09114222 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้น (Introduction to Numerical Methods) บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation and Numerical Integration)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

Outline

Table of Contents

Outline

การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

จากนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด x และอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ที่จุด x เขียนแทนด้วย $f'(x)$ นิยามดังนี้

$$f'(x) = \lim_{h \to a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) ถ้า x_0 เป็นจุดในช่วงเปิด (a, b) แล้ว อนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ณ จุดใดๆ ในช่วงเปิดนี้ นิยามโดย

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n + \cdots$$

โดยที่ $f^{(n)}$ คือ อนุพันธ์ลำดับที่ n ของฟังก์ชัน $f(x)$

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และอนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถหาได้ในช่วงเปิด (a, b) สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจาณาพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) \tag{1.1}$$

เรียกสมการ (1.1) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 0**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสองพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{1.2}$$

เรียกสมการ (1.2) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 1**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์ โดยพิจารณาสามพจน์แรกของอนุกรม จะได้

$$f(x_{i+1}) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} \tag{1.3}$$

เรียกสมการ (1.3) ว่า **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ 2**

ค่าประมาณฟังก์ชันโดยใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series Approximation)

สำหรับ **การประมาณค่าฟังก์ชันด้วยอนุกรมเทย์เลอร์อันดับ** n นิยามโดย

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)(x_{i+1} - x_i)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)(x_{i+1} - x_i)^n}{n!} + R_n \tag{1.4}$$

เมื่อ R_n คือเศษเหลือสำหรับค่าประมาณ นิยามโดย

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1} - x_i)^{n+1} \tag{1.5}$$

โดยที่ $\xi \in (x_i, x_{i+1})$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative) คือ การหาค่าอนุพันธ์ด้วยวิธีการวิเคราะห์เชิงตัวเลข และการนำอนุกรมเทย์เลอร์มาประยุกต์ใช้ในการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน โดยแบ่งออกเป็น 3 วิธีดังนี้

1. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)**
2. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)**
3. **การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)**

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.4) นั่นคือ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} - \frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} \tag{1.6}$$

จากนิยามของ R_n (1.5) และค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสำหรับค่าประมาณของสมการ (1.6) จะได้

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(x_{i+1} - x_i) \tag{1.7}$$

หรือ

$$\frac{R_1}{x_{i+1} - x_i} = O(x_{i+1} - x_i) \tag{1.8}$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า (Forward Difference Approximation of the First Derivative)

จากสมการ (1.6) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(x_{i+1} - x_i)$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \qquad (1.9)$$

เมื่อ

- Δf_i คือ ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับหนึ่ง (First Forward Difference)
- $h = x_{i+1} - x_i$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง (Backward Difference Approximation of the First Derivative)

จากอนุกรมเทย์เลอร์ สามารถพิจารณาช่วงกว้าง h ที่เป็นค่าย้อนหลัง คือ x_i และ x_{i-1} ได้ดังสมการ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + O(h) \tag{1.10}$$

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h) \tag{1.11}$$

เมื่อ

- ∇f_i คือ ผลต่างย้อนหลังอันดับหนึ่ง (First Backward Difference)
- $h = x_i - x_{i-1}$
- $O(h)$ คือ ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายตามอันดับของ h

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

จาก

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

และ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} - \cdots$$

จะได้

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)(h) + \frac{2f^{(3)}(x_i)(h)^2}{3!} + \cdots$$

การหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (Centered Difference Approximation of the First Derivative)

ดังนั้น

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^2}{6} - \cdots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \qquad (1.12)$$

เราจะเรียกสมการ (1.12) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง (centered difference)**

ตัวอย่างที่ 1.1

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ (ค่าจริง $f'(0.5) = -0.9125$) เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

จากอนุพันธ์อันดับหนึ่งของอนุกรมเทย์เลอร์สามารถใช้ค่าตัวเลขที่ได้ มาหาค่าอนุพันธ์อันดับสูงต่อไป และสามารถเขียนอนุกรมเทย์เลอร์แบบไปข้างหน้าสำหรับ $f(x_{i+2})$ ในพจน์ของ $f(x_i)$ จะได้

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)(2h)^2}{2!} + \cdots \tag{1.13}$$

จากสมการ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \cdots$$

ทำการคูณด้วย 2 แล้วนำไปลบกับสมการ (1.13) จะได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ดังนั้น

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \qquad (1.14)$$

เราจะเรียกว่า สมการ (1.14) ว่า **ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง (Second Forward Finite Divided Difference)**

การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)

ในทำนองเดียวกัน **ผลต่างสืบเนื่องย้อนหลังอันดับสอง (Second Backward Finite Divided Difference)** คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \tag{1.15}$$

และ **ผลต่างสืบเนื่องตรงกลางอันดับสอง (Second centered finite divided difference)**

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{1.16}$$

ตัวอย่างที่ 1.2

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับสอง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.5$ และ $h = 0.25$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h))$
2. วิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h))$
3. วิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^2))$

HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

จากอนุกรมเทย์เลอร์

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(h) + \frac{f''(x_i)(h)^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(x_i)(h)^3}{3!} + \cdots \quad (1.17)$$

จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2) \quad (1.18)$$

จากผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าอันดับสอง นั่นคือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \quad (1.19)$$

HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

แทนสมการ (1.19) ในสมการ (1.17) จะได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h^2} h + O(h^2) \tag{1.20}$$

ดังนั้นการหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่งโดยใช้ผลต่างสืบเนื่องข้างหน้าสำหรับความแม่นยำ $O(h^2)$ คือ

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2) \tag{1.21}$$

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 1: Forward finite-divided-difference formulas

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

รูปที่ 2: Backward finite-divided- difference formulas

	Error
First Derivative	
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

รูปที่ 3: Centered finite-divided- difference formulas

ตัวอย่างที่ 1.3

กำหนดให้ $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ จงหาค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และร้อยละของค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่ $x = 0.5$ เมื่อ $h = 0.25$ โดยใช้วิธี high-accuracy divided-difference ต่อไปนี้

1. วิธีผลต่างสืบเนื่องข้างหน้า $(O(h^2))$
2. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องย้อนหลัง $(O(h^2))$
3. โดยวิธีผลต่างสืบเนื่องตรงกลาง $(O(h^4))$

Outline

บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation and Numerical Integration)

1.1 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)

- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)
- HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

1.2 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

- การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)
- วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
- วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)
- วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
- วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)
- วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

1.3 แบบฝึกหัด 6

การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)

Outline

บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation and Numerical Integration)

1.1 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)
- HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

1.2 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)
- การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)
- วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
- วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)
- วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
- วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)
- วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

1.3 แบบฝึกหัด 6

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ เป็นวิธีพื้นฐานของการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยมีหลักการพื้นฐาน คือการแทนฟังก์ชันที่ซับซ้อนด้วยค่าประมาณของฟังก์ชันที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์ และเขียนสมการแทนได้ดังนี้

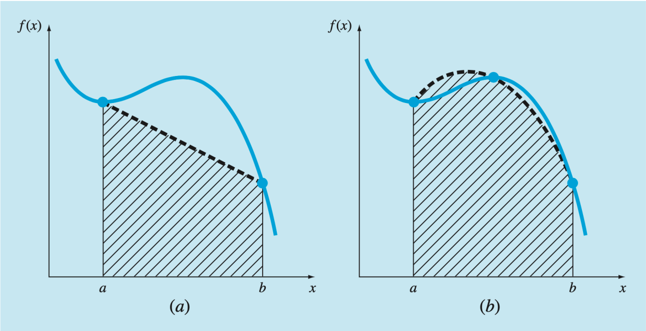
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n(x)\,dx$$

เมื่อ $f_n(x)$ คือ ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ที่อยู่ในรูปของสมการ

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

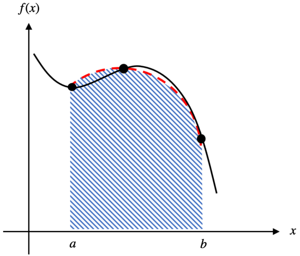
โดยที่ n คือ อันดับของฟังก์ชันพหุนาม

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



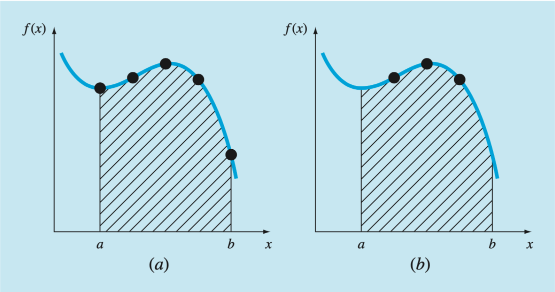
รูปที่ 4: The approximation of an integral by the area under (a) a single straight line and (b) a single parabola.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



รูปที่ 5: The approximation of an integral by the area under three straight-line segments.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



รูปที่ 6: The difference between (a) closed and (b) open integration formulas.

Outline

บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation and Numerical Integration)

1.1 การหาอนุพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation)
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative)
- การประมาณค่าอนุพันธ์อันดับสอง (Second Derivatives)
- HIGH-ACCURACY DIFFERENTIATION FORMULAS

1.2 การหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Integration)
- การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)
- วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)
- วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)
- วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)
- วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
- ค่าคลาดเคลื่อนของการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 (Error of Simpson's 1/3 Rule)
- วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

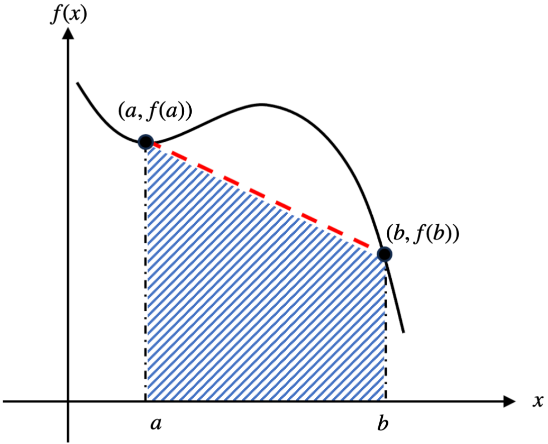
1.3 แบบฝึกหัด 6

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นวิธีการหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่ง หรือสมการเส้นตรง จะได้

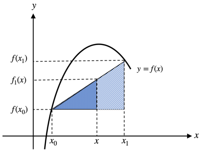
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_1(x)\,dx \tag{1.22}$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)



รูปที่ 7: Graphical depiction of the trapezoidal rule.

Using Columns



รูปที่ 8

จากรูป พบว่ารูปมีพื้นที่ใต้กราฟที่แรเงาเป็นบริเวณของสี่เหลี่ยมคางหมู จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้ายจะได้

$$\frac{f_1(x) - f(x)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

นั่นคือ

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) \tag{1.23}$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ดังนั้นพื้นที่ใต้เส้นตรงจะเป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน ในช่วง a ถึง b จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_1(x)\,dx \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) \right] dx \tag{1.24}$$

ดังนั้น

$$I = (b - a)\frac{f(b) + f(a)}{2} \tag{1.25}$$

จะเรียกสมการ (1.25) ว่า **trapezoidal rule**

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

Before integration, Eq. (21.2) can be expressed as

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a}$$

Grouping the last two terms gives

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a}$$

or

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

which can be integrated between $x = a$ and $x = b$ to yield

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}x\bigg|_a^b$$

This result can be evaluated to give

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}(b - a)$$

Now, since $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$,

$$I = [f(b) - f(a)]\frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

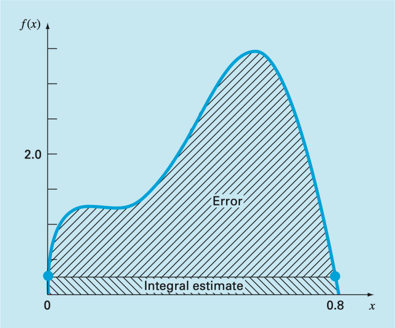
Multiplying and collecting terms yields

$$I = (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2}$$

which is the formula for the trapezoidal rule.

รูปที่ 9: Derivation of Trapezoidal Rule.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)



รูปที่ 10: Graphical depiction of the use of a single application of the trapezoidal rule to approximate the integral of $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ from $x = 0$ to 0.8.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือ

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง a และ b

ในการหาค่า $f''(\xi)$ จะใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ย ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{f}''(\xi)$ ดังนั้น

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a} \tag{1.26}$$

จะได้

$$E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(\xi)(b-a)^3$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

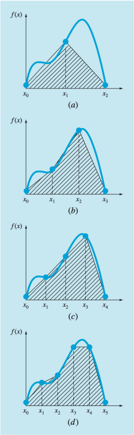
ตัวอย่างที่ 1.4

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป
(Multiple Application Trapezoidal Rule)

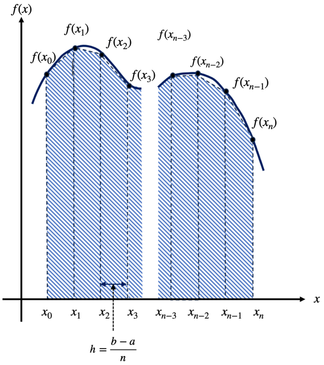
Using Columns



รูปที่ 11

Illustration of the multiple-application trapezoidal rule. (a) Two segments, (b) three segments, (c) four segments, and (d) five segments.

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)



รูปที่ 12: The general format and nomenclature for multiple-application integrals.

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อใช้วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นหลายๆ ส่วน การหาค่าปริพันธ์ก็คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์แต่ละส่วน ซึ่งสมการนี้เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์การใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application หรือ Composite Integration Formula)**

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 12 แสดงการแบ่งเป็น n ช่วง โดยแต่ละช่วงจะมีช่วงกว้าง h เท่ากัน ซึ่งจะมี $n+1$ จุด คือ $x_0, x_1, ..., x_n$ เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \qquad (1.27)$$

แทนค่าสมการด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป จะได้

$$I \approx h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \qquad (1.28)$$

หรือ

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \qquad (1.29)$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อ $h = \frac{b-a}{2n}$ จะได้

$$I \approx (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n} \tag{1.30}$$

สมการนี้เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule Method)**

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

โดยที่ $f''(\xi_i)$ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เมื่อ ξ_i ในแต่ละส่วนที่ i ซึ่งใช้เป็นค่าประมาณของค่าเฉลี่ย หรือค่าเฉลี่ยอนุพันธ์อันดับสอง ของทุกๆ ส่วน

$$\bar{f}'' \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} \tag{1.31}$$

จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 1.5

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

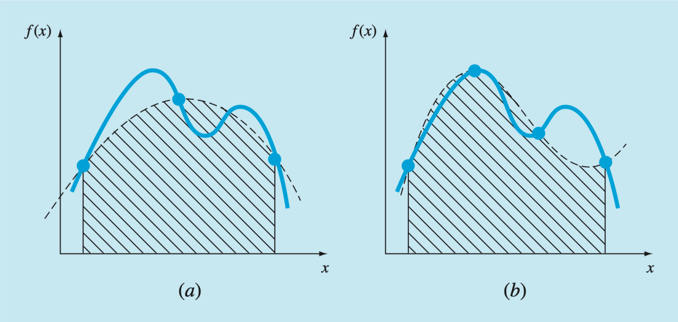
วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

n	h	I	ε_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

รูปที่ 13

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)



รูปที่ 14: (a) Graphical depiction of Simpson's 1/3 rule: It consists of taking the area under a parabola connecting three points. (b) Graphical depiction of Simpson's 3/8 rule: It consists of taking the area under a cubic equation connecting four points.

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule) แบ่งออกเป็นสองวิธีดังนี้

1. วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
2. วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 เป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง ดังนั้น

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{1.32}$$

ถ้า a และ b แทนด้วย x_0 และ x_2 ตามลำดับ และ $f_2(x)$ แทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ อันดับสอง (Second Order Lagrange Polynomial) จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

จากการหาค่าปริพันธ์จะได้

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \tag{1.33}$$

โดย $h = (b-a)/2$ สมการ (1.33) เรียกว่า **วิธีซิมสัน 1/3 หรือสูตรซิมสัน1/3 (Simpson's 1/3 Rule)** ซึ่งเป็น Second Newton-Cotes Closed Integration Formula
หรือ

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \tag{1.34}$$

ถ้า $a = x_0$, $b = x_2$ และx_1 คือจุดกึ่งกลางระหว่าง a และ b หรือเท่ากับ $(b+a)/2$ และสมการ (1.34) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3**

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

As was done in Box 21.2 for the trapezoidal rule, Simpson's 1/3 rule can be derived by integrating the forward Newton-Gregory interpolating polynomial (Box 18.2):

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] dx$$

Notice that we have written the polynomial up to the fourth-order term rather than the third-order term as would be expected. The reason for this will be apparent shortly. Also notice that the limits of integration are from x_0 to x_2. Therefore, when the simplifying substitutions are made (recall Box 21.2), the integral is from $\alpha =$ 0 to 2:

$$I = h\int_{0}^{2} \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha-1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] d\alpha$$

which can be integrated to yield

$$I = h\left[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6}\right)\Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{11\alpha^3}{72} - \frac{\alpha^2}{8}\right) f^{(4)}(\xi)h^4 \right]_0^2$$

and evaluated for the limits to give

$$I = h\left[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{3} + (0)\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)h^4 \right] \qquad \text{(B21.3.1)}$$

Notice the significant result that the coefficient of the third divided difference is zero. Because $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ and $\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$, Eq. (B21.3.1) can be rewritten as

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}_{\text{Simpson's 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90}f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Truncation error}}$$

Thus, the first term is Simpson's 1/3 rule and the second is the truncation error. Because the third divided difference dropped out, we obtain the significant result that the formula is third-order accurate.

รูปที่ 15: Derivation and Error Estimate of Simpson's 1/3 Rule

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของวิธีซิมสัน 1/3 คือ

$$E_t = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi)$$

เมื่อ $h = (b-a)/2$ จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

ซึ่ง ξ อยู่ในช่วงระหว่าง a และ b

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 1.6

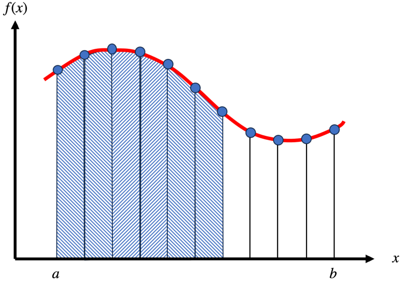
จงใช้วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule) เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริงคือ 1.64053334

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป
(Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าของการหาค่าปริพันธ์ คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์ในแต่ละส่วน แล้วนำค่าที่ได้ในแต่ละส่วนมาบวกกัน แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 16: Graphical representation of the multiple application of Simpson's 1y3 rule. Note that the method can be employed only if the number of segments is even.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

กำหนดให้ $h = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

แทนค่า Simpson's 1/3 rule แต่ละช่วง จะได้

$$\begin{aligned} I \cong & 2h\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} + \frac{f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)}{6} \\ & + \frac{f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)}{6} \end{aligned}$$

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ดังนั้น

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \tag{1.35}$$

สมการ (1.35) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีหาค่าปริพันธ์ด้วยซิมสัน 1/3 หลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์ใช้ซิมสัน 1/3 (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)**

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Error of Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป หาได้จากการรวมผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละส่วน แล้วหาค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

เมื่อ $\bar{f}^{(4)}$ คือ ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์อันดับสี่

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 1.7

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

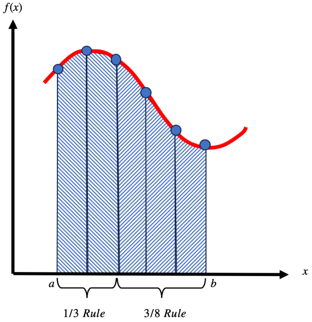
เมื่อ $n = 4$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 เป็นการหาค่าปริพันธ์ที่มีความคล้ายคลึงกับวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีซิมสัน1/3 คือการหาค่าประมาณด้วยการพิจารณาพื้นที่ใต้กราฟ แต่จะใช้ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสาม โดยพิจารณาจุด 4 จุด

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)



รูปที่ 17: Illustration of how Simpson's 1/3 and 3/8 rules can be applied in tandem to handle multiple applications with odd numbers of intervals.

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

เพื่อหาค่าปริพันธ์ จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

เมื่อ $h = (b-a)/3$ ดังนั้น

$$I = \frac{b-a}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \tag{1.36}$$

สมการ (1.36) เรียกว่า **สูตรซิมสัน 3/8 หรือวิธีซิมสัน 3/8**

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Error of Simpson's 3/8 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^(4)(\xi)$$

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

ตัวอย่างที่ 1.8

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริงคือ 1.64053334

แบบฝึกหัด 6

1. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^4 xe^{2x}dx$
   - 0.1 วิธีวิเคราะห์ (analytically)
   - 0.2 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
   - 0.3 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 4$
   - 0.4 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$
   - 0.5 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$ หลายรูป เมื่อ $n = 4$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

2. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{10} (10 + 2x - 6x^2 + 5x^4)\,dx$

   0.1 วิธีวิเคราะห์ (analytically)

   0.2 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

   0.3 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 4$

   0.4 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3

   0.5 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n = 4$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

3. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\pi} (4 + 2\sin x)\,dx$

   0.1 วิธีวิเคราะห์ (analytically)

   0.2 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู

   0.3 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 5$

   0.4 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3

   0.5 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n = 5$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

4. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^3 - 3y^2)\,dxdy$

   0.1 วิธีวิเคราะห์ (analytically)

   0.2 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 2$

   0.3 วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

5. Evaluate the following integral:

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\, dx$$

0.1 analytically
0.2 single application of the trapezoidal rule;
0.3 Multiple application trapezoidal rule, with $n = 2, 4$
0.4 single application of Simpson's 1/3 rule
0.5 Simpson's 3/8 rule

For each of the numerical estimates (2) through (5) determine the percent relative error based on (1).