# รายวิชา 09131201
# ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์
# (Numerical Methods for Computers)
# บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)


ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี


## Outline

## Table of Contents



## Table of Contents

# Outline



# บทนำ

การศึกษาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ มักจะพบปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยคือ การหาราก (Roots of equation) ของสมการในรูปแบบ

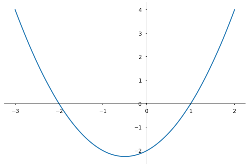
$$f(x) = 0$$

พิจารณาฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ การหารากของสมการ หรือคำตอบ (ผลเฉลย) ของสมการ คือค่าของ $x$ ที่ทำให้ $y = f(x) = 0$ เช่น สมการของฟังก์ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ $a, b$ และ $c$ เป็นค่าคงที่
ดังนั้น รากของสมการนี้คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 2.1

จงหารากของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$




รูปที่ 1: กราฟของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$

## บทนำ

สำหรับระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการ สามารถแบ่งประเภทเป็น 2 ประเภทดังนี้

- **ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)**
- **ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)**

## ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)

**ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)**
ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขตเป็นวิธีที่รู้ว่า คำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า $x$ จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า คร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ ซึ่งจะเป็นขอบเขตของช่วงที่จะหารากของสมการ วิธีแบบกำหนดขอบเขต จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2. ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

# ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)

**ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)**

การหาค่ารากของวิธีนี้ต้อง กำหนดค่าเดาเริ่มต้นในการคำนวณ 1 ค่าหรือมากกว่า 1 ค่า โดยไม่จำเป็นต้องคร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ วิธีแบบเปิด จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีทำซ้ำด้วยจุดตรึง (Fixed Point Iteration Method)
2. ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
3. ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

# Outline

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

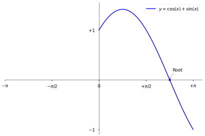
บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

**ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)**

## ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

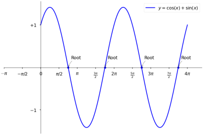
ระเบียบวิธีเชิงกราฟเป็นวิธีอย่างง่ายในการหาค่าประมาณของรากของสมการ $f(x) = 0$ โดยการเขียนกราฟของฟังก์ชันและจะสังเกตเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันตัดกับแกน $x$ ที่จุดใด จุดนั้น คือ **รากของสมการ (Roots of equation)** นั่นคือ จุด $x$ ที่ทำให้ $f(x) = 0$ แสดงได้ดังรูป 2




รูปที่ 2: กราฟของฟังก์ชันที่มีรากของสมการ 1 ราก

# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

รากของสมการอาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งค่า แสดงได้ดังรูป 3




รูปที่ 3: กราฟของฟังก์ชันที่มีรากของสมการหลายราก

# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

## ตัวอย่างที่ 2.2

จงหารากของสมการต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20.146843x}) - 40 \tag{2.1}$$

ในช่วง $[4, 20]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ

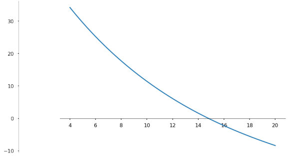
## ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

**วิธีทำ** แทนค่า $x$ ที่อยู่ช่วง $[4, 20]$ ในสมการที่ (2.1) จะได้ผลลัพธ์ดังตาราง ที่ 1

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 4 | 34.190 |
| 8 | 17.712 |
| 12 | 6.114 |
| 16 | -2.230 |
| 20 | -8.368 |

ตาราง 1: แสดงการประมาณค่ารากของสมการ
$f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20.146843x}) - 40$

## ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)




รูปที่ 4: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการได้เท่ากับ 14.75

จากตารางที่ (2.1) และรูปที่ (4) พบว่า เส้นโค้ง $f(x)$ ตัดแกน $x$ ระหว่าง 12 และ 16 (เครื่องหมายของฟังก์ชันต่างกัน) ดังนั้น รากของสมการมีค่าเท่ากับ 14.75

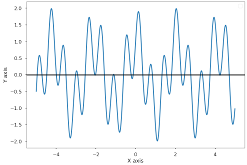
# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.3

จงหารากของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

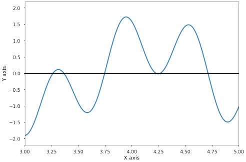
**วิธีทำ** จากสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งพบว่า มีรากของสมการหลายรากที่อยู่ในช่วง $[0, 5]$ ถ้าพิจารณาช่วง $[3, 5]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 6 และพิจารณาช่วง $[4.2, 4.3]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7

# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



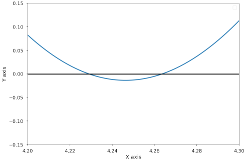

รูปที่ 5: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$

# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)




รูปที่ 6: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

# ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)




รูปที่ 7: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

## Outline



**ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)**

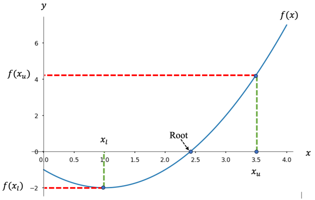
## ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- **วิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)** เป็นวิธีหาค่ารากของสมการทั้งเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น ซึ่งวิธีแบ่งครึ่งช่วงนี้เป็นวิธีที่รู้ว่า คำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า $x$ จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า โดยคร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ แล้วทำการแบ่งครึ่งช่วงเพื่อหารากของสมการ ซึ่งจะต้องเลือกช่วงที่ค่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายตรงข้ามกันเสมอ

## ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง $x_l$ ถึง $x_u$ โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$ แล้วจะมีค่ารากของสมการอย่างน้อยที่สุด 1 ค่า อยู่ระหว่าง $x_l$ ถึง $x_u$ แสดงดังรูปที่ 8

# ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)




รูปที่ 8: ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

# ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

**ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง**

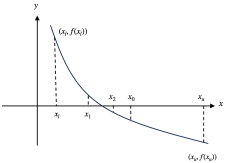
1. เลือก $x_l$ และ $x_u$ โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ $x_r$ โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง $(x_l, x_r)$ ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง $(x_r, x_u)$ ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว $x_r$ เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

## ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

กำหนดให้ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ มีค่าเท่ากับ $x_r$ ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ จะเห็นได้ว่า ค่าของ $x_r$ ในแต่ละรอบจะเลื่อนเข้าใกล้รากของสมการ แสดงดังรูปที่ 9




รูปที่ 9: การหาคำตอบของสมการ $f(x)$ ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

## ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ในปัญหาทางปฏิบัติ ค่ารากของสมการที่ได้จากการคำนวณอาจจะไม่ใช่คำตอบที่แท้จริง (exact) จึงไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r) = 0$ ในกรณีเช่นนี้ เราจำเป็นต้องนำค่าคลาดเคลื่อน ($\varepsilon$) มาเป็นเกณฑ์ตรวจสอบว่า รากของสมการทีได้ลู่เข้าสู่คำตอบที่แท้จริงหรือไม่ โดยพิจารณาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : $\varepsilon_a$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|x_r^{\text{New}} - x_r^{\text{Old}}|}{|x_r^{\text{New}}|} \times 100\% \qquad (2.2)$$

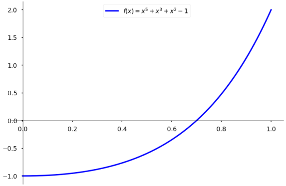
ตัวอย่างที่ 2.4

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000000000 | 1.0000000000 | 0.5000000000 | |
| 2 | 0.5000000000 | 1.0000000000 | 0.7500000000 | 33.3333333333 |
| 3 | 0.5000000000 | 0.7500000000 | 0.6250000000 | 20.0000000000 |
| 4 | 0.6250000000 | 0.7500000000 | 0.6875000000 | 9.0909090909 |
| 5 | 0.6875000000 | 0.7500000000 | 0.7187500000 | 4.3478260870 |
| 6 | 0.6875000000 | 0.7187500000 | 0.7031250000 | 2.2222222222 |
| 7 | 0.6875000000 | 0.7031250000 | 0.6953125000 | 1.1235955056 |
| 8 | 0.6953125000 | 0.7031250000 | 0.6992187500 | 0.5586592179 |
| 9 | 0.6992187500 | 0.7031250000 | 0.7011718750 | 0.2785515320 |
| 10 | 0.6992187500 | 0.7011718750 | 0.7001953125 | 0.1394700139 |
| 11 | 0.6992187500 | 0.7001953125 | 0.6997070312 | 0.0697836778 |

ตาราง 2: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.4 ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

# ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)




รูปที่ 10: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 1$

# ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

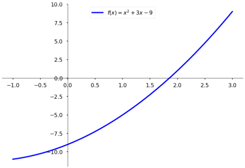
ตัวอย่างที่ 2.5
จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 7]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

**วิธีทำ** กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง แสดงค่าของ $x_l$, $x_u$ และ $x_r$ ได้ดังตารางที่ 3 พร้อมทั้งกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 9$ แสดงได้ดังรูปที่ 11 ดังนั้นรากของสมการคือ 1.5625000000

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.0000000000 | 7.0000000000 | 3.0000000000 | |
| 2 | -1.0000000000 | 3.0000000000 | 1.0000000000 | 200.0000000000 |
| 3 | 1.0000000000 | 3.0000000000 | 2.0000000000 | 50.0000000000 |
| 4 | 1.0000000000 | 2.0000000000 | 1.5000000000 | 33.3333333333 |
| 5 | 1.5000000000 | 2.0000000000 | 1.7500000000 | 14.2857142857 |
| 6 | 1.5000000000 | 1.7500000000 | 1.6250000000 | 7.6923076923 |
| 7 | 1.5000000000 | 1.6250000000 | 1.5625000000 | 4.0000000000 |

ตาราง 3: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.5 ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

## ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)




รูปที่ 11: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 9$

# Outline

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

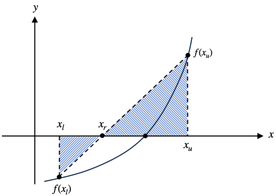
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

**ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)**

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

**ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)** จะคำนวณรากของสมการจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(x_l, f(x_l))$ และ $(x_u, f(x_u))$ กับแกน $x$ แทนการแบ่งครึ่งช่วงปิด $[a, b]$ ดังรูปที่ 12

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)




รูปที่ 12: False position method

# ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

พิจารณาจากรูปที่ 12 และใช้กฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \tag{2.3}$$

ดังนั้น สูตรการหาค่ารากของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ คือ

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{2.4}$$

# ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

**ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)**

1. เลือก $x_l$ และ $x_u$ โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ $x_r$ โดย

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   - 3.1 ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง $(x_l, x_r)$ ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - 3.2 ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง $(x_r, x_u)$ ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - 3.3 ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว $x_r$ เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.6

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.0000000000 | 1.0000000000 | 0.3333333333 | |
| 2 | 0.3333333333 | 1.0000000000 | 0.5317919075 | 37.3188405797 |
| 3 | 0.5317919075 | 1.0000000000 | 0.6290354316 | 15.4591489095 |
| 4 | 0.6290354316 | 1.0000000000 | 0.6712659174 | 6.2911708683 |
| 5 | 0.6712659174 | 1.0000000000 | 0.6884979332 | 2.5028420491 |
| 6 | 0.6884979332 | 1.0000000000 | 0.6953367364 | 0.9835239343 |
| 7 | 0.6953367364 | 1.0000000000 | 0.6980198915 | 0.3843952188 |
| 8 | 0.6980198915 | 1.0000000000 | 0.6990678088 | 0.1499020904 |
| 9 | 0.6990678088 | 1.0000000000 | 0.6994763428 | 0.0584057023 |

ตาราง 4: แสดงการคำนวณหาค่ารากสมการในตัวอย่างที่ 2.6 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.7

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ แสดงค่าของ $x_l$ $x_u$ และ $x_r$ ได้ดังตารางที่ 5 ดังนั้นรากของสมการ คือ 1.8376686475

# ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.0000000000 | 5.0000000000 | 0.5714285714 | |
| 2 | 0.5714285714 | 5.0000000000 | 1.3833333333 | 58.6919104991 |
| 3 | 1.3833333333 | 5.0000000000 | 1.6962699822 | 18.4485165794 |
| 4 | 1.6962699822 | 5.0000000000 | 1.8028943030 | 5.9140638789 |
| 5 | 1.8028943030 | 5.0000000000 | 1.8376686475 | 1.8923076540 |

ตาราง 5: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.7 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

# ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

**ข้อสังเกต 2.1**

จากตัวอย่าง 2.5 และ ตัวอย่าง 2.7 พบว่า ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ลู่เข้าหารากของสมการได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง เมื่อเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำ โดยที่ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5% ($\varepsilon_a < 5\%$)

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ดูเหมือนจะเป็นวิธีแบบกำหนดขอบเขตที่ลู่เข้าหารากของสมการได้รวดเร็ว แต่ก็มีบางกรณีที่วิธีนี้ก็ทำงานได้ไม่ดี ซึ่งมีบางกรณีที่ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

### ตัวอย่างที่ 2.8

จงหารากของสมการ $f(x) = x^{10} - 1$ ในช่วง $[0, 1.3]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

- กำหนดให้ $f(x) = x^{10} - 1$ โดยใช้ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 6 และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 7
- จากตารางที่ 6 พบว่า เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า $\varepsilon_a$ มีค่าเท่ากับ 0.468750 % ในขณะที่ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า $\varepsilon_a$ มีค่าเท่ากับ 52.741685 ซึ่งแสดงดังตารางที่ 7
- ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าหารากของสมการได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000000 | 1.300000 | 0.650000 | 100.000000 | 35.000000 |
| 1 | 0.650000 | 1.300000 | 0.975000 | 33.333333 | 2.500000 |
| 2 | 0.975000 | 1.300000 | 1.137500 | 14.285714 | 13.750000 |
| 3 | 0.975000 | 1.137500 | 1.056250 | 7.692308 | 5.625000 |
| 4 | 0.975000 | 1.056250 | 1.015625 | 4.000000 | 1.562500 |
| 5 | 0.975000 | 1.015625 | 0.995313 | 2.040816 | 0.468750 |

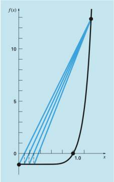
ตาราง 6: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

| $i$ | $x_l$ | $x_u$ | $x_r$ | $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.000000 | 1.300000 | 0.094300 | 100.000000 | 90.570040 |
| 1 | 0.094300 | 1.300000 | 0.181759 | 48.118299 | 81.824113 |
| 2 | 0.181759 | 1.300000 | 0.262874 | 30.857040 | 73.712599 |
| 3 | 0.262874 | 1.300000 | 0.338105 | 22.250800 | 66.189490 |
| 4 | 0.338105 | 1.300000 | 0.407878 | 17.106298 | 59.212208 |
| 5 | 0.407878 | 1.300000 | 0.472583 | 13.691820 | 52.741685 |

ตาราง 7: แสดงการคำนวณหาค่ารากสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

## ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)




รูปที่ 13: แสดงการลู่เข้าสู่ค่ารากของงามการของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) ของตัวอย่างที่ 2.8

**แบบฝึกหัด 2.1**

1. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   - 1.1 $x^2 - 4x + 9 = 0$
   - 1.2 $x^3 + x^2 - 1 = 0$
   - 1.3 $5x \log_{10} x - 6 = 0$
   - 1.4 $x^2 + x - \cos x = 0$
2. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีวางผิดที่ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   - 2.1 $x^3 + x^2 + x + 7 = 0$
   - 2.2 $x^3 - x - 4 = 0$
   - 2.3 $x = 3x^{-x}$
   - 2.4 $x \tan x + 1 = 0$
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

**เฉลยแบบฝึกหัด**

1. 1.1 2.706
   1.2 0.755
   1.3 2.741
   1.4 0.550
2. 2.1 2.105
   2.2 1.796
   2.3 1.0499
   2.4 2.798

# Outline

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

2.1 บทนำ

2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

**ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)**

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงอย่างง่ายนี้อันดับแรกจะต้องแปลง สมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$x = g(x) \tag{2.5}$$

โดยมีสมบัติว่า สำหรับค่า $x$ ใดๆ ถ้า $x = g(x)$ แล้วจะต้องได้ว่า $f(x) = 0$
ตัวอย่างเช่น

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

สามารถเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น

$$x = \sqrt{\frac{2}{1+x}}, \quad x = \sqrt{2 - x^3}, \quad x = (2 - x^2)^{1/3}$$

ซึ่งสามารถหาค่ารากของสมการได้

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

กำหนดให้ $x_0$ เป็นค่ารากโดยประมาณของสมการ 2.5 แล้วแทนค่า $x_0$ ในสมการ 2.5 จะได้การประมาณค่าครั้งที่ 1 ดังนี้

$$x_1 = g(x_0)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการข้างต้น จะได้

$$x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), ..., x_{i+1} = g(x_i)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, ...$

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง คือ

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.6}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, ...$
และค่าคลาดเคลื่อน จะพิจารณาจาก

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

โดยที่ $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

**ขั้นตอนระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง**

1. แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$
2. เลือกค่าเริ่มต้น $x_0$
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = g(x_i)$
4. นำค่า $x_{i+1}$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า $x_{i+1}$ คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

**ตัวอย่างที่ 2.9**

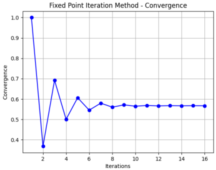
จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงอย่างง่าย (Simple Fixed-point Iteration Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | 100.00000000 |
| 1 | 1.00000000 | 100.00000000 | 76.32228356 |
| 2 | 0.36787944 | 171.82818285 | 35.13465686 |
| 3 | 0.69220063 | 46.85363946 | 22.05039533 |
| 4 | 0.50047350 | 38.30914659 | 11.75536952 |
| 5 | 0.60624354 | 17.44678968 | 6.89424450 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 12 | 0.56641473 | 0.35556841 | 0.12846081 |
| 13 | 0.56755664 | 0.20119652 | 0.07288234 |
| 14 | 0.56690891 | 0.11425564 | 0.04132608 |
| 15 | 0.56727623 | 0.06475157 | 0.02344067 |
| 16 | 0.56706790 | 0.03673877 | 0.01329322 |

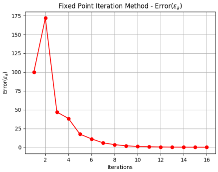
ตาราง 8: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)



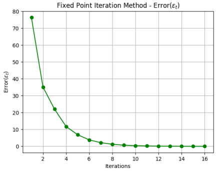

รูปที่ 14: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

# ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)




รูปที่ 15: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ($\varepsilon_a$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

# ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)




รูปที่ 16: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ( $\varepsilon_t$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

### ข้อสังเกต 2.2

- ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงเป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยทั่วไปสามารถจัดรูปสมการ $x = g(x)$ ได้หลายรูปแบบ เช่น กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ จัดรูปจะได้ $x = \dfrac{x^2+6}{4}$ หรือ $x = \sqrt{4x-6}$ จะเห็นได้ว่า $g(x)$ มีหลายฟังก์ชัน
- ซึ่งจะทราบได้อย่างไรว่าจะเลือกฟังก์ชันใดในการหาค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่ายที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า ดังนั้น จำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าสู่รากของสมการ โดยเงื่อนไขดังกล่าวคือ $|g'(x)| < 1$
- ดังนั้น จะสามารถเลือกฟังก์ชันใดก็ได้ที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ เมื่อ $|g'(x)| < 1$

## ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

### ตัวอย่างที่ 2.10

จากตัวอย่างที่ 2.9 นั่นคือ $g(x) = e^{-x}$ จะได้

$$g'(x) = -e^{-x}$$

สำหรับ $x \in [0, 1]$ จะได้ $|g'(x)| < 1$
ดังนั้น $g(x) = e^{-x}$ สำหรับ $x \in [0, 1]$ ให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ

## วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

สำหรับการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟสองเส้นนี้ อันดับแรกจะต้องแปลง สมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$f_1(x) = f_2(x)$$

ดังนั้นในการพิจารณากราฟจะมี 2 สมการ คือ

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{และ} \quad y_2 = f_2(x)$$

โดยการสร้างกราฟของฟังก์ชัน $y_1$ และ $y_2$ ซึ่งอาศัยหลักการที่กราฟของฟังก์ชันสองฟังก์ชันตัดกัน ตรงบริเวณจุดตัดกันของกราฟ คือ ค่ารากของสมการ ซึ่งเราจะเรียกวิธีนี้ว่า **วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)**

## วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

### ตัวอย่างที่ 2.11

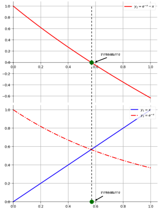
จงหารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$ โดยใช้วิธีเชิงกราฟสองเส้น

## วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

| $x$ | $f_1(x)$ | $f_2(x)$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1.00000000 |
| 0.2 | 0.2 | 0.81873075 |
| 0.4 | 0.4 | 0.67032005 |
| 0.6 | 0.6 | 0.54881164 |
| 0.8 | 0.8 | 0.44932896 |
| 1 | 1 | 0.36787944 |

ตาราง 9: แสดงค่าจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงกราฟสองเส้นของตัวอย่างที่ 2.9

## วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)




รูปที่ 17: กราฟแสดงการหาค่ารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$

## Outline

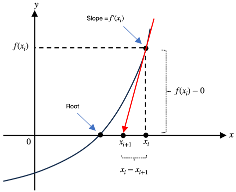


**ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)**

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ระเบียบวิธีนี้จะกำหนดค่าเริ่มต้นเพียงค่าเดียวเพื่อที่จะหาค่ารากของสมการ นั่นคือ ถ้า $x_i$ เป็นค่าเริ่มต้นของการประมาณค่ารากของสมการ แล้วสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะตัดแกน $x$ ที่จุด $x_{i+1}$ โดยจุดดังกล่าวจะเป็นการประมาณค่ารากของสมการที่ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้นจากจุดเดิม ดังรูปที่ 18

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)




รูปที่ 18: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยอาศัยความชัน

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

จากรูปที่ 18 พิจารณาความชัน ของฟังก์ชันที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

เพราะฉะนั้น รูปแบบทั่วไปคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (2.7)$$

ซึ่งสมการ (2.7) เรียกว่า **สูตรนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson formula)**

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

**ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน**

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น $x_0$
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
4. นำค่า $x_{i+1}$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100\%$$

   และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า $x_{i+1}$ คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.12

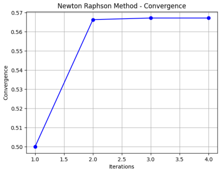
จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง = 0.56714329)

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | - | 100.00000000 |
| 1 | 0.50000000 | 100.00000000 | 11.83885822 |
| 2 | 0.56631100 | 11.70929098 | 0.14675071 |
| 3 | 0.56714317 | 0.14672871 | 0.00002203 |
| 4 | 0.56714329 | 0.00002211 | 0.00000007 |

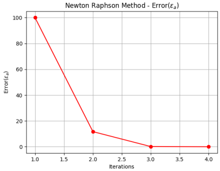
ตาราง 10: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



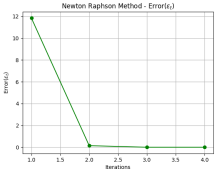

รูปที่ 19: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)




รูปที่ 20: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ($\varepsilon_a$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)




รูปที่ 21: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ( $\varepsilon_t$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12


# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)


### ตัวอย่างที่ 2.13

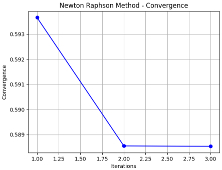
จงหารากของสมการ $e^x \sin(x) - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5$ และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3

# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a$ |
|---|---|---|
| 1 | 0.59366571 | 15.77751665 |
| 2 | 0.58854847 | 0.86946781 |
| 3 | 0.58853274 | 0.00267138 |

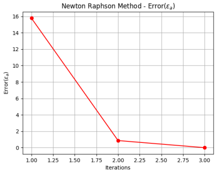
ตาราง 11: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

# ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)




รูปที่ 22: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

## ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)




รูปที่ 23: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ($\varepsilon_a$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

### แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีจุดตรึงอย่างง่าย เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 4 ตำแหน่ง
   - 1.1 $e^x = 3x$
   - 1.2 $x = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
   - 1.3 $1 + x^2 = x^3$
   - 1.4 $x - \sin x = 0.5$
2. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   - 2.1 $x^{\sin 2} - 4 = 0$
   - 2.2 $e^x = 4x$
   - 2.3 $x^3 - 5x + 3 = 0$
   - 2.4 $xe^x = \cos x$
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

**เฉลยแบบฝึกหัด**

1. 1.1 0.6190
   1.2 0.4656
   1.3 1.4660
   1.4 1.4970
2. 2.1 4.5932
   2.2 0.3574
   2.3 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6470, x_2 = 0.65656, \ldots$
   2.4 $x_0 = 0.5, x_1 = 0.5180, x_2 = 0.5180, \ldots$

# Outline

บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

**ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)**

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

จากระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน นั่นคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.8}$$

จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันต้องมีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งในบางฟังก์ชันมีรูปแบบที่ซับซ้อนและหาอนุพันธ์ได้ลำบาก ทำให้การหาค่ารากของสมการจะยุ่งยากมากขึ้น เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว **ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)** จะแทนค่า $f'(x_i)$ ในสมการ (2.8) โดยการประมาณค่าที่สามารถคำนวณได้ง่ายขึ้น

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

เนื่องจาก อนุพันธ์ของฟังก์ชันนิยามโดย

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

สำหรับ $h$ มีค่าน้อยมากๆ จะได้

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x = x_i$ และ $h = x_{i-1} - x_i$ จะได้

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \tag{2.9}$$

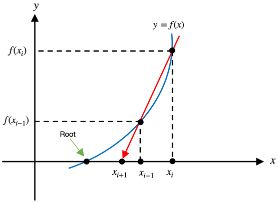
## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

แทนค่า (2.9) ใน (2.8) จะได้

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2.10}$$

ซึ่งสมการ (2.10) เรียกว่า **สูตรเซแคนต์ (Secant formula)**

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)




รูปที่ 24: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยระเบียบวิธีเซแคนต์

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

**ขั้นตอนระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)**

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น $x_0$
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$
4. นำค่า $x_{i+1}$ ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า $x_{i+1}$ คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

# ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

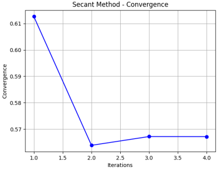
**ตัวอย่างที่ 2.14**
จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method) กำหนดให้ $\varepsilon_s = 0.05\%$ และค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0$ และ $x_0 = 1$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

# ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_t$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.61269984 | 63.21205588 | 8.03263436 |
| 2 | 0.56383839 | 8.66586039 | 0.58272766 |
| 3 | 0.56717036 | 0.58747239 | 0.00477277 |
| 4 | 0.56714331 | 0.00476984 | 0.00000293 |

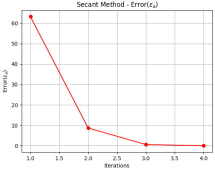
ตาราง 12: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



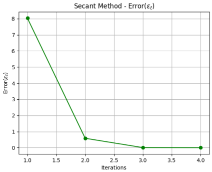

รูปที่ 25: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)




รูปที่ 26: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ($\varepsilon_a$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

## ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)




รูปที่ 27: แสดงค่าคลาดเคลื่อน ( $\varepsilon_t$) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

## Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

### ตัวอย่างที่ 2.15

จงหารากของสมการ $f(x) = \ln x$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

**วิธีทำ** กำหนดให้ $f(x) = \ln x = 0$ $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ สามารถหาค่ารากของสมการได้ดังตารางที่ 13 และ 14 จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ในการประมาณค่ารากของสมการจะลู่เข้าสู่คำตอบ ส่วนการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์จะลู่ออกจากคำตอบ

## Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a(\%)$ | $\varepsilon_t(\%)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.85463498 | 0.61768790 | 85.46349805 |
| 2 | 1.21630782 | 0.19581989 | 21.63078185 |
| 3 | 1.05852096 | 0.05687262 | 5.85209625 |
| 4 | 1.01616935 | 0.01604002 | 1.61693498 |
| 5 | 1.00449491 | 0.00448483 | 0.44949065 |

ตาราง 13: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ของตัวอย่างที่ 2.15

## Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

| $i$ | $x_i$ | $\varepsilon_a(\%)$ | $\varepsilon_t(\%)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.85463498 | 169.59482877 | 85.46349805 |
| 2 | -0.10438079 | -1876.79718477 | 110.43807924 |

ตาราง 14: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.15


รูปที่ 28: การเปรียบเทียบร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ ($\epsilon_t$) ของทุกระเบียบวิธีเพื่อหาค่ารากของ $f(x) = e^{-x} - x$

**แบบฝึกหัด 2.3**

1. จงหาค่ารากของสมการ $x^{2.2} = 69$ ที่อยู่ในช่วง $[5, 8]$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า $0.05\%$
2. จงหาค่ารากของฟังก์ชัน $f(x) = \cos x - x$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0.5$ และ $x_0 = \pi/4$ เมื่อค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต้องน้อยกว่า $0.00000004$
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

**เฉลยแบบฝึกหัด**

1. 6.85236.
2. 0.73908518