รายวิชา 09131201
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์
(Numerical Methods for Computers)
บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข
(Numerical Differentiation and Numerical Integration)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Outline

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Table of Contents

Outline

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

จากนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ นิยามดังนี้

$$f'(x) = \lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ จุดใดๆ ในช่วงเปิดนี้ นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจาณาพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \tag{6.1}$$

เรียกสมการ (6.1) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสองพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{6.2}$$

เรียกสมการ (6.2) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 1**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสามพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \tag{6.3}$$

เรียกสมการ (6.3) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 2**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ** n นิยามโดย

$$\begin{aligned} f(x_{i+1}) =& f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \\ &+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n \end{aligned} \tag{6.4}$$

เมื่อ R_n คือเศษเหลือสำหรับค่าประมาณ นิยามโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \tag{6.5}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยแบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

1. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)**
2. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)**
3. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)**

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (6.4) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \tag{6.6}$$

จากนิยามของ R_n (6.5) และค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสำหรับค่าประมาณของสมการ (6.6) จะได้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i) \tag{6.7}$$

หรือ

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \tag{6.8}$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (6.6) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \tag{6.9}$$

เมื่อ

- Δf_i คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)
- $h = x_{i+1} - x_i$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง h ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ x_i และ x_{i-1} ได้ดังสมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{6.10}$$

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \tag{6.11}$$

เมื่อ

- ∇f_i คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)
- $h = x_i - x_{i-1}$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)(h) + \frac{2f^{(3)}(x_i)(h)^2}{3!} + \cdots$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

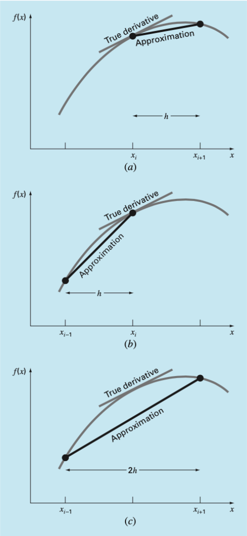
ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^2}{6} - \cdots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \tag{6.12}$$

เราจะเรียกสมการ (6.12) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (centered difference)**



รูปที่ 1: Graphical depiction of (a) forward, (b) backward, and (c) centered finite-divided-difference approximations of the first derivative.

ตัวอย่างที่ 6.1

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ (ค่าจริง $f'(0.5) = -0.9125$) เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้ มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ $f(x_{i+2})$ ในพจน์ของ $f(x_i)$ จะได้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \cdots \tag{6.13}$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (6.13) จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ดังนั้น

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \tag{6.14}$$

เราจะเรียกว่า สมการ (6.14) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Finite Divided Difference)**

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ในทำนองเดียวกัน **ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)** คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \qquad (6.15)$$

และ **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางอันดับสอง (Second centered finite divided difference)**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \qquad (6.16)$$

ตัวอย่างที่ 6.2

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

Table of Contents

HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^3}{3!} + \cdots \tag{7.1}$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2) \tag{7.2}$$

จากผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง นั่นคือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \tag{7.3}$$

HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

แทนสมการ (7.3) ในสมการ (7.1) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2}h + O(h^2) \qquad (7.4)$$

ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \qquad (7.5)$$

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 2: Forward finite-divided-difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 3: Backward finite-divided- difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

รูปที่ 4: Centered finite-divided- difference formulas

ตัวอย่างที่ 7.1

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.25$ โดยใช้วิธี high-accuracy divided-difference ต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h^2))$
2. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h^2))$
3. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^4))$