รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 1 การวิเคราะห์ความคลาดเคลื่อน (Error Analysis)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Outline

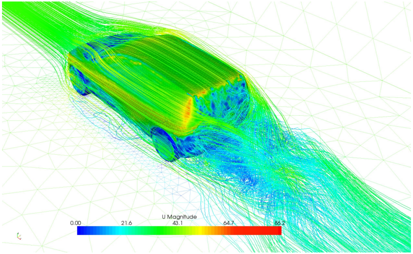
Table of Contents

Outline

บทนำ

บทนำ

- ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาใช้ในการประมาณค่าคำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนเพื่อให้ได้ค่าที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด
- การใช้คอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณสามารถเพิ่มความแม่นยำในการประมาณค่าให้ใกล้เคียงค่าจริงมากขึ้น



รูปภาพ: Navier-Stokes Equations (https://secretofflight.wordpress.com)

บทนำ

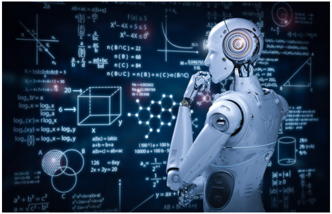
รูปภาพ: ที่มา www.freepik.com

เหตุผลที่ต้องใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข:

- ไม่มีคำตอบเชิงวิเคราะห์
- คำตอบเชิงวิเคราะห์หายากหรือไม่สามารถใช้ได้ในทางปฏิบัติ

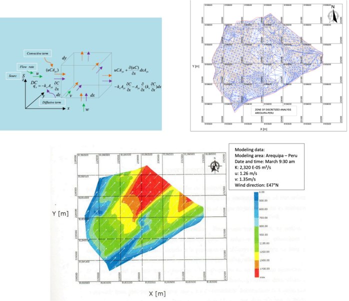
Applications of Numerical Methods

- ยากรณ์อากาศ (Weather Forecasting)
- วิทยาศาสตร์สิ่งแวดล้อม (Environmental Science)
- แบบจำลองทางการเงิน (Financial Modeling)
- การประมวลผลภาพ (Image Processing)
- วิทยาการเข้ารหัสลับ (Cryptography)
- การเรียนรู้ของเครื่อง (machine learning) และ การวิเคราะห์ข้อมูล (Data Analysis)



รูปภาพ: ที่มา https://stock.adobe.com/th/

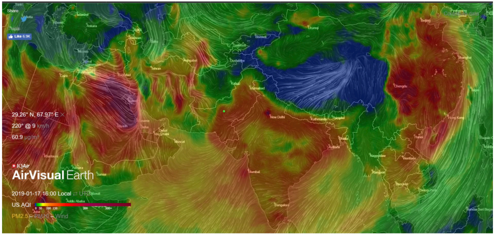
บทนำ



รูปภาพ: Simulation with the finite element method of air pollution with carbon monoxide in the City of Arequipa (Peru)

[1] A. V. Pérez1 & N. Pérez, Simulation with the finite element method of air pollution with carbon monoxide in the City of Arequipa (Peru), Air Pollution XXIV, 207, 23 (2016)

บทนำ

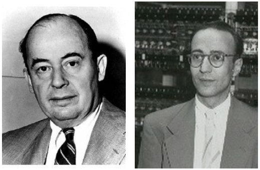


รูปภาพ: AirVisual Earth Shows Real Time Air Pollution in 3D

[1] https://forestrypedia.com/airvisual-earth-shows-real-time-air-pollution-in-3d/

จุดเริ่มต้นของ Modern numerical analysis

- ในปี คศ. 1947 John von Neumann และ Herman Goldstine ตีพิมพ์ผลงานวิชาการเรื่อง “Numerical Inverting of Matrices of High Order” (Bulletin of the AMS, Nov. 1947) ซึ่งเป็นหนึ่งในงานวิจัยเรื่องแรกๆ ที่ศึกษาข้อผิดพลาดในการปัดเศษ รวมทั้งได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับ “Scientific computing” ซึ่งเป็นแขนงวิชาที่มีความสำคัญอย่างมากในปัจจุบัน



(a) John von Neumann (b) Herman Goldstine

รูปภาพ

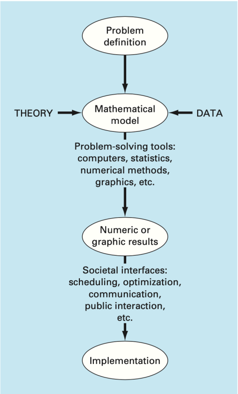
การคำนวณเชิงวิทยาศาสตร์ (Scientific computing)

การคำนวณเชิงวิทยาศาสตร์ (Scientific Computing [1]) คืองานคำนวณทางวิทยาศาสตร์ที่เป็นศาสตร์บริสุทธิ์ เป็นงานคำนวณที่ซับซ้อนเกินกว่ามนุษย์จะทำได้ เช่น ต้องการหาค่า π ที่มีขนาด 1 ล้านหลัก หรืองานพิสูจน์ August Mobius กล่าวว่าแผนที่ใดๆ ในโลกก็ตาม เราใช้สีระบายแตกต่างกันในแต่ละประเทศ เราสามารถใช้แค่เพียงสี่สีเท่านั้น จะสามารถระบายแผนที่ที่ไม่มีประเทศที่มีชายแดนติดกันต้องใช้สีเดียวกัน ทฤษฎีนี้เป็นที่รู้จักกันในชื่อว่าทฤษฎีสี่สี (four color theorem) นั่นเอง งานเหล่านี้จำเป็นต้องใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ

---

[1] `https://hpc-thai.com/?p=298`

ขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยระเบียบวิธีคำนวณเชิงตัวเลข



รูปภาพ: The engineering problem-solving process [1].

[1] Chapra, Steven C, and Raymond P. Canale. Numerical Methods for Engineers. Seventh Edition. New York: McGraw-Hill, 2015.

บทนำ

จำนวน (numbers) ในการคำนวณเชิงตัวเลข จะมีอยู่ 2 ประเภท ได้แก่ **จำนวนแม่นตรง (exact numbers)** และ**จำนวนโดยประมาณ (approximate numbers)**

1. จำนวนแม่นตรง (exact numbers) เช่น
   - 1, 2, 3, ...
   - 1/2, 3/2, $\sqrt{2}$,...
   - π, e,..
2. จำนวนโดยประมาณ (approximate numbers) เช่น
   - $\pi \approx 3.14159265359$
   - $e \approx 2.71828182846$

เลขนัยสำคัญ (Significant figure)

ตัวเลขที่แสดงความเที่ยงตรงและความถูกต้องของปริมาณที่วัดหรือคำนวณได้ ตัวเลขดังกล่าวนี้เรียกว่า **เลขนัยสำคัญ (Significant figure)** ตัวอย่างเช่น

- 3.14192, 0.666667 and 4.06867 มีเลขนัยสำคัญ 6 ตัว
- 0.00023 มีเลขนัยสำคัญ 2 ตัว นั่นคือ 2 และ 3 เพราะว่าเลขศูนย์ใช้เพื่อกำหนดตำแหน่งของจุดทศนิยมเท่านั้น
- 0.00123, 0.000123 และ 0.0000123 มีเลขนัยสำคัญ 3 ตัว

Outline

ค่าคลาดเคลื่อน (Errors)

นิยามของค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขเกิดขึ้นจากการใช้ค่าโดยประมาณแทนค่าจริงที่ได้จากการคำนวณทางคณิตศาสตร์หรือค่าจริงที่วัดได้จากการทดลอง นั่นคือ ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลขเกิดจากการนำค่าประมาณ (Approximation) มาใช้แทนค่าจริง

สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

สาเหตุของความคลาดเคลื่อนอาจเกิดได้หลายปัจจัยยกตัวอย่างเช่น

- **ค่าคลาดเคลื่อนจากข้อมูลเบื้องต้น**
  ในการวัดทางวิทยาศาสตร์ซึ่งเป็นแหล่งของข้อมูล ที่จะนำมาคำนวณมักจะมีค่าคลาดเคลื่อนอยู่เสมอ สิ่งนี้เป็นเรื่องธรรมชาติและคอมพิวเตอร์ไม่มีส่วน เกี่ยวข้องแต่ผู้คำนวณต้องไม่ลืมที่จะระมัดระวังและระลึกถึงในการแปรผลขั้นสุดท้าย

สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

- **ค่าคลาดเคลื่อนจากการตัดปลาย (truncation error)** เกิดจากการตัดทอนจำนวนพจน์ของการคำนวณ (อนุกรมอนันต์) ให้เป็นพจน์จำกัด เช่นอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้
  1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots$
  2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$

  เป็นต้น โดยการตัดค่าในพจน์ท้ายๆ ทิ้ง เพราะถือว่ามีค่าน้อยมาก

สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

- **ค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษ (round-off error)**
  ในการคำนวณเชิงตัวเลขจะเจอตัวเลขที่มีจำนวนตำแหน่งทศนิยมจำนวนมาก เช่น 3.14159265359... จึงจำเป็นต้องตัดเลขทิศนิยมดังกล่าวให้เป็นตัวเลขที่ใช้งานได้ตามหลักเลขนัยสำคัญ กระบวนการนี้เรียกว่า **การปัดเศษ (rounding off)** ดังนั้น การกำหนดจำนวนทศนิยมในการคำนวณเชิงตัวเลข หรือการเก็บค่าตัวเลขในคอมพิวเตอร์ซึ่งค่าผลลัพธ์ที่ได้มีทศนิยมมากเกินกว่าที่จะเก็บบันทึกไว้ได้ จำเป็นต้องมีการปัดเศษ เช่น ค่า $\pi = 3.14159265358979323846\ldots$ และ $e = 2.71828182845904523536\ldots$ เป็นต้น เป็นค่าตัวเลขที่เก็บไม่สามารถแทนค่าด้วยจำนวนที่แท้จริงได้ จึงมีค่าคลาดเคลื่อนจากการปัดเศษเกิดขึ้น

สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

- **ค่าคลาดเคลื่อนแพร่ขยาย (propagated error)**
  ในการคำนวณแต่ละขั้นตอน นอกจากค่าคลาดเคลื่อนที่อาจเกิดจากการคำนวณเองแล้ว ค่าคลาดเคลื่อนที่มีอยู่เดิมอาจถูกขยายเพิ่ม มากขึ้นจากการกระทำ บวก ลบ คูณ และหารในคอมพิวเตอร์ บางครั้งค่าคลาดเคลื่อนจะถูกขยาย ต่อเนื่องกันจนกระทั่งผลลัพธ์สุดท้ายผิดพลาดโดยสิ้นเชิง ซึ่งเป็นเรื่องที่ต้องระมัดระวัง

สาเหตุของความคลาดเคลื่อน

- **ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์**
  ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากความผิดพลาดของมนุษย์เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากผู้คำนวณเอง เช่น
  1. การคำนวณผิดพลาด
  2. การใส่เครื่องหมายผิด
  3. การเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่มีส่วนผิดผลาดและไม่ได้ตรวจสอบอย่างละเอียด เป็นต้น

ความแม่นยำ (Accuracy) และ ความเที่ยงตรง (Precision)

ค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดจากการคำนวณหรือการวัดสามารถกำหนดลักษณะได้โดยคำนึกถึงความแม่นยำ (Accuracy) และความเที่ยงตรง (Precision) เมื่อ

1. ความแม่นยำ (Accuracy) คือ สิ่งที่บอกให้ทราบว่าค่าที่คำนวณหรือวัดได้นั้นมีค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากน้อยเพียงใด
2. ความเที่ยงตรง (Precision) คือ ระดับความสม่ำเสมอหรือความคงที่ในการวัดของเครื่องมือวัด เมื่อมีการวัดซ้ำหลายๆ ครั้ง ในสภาพแวดล้อมเดียวกัน

ค่าคลาดเคลื่อน

ค่าคลาดเคลื่อนเชิงตัวเลข เกิดจากการนำค่าประมาณ (Approximation) มาใช้แทนค่าจริง

โดยที่ ความสัมพันธ์ระหว่างค่าคลาดเคลื่อน (error) ค่าจริง (exact value) และค่าประมาณ (approximate value) สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบสมการต่อไปนี้

$$\text{ค่าจริง} = \text{ค่าประมาณ} + \text{ค่าคลาดเคลื่อน} \tag{1.1}$$

กำหนดให้ E_t แทน ค่าคลาดเคลื่อน จะได้

$$E_t = \text{ค่าจริง} - \text{ค่าประมาณ} \tag{1.2}$$

เราจะนิยามค่าคลาดเคลื่อนในการคำนวณเชิงตัวเลขออกเป็น 4 ประเภท ดังนี้

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (Absolute Error : E_{abs})

ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ คือ ขนาดของค่าคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณซึ่งอยู่ในรูปแบบของค่าสัมบูรณ์ นิยามดังนี้

$$E_{abs} = |\,\text{ค่าจริง} \; - \; \text{ค่าประมาณ}\,| \tag{1.3}$$

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (Relative Error : E_{rel})

ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ คือ อัตราส่วนของคลาดเคลื่อนระหว่างค่าจริงกับค่าประมาณเมื่อเทียบกับค่าจริง นิยามดังนี้

$$E_{rel} = \frac{|\text{ ค่าจริง } - \text{ ค่าประมาณ }|}{|\text{ ค่าจริง }|} \text{ หรือ } E_{rel} = \frac{E_{abs}}{|\text{ ค่าจริง }|} \qquad (1.4)$$

หรือ คิดเป็นร้อยละ จะได้

$$\varepsilon_t = \frac{|\text{ ค่าจริง } - \text{ ค่าประมาณ }|}{|\text{ ค่าจริง }|} \times 100\% \qquad (1.5)$$

ซึ่งเรียกว่า ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a

ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : E_a นิยามดังนี้

$$E_a = \frac{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}|}{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย}|} \tag{1.6}$$

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a นิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย} - \text{ค่าประมาณก่อนสุดท้าย}|}{|\text{ค่าประมาณสุดท้าย}|} \times 100\% \tag{1.7}$$

ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้: ε_s

โดยทั่วไปแล้วการคำนวณเชิงตัวเลขจะมีการกำหนดขอบเขตของร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณในการคำนวณแต่ละครั้ง โดยควบคุมให้ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต่ำกว่าร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดไว้ โดยจะเรียกร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนนี้ว่า **ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (ε_s)** นั่นคือ เราจะหยุดการคำนวณเชิงตัวเลขในรอบที่ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต่ำกว่า ε_s เพราะฉะนั้น $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ดังนั้น ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ (ε_s) นิยามโดย

$$\varepsilon_s = (0.5 \times 10^{2-n})\% \tag{1.8}$$

เมื่อ n คือ ตำแหน่งของเลขนัยสำคัญที่น้อยที่สุด นอกจากนี้ ค่าประมาณที่ได้จะมีค่าร้อยละของความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ n

ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ ค่าจริง $= 0.4357$ และ ค่าประมาณ $= 0.4364$
จงหาค่าต่างๆ ต่อไปนี้

1. คลาดเคลื่อน (E)
2. ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (E_{abs})
3. ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (E_{rel})
4. ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

Error Estimates for Iterative Methods

ตัวอย่างที่ 1.2

จงประมาณค่า $e^{0.5}$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $e^{0.5} = 1.648721$ โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ e^x คือ

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

ทบทวน: อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ จุดใดๆ ในช่วงเปิดนี้ นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

กรณีที่ $x_0 = 0$ อนุกรมอนันต์ข้างต้นจะเรียกว่า อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series)

Function	**Maclaurin Series**
e^x	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad (\text{if } -1 < x < 1)$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (\text{if } -1 < x \le 1)$

รูปภาพ: Maclaurin Series.

อันดับ	ค่าประมาณ	ε_a	ε_t
1	1.000000000	-	39.346934029
2	1.500000000	33.333333333	9.020401043
3	1.625000000	7.692307692	1.438767797
4	1.645833333	1.265822785	0.175162256
5	1.648437500	0.157977883	0.017211563
6	1.648697917	0.015795293	0.001416494

ตาราง: ค่าประมาณของ $e^{0.5}$

แบบฝึกหัด 1

1. จงหาค่าคลาดเคลื่อน (E) ค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ (E_{abs}) ค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (E_{rel}) และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t) จากข้อต่อไปนี้
   1.1 ค่าจริง $= 10{,}000$ และ ค่าประมาณ $= 9{,}999$
   1.2 ค่าจริง $= \pi$ และ ค่าประมาณ $= 22/7$
   1.3 ค่าจริง $= e$ และ ค่าประมาณ $= 2.718$
   1.4 ค่าจริง $= \sqrt{2}$ และ ค่าประมาณ $= 1.414$

แบบฝึกหัด 1

2. จงประมาณค่า $\cos(\pi/3)$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $\cos(\pi/3) = 0.5$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ $\cos x$ คือ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

แบบฝึกหัด 1

3. จงประมาณค่า $\sin(\frac{\pi}{2})$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 5 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ $\sin x$ คือ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

แบบฝึกหัด 1

4. จงประมาณค่า $\arctan(\frac{\pi}{6})$ โดยใช้อนุกรมแมคคลอรีน (Maclaurin series expansion) และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 2 เมื่อกำหนดค่าจริงของ $\arctan(\frac{\pi}{6}) = 0.482348$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 6 ตำแหน่ง) โดยที่ อนุกรมแมคคลอรีนของ $\arctan x$ คือ

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

เมื่อ $|x| < 1$

แบบฝึกหัด 1

5. จงหาค่าประมาณของฟังก์ชัน $f(x) = \cos(x)$ โดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ อันดับศูนย์ ถึง อันดับหก กำหนดให้ $x_i = \frac{\pi}{4}$ เมื่อ $h = \frac{\pi}{12}$ (กำหนดให้ใช้ทศนิยม 9 ตำแหน่ง) พร้อมทั้ง ร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ε_t)

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1.1 $E = 1$, $E_{abs} = 1$, $E_{rel} = 0.0001$, $\varepsilon_t = 0.01$ %
   1.2 $E =$ -0.00126448, $E_{abs} = 0.00126448$, $E_{rel} = 0.00040249$, $\varepsilon_t = 0.04024994$ %
   1.3 $E = 0.00028183$, $E_{abs} = 0.00028183$, $E_{rel} = 0.00010368$, $\varepsilon_t = 0.01036789$ %
   1.4 $E = 0.00021356$, $E_{abs} = 0.00021356$, $E_{rel} = 0.00015101$, $\varepsilon_t = 0.01510114$ %
2. 0.499965
3. 1.004525
4. 0.523599
5. 0.499999988, $\varepsilon_t = 2.44 \times 10^{-6}$