รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 4 สมการถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

September 2, 2024

Outline

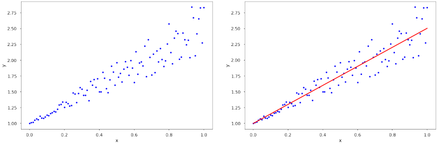
Table of Contents

Outline

บทนำ

การสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสม (Curve fitting) คือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาเส้นโค้งหรือฟังก์ชันที่เหมาะสมที่สุดในการแสดงผลชุดของจุดข้อมูลที่ได้รับจากการสังเกตหรือการทดลองทางวิทยาศาสตร์ต่างๆ โดยจุดมุ่งหมายคือการหาสมการทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับข้อมูลให้มากที่สุด

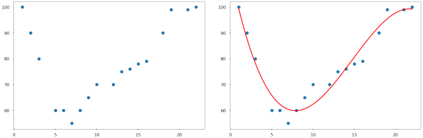
บทนำ



(a) (b)

รูปที่ 1: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

บทนำ



(a) (b)

รูปที่ 2: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

บทนำ

Curve fitting แบ่งได้เป็นสองประเภทหลัก ดังนี้

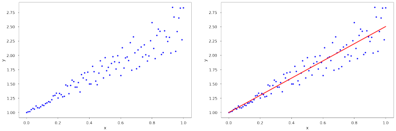
- **การถดถอยอันดับสองน้อยที่สุด (Least Squares Regression)**: เป็นการสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสมที่ไม่จำเป็นต้องผ่านทุกจุดของข้อมูล โดยวิธีนี้จะพยายามหาฟังก์ชันที่ลดค่าความแตกต่างระหว่างจุดข้อมูลจริงกับค่าที่ฟังก์ชันคาดการณ์ให้มีค่าน้อยที่สุดในเชิงกำลังสอง (เช่น เส้นตรงหรือเส้นโค้งที่แสดงถึงแนวโน้มของข้อมูล)
- **การประมาณค่าในช่วง (Interpolation)**: เป็นการสร้างเส้นโค้งที่เหมาะสมซึ่งต้องผ่านทุกจุดของข้อมูล วิธีนี้มักใช้ในกรณีที่ข้อมูลมีความถูกต้องสูงและต้องการฟังก์ชันที่สามารถประมาณค่าได้อย่างแม่นยำระหว่างจุดข้อมูลต่าง ๆ

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

การหาเส้นสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression) เป็นระเบียบวิธีในการประมาณค่าการหาเส้นสมการที่เหมาะสมด้วยการสร้างเส้นตรงเพื่อประมาณค่าเซตของจุดหรือข้อมูล



(a) (b)

รูปที่ 3: แผนภาพการกระจาย (Scatter Plot)

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$

- กำหนดให้ (x_i, y_i) เป็นเซตของจุดข้อมูล
- กำหนดให้ $\hat{y}_i = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่เหมาะสมกับเซตของจุดข้อมูล
- ณ ตำแหน่ง $x = x_i$ พิกัดที่กำหนดคือ y_i นั่นคือคู่อันดับ (x_i, y_i) และค่าของฟังก์ชันที่สอดคล้องกันบนเส้นโค้งที่เหมาะสมคือ $f(x_i)$
- ถ้า e_i คือค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง $x = x_i$ แล้ว

$$e_i = y_i - f(x_i) \tag{1.1}$$

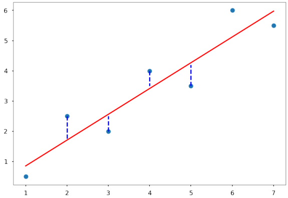
สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

ถ้าเรากำหนดให้

$$\begin{aligned} S_r &= [y_1 - f(x_1)]^2 + [y_2 - f(x_2)]^2 + \cdots + [y_n - f(x_n)]^2 \\ &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

แล้ว **วิธีกำลังสองน้อยที่สุด (Least Squares Method)** เป็นการทำให้ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อน (S_r) มีค่าน้อยที่สุด

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)



รูปที่ 4

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression)

จากรูปที่ 4 กำหนดให้

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x \tag{1.3}$$

เป็น**สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย**ที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$

พิจารณา ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i)$$

จาก (1.4) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S_r &= [y_1 - (a_0 + a_1 x_1)]^2 + [y_2 - (a_0 + a_1 x_2)]^2 + \cdots + [y_n - (a_0 + a_1 x_n)]^2 \\ &= e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

นั่นคือ

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{1.5}$$

เมื่อ n คือจำนวนจุดข้อมูล

เพื่อหาค่าผลรวมของค่าคลาดเคลื่อน (S_r) ที่มีค่าน้อยที่สุด โดยใช้หลักการการหาค่าต่ำสุด (Minimization) ดังนั้น การหาค่าต่ำสุดของ (S_r) เปรียบเทียบกับตัวไม่ทราบค่า a_0 และ a_1 จะได้

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = 0 \tag{1.6}$$

และ

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = 0 \tag{1.7}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จาก (1.5) จะได้

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a_0 - a_1 x_i) \tag{1.8}$$

และ

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum_{i=1}^{n}([y_i - a_0 - a_1 x_i]x_i) \tag{1.9}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

จาก (1.8) และ $\sum_{i=1}^{n} a_0 = na_0$ จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i = 0$$

$$na_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.10}$$

จาก (1.9) จะได้

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} a_0 x_i - \sum_{i=1}^{n} a_1 x_i^2 = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1.11}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ดังนั้น

$$\begin{cases} na_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 & = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 & = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \tag{1.12}$$

เราจะเรียกสมการ (1.12) ว่า **สมการปกติ (normal equations)**

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

โดยการแก้ระบบสมการ (1.12) เพื่อหาค่า a_0 และ a_1 จะได้

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} \tag{1.13}$$

และ

$$a_1 = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{1.14}$$

เมื่อ $\bar{y}$ และ $\bar{x}$ คือ ค่าเฉลี่ยของ y และ x ตามลำดับ

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1.1

จงหาสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่าของข้อมูลต่อไปนี้

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	0.5	1	
2	2.5	4	
3	2.0	9	
4	4.0	16	
5	3.5	25	
6	6.0	36	
7	5.5	49	

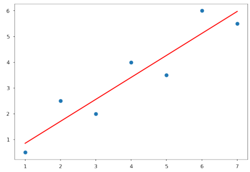
ตาราง 1: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.2

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

วิธีทำ จากโจทย์จะได้

- $n = 7$
- $\sum_{i=1}^{7} x_i y_i = 119.5$
- $\sum_{i=1}^{7} x_i^2 = 140$
- $\sum_{i=1}^{7} x_i = 28$ ดังนั้น $\bar{x} = \dfrac{28}{7} = 4$
- $\sum_{i=1}^{7} y_i = 24$ ดังนั้น $\bar{y} = \dfrac{24}{7} = 3.428571$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย



รูปที่ 5

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1.2
จงหาสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่าของข้อมูลต่อไปนี้

$$(1, 0.6), (2, 2.4), (3, 3.5), (4, 4.8), (5, 5.7)$$

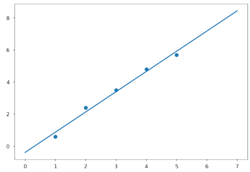
สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
1	0.6	1	0.6
2	2.4	4	4.8
3	3.5	9	10.5
4	4.8	16	19.2
5	5.7	25	28.5
15	17.0	55	63.6

ตาราง 2: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.2

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย



รูปที่ 6: กราฟของสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายของตัวอย่างที่ 1.2

คุณภาพของเส้นสมการที่เหมาะสม

เนื่องจากเส้นโค้งของสมการถดถอยเชิงเส้นไม่ผ่านทุกจุดของข้อมูล จึงจำเป็นต้องมีการประเมินสมการถดถอยเชิงเส้น ดังนั้น **การพิจารณาคุณภาพของสมการถดถอยเชิงเส้น (Quantification of Error of Linear Regression)** ต้องพิจารณาสิ่งต่อไปนี้

1. ผลรวมกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อนรอบเส้นถดถอย $y = a_0 + a_1 x$ (Sum of Squres of Residuals about Regrssion Line):

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i)^2 \qquad (1.15)$$

คุณภาพของเส้นสมการที่เหมาะสม

2. ค่าความเคลื่อนมาตรฐานของการประมาณค่า (Standard Error of Estimate):

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-2}} \qquad (1.16)$$

3. ผลรวมกำลังสองของค่าความคลาดเคลื่อนรอบค่าเฉลี่ย $\bar{y}$ (Sum of Squares of Residuals about the Mean $\bar{y}$):

$$S_t = \sum (y_i - \bar{y})^2 \qquad (1.17)$$

คุณภาพของเส้นสมการที่เหมาะสม

4. สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination):

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} \tag{1.18}$$

5. สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient):

$$r = \sqrt{\frac{S_t - S_r}{S_t}} \tag{1.19}$$

หมายเหตุ

สำหรับเส้นสมการที่เหมาะสมที่สุด จะได้ $S_r = 0, r = r^2 = 1$ แสดงว่าเส้นสมการที่มีค่าต่อเนื่องที่ได้สามารถใช้แทนข้อมูลได้ 100%

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

ตัวอย่างที่ 1.3

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงคำนวณหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0.5	2.5	2.0	4.0	3.5	6.0	5.5

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 1.3 จะได้ สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่า คือ $\hat{y} = 0.07142857 + 0.8392857x$ ซึ่งสามารถนำมาสร้างตารางได้ดังตารางที่ 3

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i)^2$
1	0.5	8.5765	0.1687
2	2.5	0.8622	0.5625
3	2.0	2.0408	0.3473
4	4.0	0.3265	0.3265
5	3.5	0.0051	0.5896
6	6.0	6.6122	0.7972
7	5.5	4.2908	0.1993
$\sum$	24.0	22.7143	2.9911

ตาราง 3: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.3

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ (Simple Linear Regression in Matrix Form)

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหา**สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย (Simple Linear Regression in Matrix Form)** โดยอาศัยหลักของเมทริกซ์ เมื่อข้อมูลขนาดใหญ่ การนำเมทริกซ์มาประยุกต์ในการหาสมการถดถอยจะช่วยให้การคำนวณง่ายขึ้นเมื่อนำไปเขียนโปรแกรมทางคอมพิวเตอร์

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากความสัมพันธ์ระหว่างสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าคลาดเคลื่อน นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i) \tag{1.20}$$

จะได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + e_i \tag{1.21}$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ จากสมการ (1.21) จะได้

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + e_1 \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + e_n \end{aligned} \tag{1.22}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.22) เขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_1 \\ a_0 + a_1 x_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น **สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ (Simple Linear Regression in Matrix Form)** คือ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}a + e \tag{1.25}$$

เมื่อ

- $\mathbf{X}$ ถูกเรียกว่า the design matrix.
- a คือ the vector of parameters
- e คือ the error vector
- $\mathbf{Y}$ คือ the response vector

โดยที่

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{n\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, a_{2\times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}, e_{n\times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.26}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

กำหนดให้ $\mathbf{X}^T$ เป็นเมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) จากสมการ (1.26) จะได้

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})[a] = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จะสังเกตเห็นว่า $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})a = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ สอดคลองกับสมการปกติ นั่นคือ

$$na_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

ดังนั้น จะพิจารณา $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})a = \mathbf{X}^T\mathbf{Y}$ โดยนำอินเวอร์สของ $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})$ นั่นคือ $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}^T\mathbf{Y})$$

เนื่องจาก $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{X} = I$ ดังนั้น

$$a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \tag{1.27}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.26) และสมการ (1.27) จะได้

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix}$$

และ

$$\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ต่อไป จะแสดงว่า $(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = a$ จากสมการ(1.27) จะได้

$$(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} = \frac{1}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

จาก (1.28) (1.13) และ (1.14) จะได้

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} &= \begin{bmatrix} \bar{y} - a_1\bar{x} \\ \dfrac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \\ &= a \end{aligned}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการปกติของสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์ คือ

$$a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \tag{1.29}$$

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.4

จงหาสมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่ใช้ประมาณค่าของข้อมูลต่อไปนี้

i	1	2	3	4	5
x_i	2.10	6.22	7.17	10.52	13.68
y_i	2.90	3.83	5.98	5.71	7.74

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

แบบฝึกหัด

1. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x	1	2	3	4	5	6
y	2.4	3.1	3.5	4.2	5.0	6.0

2. จากข้อมูลต่อไปนี้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย

x	0	1	2	3	4
y	1.0	2.9	4.8	6.7	8.6

3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
6. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $\hat{y} = 1.59333333 + 0.69714286x$
2. $\hat{y} = 1 + 1.9x$
3. $-5.70434783x_2$
4. $r = 0.99140039$
5. $r = 1$

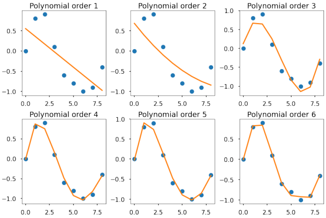
สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ ได้กล่าวถึงวิธีการสร้างสมการเชิงเส้นอย่างง่ายโดยใช้สมการถดถอย เมื่อกราฟของข้อมูลมีแนวโน้มเป็นเส้นตรง แต่ในบางครั้งการใช้สมการเชิงเส้นกับข้อมูลในทางวิศวกรรมหรือวิทยาศาสตร์อาจให้ผลลัพธ์ที่ไม่ดีมากนัก ดังรูปที่ 7 ดังนั้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 7: สมการถดถอยพหุนาม

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression) **รูปทั่วไปของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่** m คือ

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

ซึ่งเป็นสมการที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$
โดยที่ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)$$

ซึ่งสามารถเขียน ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนได้ ดังต่อไปนี้

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)\right)^2$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

เพื่อหาค่าต่ำสุด ดังนั้น

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m\right) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum x_i\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m\right) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_i^2\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_m} = -2\sum x_i^m\left(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2 - \cdots - a_m x_i^m\right) = 0$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ดังนั้นสมการปกติ คือ

$$a_0 n + a_1\sum x_i + a_2\sum x_i^2 + \cdots + a_m\sum x_i^m = \sum y_i \tag{1.30}$$
$$a_0\sum x_i + a_1\sum x_i^2 + a_2\sum x_i^3 + \cdots + a_m\sum x_i^{m+1} = \sum x_i y_i \tag{1.31}$$
$$a_0\sum x_i^2 + a_1\sum x_i^3 + a_2\sum x_i^4 + \cdots + a_m\sum x_i^{m+2} = \sum x_i^2 y_i \tag{1.32}$$
$$\vdots \tag{1.33}$$
$$a_0\sum x_i^m + a_1\sum x_i^{m+1} + a_2\sum x_i^{m+2} + \cdots + a_m\sum x_i^{2m} = \sum x_i^m y_i \tag{1.34}$$
$$\tag{1.35}$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ข้อสังเกต 1.1

ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณของสมการถดถอยพหุนาม คือ

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}; \quad r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

เมื่อ m คือ อันดับของสมการพหุนาม

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

ตัวอย่างที่ 1.5

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสองที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	2.1	7.7	13.6	27.2	40.9	61.1

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

จากโจทย์ จะได้

$$\begin{aligned} &m = 2 \quad \sum x_i = 15 \quad \sum x_i^4 = 979 \\ &n = 6 \quad \sum y_i = 152.6 \quad \sum x_i y_i = 585.6 \\ &\bar{x} = 2.5 \quad \sum x_i^2 = 55 \quad \sum x_i^2 y_i = 2488.8 \\ &\bar{y} = 25.433 \quad \sum x_i^3 = 225 \end{aligned}$$

จากสมการ (1.30) จะได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 15 & 55 \\ 15 & 55 & 225 \\ 55 & 225 & 979 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152.6 \\ 585.6 \\ 2488.8 \end{bmatrix}$$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

โดยใช้ระเบียบวิธีการกำจัดแบบเกาส์ จะได้
$a_0 = 2.47857$, $a_1 = 2.35929$, $a_2 = 1.86071$
ดังนั้น สมการถดถอยพหุนามอันดับสอง คือ
$\hat{y} = 2.47857 + 2.35929x + 1.86071x^2$

x_i	y_i	$(y_i - \bar{y})$	$(y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)^2$
0	2.1	544.44	0.14332
1	7.7	314.47	1.00286
2	13.6	140.03	1.08158
3	27.6	3.12	0.80491
4	40.9	239.22	0.61951
5	61.1	1272.11	0.09439
$\sum$	152.6	22.7143	3.74657

ตาราง 4: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.5

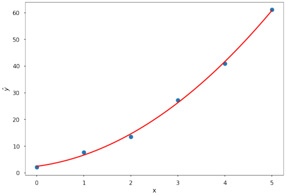
สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

จากตารางที่ 4 จะได้ สัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination) คือ

$$r^2 = \frac{2513.39 - 3.74657}{2513.39} = 0.99851$$

หรือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (Correlation Coefficient) คือ $r = 0.99925$

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 8: กราฟของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ 2 ของตัวอย่างที่ 1.5

สมการการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายในรูปแบบเมทริกซ์

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์ (Polynomial Regression in Matrix Form)

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์

จากความสัมพันธ์ระหว่างสมการถดถอยพหุนาม และค่าคลาดเคลื่อน นั่นคือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m) \tag{1.36}$$

จะได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m + e_i \tag{1.37}$$

สำหรับ $i \in \{1, 2, ..., n\}$ จากสมการ (1.37) จะได้

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_m x_1^m + e_1 \qquad (1.38) \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_m x_2^m + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_m x_n^m + e_n \end{aligned}$$

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.39) เขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_m x_1^m \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_m x_2^m \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_m x_n^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.39}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.40}$$

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์ (Polynomial Regression in Matrix Form) คือ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}a + e \tag{1.41}$$

โดยที่

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{n\times (m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{bmatrix}, \tag{1.42}$$

$$a_{(m+1)\times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, e_{n\times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

สมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์

โดยใช้กระบวนการเดียวกันกับหัวข้อ 1 จะได้ **สมการปกติของสมการถดถอยพหุนามในรูปแบบเมทริกซ์ (Polynomial Regression in Matrix Form)** คือ

$$a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$$

เมื่อ $\mathbf{X}^T$ คือ transpose of the matrix

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

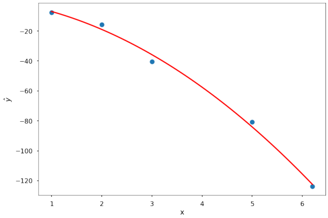
ตัวอย่างที่ 1.6

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสองที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้

x_i	1	2	3.5	5	6.2
y_i	-7.500	-15.600	-40.500	-80.700	-123.876

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)

สมการถดถอยพหุนาม (Polynomial Regression)



รูปที่ 9

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสมการถดถอยพหุนามอันดับที่ m (m^{th} Polynomial Regression) **รูปทั่วไปของสมการถดถอยพหุนามอันดับที่** m คือ

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

ซึ่งเป็นสมการที่เหมาะสมที่สุดกับเซตของจุดข้อมูล (x_i, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$
โดยที่ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า ณ ตำแหน่ง x_i คือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m)$$

ซึ่งสามารถเขียน ผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อนได้ ดังต่อไปนี้

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m) \right)^2$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

สำหรับสมการทั่วไปของสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรที่มีตัวแปรอิสระ m ตัว ซึ่งอยู่ในรูปแบบ

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m \qquad (1.44)$$

เมื่อ $a_0, a_1, ..., a_m$ คือ สัมประสิทธิ์การถดถอยบางส่วน (partial – regression coefficient)
และ ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า คือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_mx_m)$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

พิจารณากรณีที่ y เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นที่ขึ้นอยู่กับ 2 ตัวแปร ตัวอย่างเช่น y ขึ้นอยู่กับตัวแปร x_1 และ x_2 รูปของสมการเชิงเส้น 2 ตัวแปร เมื่อกำหนดให้ตัวแปรอิสระ คือ x_1 และ x_2 นั่นคือ จะได้

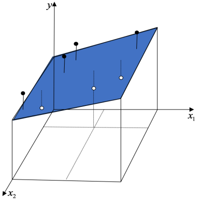
$$\hat{y} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \qquad (1.45)$$

จะได้ว่า ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่า คือ

$$e_i = y_i - (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2)$$

เมื่อนำมาพลอตกราฟ หรือวาดรูปจะเห็นว่าเป็นรูปใน 3 มิติที่มีลักษณะเป็นระนาบ ดังรูป

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร



รูปที่ 10: กราฟแสดงลักษณะเป็นระนาบของสมการ $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + e$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

พิจารณา (x_{1i}, x_{2i}, y_i) สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$ จะเห็นได้ว่า

$$y_i = a_0 + a_1 x_{1i} + a_2 x_{2i} + e_i$$

ซึ่งผลรวมกำลังสองของค่าคลาดเคลื่อน คือ

$$S_r = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_{1i} - a_2 x_{2i})^2$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

เพื่อหาค่าต่ำสุด ดังนั้น

$$\frac{\partial S_r}{\partial a_0} = -2\sum(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_1} = -2\sum x_{1i}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$
$$\frac{\partial S_r}{\partial a_2} = -2\sum x_{2i}(y_i - a_0 - a_1x_{1i} - a_2x_{2i}) = 0$$

ดังนั้นสมการปกติ คือ

$$a_0n + a_1\sum x_{1i} + a_2\sum x_{2i} = \sum y_i$$
$$a_0\sum x_{1i} + a_1\sum x_{1i}^2 + a_2\sum x_{1i}x_{2i} = \sum x_{1i}y_i$$
$$a_0\sum x_{2i} + a_1\sum x_{1i}x_{2i} + a_2\sum x_{2i}^2 = \sum x_{2i}y_i$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

สามารถเขียนในรูปเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_{1i} & \sum x_{2i} \\ \sum x_{1i} & \sum x_{1i}^2 & \sum x_{1i}x_{2i} \\ \sum x_{2i} & \sum x_{1i}x_{2i} & \sum x_{2i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{1i}y_i \\ \sum x_{2i}y_i \end{bmatrix} \qquad (1.46)$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

ข้อสังเกต 1.2

ค่าคลาดเคลื่อนมาตรฐานของค่าประมาณของสมการถดถอยพหุนาม คือ

$$S_{y/x} = \sqrt{\frac{S_r}{n-(m+1)}}$$

เมื่อ m คือ อันดับของสมการพหุนาม

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

ตัวอย่างที่ 1.7

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

x_1	0	2	2.5	1	4	7
x_2	0	1	2	3	6	2
y	5	10	9	0	3	27

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	x_1x_2	x_1y	x_2y
	5	0	0	0	0	0	0	0
	10	2	1	4	1	2	20	10
	9	2.5	2	6.25	4	5	22.5	18
	0	1	3	1	9	3	0	0
	3	4	6	16	36	24	12	18
	27	7	2	49	4	14	189	54
$\sum$	54	16.5	14	76.25	54	48	243.5	100

ตาราง 5: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.7

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

จากสมการ 1.46 และตารางที่ 5 จะได้

$$\begin{bmatrix} 6 & 16.5 & 14 \\ 16.5 & 76.25 & 48 \\ 14 & 48 & 54 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54 \\ 243.5 \\ 100 \end{bmatrix}$$

โดยใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์ จะได้ $a_0 = 5, a_1 = 4, a_2 = -3$
ดังนั้น สมการถดถอยเชิงเส้นอย่างง่าย คือ $\hat{y} = 5 + 4x_1 - 3x_2$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form)

จากสมการทั่วไปของสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรที่มีตัวแปรอิสระ m ตัว นั่นคือ

$$y_i = a_0 + a_1 x_{i1} + a_2 x_{i2} + \cdots + a_m x_{im} + e_i \tag{1.47}$$

สำหรับ $i = 1, 2, ..., n$ จากสมการ (1.47) จะได้

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots + a_m x_{1m} + e_1 \\ y_2 &= a_0 + a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots + a_m x_{2m} + e_2 \\ &\vdots \\ y_n &= a_0 + a_1 x_{n1} + a_2 x_{n2} + \cdots + a_m x_{nm} + e_n \end{aligned} \tag{1.48}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

จากสมการ (1.48) เขียนให้อยู่ในรูปแบบเมทริกซ์ จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 x_{11} + a_2 x_{12} + \cdots + a_m x_{1m} \\ a_0 + a_1 x_{21} + a_2 x_{22} + \cdots + a_m x_{2m} \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_{n1} + a_2 x_{n2} + \cdots + a_m x_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

จะได้

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

ดังนั้น สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form) คือ

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}a + e \tag{1.50}$$

โดยที่

$$\mathbf{Y}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X}_{n\times(m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \tag{1.51}$$

$$a_{(m+1)\times 1} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}, e_{n\times 1} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{1.52}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

โดยใช้กระบวนการเดียวกันกับหัวข้อ 1 จะได้ **สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์ (Multiple Linear Regression in Matrix Form)** คือ

$$a = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\mathbf{Y} \tag{1.53}$$

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

ตัวอย่างที่ 1.8

จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร (Multiple Linear Regression)

x_1	0	2	2.5	1	4	7
x_2	0	1	2	3	6	2
y	5	10	9	0	3	27

สมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปรในรูปแบบเมทริกซ์

วิธีทำ

แบบฝึกหัด

1. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง

x	0	1	2	3	4
y	1	0	3	10	21

2. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง

x	0	1	2	3	4	5	6
y	71	89	67	43	31	18	9

3. จากข้อมูลที่กำหนดให้ จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นหลายตัวแปร

x_1	0	1	1	2	2	3	3	4	4
x_1	0	1	2	1	2	1	2	1	2
y	15.1	17.9	12.7	25.6	20.5	35.1	29.7	45.4	40.2

แบบฝึกหัด

1. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
2. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
3. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 3 จงหาค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์
5. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 2 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาสมการถดถอยพหุนามอันดับสอง และค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $\hat{y} = 1 - 3x + 2x^2$
2. $\hat{y} = 81.93 - 8.28x - 0.78x^2$
3. $\hat{y} = 14.46086957 + 9.02521739x_1 - 5.70434783x_2$
4. $r = 1$
5. $r = 0.9503421$
6. $r = 0.9977592$