

# 有关等差分纬线多圆锥投影的正反解变换新算法

王诗阳, 王 雪

(辽宁师范大学 城市与环境学院 辽宁 大连 116029)

**摘 要:** 选用国家测绘地理信息局官方网站上的等差分纬线多圆锥投影世界地图为研究数据, 特别考虑了极点在该投影上的弧长为赤道投影长度的一半的重要性质, 采用选取参考点、曲线拟合等方法得出了等差分纬线多圆锥投影的正解变换公式, 还采用二分法实现了该投影的反解变换。用户可以在相应的 GIS 软件中实现各类专题地图的输出和出版时使用这一公式, 这一公式还可以与已有的投影类型一道作为用户调用投影的基本代码模板, 解决了在以前出版的此类投影的世界地图中各经线和纬线不能完全对称的问题。当然这一公式并没有考虑面积变形和角度变形, 因此使用此投影公式制成的成图的比例尺也不准确, 这一缺陷有待于进一步深入研究。

**关键词:** 地图投影; 正反解变换; 多圆锥投影; 等差分纬线; 二分法

中图分类号: P282 文献标识码: B 文章编号: 1672-5867(2013)09-0217-05

## The Forward and Reverse Solution to Polyconic Projection of Equivalent Different Latitude Parallel

WANG Shi - yang , WANG Xue

( School of Urban Planning and Environmental Science , Liaoning Normal University , Dalian 116029 , China)

**Abstract:** Based on the world map of equivalent different latitude parallel polyconic projection posted on the net by State Bureau of Surveying and Mapping , especially considering the important property that the projection length of the geographic poles is half the length of the equatorial projection , the reference points selecting , curve fitting , etc are utilized. This essay finally suggests the forward solution to this projection. This essay also utilizes the bisection method to carry out the reverse solution of this projection. Users are able to execute the map making and publishing with this projection method , which is also used as the code template users invoke , as well as many renowned projection types. In addition , this projection method also solves the problem of incomplete symmetry. This projection method , however , does not take area and angle variation seriously , causing the inaccuracy in terms of using legends , calling for further research.

**Key words:** map projection; forward and reverse solution; polyconic projection; equivalent different latitude parallel; bisection method

## 0 引 言

等差分纬线多圆锥投影是属于任意性质的多圆锥投影, 由中国地图出版社在 1963 年根据我国在世界上的位置和形势设计的一种世界地图投影方案。这种投影在中国大陆出版的各种世界地图中该投影得到了广泛应用, 获得了一定的好评。一些学者还对这一投影进行了一些研究<sup>[2-5]</sup>。然而, 无论是从国家测绘地理信息局中下载的世界地图<sup>[1]</sup>, 还是已经出版的现有世界地图都没有交代该投影的正反解变换, 用户使用不方便, 并且各个经线和纬线不能完全对称(如图 1 所示)。为此, 本文遵循多圆锥投影的性质, 在图上选取一定数目的参考点进行了

曲线拟合, 再利用二分法求解复杂方程的思想, 求解出等差分纬线多圆锥投影的正反解变换公式。

使用这一正反解变换公式, 不仅可以供用户把需要的信息投影到世界地图上, 还可以用于各种 GIS 软件作为生成世界地图的投影数学基础, 供用户和广大地图出版部门编绘各类专题的世界地图时使用。更为重要的是, 这一投影算法可以和其他投影类型一样用于新投影的基本代码, 用于开源投影库 Proj. 4<sup>[12]</sup>, 供用户制图时直接调用。

## 1 等差分纬线多圆锥投影的特征

由图 2 可知, 等差分纬线多圆锥投影具有以下特征:

收稿日期: 2013-01-30

作者简介: 王诗阳(1991-)男, 辽宁沈阳人, 地理信息系统专业本科生。

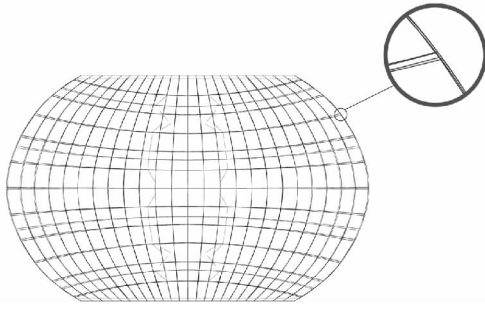


图1 等差分纬线多圆锥投影世界地图中产生的不完全对称现象

Fig.1 The incomplete symmetric phenomenon of the world map of equivalent different latitude parallel polyconic projection

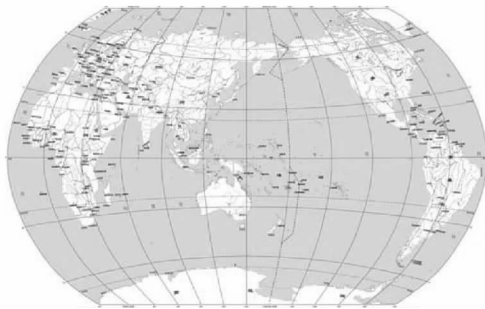


图2 等差分纬线多圆锥投影世界地图

Fig.2 World map of equivalent different latitude parallel polyconic projection

1) 纬线投影为同轴圆圆弧,并与投影成直线的赤道对称;经线投影成曲线,且与投影成直线的中央经线对称;投影后各经线间的距离,随着与中央经线距离的增大而成比例地逐渐增大。

2) 极点投影为圆弧,其长度为赤道的1/2(未包括在图廓内)<sup>[3]</sup>。

3) 位于中央经线和南北纬约44°的交点附近无角度变形。

## 2 等差分纬线多圆锥投影的公式转换

设球面上有一点,其经度为 $\lambda_i$ ,纬度为 $\varphi$ 。当球面被投影到如图3所示的示意图时(其中中央经线所在经线为0°)由图3可知,纬线部分的直角坐标为

$$\begin{cases} x = \rho(1 - \cos\delta_i) + x_0, & -180 \leq \delta < 180 \\ y = \rho \sin\delta_i \end{cases} \quad (1)$$

由等差分纬线多圆锥投影的特点,并参考部分公式<sup>[6]</sup> $\rho$ 和 $x_0$ 可以以下列式子表示:

$$\begin{cases} \rho = \frac{y_n^2 + (x_n - S)^2}{2(x_n - x_0)} \\ x_0 = W_{s0}\varphi^3 + W_{s1}\varphi \end{cases} \quad (2)$$

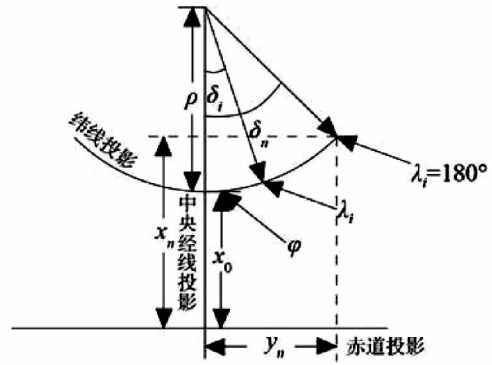


图3 图解投影直角坐标

Fig.3 The illustration of solving the rectangular coordinate system

式中, $W_{s0}$ , $W_{s1}$ 为函数式系数。

当经线投影所在的经度为180时,即 $\lambda_n = 180$ 时,所在的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标分别是 $x_n$ 和 $y_n$ 。

再由图3,并参考部分公式<sup>[6]</sup>,结合等差分纬线多圆锥投影的第1个特征,可知动径角 $\delta_i$ 和 $\delta_n$ 的关系式为:

$$\begin{cases} \delta_i = \frac{\delta_n}{180} \times b \times (1 - C|\lambda_i|)\lambda_i \\ \delta_n = \arcsin \frac{y_n}{\rho} \end{cases} \quad (3)$$

其中, $b = 1.1 = \frac{1}{1 - C \times 180}$ ,且 $\delta_i$ 和 $\delta_n$ 以弧度计。

由于等差分纬线多圆锥投影世界地图的中央经线往往都是东经150°,因此实际地理经度 $\lambda$ 和中央经线的所在经度为0时投影的经度 $\lambda_i$ 的关系如下:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda - 150, & -30 < \lambda \leq 180 \\ \lambda + 210, & -180 \leq \lambda \leq 30 \end{cases} \quad (4)$$

由此求出等差分纬线多圆锥投影的正解变换公式汇总如下:

$$\begin{cases} x = S + \rho(1 - \cos\delta) \\ y = \rho \sin\delta \\ \rho = \frac{y_n^2 + (x_n - S)^2}{2(x_n - x_0)} \\ S = x_0 = W_{s0}\varphi^3 + W_{s1}\varphi \\ \delta = \frac{\delta_n}{180} \times b \times (1 - C|\lambda_i|)\lambda_i \\ \delta_n = \arcsin \frac{y_n}{\rho} \\ b = \frac{1}{1 - C \times 180} \end{cases} \quad (5)$$

## 3 参考点的确定和函数式系数的推导

### 3.1 参考点的确定

如图4所示在等差分纬线多圆锥投影世界地图网格线上选取16个参考点,在按中央经线投影与赤道投影的交点进行地图网格的重合时,发现有的经线投影和纬线

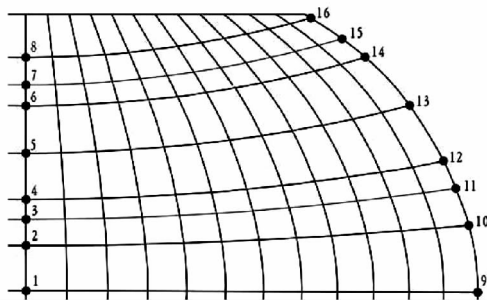


图 4 参考点的选择

Fig. 4 The selection of reference points

投影并不能完全吻合。因此,本文按四个交点取平均值的方法,以中央经线和赤道的交叉点为坐标原点,求出各个经线投影和纬线投影交点的参考点坐标值(见表 1)。

表 1 图 4 中的参考点坐标值

Tab. 1 Values of reference points in Fig. 4

纬度( $\varphi$ )	经度( $\lambda_i$ )	0	180
0	编号	( 1 )	( 9 )
	$x$	0.00	0.00
	$y$	0.00	715.33
15	编号	( 2 )	( 10 )
	$x$	71.94	105.90
	$y$	0.00	700.81
回归线	编号	( 3 )	( 11 )
	$x$	112.70	164.50
	$y$	0.00	679.88
30	编号	( 4 )	( 12 )
	$x$	144.50	206.71
	$y$	0.00	660.58
45	编号	( 5 )	( 13 )
	$x$	217.31	293.97
	$y$	0.00	606.44
60	编号	( 6 )	( 14 )
	$x$	291.71	369.20
	$y$	0.00	535.69
极圈	编号	( 7 )	( 15 )
	$x$	324.41	397.92
	$y$	0.00	498.88
75	编号	( 8 )	( 16 )
	$x$	367.59	430.78
	$y$	0.00	450.27

3.2  $x_0 = W_{s0}\varphi^3 + W_{s1}\varphi$  中系数  $W_{s0}$  ,  $W_{s1}$  的确定

$x_0 = W_{s0}\varphi^3 + W_{s1}\varphi$  函数式的确定,用于中央经线上纬度坐标的确定。通过选取参考点,并结合这个投影和赤道对称的性质,  $\varphi$  和  $x_0$  的数值见表 2。

表 2 中央经线上的参数表

Tab. 2 Parameterson the central meridian

$\varphi$	$x_0$
75	-367.59
南极圈( -66.5 )	-324.41
-60	-291.71
-45	-217.31
-30	-144.50
南回归线( -23.5 )	-112.70
-15	-71.94
0	0
15	71.94
北回归线( 23.5 )	112.70
30	144.50
45	217.31
60	291.71
北极圈( 66.5 )	324.41
75	367.59

本文使用了文献 [5] 中使用 1stOpt 软件进行曲线拟合的方法,可以进行一元三项式进行拟合。代码和曲线分别如图 5 和图 6 所示。

```
代码本 1 - [Untitled1] 算法设置 结果
1 Title "φ 与 x0 的曲线拟合";
2 //Parameters ;
3 //Variable ;
4 //Function ;
5 Function y=a*x^3+b*x;
6 Data;
7 -75 -367.5880
8 -66.5 -324.4065
9 -60 -291.7060
10 -45 -217.3060
11 -30 -144.5015
12 -23.5 -112.6985
13 -15 -71.9360
14 0 0
15 15 71.9360
16 23.5 112.6985
17 30 144.5015
18 45 217.3060
19 60 291.7060
20 66.5 324.4065
21 75 367.5880
```

图 5  $x_0$  坐标三次拟合代码

Fig. 5 Code of three times fitting of  $x_0$  coordinate system

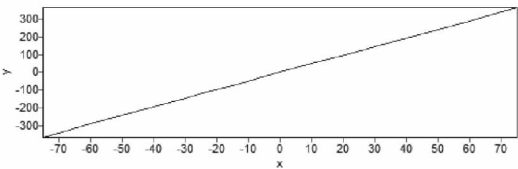


图 6  $x_0$  坐标三次拟合示意图

Fig. 6 Illustration of three times fitting of  $x_0$  coordinate system

根据输出的计算结果,可知  $\varphi$  和  $x_0$  的坐标关系式为

$$x_0 = 1.949\ 907\ 901\ 240\ 3 \times 10^{-5} \varphi^3 + 4.791\ 6121\ 219\ 875\ 3 \varphi \quad (6)$$

3.3  $\varphi = 90$  时系数  $x_0$   $x_n$   $y_n$  的确定

为了能满足极点的投影圆弧为赤道投影的一半,也

因为极点中的参考点是无法选取的(未包括在图廓内),所以这些系数的确定是十分必要的。由(6)式可知,当 $\varphi = 90$ 时 $x_0$ 的值为445.459 919 578 92。

当 $\lambda_i = 180$ 时 $x_n, y_n$ 的参数关系见表3。

表3  $\lambda_i = 180$ 时的经线上的参数表

Tab.3 Parameters on the longitude line when  $\lambda_i = 180$

$\varphi$	$x_n$	$y_n$
75	-430.784 00	450.267 25
南极圈(-66.5)	-397.923 75	498.881 00
-60	-369.197 00	535.694 00
-45	-293.965 75	606.438 25
-30	-206.705 75	660.580 00
南回归线(-23.5)	-164.502 00	679.882 25
-15	-105.902 50	700.813 25
0	0	715.327 50
15	105.902 50	700.813 25
北回归线(23.5)	164.502 00	679.882 25
30	206.705 75	660.580 00
45	293.965 75	606.438 25
60	369.197 00	535.694 00
北极圈(66.5)	397.923 75	498.881 00
75	430.784 00	450.267 25

观察上面的数据,其关系可以用一元二次多项式拟合。同样使用1stOpt软件进行拟合,拟合结果的表达式为:

$$y_n = -0.001\ 401\ 228\ 856\ 018\ 8x_n^2 + 719.695\ 622\ 006\ 741 \quad (7)$$

根据等差分纬线多圆锥投影的性质,极点的纬线投影长度是赤道投影的一半。利用这一性质,本文列出了如下方程:

$$\begin{cases} \rho = \frac{y_n^2 + (x_n - S)^2}{2(x_n - x_0)} \\ S = 445.459\ 919\ 578\ 92 \\ y_n = -0.001\ 401\ 228\ 856\ 018\ 8x_n^2 + 719.695\ 622\ 006\ 741 \\ 2\rho\delta = 2\rho\arcsin \frac{y_n}{\rho} = 715.327\ 5 \end{cases} \quad (8)$$

求解上述方程,可知当 $\varphi = 90$ 时 $x_n = 514.633\ 610\ 723\ 326$ ,  $y_n = 348.583\ 307\ 650\ 471\ 00$ 。

最后,在求解 $\varphi$ 与 $x_n$ 的线性函数关系时,为了使生成的拟合曲线经过 $\varphi = 90$ ,  $x_n = 514.633\ 610\ 723\ 326$ 这一点,本文对五次拟合曲线的函数式进行改写。函数式如下:

$$x_n = a\varphi^5 + b\varphi^3 + \left( \frac{514.633\ 610\ 723\ 326 - 90^5 a - 90^3 b}{90} \right) \varphi \quad (9)$$

使用1stOpt软件进行曲线拟合,得出:

$$a = 2.819\ 775\ 724\ 744\ 22 \times 10^{-8};$$

$$b = -0.000\ 418\ 283\ 489\ 244\ 518.$$

在求解 $\varphi$ 与 $y_n$ 的线性函数关系时同样如此。为了使生成的拟合曲线经过 $\varphi = 90$ 。

$y_n = 348.583\ 307\ 650\ 471\ 00$ 这一点,六次拟合的函数式如下:

$$y_n = b\varphi^6 + c\varphi^4 + \left( \frac{348.583\ 307\ 650\ 471\ 00 - 715.237\ 5 - 90^6 b - 90^4 c}{90^2} \right) \varphi^2 + 715.327\ 5 \quad (10)$$

使用1stOpt软件进行曲线拟合,得出:

$$b = -2.440\ 450\ 349\ 424\ 99 \times 10^{-10};$$

$$c = 4.009\ 614\ 189\ 989\ 4 \times 10^{-6}.$$

这样处理的结果可以确保极点的纬线投影长度是赤道投影的一半。

由此,本文提出的等差分纬线多圆锥投影的公式由(4)、(5)、(6)、(9)、(10)组成。

#### 4 等差分纬线多圆锥投影的反解变换

本文在结合已有研究<sup>[7,11]</sup>的基础上,考虑到它的多圆锥投影特性,提出用二分法这一算法思想来实现等差分纬线多圆锥投影的反解变换。二分法解法的优点是不需要像文献[2]那样进行求导,通过多次迭代使计算出的解无限逼近实际解。二分法在解决复杂方程中拥有一席之地<sup>[8-10]</sup>。

##### 4.1 利用二分法求解纬度

根据它的多圆锥投影的特性,处在同一纬度的两个或两个以上的点在这一投影上的纬线半径是相等的。其次,当 $\varphi = 90$ 时对应的 $\rho$ 值为912.89,大于715.327 5。这样对于正解变换求出的任何一个点进行反解变换都适用。

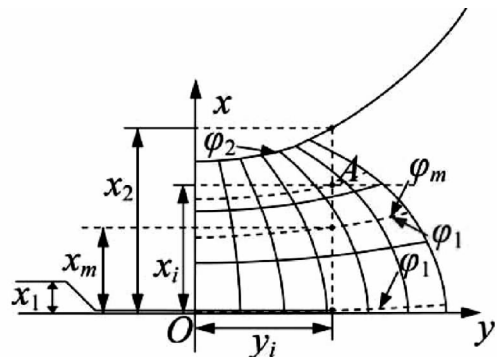


图7 图解二分法原理

Fig.7 The illustration on how to solve a latitude value with bisection method

设在图6所示中有一个点A,它的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标分别为 $x_i, y_i$ ;设有 $\varphi_1, \varphi_2$ 两个纬度值, $\varphi_1 < \varphi_2 = 90$ 。第一步:求出 $\varphi_1, \varphi_2$ 的中间值 $\varphi_m$ 。第二步:结合前面已经给出的正解变换公式求出在 $y$ 坐标值为 $y_i$ 的情况下两个纬度

为  $\varphi_1$   $\varphi_2$  以及这两个纬度的中间值为  $\varphi_m$  的  $x$  坐标分别为  $x_1$   $x_2$   $x_m$ 。第三步,当  $x_m < x_1$  时  $\varphi_1 = \varphi_m$ , 否则  $\varphi_2 = \varphi_m$ , 第四步:重复第一步。

计算机实践证明,当步骤达到 1 000 次的时候,误差可以达到  $10^{-13}$  的级别,符合精度要求。下面阐述的反解求经度也是如此。

#### 4.2 利用二分法求解经度

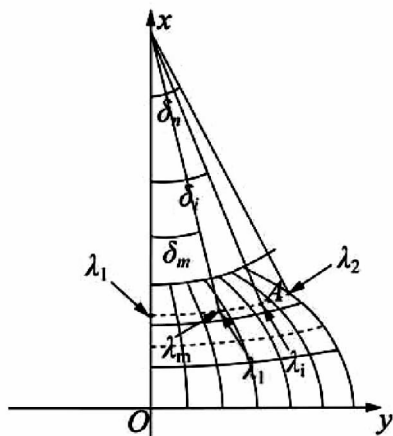


图8 图解二分法原理(二)

Fig. 8 The illustration on how to solve a longitude value with bisection method (2)

如图7所示,在前面已经求出A点的所在纬度  $\varphi_m$ , 并设所在纬度为  $\varphi_i = \varphi_m$ 。设有  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  两个值,  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 180$ 。第一步:求出  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  的中间值  $\lambda_m$ 。第二步:由  $\delta_i = \arcsin \frac{y_i}{\rho}$  求出其  $\delta_i$  值。第三步,由

$$\begin{cases} \delta_1 = \frac{\delta_n}{180} \times b \times (1 - C |\lambda_1|) \lambda_1 \\ \delta_2 = \frac{\delta_n}{180} \times b \times (1 - C |\lambda_2|) \lambda_2 \\ \delta_m = \frac{\delta_n}{180} \times b \times (1 - C |\lambda_m|) \lambda_m \end{cases} \quad b = \frac{1}{1 - C \times 180} = 1.1$$

求出  $\delta_1$   $\delta_2$   $\delta_m$  的值。第四步,当  $\delta_m < \delta_i$  时  $\delta_1 = \delta_m$ , 否则  $\delta_2 = \delta_m$ 。经过多次迭代,得出  $\lambda_i = \lambda_m$ 。当投影地图中中央经线经度为 150 时,反解出来的经度按公式(4)计算。

#### 5 结束语

本文是根据国家测绘地理信息局上发布的等差分纬

线多圆锥投影的世界地图来确定参考点的,并使用 1stOpt 工具来对这些参考点进行拟合,通过附加条件来使极点的纬线投影长度是赤道投影的一半,并最终求出等差分纬线多圆锥投影的正解变换公式,还使用了二分法来实现这个投影的反解变换。用户和各个测绘部门可以使用这一公式在相应的 GIS 软件中实现各类专题地图的输出和出版,解决了以往出版的等差分纬线多圆锥投影世界地图中经纬线不能完全对称的问题。然而,这个正解变换公式仅仅是在参考点上求出的,并没有考虑面积变形和角度变形,这样的世界地图就不能保证比例尺的正确性了。倘若在正解变换的公式的直角坐标上乘以一个常数之后再进行面积变形的验证,合乎要求之后等差分纬线多圆锥投影的最终正反解变换公式就求解出来了。

#### 参考文献:

- [1] 国家测绘地理信息局.《中华人民共和国地图》,《世界地图》[EB/OL]. <http://219.238.166.215/mcp/index.asp>.
- [2] 董曼,李胜乐.世界地图等差分纬线多圆锥投影的正反解变换[J].大地测量与地球动力学,2008,28(2):95-99.
- [3] 孙达,蒲英霞.地图投影[M].南京:南京大学出版社,2005.
- [4] 李家,赵晴晴.等差分纬线多圆锥投影正解变换的参数和方法[J].地理空间信息,2012,10(2):38-40.
- [5] 叶远智.栅格数据的等差分纬线多圆锥投影转换[J].测绘通报,2012(9):68-70.
- [6] 胡毓钜.地图投影[M].北京:测绘出版社,1981.
- [7] 滕骏华,孙美仙,黄韦良.地图投影反解变换的一种新方法[J].测绘学报,2004,33(2):179-185.
- [8] 戴家佳,杨爱军,杨振海.极大似然估计算法研究[J].高校应用数学学报,2009,24(3):275-280.
- [9] 方遼,谭元发,吴泉源.近似弧长参数化的一种数值算法[J].工程数学学报,2002,19(3):123-127.
- [10] 林永,陈浩.用二分法求解一元实系数多项式方程的全部实根[J].大学数学,2008,24(4):88-90.
- [11] 杨启和.地图投影变换原理和方法[M].北京:解放军出版社,1989.
- [12] Gerald Evenden. PROJ.4 开源地图投影代码库[EB/OL]. <http://trac.osgeo.org/proj/>.

[编辑:胡雪]

(上接第216页)

#### 参考文献:

- [1] 国家测绘局标准化研究所,国家测绘局第一大地测量队,国家测绘局测量数据中心. GB/T 12897-2006 国家一、二等水准测量规范[S].北京:中国标准出版社,2006.
- [2] 梁振英,董鸿闻,姬恒炼.精密水准测量的理论和实践[M].北京:测绘出版社,2004.

- [3] 武汉测绘科技大学测量学编写组.测量学[M].北京:测绘出版社,1991.
- [4] 潘正风,杨正尧.数字测图原理与方法[M].武汉:武汉大学出版社,2002.
- [5] 孔祥元,郭际明,刘宗泉.大地测量学基础[M].武汉:武汉大学出版社,2001.

[编辑:胡雪]