

东南大学考试卷 (A 卷)

课程名称 算法设计基础 考试学期 2019-2020-2 得分 _____
 适用专业 计算机 考试形式 开卷 考试时间长度 150 分钟
 (可 携 带 纸 质 教 材 、 课 件 、 讲 义 、 笔 记)

1. 判断题 (共 10 分, 每小题 2 分)

- a) $T(n) = n + 7T(n/5) = \theta(n)$ ()
 b) P 类问题可多项式时间验证一个解 ()
 c) K 团问题可多项式时间内规约 (\leq_p) 到集合覆盖问题的实例 ()
 d) 近似算法的近似比可能小于 1 ()
 e) 随机算法是可能得到最优解的 ()

2. 给定 n 个班会活动 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 以及两个教室, 每个班会活动 a_i 可表示为 $[s_i, f_i]$, 即开始时间和结束时间。请设计算法安排尽量多的班会活动到两个教室中, 使得任意两个安排的班会活动不冲突。(共 15 分)

3. 给定一个正整数数组 $A[1, 2, \dots, n]$, 现要从中选出一些数, 满足数组中任意相邻的 3 个数最多有一个可被选中 (即对任意 $i, A[i-1], A[i], A[i+1]$ 三个数最多可被选中一个)。请设计一算法使得选出的数总和最大。(共 10 分)

4. 考虑这样一个出租车派单问题: 给定一个网络 $G = (V, D)$, 其中 $\forall v_i \in V$ 表示节点, $D = \{d_{ij}\}, v_i, v_j \in V$ 表示任意两个节点之间的行程距离, 满足三角不等式, 即 $\forall v_i, v_j, v_k$, 有 $d_{ij} + d_{jk} \geq d_{ik}$ 。假设现在有 n 辆出租车 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 和 m 个乘客 $R = \{r_1, r_2, \dots, r_m\}$, 其中 $n \geq m$ 。每辆出租车 $a_k \in A$ 的节点位置定义为 $v(a_k)$, 每个乘客 r_l 的位置定义为 $v(r_l)$ 。现在出租车平台公司希望为每个乘客安排一辆出租车, 目标是最小化空载距离和, 即所有的出租车到乘客的空载距离总和最小。如图所示, 有两辆出租车 a_1 和 a_2 , 他们所在节点分别是 v_1 和 v_4 , 同时有两个乘客 r_1 和 r_2 , 他们所在节点分别是 v_2 和 v_3 。如果将 a_1 分配给 r_1 , a_2 分配给 r_2 , 那么空载距离和为: $d_{12} + d_{34} = 10$ 。

现在某平台提出一种贪心方案, 步骤如下:

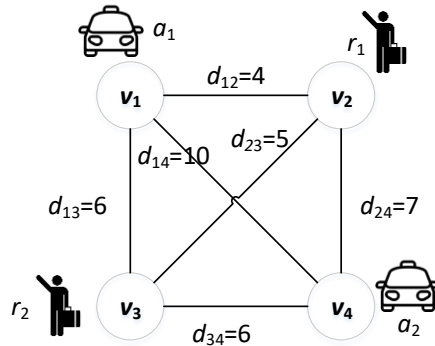
Step1: 对于任意的乘客 r_l 以及任意的出租车 a_k , 如果他们之间的距离, $d_{v(a_k)v(r_l)}$ 最短, 则匹配成功, 即将出租车 a_k 分配给乘客 r_l ;

Step2: 移除 Step 1 中匹配成功的出租车和乘客;

Step3: 重复 Step 2~3, 直到所有的乘客分配完毕。

如图所示, 首先匹配成功的是乘客 r_1 和出租车 a_1 , 因为他们之间的距离 $d_{v(a_1)v(r_1)} = 4$ 最短。然后匹配成功的是乘客 r_2 和出租车 a_2 。

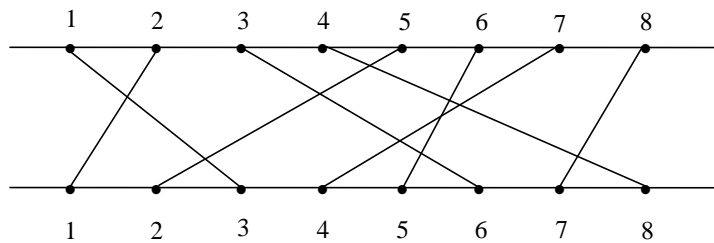
试问该贪心方法是否为最优方法? 如果不是, 请给出一个反例并且设计最优方法; 如果是, 请给出证明。(共 10 分)



5. 某电路板两侧分别有 n 个焊点，分别记做焊点 $1, 2, \dots, n$ ，如图所示。根据电路设计图，现在需要将顶层的焊点 i ($1 \leq i \leq n$)与底层的焊点 $\pi(i)$ 用导线联通，即需要 n 条直线 $(i, \pi(i))$ ($1 \leq i \leq n$)来连接 n 对焊点。

两条直线 $(i, \pi(i))$ 与 $(j, \pi(j))$ 相交，如果 $i < j$ 但 $\pi(i) > \pi(j)$ 成立的话。反之亦然。两条直线的交点称为交叉点。如图所示的例子中，一共有 9 个交叉点。

请设计一个分治算法为任意给定的 n 对焊点计算总共的交叉点个数。你设计的算法复杂度不能高于 $O(n \log n)$ 。(共 15 分)



6. X 数轴上从左到右有 n 个不等间距的点 $a[1, 2, \dots, n]$ ，给定一根长度为 L 的绳子，求绳子最多能覆盖其中的几个点。(共 15 分)

请设计一个 $O(n^2)$ 时间的算法。

请问是否存在 $O(n)$ 时间的算法？请尝试说明要点。

7. 假定 0/1 背包问题中，有 3 个背包，每个背包容量分别为 C_1, C_2, C_3 ，给定 n 个物品 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，每个物品 a_i 可表示为 (v_i, w_i) ，即价值和重量。请设计一个动态规划方法将物品装入这三个背包，使得每个背包装入物品重量不超过各自容量，且装入物品的总价值最大。(共 15 分)

8. 给定 n 个物体 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ，请分析随机取出两个物体的概率，并设计一个算法以等概率取出两个物体，给出算法思想及伪代码。(共 10 分)