tg} \epsilon &= \frac{0.005832}{0.471239} z \sin 4(a + 5^\circ), \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

这部分的变形情况, 列于表 2。

由表 2 不难看出, 中心点的面积变形为 -0.45% , 最大角度变形为零; 在本部分的边缘的两条交綫上, 其面积变形为 -0.9% , 最大角度变形为 $12'$; 在区域凸出方向的最远点,

表 2

		z	0°	5°	10°	15°	20°	27°
0°	0°	p	0.9945	1.0000	1.0082	1.0190	1.0325	
		ω	0	19'	47'	1°23'	2°9'	
15°	60°	p	0.9945	0.9979	1.0039	1.0125	1.0237	
		ω	0	12'	33'	1°02'	1°41'	
30°	120°	p	0.9945	0.9936	0.9952	0.9994	1.0062	1.0202
		ω	0	4'	8'	20'	42'	1°30'
45°	180°	p	0.9945	0.9914	0.9909	0.9929	0.9974	1.0082
		ω	0	10'	12'	6'	10'	47'

其面积变形为 0.8%, 最大角度变形为 47'。由此可见, 能获得这样小的变形, 确是令人满意的。

对于 II 部分

为了更好地使等变形线与本区域的轮廓形状一致, 在计算 δ 时, 应使后面的附加项 $c \left(\frac{z}{z_x} \right)^q \sin ka$ 的起算方向顺时针转 100° , 在此基础上, 再来讨论 k 值的选取。

为了满足组合伪方位投影的第二条原则, 应以 $a = 100^\circ$ 为起算方向, 使距起算方向为 $a_2 = \pm 60^\circ$ 的两个方向上(即 $a = 40^\circ$ 和 $a = 160^\circ$), 有 $a = \delta$, 这就要求这时 $\sin ka_2 = 0$, 因此 $k = 3$ 。

又取凸出部分的最远点 $z = 27^\circ$, $ka_2 = 180^\circ$, 凹进部分的最远点 $z = 17^\circ$, $ka_2 = 0^\circ$, 对于这两点, 依前述 c 值确定的原理, 即可确定 c 值为:

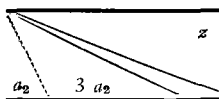
$$c = -0.004605.$$

所以, 这一部分的投影方程和变形公式为:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \delta, \\ y &= \rho \sin \delta, \\ \rho &= Rz, \\ \delta &= a + \frac{0.004605}{0.471239} z \sin 3(a - 100^\circ), \\ \mu_1 &= \sec \varepsilon, \\ \mu_2 &= \frac{z}{\sin z} \left[1 + \frac{0.013815}{0.471239} \cdot z \cos 3(a - 100^\circ) \right], \\ p &= \mu_2, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{0.004605}{0.471239} z \sin 3(a - 100^\circ), \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

这部分的变形情况, 列于表 3。

表 3

			0°	5°	10°	15°	20°	27°
0°	0°	p	0.9945	0.9983	1.0047	1.0137	1.0254	
		ω	0	13'	35'	1°5'	1°45'	
20°	60°	p	0.9945	0.9970	1.0021	1.0098	1.0202	
		ω	0	8'	27'	53'	1°28'	
40°	120°	p	0.9945	0.9945	0.9970	1.0021	1.0098	1.0251
		ω	0	0'	9'	27'	53'	1°45'
60°	180°	p	0.9945	0.9932	0.9944	0.9982	1.0050	1.0180
		ω	0	5'	5'	16'	36'	1°20'

从变形的情况来看,这一部分的变形较其他部分大。中心点面积变形为 -0.55% , 最大角度变形为零;在本部分的边缘交界线上,在 $z = 5^\circ$ 的地方面积变形为 -0.68% , 最大角度变形为 $5'$;在区域凸出部分的最远点上,面积变形为 1.8% , 最大角度变形为 $1^\circ 20'$ 。

对 于 III 部 分

与前述道理一样,应首先考虑到使 δ 的附加项 $c \left(\frac{z}{z_x} \right)^q \sin ka$ 的起算方向,反时针旋转 125° , 在此基础上,再来讨论 k 值之选取。

在这一部分,附加项的起算方向为 $a = -125^\circ$, 为使距起算方向为 $a_3 = \pm 75^\circ$ 的两个方向上(即 $a = -50^\circ$ 和 $a = 160^\circ$), 有 $a = \delta$, 这就要求这时 $\sin ka_3 = 0$, 因此应有 $k = 2.4$ 。

又取凸出部分的最远点 $z = 27^\circ$, $ka_3 = 180^\circ$, 凹进部分的最近点 $z = 10^\circ$, $ka_3 = 0^\circ$, 对于这两点,依前述 c 值确定的原理,即可得


$$c = -0.009733.$$

根据所定的各种常数值,即可写出此部分的投影方程和变形公式为:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= \rho \cos \delta, \\
 y &= \rho \sin \delta, \\
 \rho &= Rz, \\
 \delta &= a + \frac{0.009733}{0.471239} \cdot z \sin 2.4(a + 125^\circ), \\
 \mu_1 &= \sec \epsilon, \\
 \mu_2 &= \frac{z}{\sin z} \left[1 + \frac{0.023359}{0.471239} \cdot z \cdot \cos 2.4(a + 125^\circ), \right. \\
 p &= \mu_2, \\
 \operatorname{tg} \epsilon &= \frac{0.009733}{0.471239} \cdot z \cdot \sin 2.4(a + 125^\circ), \\
 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{p} - 2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

这部分的变形情况,列于表 4。

表 4

			0°	5°	10°	15°	20°	27°
0°	0°	p	0.9945	1.0011	1.0104	1.0221	1.0369	1.0172 1°24' 1.0021 27'
		ω	0	23'	54'	1°35'	2°31'	
25°	60°	p	0.9945	0.9984	1.0050	1.0141	1.0259	
		ω	0	15'	38'	1°09'	1°49'	
50°	120°	p	0.9945	0.9930	0.9941	0.9978	1.0040	
		ω	0	1'	11'	20'	39'	
75°	180°	p	0.9945	0.9904	0.9887	0.9896	0.9930	
		ω	0	2"	20'	17'	5'	

从表中我們不难看出,中心点的面积变形为 -0.55%, 最大角度变形为零; 在本部分的边缘的交线上,在 $z = 10^\circ$ 的地方面积变形为 1.13%, 最大角度变形为 20'; 在区域凸出部分的最远点上,面积变形为 0.21%, 最大角度变形为 27'。

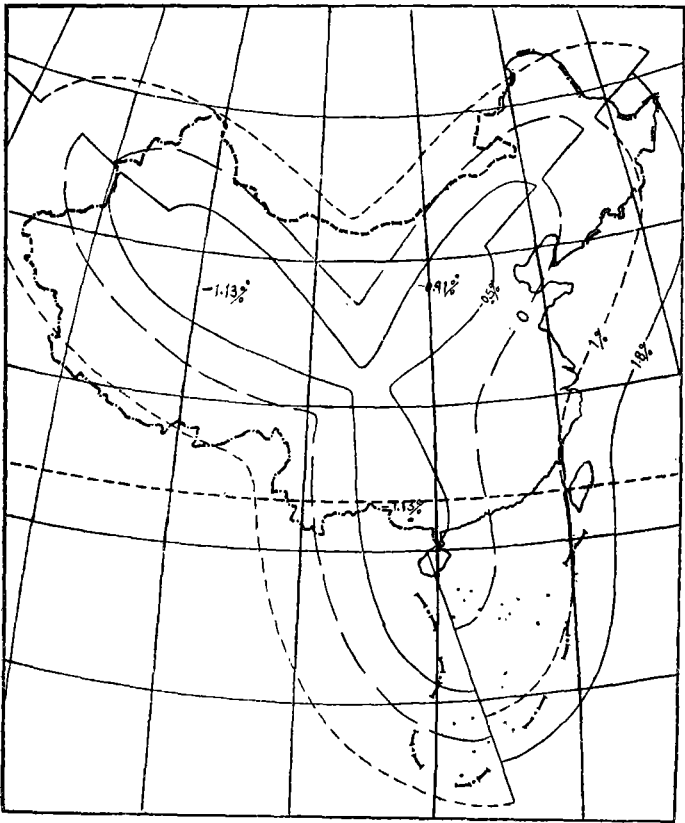


图 6 面积变形等变形线 比例尺 1:50,000,000

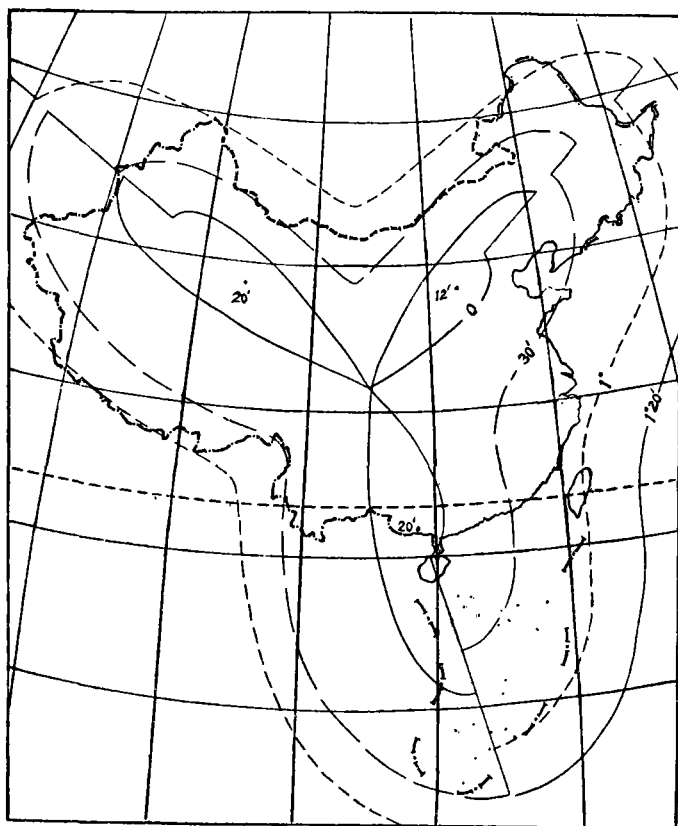


图 7 最大角度变形等变形线

从等变形线的略图(图 6 和图 7)上,可以看出在三部分的交界处,变形是不相等的,而在每一部分,其等变形线都更近于制图区域之轮廓线,因此,这种方案与前一方案比较,具备了前一方案的一切优点,而且变形更有改善。

结 束 语

伪方位投影是一种尚待进一步研究,使其完善的投影。本文对其确定常数方法的讨论,为拟定伪方位投影方案,提供了科学的方法。所提出的组合伪方位投影,对制图区域轮廓形状不规则的地区,应用这种投影开辟了广泛的前景。本文并结合对伪方位投影的讨论,考虑到中国区域轮廓形状的特征,为中国全图的投影,拟定了两种方案。就整个中国区域内变形的分布而论,这两种方案是优于现有中国全图的其他方案。

参 考 文 献

- [1] Г. А. Гинзбург: Картографические проекции с изоколами в виде овалов и овоид. сб. статей по картографии, вып. 1. 1952.
- [2] В. В. Каврайский: Труды ЦНИИГАиК вып. 6. 1933.
- [3] А. В. Граур: Математическая картография. издательство ленинградского университета, 1956.

附 表

緯 度	經 度	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°	110°	115°	120°	125°	130°	135°
55°	x	28.687	27.694	26.891	26.276	25.843	25.585	25.495	25.575	25.830	26.270	26.902	27.729	
	y	-19.324	-16.242	-13.088	-9.869	-6.596	-3.284	0.043	3.363	6.646	9.884	13.065	16.173	
50°	x	23.419	22.334	21.455	20.810	20.309	20.046	19.953	20.038	20.305	20.822	21.491	22.395	23.499
	y	-21.361	-17.942	-14.455	-10.919	-7.297	-3.649	0.027	3.690	7.309	10.897	14.403	17.865	21.273
45°	x	18.140	16.975	16.028	15.300	14.795	14.505	14.411	14.501	14.802	15.327	16.067	16.971	18.178
	y	-23.268	-19.521	-15.712	-11.850	-7.939	-3.979	0.014	3.993	7.926	11.815	15.672	19.485	23.238
40°	x	12.827	11.602	10.603	9.829	9.281	8.966	8.868	8.967	9.294	9.841	10.610	11.597	12.808
	y	-25.082	-21.019	-16.895	-12.723	-8.515	-4.275	0.005	4.273	8.502	12.712	16.890	21.021	25.091
35°	x	7.457	6.189	5.154	4.350	3.778	3.444	3.326	3.436	3.772	4.329	5.111	6.119	7.359
	y	-26.807	-22.448	-18.029	-13.563	-9.062	-4.533	0.001	4.539	9.065	13.570	18.041	22.467	26.834
30°	x		0.711	-0.347	-1.170	-1.755	-2.105	-2.217	-2.359	-1.781	-1.227	-0.434	0.577	
	y		-23.794	-19.101	-14.364	-9.593	-4.801	0.001	4.694	9.588	14.360	19.100	23.797	
25°	x		-4.821	-5.914	-6.742	-7.325	-7.662	-7.760	-7.655	-7.342	-6.803	-6.031	-4.994	
	y		-25.031	-20.077	-15.083	-10.058	-5.016	0.015	5.027	10.046	15.056	20.042	24.997	
20°	x		-10.462	-11.528	-12.343	-12.905	-13.302	-13.302	-13.195	-12.893	-12.377	-11.633	-10.651	
	y		-26.116	-20.924	-15.694	-10.440	-5.185	0.043	5.243	10.455	15.667	20.866	26.039	
15°	x		-16.131	-17.171	-17.955	-18.485	-18.762	-18.844	-18.733	-18.439	-17.947	-17.236	-16.294	
	y		-27.049	-21.637	-16.197	-10.749	-5.350	0.086	5.451	10.827	16.205	21.586	26.951	
10°	x		-21.837	-22.833	-23.574	-24.067	-24.328	-24.387	-24.271	-23.988	-23.514	-22.839	-21.944	
	y		-27.819	-22.216	-16.598	-10.985	-5.400	0.144	5.651	11.157	16.683	22.209	27.734	
5°	x		-27.569	-28.508	-29.197	-29.649	-29.884	-29.929	-29.809	-29.537	-29.085	-28.447	-27.606	
	y		-28.425	-22.663	-16.899	-11.155	-5.447	0.217	5.840	11.447	17.092	22.740	28.389	
0°	x		-33.323	-34.193	-34.825	-35.233	-35.435	-35.471	-35.348	-35.065	-34.660	-34.060	-33.275	
	y		-28.867	-22.978	-17.102	-11.255	-5.483	0.304	6.018	11.767	17.435	23.176	28.922	

注: 1) 中心点: $\lambda = +105^\circ$, $\varphi = +32^\circ$. 2) $R = 6368834$ 米, 坐标值为乘 0.997236 后之值.

ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛОЙ КАРТЫ КИТАЯ

Лю Дя-хао, Ли Гуо-цзао

Резюме

На основе принципа, что проекция должна быть выбрана по виду картографической территории, и на основе исследования вида территории Китая, авторы выставили уравнение изоколы с видом $\rho = a + \frac{a}{k} \cos 3\varphi$, проекцию, в которой имеется такое уравнение, можно считать лучшей проекцией для территории Китая. Затем, авторы исследовали псевдоазимутальные проекции: обсуждали об определении радиуса псевдоазимутальных проекций, анализировали значение параметров в данных проекциях и выставили строгие способы определения параметров. После этого, авторы разработали проект для целой карты Китая, проекция этого проекта является близкой равнопромежуточной проекцией, ее изоколы масштаба площадей и наибольших искажений углов почти одинаковы и единообразны с видом территории Китая. Ввиду этого, различные искажения проекции, принятой для территории Китая, могут быть уменьшены. В статье в кратком сравнении разработанной проекции с равнопромежуточной азимутальной проекцией и с равнопромежуточной конической проекцией было утверждено улучшение в искажениях площадей и углов в разработанной проекции. Учитывая ограниченность в применении псевдоазимутальных проекций, авторы исследовали сочетательные псевдоазимутальные проекции, выставили четыре принципа сочетания, и таким образом заложили теоритический фундамент для применения сочетательных псевдоазимутальных проекций. По особенностям вида территории Китая разработан проект сочетательной псевдоазимутальной проекции для целой карты Китая, т.е. проект близких равнопромежуточных псевдоазимутальных проекций, искажения которых имеют не только те же преимущества, какие имеет вышеуказанный проект, но и имеют некоторые усовершенствования во многих местах. Наконец, в статье указывается, что псевдоазимутальные проекции имеют значительную гибкость и после того, как они усовершенствованы данной статьей, наверняка получат еще более широкое применение.