รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

July 14, 2024

Outline

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

Table of Contents

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

Table of Contents

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
- 2.1 บทนำ
- 2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
- 2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
- 2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
- 2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
- 2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
- 2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

บทนำ

การศึกษาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ มักจะพบปัญหาที่เกิดขึ้นบ่อยคือ การหาราก (Roots of equation) ของสมการในรูปแบบ

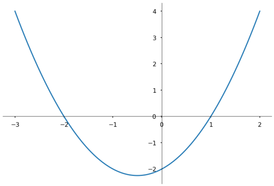
$$f(x) = 0$$

พิจารณาฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร $y = f(x)$ การหารากของสมการ หรือคำตอบ (ผลเฉลย) ของสมการ คือค่าของ x ที่ทำให้ $y = f(x) = 0$ เช่น สมการของฟังก์ $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ โดยที่ a, b และ c เป็นค่าคงที่
ดังนั้น รากของสมการนี้คือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ตัวอย่างที่ 2.1

จงหารากของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$



รูปที่ 1: กราฟของสมการ $f(x) = x^2 + x - 2 = 0$

บทนำ

สำหรับระเบียบวิธีการหาค่ารากของสมการ สามารถแบ่งประเภทเป็น 2 ประเภทดังนี้

- **ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)**
- **ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)**

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)

ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขต (Bracketing method)
ระเบียบวิธีแบบกำหนดขอบเขตเป็นวิธีที่รู้ว่า คำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า คร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ ซึ่งจะเป็นขอบเขตของช่วงที่จะหารากของสมการ วิธีแบบกำหนดขอบเขต จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2. ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีแบบเปิด (Open method)

การหาค่ารากของวิธีนี้ต้อง กำหนดค่าเดาเริ่มต้นในการคำนวณ 1 ค่าหรือ มากกว่า 1 ค่า โดยไม่จำเป็นต้องคร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ วิธีแบบเปิด จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้คือ

1. ระเบียบวิธีทำซ้ำด้วยจุดตรึง (Fixed Point Iteration Method)
2. ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
3. ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

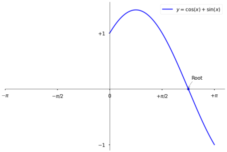
1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

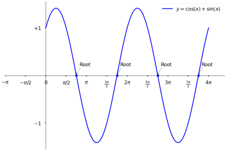
ระเบียบวิธีเชิงกราฟเป็นวิธีอย่างง่ายในการหาค่าประมาณของรากของสมการ $f(x) = 0$ โดยการเขียนกราฟของฟังก์ชันและจะสังเกตเห็นว่า กราฟของฟังก์ชันตัดกับแกน x ที่จุดใด จุดนั้น คือ **รากของสมการ (Roots of equation)** นั่นคือ จุด x ที่ทำให้ $f(x) = 0$ แสดงได้ดังรูป 2



รูปที่ 2: กราฟของฟังก์ชันที่มีรากของสมการ 1 ราก

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

รากของสมการอาจจะมีได้มากกว่าหนึ่งค่า แสดงได้ดังรูป 3



รูปที่ 3: กราฟของฟังก์ชันที่มีรากของสมการหลายราก

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.2

จงหารากของสมการต่อไปนี้

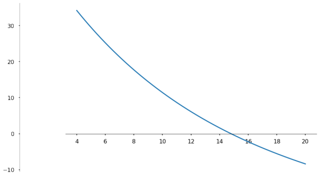
$$f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20.146843x}) - 40 \tag{2.1}$$

ในช่วง $[4, 20]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ

วิธีทำ แทนค่า x ที่อยู่ช่วง $[4, 20]$ ในสมการที่ (2.1) จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 1

x	$f(x)$
4	34.190
8	17.712
12	6.114
16	-2.230
20	-8.368

ตาราง 1: แสดงการประมาณค่ารากของสมการ $f(x) = \frac{668.06}{x}(1 - e^{-0.20.146843x}) - 40$



รูปที่ 4: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการได้เท่ากับ 14.75

จากตารางที่ (2.1) และรูปที่ (4) พบว่า เส้นโค้ง $f(x)$ ตัดแกน x ระหว่าง 12 และ 16 (เครื่องหมายของฟังก์ชันต่างกัน) ดังนั้น รากของสมการมีค่าเท่ากับ 14.75

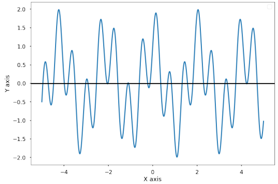
ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.3

จงหารากของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

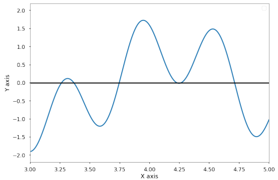
วิธีทำ จากสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$ สามารถเขียนกราฟได้ดังรูปที่ 5 ซึ่งพบว่า มีรากของสมการหลายรากที่อยู่ในช่วง $[0, 5]$ ถ้าพิจารณาช่วง $[3, 5]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 6 และพิจารณาช่วง $[4.2, 4.3]$ จะได้รากของสมการซึ่งแสดงได้ดังรูปที่ 7

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



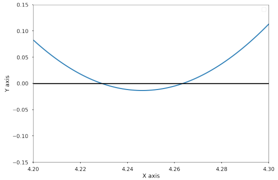
รูปที่ 5: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[0, 5]$

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 6: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 7: กราฟของสมการ $\sin(10x) + \cos(3x) = 0$ ในช่วง $[3, 5]$ (ตัวอย่างที่ 2.3)

Outline

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

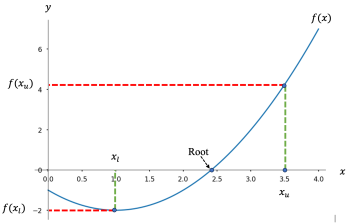
ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- **วิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)** เป็นวิธีหาค่ารากของสมการทั้งเชิงเส้น และไม่เชิงเส้น ซึ่งวิธีแบ่งครึ่งช่วงนี้เป็นวีธีที่รู้ว่า คำตอบจะต้องอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งของค่า x จึงทำการกำหนดค่าเริ่มต้นสองค่า โดยคร่อมรากใดรากหนึ่งของสมการ แล้วทำการแบ่งครึ่งช่วงเพื่อหารากของสมการ ซึ่งจะต้องเลือกช่วงที่ค่าฟังก์ชันมีเครื่องหมายตรงข้ามกันเสมอ

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

- กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในช่วง x_l ถึง x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$ แล้วจะมีค่ารากของสมการอย่างน้อยที่สุด 1 ค่า อยู่ระหว่าง x_l ถึง x_u แสดงดังรูปที่ 8



รูปที่ 8: ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

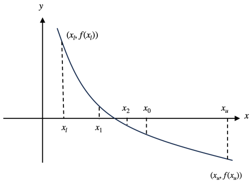
1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   - ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

กำหนดให้ $x_0, x_1, x_2, ...$ มีค่าเท่ากับ x_r ในแต่ละรอบของการทำซ้ำ จะเห็นได้ว่า ค่าของ x_r ในแต่ละรอบจะเลื่อนเข้าใกล้รากของสมการ แสดงดังรูปที่ 9



รูปที่ 9: การหาคำตอบของสมการ $f(x)$ ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ในปัญหาทางปฏิบัติ ค่ารากของสมการที่ได้จากการคำนวณอาจจะไม่ใช่คำตอบที่แท้จริง (exact) จึงไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f(x_l)f(x_r) = 0$ ในกรณีเช่นนี้ เราจำเป็นต้องนำค่าคลาดเคลื่อน (ε) มาเป็นเกณฑ์ตรวจสอบว่า รากของสมการที่ได้ลู่เข้าสู่คำตอบที่แท้จริงหรือไม่ โดยพิจารณาร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณ : ε_a ซึ่งนิยามดังนี้

$$\varepsilon_a = \frac{|x_r^{\text{New}} - x_r^{\text{Old}}|}{|x_r^{\text{New}}|} \times 100\% \qquad (2.2)$$

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

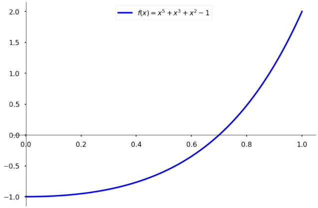
ตัวอย่างที่ 2.4

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	0.0000000000	1.0000000000	0.5000000000	
2	0.5000000000	1.0000000000	0.7500000000	33.3333333333
3	0.5000000000	0.7500000000	0.6250000000	20.0000000000
4	0.6250000000	0.7500000000	0.6875000000	9.0909090909
5	0.6875000000	0.7500000000	0.7187500000	4.3478260870
6	0.6875000000	0.7187500000	0.7031250000	2.2222222222
7	0.6875000000	0.7031250000	0.6953125000	1.1235955056
8	0.6953125000	0.7031250000	0.6992187500	0.5586592179
9	0.6992187500	0.7031250000	0.7011718750	0.2785515320
10	0.6992187500	0.7011718750	0.7001953125	0.1394700139
11	0.6992187500	0.7001953125	0.6997070312	0.0697836778

ตาราง 2: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.4 ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)



รูปที่ 10: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 - 1$

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ตัวอย่างที่ 2.5

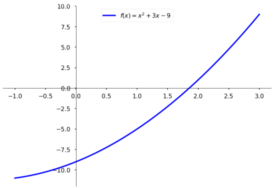
จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 7]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง แสดงค่าของ x_l, x_u และ x_r ได้ดังตารางที่ 3 พร้อมทั้งกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 9$ แสดงได้ดังรูปที่ 11 ดังนั้นรากของสมการ คือ 1.5625000000

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	-1.0000000000	7.0000000000	3.0000000000	
2	-1.0000000000	3.0000000000	1.0000000000	200.0000000000
3	1.0000000000	3.0000000000	2.0000000000	50.0000000000
4	1.0000000000	2.0000000000	1.5000000000	33.3333333333
5	1.5000000000	2.0000000000	1.7500000000	14.2857142857
6	1.5000000000	1.7500000000	1.6250000000	7.6923076923
7	1.5000000000	1.6250000000	1.5625000000	4.0000000000

ตาราง 3: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.5 ด้วยระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)



รูปที่ 11: กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x - 9$

Outline

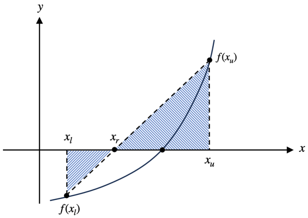
1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)

2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) จะคำนวณรากของสมการจากความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยมที่เกิดขึ้นจากการลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด $(x_l, f(x_l))$ และ $(x_u, f(x_u))$ กับแกน x แทนการแบ่งครึ่งช่วงปิด $[a, b]$ ดังรูปที่ 12



รูปที่ 12: False position method

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

พิจารณาจากรูปที่ 12 และใช้กฎของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \tag{2.3}$$

ดังนั้น สูตรการหาค่ารากของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ คือ

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{2.4}$$

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ขั้นตอนวิธีของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

1. เลือก x_l และ x_u โดยที่ $f(x_l)$ และ $f(x_u)$ มีเครื่องหมายตรงกันข้าม หรือเมื่อ $f(x_l)f(x_u) < 0$
2. ประมาณค่ารากของสมการ x_r โดย

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)}$$

3. ตรวจสอบเงื่อนไข ต่อไปนี้
   1. ถ้า $f(x_l)f(x_r) < 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_l, x_r) ดังนั้น กำหนดให้ $x_u = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   2. ถ้า $f(x_l)f(x_r) > 0$ แล้ว รากอยู่ในช่วง (x_r, x_u) ดังนั้น กำหนดให้ $x_l = x_r$ และกลับไปยังขั้นตอนที่ 2
   3. ถ้า $f(x_l)f(x_r) = 0$ แล้ว x_r เป็นรากของสมการ และออกจากการคำนวณ

ตัวอย่างที่ 2.6

จงหารากของสมการ $x^5 + x^3 + x^2 - 1 = 0$ ในช่วง $[0, 1]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) กำหนดร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 0.1%

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	0.0000000000	1.0000000000	0.3333333333	
2	0.3333333333	1.0000000000	0.5317919075	37.3188405797
3	0.5317919075	1.0000000000	0.6290354316	15.4591489095
4	0.6290354316	1.0000000000	0.6712659174	6.2911708683
5	0.6712659174	1.0000000000	0.6884979332	2.5028420491
6	0.6884979332	1.0000000000	0.6953367364	0.9835239343
7	0.6953367364	1.0000000000	0.6980198915	0.3843952188
8	0.6980198915	1.0000000000	0.6990678088	0.1499020904
9	0.6990678088	1.0000000000	0.6994763428	0.0584057023

ตาราง 4: แสดงการคำนวณหาค่ารากสมการในตัวอย่างที่ 2.6 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ตัวอย่างที่ 2.7

จงหารากของสมการ $x^2 + 3x - 9 = 0$ ในช่วง $[-1, 5]$ โดยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ กำหนดค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5%

กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 9$ โดยใช้กระบวนการระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ แสดงค่าของ x_l x_u และ x_r ได้ดังตารางที่ 5 ดังนั้นรากของสมการ คือ 1.8376686475

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a
1	-1.0000000000	5.0000000000	0.5714285714	
2	0.5714285714	5.0000000000	1.3833333333	58.6919104991
3	1.3833333333	5.0000000000	1.6962699822	18.4485165794
4	1.6962699822	5.0000000000	1.8028943030	5.9140638789
5	1.8028943030	5.0000000000	1.8376686475	1.8923076540

ตาราง 5: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.7 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ข้อสังเกต 2.1

จากตัวอย่าง 2.5 และ ตัวอย่าง 2.7 พบว่า ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ลู่เข้าหารากของสมการได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง เมื่อเทียบจำนวนรอบของการทำซ้ำโดยที่ค่าคลาดเคลื่อนเปรียบเทียบกับค่าประมาณต้องน้อยกว่า 5% ($\varepsilon_a < 5\%$)

ถึงแม้ว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ดูเหมือนจะเป็นวิธีแบบกำหนดขอบเขตที่ลู่เข้าหารากของสมการได้รวดเร็ว แต่ก็มีบางกรณีที่วิธีนี้ก็ทำงานได้ไม่ดี ซึ่งมีบางกรณีที่ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงให้ผลลัพธ์ที่ดีกว่า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 2.8

จงหารากของสมการ $f(x) = x^{10} - 1$ ในช่วง $[0, 1.3]$ โดยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

- กำหนดให้ $f(x) = x^{10} - 1$ โดยใช้ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 6 และระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ จะได้ผลลัพธ์ดังตารางที่ 7
- จากตารางที่ 6 พบว่า เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า ε_a มีค่าเท่ากับ 0.468750 % ในขณะที่ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ เมื่อทำซ้ำรอบที่ 5 ค่า ε_a มีค่าเท่ากับ 52.741685 ซึ่งแสดงดังตารางที่ 7
- ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วงลู่เข้าหารากของสมการได้เร็วกว่าระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a	ε_t
0	0.000000	1.300000	0.650000	100.000000	35.000000
1	0.650000	1.300000	0.975000	33.333333	2.500000
2	0.975000	1.300000	1.137500	14.285714	13.750000
3	0.975000	1.137500	1.056250	7.692308	5.625000
4	0.975000	1.056250	1.015625	4.000000	1.562500
5	0.975000	1.015625	0.995313	2.040816	0.468750

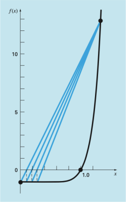
ตาราง 6: แสดงการคำนวณหาค่ารากของสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

i	x_l	x_u	x_r	ε_a	ε_t
0	0.000000	1.300000	0.094300	100.000000	90.570040
1	0.094300	1.300000	0.181759	48.118299	81.824113
2	0.181759	1.300000	0.262874	30.857040	73.712599
3	0.262874	1.300000	0.338105	22.250800	66.189490
4	0.338105	1.300000	0.407878	17.106298	59.212208
5	0.407878	1.300000	0.472583	13.691820	52.741685

ตาราง 7: แสดงการคำนวณหาค่ารากสมการในตัวอย่างที่ 2.8 ด้วยระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)

ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)



รูปที่ 13: แสดงการลู่เข้าสู่ค่ารากของามการของระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method) ของตัวอย่างที่ 2.8

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   1. $x^2 - 4x + 9 = 0$
   2. $x^3 + x^2 - 1 = 0$
   3. $5x \log_{10} x - 6 = 0$
   4. $x^2 + x - \cos x = 0$
2. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีวางผิดที่ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   1. $x^3 + x^2 + x + 7 = 0$
   2. $x^3 - x - 4 = 0$
   3. $x = 3x^{-x}$
   4. $x \tan x + 1 = 0$
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

เฉลยแบบฝึกหัด

1.
   1. 2.706
   2. 0.755
   3. 2.741
   4. 0.550
2.
   1. 2.105
   2. 1.796
   3. 1.0499
   4. 2.798

Outline

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

การหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงอย่างง่ายนี้ อันดับแรกจะต้องแปลง สมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$x = g(x) \tag{2.5}$$

โดยมีสมบัติว่า สำหรับค่า x ใดๆ ถ้า $x = g(x)$ แล้วจะต้องได้ว่า $f(x) = 0$
ตัวอย่างเช่น

$$x^3 + x^2 - 2 = 0$$

สามารถเขียนได้หลายรูปแบบ เช่น

$$x = \sqrt{\frac{2}{1+x}}, \quad x = \sqrt{2 - x^3}, \quad x = (2 - x^2)^{1/3}$$

ซึ่งสามารถหาค่ารากของสมการได้

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

กำหนดให้ x_0 เป็นค่ารากโดยประมาณของสมการ 2.5 แล้วแทนค่า x_0 ในสมการ 2.5 จะได้การประมาณค่าครั้งที่ 1 ดังนี้

$$x_1 = g(x_0)$$

ในทำนองเดียวกันกับสมการข้างต้น จะได้

$$x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), ..., x_{i+1} = g(x_i)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, ...$

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

รูปแบบทั่วไปของระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง คือ

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{2.6}$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, ...$
และค่าคลาดเคลื่อน จะพิจารณาจาก

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

โดยที่ $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$

ขั้นตอนระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง

1. แปลงสมการ $f(x) = 0$ ให้อยู่ในรูป $x = g(x)$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = g(x_i)$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left|\frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}}\right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 2.9

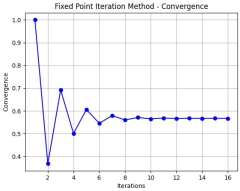
จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงอย่างง่าย (Simple Fixed-point Iteration Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)

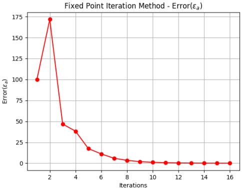
i	x_i	ε_a	ε_t
0	0	-	100.00000000
1	1.00000000	100.00000000	76.32228356
2	0.36787944	171.82818285	35.13465686
3	0.69220063	46.85363946	22.05039533
4	0.50047350	38.30914659	11.75536952
5	0.60624354	17.44678968	6.89424450
⋮	⋮	⋮	⋮
12	0.56641473	0.35556841	0.12846081
13	0.56755664	0.20119652	0.07288234
14	0.56690891	0.11425564	0.04132608
15	0.56727623	0.06475157	0.02344067
16	0.56706790	0.03673877	0.01329322

ตาราง 8: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

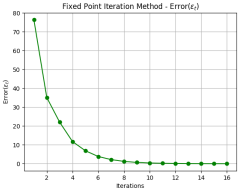
ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)



รูปที่ 14: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9



รูปที่ 15: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_a) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9



รูปที่ 16: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงของตัวอย่างที่ 2.9

ข้อสังเกต 2.2

- ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึงเป็นการจัดสมการให้อยู่ในรูป $x = g(x)$ โดยทั่วไปสามารถจัดรูปสมการ $x = g(x)$ ได้หลายรูปแบบ เช่น กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 4x + 6$ จัดรูปจะได้ $x = \dfrac{x^2+6}{4}$ หรือ $x = \sqrt{4x-6}$ จะเห็นได้ว่า $g(x)$ มีหลายฟังก์ชัน
- ซึ่งจะทราบได้อย่างไรว่าจะเลือกฟังก์ชันใดในการหาค่ารากของสมการด้วยวิธีทำซ้ำอย่างง่ายที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้า ดังนั้น จำเป็นต้องพิจารณาเงื่อนไขที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าสู่รากของสมการ โดยเงื่อนไขดังกล่าวคือ $|g'(x)| < 1$
- ดังนั้น จะสามารถเลือกฟังก์ชันใดก็ได้ที่จะให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ เมื่อ $|g'(x)| < 1$

ตัวอย่างที่ 2.10

จากตัวอย่างที่ 2.9 นั่นคือ $g(x) = e^{-x}$ จะได้

$$g'(x) = -e^{-x}$$

สำหรับ $x \in [0,1]$ จะได้ $|g'(x)| < 1$
ดังนั้น $g(x) = e^{-x}$ สำหรับ $x \in [0,1]$ ให้ค่าผลลัพธ์ลู่เข้าเสมอ

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

สำหรับการหาคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ โดยระเบียบวิธีเชิงกราฟสองเส้นนี้ อันดับแรกจะต้องแปลง สมการดังกล่าวให้อยู่ในรูป

$$f_1(x) = f_2(x)$$

ดังนั้นในการพิจารณากราฟจะมี 2 สมการ คือ

$$y_1 = f_1(x) \quad \text{และ} \quad y_2 = f_2(x)$$

โดยการสร้างกราฟของฟังก์ชัน y_1 และ y_2 ซึ่งอาศัยหลักการที่กราฟของฟังก์ชันสอง ฟังก์ชันตัดกัน ตรงบริเวณจุดตัดกันของกราฟ คือ ค่ารากของสมการ ซึ่งเราจะเรียกวิธีนี้ว่า **วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)**

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

ตัวอย่างที่ 2.11

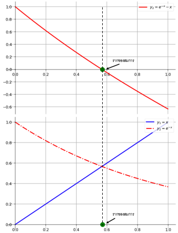
จงหารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$ โดยใช้วิธีเชิงกราฟสองเส้น

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$
0	0	1.00000000
0.2	0.2	0.81873075
0.4	0.4	0.67032005
0.6	0.6	0.54881164
0.8	0.8	0.44932896
1	1	0.36787944

ตาราง 9: แสดงค่าจากการคำนวณด้วยวิธีเชิงกราฟสองเส้นของตัวอย่างที่ 2.9

วิธีเชิงกราฟสองเส้น (The Two-Curve Graphical Method)



รูปที่ 17: กราฟแสดงการหาค่ารากของสมการ $e^{-x} - x = 0$

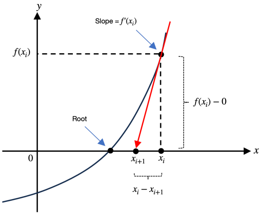
Outline

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ระเบียบวิธีนี้จะกำหนดค่าเริ่มต้นเพียงค่าเดียวเพื่อที่จะหาค่ารากของสมการ นั่นคือ ถ้า x_i เป็นค่าเริ่มต้นของการประมาณค่ารากของสมการ แล้วสมการเส้นสัมผัสที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะตัดแกน x ที่จุด x_{i+1} โดยจุดดังกล่าวจะเป็นการประมาณค่ารากของสมการที่ถูกปรับปรุงให้ดีขึ้นจากจุดเดิม ดังรูปที่ 18



รูปที่ 18: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยอาศัยความชัน

จากรูปที่ 18 พิจารณาความชัน ของฟังก์ชันที่จุด $(x_i, f(x_i))$ จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

เพราะฉะนั้น รูปแบบทั่วไปคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{2.7}$$

ซึ่งสมการ (2.7) เรียกว่า **สูตรนิวตันราฟสัน (Newton-Raphson formula)**

ขั้นตอนระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

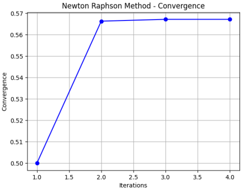
ตัวอย่างที่ 2.12

จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) ต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3 และกำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

i	x_i	ε_a	ε_t
0	0	-	100.00000000
1	0.50000000	100.00000000	11.83885822
2	0.56631100	11.70929098	0.14675071
3	0.56714317	0.14672871	0.00002203
4	0.56714329	0.00002211	0.00000007

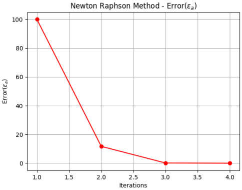
ตาราง 10: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



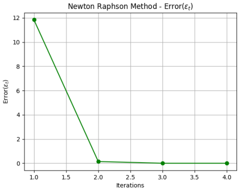
รูปที่ 19: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 20: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_a) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 21: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.12

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

ตัวอย่างที่ 2.13

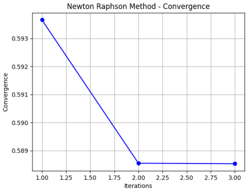
จงหารากของสมการ $e^x \sin(x) - 1 = 0$ โดยระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method) กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_0 = 0.5$ และต้องการความถูกต้องอย่างน้อยที่สุดในตำแหน่งที่ 3

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)

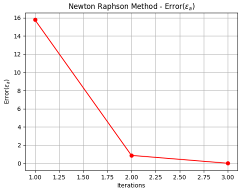
i	x_i	ε_a
1	0.59366571	15.77751665
2	0.58854847	0.86946781
3	0.58853274	0.00267138

ตาราง 11: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)



รูปที่ 22: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13



รูปที่ 23: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_a) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีนิวตันราฟสันของตัวอย่างที่ 2.13

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีจุดตรึงอย่างง่าย เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 4 ตำแหน่ง
   1. $e^x = 3x$
   2. $x = \dfrac{1}{(x+1)^2}$
   3. $1 + x^2 = x^3$
   4. $x - \sin x = 0.5$
2. จงหาค่ารากของสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05% กำหนดทศนิยม 3 ตำแหน่ง
   1. $x^{\sin 2} - 4 = 0$
   2. $e^x = 4x$
   3. $x^3 - 5x + 3 = 0$
   4. $xe^x = \cos x$
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

เฉลยแบบฝึกหัด

1. 1. 0.6190
   2. 0.4656
   3. 1.4660
   4. 1.4970
2. 1. 4.5932
   2. 0.3574
   3. $x_0 = 0.5, x_1 = 0.6470, x_2 = 0.65656, \ldots$
   4. $x_0 = 0.5, x_1 = 0.5180, x_2 = 0.5180, \ldots$

Outline

1 บทที่ 1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับการคำนวณเชิงตัวเลข

2 บทที่ 2 รากของสมการ (Root Finding)
2.1 บทนำ
2.2 ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)
2.3 ระเบียบวิธีการแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)
2.4 ระเบียบวิธีการวางตัวผิดที่ (False position method)
2.5 ระเบียบวิธีทำซ้ำแบบจุดตรึง (Fixed point Iteration Method)
2.6 ระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน (Newton Raphson Method)
2.7 ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

จากระเบียบวิธีนิวตันราฟสัน นั่นคือ

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f\,'(x_i)} \tag{2.8}$$

จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีนิวตันราฟสันต้องมีการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ซึ่งในบางฟังก์ชันมีรูปแบบที่ซับซ้อนและหาอนุพันธ์ได้ลำบาก ทำให้การหาค่ารากของสมการจะยุ่งยากมากขึ้น เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาดังกล่าว **ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)** จะแทนค่า $f\,'(x_i)$ ในสมการ (2.8) โดยการประมาณค่าที่สามารถคำนวณได้ง่ายขึ้น

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

เนื่องจาก อนุพันธ์ของฟังก์ชันนิยามโดย

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

สำหรับ h มีค่าน้อยมากๆ จะได้

$$f\,'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $x = x_i$ และ $h = x_{i-1} - x_i$ จะได้

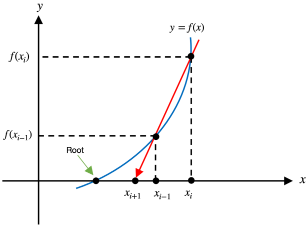
$$f\,'(x_i) \approx \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \tag{2.9}$$

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

แทนค่า (2.9) ใน (2.8) จะได้

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{2.10}$$

ซึ่งสมการ (2.10) เรียกว่า **สูตรเซแคนต์ (Secant formula)**



รูปที่ 24: กราฟแสดงการประมาณค่ารากของสมการโดยระเบียบวิธีเซแคนต์

ขั้นตอนระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)

1. หาฟังก์ชันที่ต้องการหาค่ารากของสมการจาก $f(x) = 0$
2. เลือกค่าเริ่มต้น x_0
3. คำนวณหาค่า $x_{i+1} = x_i - \dfrac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$
4. นำค่า x_{i+1} ที่ได้ในขั้นตอนที่ 2 มาคำนวณหาค่า

$$\varepsilon_a = \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_{i+1}} \right| \times 100\%$$

และตรวจสอบกับเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ ถ้าไม่เป็นไปตามเงื่อนไขให้กลับไปทำขั้นตอน 3 ใหม่ แต่ถ้าเป็นไปตามเงื่อนไข $|\varepsilon_a| < \varepsilon_s$ สรุปได้ว่าค่า x_{i+1} คือค่ารากของสมการที่ต้องการ

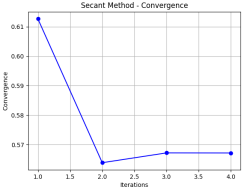
ตัวอย่างที่ 2.14

จงหารากของสมการ $f(x) = e^{-x} - x$ โดยระเบียบระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method) กำหนดให้ $\varepsilon_s = 0.05\%$ และค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0$ และ $x_0 = 1$ (ค่าจริง $= 0.56714329$)

i	x_i	ε_a	ε_t
1	0.61269984	63.21205588	8.03263436
2	0.56383839	8.66586039	0.58272766
3	0.56717036	0.58747239	0.00477277
4	0.56714331	0.00476984	0.00000293

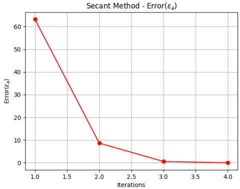
ตาราง 12: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



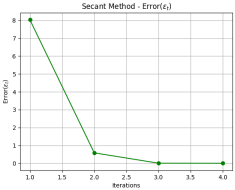
รูปที่ 25: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 26: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_a) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

ระเบียบวิธีเซแคนต์ (Secant Method)



รูปที่ 27: แสดงค่าคลาดเคลื่อน (ε_t) จากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.14

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

ตัวอย่างที่ 2.15

จงหารากของสมการ $f(x) = \ln x$ โดยระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$

วิธีทำ กำหนดให้ $f(x) = \ln x = 0$ $x_l = x_{i-1} = 0.5$ และ $x_u = x_i = 5$
โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ และระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ สามารถหาค่ารากของสมการได้ดังตารางที่ 13 และ 14 จะเห็นได้ว่า เมื่อใช้ระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ในการประมาณค่ารากของสมการจะลู่เข้าสู่คำตอบ ส่วนการคำนวณโดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์จะลู่ออกจากคำตอบ

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

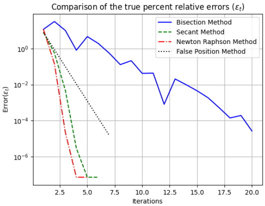
i	x_i	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	1.85463498	0.61768790	85.46349805
2	1.21630782	0.19581989	21.63078185
3	1.05852096	0.05687262	5.85209625
4	1.01616935	0.01604002	1.61693498
5	1.00449491	0.00448483	0.44949065

ตาราง 13: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีวางตัวผิดที่ของตัวอย่างที่ 2.15

Comparison of Convergence of the Secant and False-Position Techniques

i	x_i	$\varepsilon_a(\%)$	$\varepsilon_t(\%)$
1	1.85463498	169.59482877	85.46349805
2	-0.10438079	-1876.79718477	110.43807924

ตาราง 14: แสดงค่าจากการคำนวณของการกระทำซ้ำด้วยระเบียบวิธีเซแคนต์ของตัวอย่างที่ 2.15



รูปที่ 28: การเปรียบเทียบร้อยละค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t) ของทุกระเบียบวิธี เพื่อหาค่ารากของ $f(x) = e^{-x} - x$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาค่ารากของสมการ $x^{2.2} = 69$ ที่อยู่ในช่วง $[5, 8]$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ เมื่อร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ต้องน้อยกว่า 0.05%
2. จงหาค่ารากของฟังก์ชัน $f(x) = \cos x - x$ โดยใช้ระเบียบวิธีเซแคนต์ กำหนดค่าเริ่มต้น $x_{-1} = 0.5$ และ $x_0 = \pi/4$ เมื่อค่าคลาดเคลื่อนสัมบูรณ์ต้องน้อยกว่า 0.00000004
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของสมการ

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $6.85236.$
2. 0.73908518