รายวิชา 09131201
ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์
(Numerical Methods for Computers)
บทที่ 3 ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น
(Solution for system of linear equations)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง และ ดร.รัฐพรหม พรหมคำ

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

August 5, 2024

Table of Contents

Outline

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

ปัญหาส่วนใหญ่ที่พบในทางวิทยาศาสตร์ประยุกต์และวิศวกรรมศาสตร์จำเป็นต้องใช้การแก้สมการเชิงเส้นที่มีหลายสมการและตัวแปรหลายตัวที่ไม่ทราบค่า ซึ่งเราจะเรียกสมการเชิงเส้นเหล่านี้ว่า **ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)**

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นรูปแบบทั่วไปสำหรับ m สมการ และมีตัวแปร n ตัว ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ a_{ij} คือสัมประสิทธิ์ของตัวแปรที่ตำแหน่ง i และ j สำหรับ $i = 1, 2, ..., m$ และ $j = 1, 2, ..., n$ และค่า $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ที่สอดคล้องกับสมการทุกสมการ เรียกว่าเป็น **คำตอบ** หรือ **ผลเฉลยของระบบสมการ**

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

โดยใช้หลักการของเมทริกซ์ในการแก้ระบบสมการเชิงเส้น จะกำหนดให้ $m = n$ ดังนั้น ระบบสมการดังกล่าวสามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad (1.1)$$

เรียก เมทริกซ์ A ว่าเป็น **เมทริกซ์สัมประสิทธิ์** ซึ่งเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ เรียก $\mathbf{x}$ ว่าเป็น **เวกเตอร์ตัวไม่ทราบค่า** และเรียก $\mathbf{b}$ ว่าเป็น **เมทริกซ์ค่าคงตัว**

ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)

และสามารถเขียนเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ของระบบสมการ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ได้ดังนี้

$$[A : \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & : & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & : & b_n \end{bmatrix}$$

วิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

วิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

ผลเฉลยเชิงกราฟสามารถหาได้จากการนำสมการเชิงเส้น 2 สมการมาเขียนกราฟบนระบบพิกัดคาร์ทีเซียนโดยที่แกนหนึ่งจะสอดคล้องกับ x_1 และอีกแกนจะสอดคล้องกับ x_2 ดังนั้นจะพิจารณาจากระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการ 2 สมการที่มี 2 ตัวแปร ดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

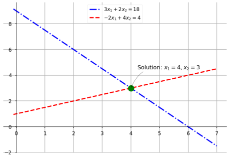
ซึ่งทั้งสองสมการสามารถหาค่า x_2 ได้ดังนี้

$$x_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}x_1 + \frac{b_1}{a_{12}}$$
$$x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \frac{b_2}{a_{22}}$$

สมการทั้งสองเป็นสมการเส้นตรง $x_2 = (\text{ความชัน})x_1 + \text{จุดตัดแกน}$

วิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

เมื่อนำสมการทั้งสองมาเขียนกราฟ จุดที่เส้นทั้งสองตัดกัน ก็คือคำตอบรากของระบบสมการนั่นเอง นั่นคือ กราฟแสดงจุดตัดของระบบสมการ ซึ่งกระบวนการนี้จะถูกเรียกว่า **ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)** โดยจุดตัดจะเป็นผลเฉลยและเป็นผลเฉลยเดียว (Unique Solution) ของระบบสมการ ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1: กราฟแสดงจุดตัดของระบบสมการ ซึ่งจุดตัดเป็นผลเฉลยเดียวของระบบสมการ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

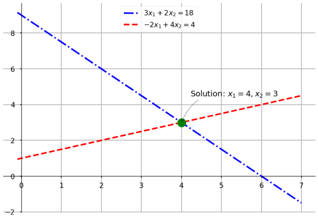
ตัวอย่างที่ 1.1

จงใช้ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method) เพื่อหาค่ารากของสมการ

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &= 18 \\
-2x_1 + 4x_2 &= 4
\end{aligned}
$$

วิธีทำ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



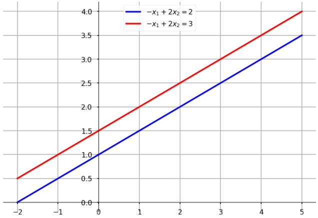
รูปที่ 2: กราฟแสดงจุดตัดของระบบสมการ ซึ่งจุดตัดเป็นผลเฉลยเดียวและ unique (Unique Solution) ของระบบสมการ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)

นอกจากนี้ ในบางครั้งการแก้ระบบสมการเชิงเส้นด้วยระเบียบวิธีเชิงกราฟอาจจะพบปัญหาหลักๆ 3 รูปแบบ ดังนี้

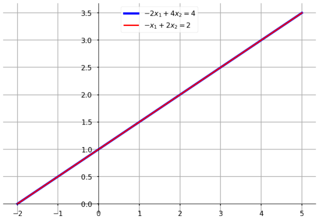
1. ระบบสมการที่ไม่มีผลเฉลย (no solution) โดยกราฟของทั้งสองสมการจะขนานกัน ดังรูปที่ 3
2. ระบบสมการที่มีผลเฉลยอนันต์ (infinite solutions) โดยกราฟของทั้งสองสมการจะทับกัน ดังรูปที่ 4 ซึ่งจะเรียกระบบสมการที่ไม่มีผลเฉลยและระบบสมการที่มีผลเฉลยอนันต์ว่า ระบบเอกฐาน (singular system)
3. ระบบสมการที่มีสภาวะไม่เหมาะสม (ill-conditioned system) โดยกราฟของทั้งสองสมการจะมีความชันใกล้เคียงกันมากจนไม่สามารถมองเห็นจุดตัดได้ ดังรูปที่ 5

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



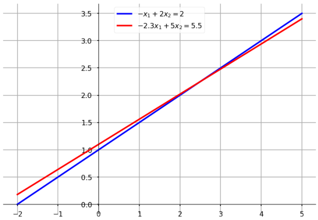
รูปที่ 3: กราฟแสดงถึงการไม่มีผลเฉลย (no solution) ของระบบสมการ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 4: กราฟแสดงถึงการมีผลเฉลยอนันต์ (infinite solutions) ของระบบสมการ

ระเบียบวิธีเชิงกราฟ (Graphical Method)



รูปที่ 5: กราฟแสดงระบบสมการที่มีสภาวะไม่เหมาะสม (ill-conditioned system)

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) เป็นเทคนิคในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นอีกวิธีหนึ่งที่เหมาะกับระบบสมการขนาดเล็กๆ
พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี n สมการ และ n ตัวแปร ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

และระบบสมการดังกล่าวสามารถเขียนอยู่ในรูปของเมทริกซ์ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เมื่อ $A, \mathbf{x}$ และ $\mathbf{b}$

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

กำหนดโดยสมการต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Matrix Multiplication

A matrix is an array of numbers. To multiply a matrix by a single number (scalar multiplication) is straightforward:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -9 \end{bmatrix} \times 2 = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -18 \end{bmatrix}$$

Matrix Multiplication

To multiply a matrix by another matrix, we need to perform the"dot product" of rows and columns. For example:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix}$$

Solution:

$$\begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}$$

Matrix Determinant

For a 2×2 matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

The determinant of A, denoted as $\det(A)$ or $|A|$, is calculated as:

$$\det(A) = ad - bc$$

Example: Given:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

The determinant is:

$$\det(C) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 8 - 3 = 5$$

Matrix Determinant

For a 3×3 matrix:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

The determinant of B is calculated as:

$$\det(B) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

Example: Given:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

The determinant is:

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) - 2(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) + 3(4 \cdot 8 - 5 \cdot 7) \\ &= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) \\ &= 1(-3) - 2(-6) + 3(-3) \\ &= -3 + 12 - 9 = 0 \end{aligned}$$

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

สำหรับกฎของคราเมอร์คือการแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้ตัวกำหนด (determinant) กล่าวคือ ถ้า $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ เป็นระบบสมการเชิงเส้นซึ่งมี n สมการ และ n ตัวแปร โดยที่ $|A| \neq 0$ แล้วระบบสมการสามารถหาผลเฉลยได้และมีเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น นั่นคือ

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, ..., x_n = \frac{|A_n|}{|A|} \tag{1.3}$$

เมื่อ $|A| = \det A$ คือค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A (determinant) และ A_j คือเมทริกซ์ซึ่งได้จากการกำหนดสมาชิกในแต่ละหลักจากเมทริกซ์ A โดยการแทนที่หลักที่ j ของ A ด้วยเมทริกซ์ $\mathbf{b}$ โดยจะเรียกสมการ (1.4) ว่า รูปแบบทั่วไปของกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

ตัวอย่างเช่น พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้ ที่อยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $|A|$ คือค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A นั่นคือ

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

หลักการที่สำคัญของวิธีคราเมอร์ คือการหาค่าตัวกำหนด (Determinant) แล้วหาตัวไม่ทราบค่า x_i ของระบบสมการจาก

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \tag{1.4}$$

เราเรียกสมการ 1.4 ว่า รูปแบบทั่วไปของกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule) เมื่อ $|A| = \det A$ คือค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A (determinant) และ A_i คือค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A หลังจากที่เมทริกซ์ A ได้เปลี่ยนค่าไปในแนวแถวตั้ง i ด้วยค่าในเวกเตอร์ B

ตัวอย่างเช่น พิจารณาระบบสมการต่อไปนี้ที่อยู่ในรูป $[A]\{X\} = \{B\}$ นั่นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้ $|A|$ คือค่าตัวกำหนดของเมทริกซ์ A นั่นคือ

$$|A| = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

จากกฎของคราเมอร์ (1.4) จะได้

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

และ

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

กฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

ตัวอย่างที่ 1.2

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 &= 10 \\ 5x_1 - 7x_2 &= -2 \end{aligned}$$

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 1.3

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

$$0.3x_1 + 0.52x_2 + x_3 = -0.01$$
$$0.5x_1 + x_2 + 1.9x_3 = 0.67$$
$$0.1x_1 + 0.3x_2 + 0.5x_3 = -0.44$$

วิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าอย่างง่าย (Elimination of Unknown)

วิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าอย่างง่าย (Elimination of Unknown)

พิจารณาจากระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วยสมการ 2 สมการที่มี 2 ตัวแปร ดังนี้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \tag{1.5}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \tag{1.6}$$

แก้ระบบสมการโดยการคูณ a_{21} ในสมการ (1.5) และ โดยการคูณ a_{11} ในสมการ (1.6) จะได้

$$a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 = b_1a_{21} \tag{1.7}$$
$$a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = b_2a_{11} \tag{1.8}$$

นำสมการ (1.8)-(1.7) จะได้

$$a_{22}a_{11}x_2 - a_{12}a_{21}x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

วิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าอย่างง่าย (Elimination of Unknown)

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}} \tag{1.9}$$

แทน x_2 จากสมการ (1.9) ในสมการ (1.5) จะได้

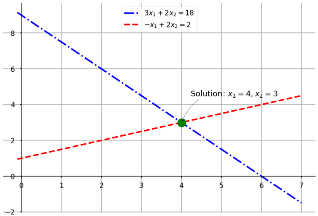
$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.10}$$

ตัวอย่างที่ 1.4

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าอย่างง่าย (Elimination of Unknown)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 18 \\ -x_1 + 2x_2 &= 2 \end{aligned} \tag{1.11}$$

วิธีทำ



รูปที่ 6: กราฟแสดงผลเฉลยของระบบสมการ (1.11) ในตัวอย่างที่ 1.4

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีเชิงกราฟ

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 8x_2 &= -24 \\
-x_1 + 6x_2 &= 34
\end{aligned}
$$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีกำจัดตัวไม่ทราบค่าอย่างง่าย

$$
\begin{aligned}
4x_1 - 8x_2 &= -24 \\
-x_1 + 6x_2 &= 34
\end{aligned}
$$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ด้วยกฎของคราเมอร์

$$
\begin{aligned}
10x_1 + x_2 + x_3 &= -12 \\
2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\
x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

4. จากแบบฝึกหัดข้อที่ 1 จงเขียนภาษาโปรแกรมไพธอนเพื่อหาค่ารากของระบบสมการ

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $x_1 = 8, x_2 = 7$
2. $x_1 = 8, x_2 = 7$
3. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$

วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method)

วิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method)

ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์ (Gauss Elimination Method) จัดได้ว่าเป็นวิธีการแก้ระบบสมการที่ได้รับความนิยมมากวิธีการหนึ่ง และเป็นวิธีการที่ถูกนำใช้ในการคำนวณโดยใช้เครื่องคิดเลขหรือคอมพิวเตอร์ โดย ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์ประกอบด้วย 2 ระเบียบวิธีคือ

1. ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)
2. ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน (Gauss Elimination Method with Partial Pivoting Method)

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

วิธีการนี้จะจัดรูปของระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่ในรูปแบบระบบสมการเชิงเส้นแบบสามเหลี่ยมบน (upper-triangular system) ซึ่งระบบสมการแบบสามเหลี่ยมบนนี้สามารถหาผลเฉลยได้โดยการแทนที่กลับ (back substitution)

แม้ว่าเทคนิคนี้เหมาะอย่างยิ่งสำหรับการนำไปใช้ในการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น แต่การปรับเปลี่ยนค่าบางอย่างในขั้นตอนการจัดรูปของระบบสมการเชิงเส้นเพื่อให้ได้ผลเฉลย จำเป็นต้องหลีกเลี่ยงการหารด้วยศูนย์ วิธีการต่อไปนี้เราจึงเรียกว่า **ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)** เนื่องจากไม่ได้หลีกเลี่ยงปัญหานี้

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

กำหนดให้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1.12}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \tag{1.13}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \tag{1.14}$$

$$\vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \tag{1.15}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

วิธีการกำจัดแบบเกาส์ สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้
ขั้นตอนที่ 1 การกำจัดไปข้างหน้า (Forward Elimination)
เพื่อที่จะกำจัด x_1 ของสมการ (1.13) โดยการคูณสมการ (1.12) ด้วย $(-a_{21}/a_{11})$ จะได้

$$-a_{21}x_1 - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}}x_2 - \cdots - a_{1n}\frac{a_{21}}{a_{11}}x_n = b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \tag{1.16}$$

นำสมการ (1.16)+ (1.13) จะได้

$$\left(a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - a_{1n}\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right)x_n = -b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \tag{1.17}$$

หรือ

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

เมื่อ $a'_{22} = a_{22} - a_{12}(a_{21/a_{11}})$ เป็นต้น

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ในทำนองเดียวกันกับสมการ (1.16), (1.17) โดยการคูณสมการ (1.12) ด้วย $(-a_{31}/a_{11})$ จะได้

$$a'_{32}x_2 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3$$

เมื่อ $a'_{22} = a_{22} - a_{12}(a_{21/a_{11}})$ เป็นต้น

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

โดยใช้กระบวนการเดียวกันในการกำจัด x_1 กับสมการที่เหลือ จะได้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1.18}$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \tag{1.19}$$
$$a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n = b'_3 \tag{1.20}$$
$$\vdots$$
$$a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n \tag{1.21}$$

เราจะเรียกสมการ (1.18) ว่า **สมการหลัก (pivot equation)** และ จะเรียก a_{11} ว่า **สัมประสิทธิ์หลัก (pivot coeficient)** หรือ **ตัวหลัก (pivotal element)**

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

เพื่อที่จะกำจัด x_2 ของสมการ (1.20) โดยการคูณสมการ (1.19) ด้วย $(-a'_{32}/a'_{22})$ และผลลัพธ์ที่ได้ลบออกจากสมการ (1.20) ยิ่งไปกว่านั้นใช้กระบวนการเดียวกันในการกำจัด x_2 กับสมการที่เหลือ จะได้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \tag{1.22}$$
$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \tag{1.23}$$
$$a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \tag{1.24}$$
$$\vdots$$
$$a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n = b''_n \tag{1.25}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \qquad (1.26)$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \qquad (1.27)$$

$$a''_{33}x_2 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \qquad (1.28)$$

$$\vdots$$

$$a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \qquad (1.29)$$

เมื่อ $a_{nn}^{(n-1)}$ คือ พจน์ a_{nn} ที่มีการเปลี่ยนแปลง $(n-1)$ ครั้ง

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ขั้นตอนที่ 2 การแทนค่าย้อนกลับ (Back Substitution)
จากสมการ (1.29) จะได้

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}} \qquad (1.30)$$

จากสมการ (1.30) สามารถแทนค่าย้อนกลับเพื่อหาคา $x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, \ldots, x_2, x_1$ ตามลำดับ ดังนั้นสามารถเขียนเป็นสมการในรูปแบบทั่วไปได้ ดังนี้

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)}x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \quad \text{for} \quad i = n-1, n-2, ..., 1 \qquad (1.31)$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นวิธีการกำจัดแบบเกาส์ที่แสดงอยู่ในรูปเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการเชิงเส้น

1. **การกำจัดไปข้างหน้า (Forward Elimination)** ถ้าหากมีระบบสมการที่ประกอบด้วย 3 สมการย่อย ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & b_3 \end{bmatrix} \tag{1.32}$$

การกำจัดไปข้างหน้าจะเปลี่ยนระบบสมการ (1.32) ให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จัตุรัสทางด้านซ้ายของสมการ และเป็นเมทริกซ์ที่ประกอบด้วยค่าศูนย์ตลอดแถบล่างซ้าย ซึ่งมีรูปดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & : & b''_3 \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

2. **การแทนค่าย้อนกลับ (Back Substitution)** เมื่อสามารถจัดระบบสมการให้อยู่ในรูปของสมการ (1.33) ได้แล้ว ก็จะง่ายในการคำนวณหาค่า x_i สำหรับ $i = 1, 2, 3$ โดยเริ่มจากสมการท้ายสุดก่อน แล้วทำไล่ย้อนกลับขึ้นไป เพื่อหาค่า x_i สำหรับ $i = 1, 2, 3$ ที่เหลือทีละสมการ ดังนี้

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{b''_3}{a''_{33}} \\ x_2 &= \frac{b'_2 - a'_{23}x_3}{a''_{22}} \\ x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} \end{aligned} \tag{1.34}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ตัวอย่างที่ 1.5

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85 \quad (1.35)$$

$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3 \quad (1.36)$$

$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4 \quad (1.37)$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ขั้นตอนที่ 1 การกำจัดไปข้างหน้า

- เพื่อที่จะกำจัด x_1 ในสมการที่ (1.36)

  นำสมการ $(1.35)\times\dfrac{(0.1)}{3}$ จะได้

$$0.1x_1 - 0.00333x_2 - 0.0066667x_3 = 0.2616667 \quad (1.38)$$

  นำสมการ (1.36)-(1.38) จะได้

$$7.003333x_2 - 0.293333x_3 = -19.5617$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

- เพื่อที่จะกำจัด x_1 ในสมการที่ (1.37)
  นำสมการ (1.35)$\times\dfrac{(0.3)}{3}$ จะได้

$$0.3x_1 - 0.01x_2 - 0.02x_3 = 0.785 \qquad (1.39)$$

นำสมการ (1.37)-(1.39) จะได้

$$-0.19x_2 + 10.02x_3 = 70.6150$$

จากการดำเนินการข้างต้น จะได้

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 && (1.40)\\ 7.00333x_2 - 0.293333x_3 &= -19.5617 && (1.41)\\ -0.19x_2 + 10.02x_3 &= 70.6150 && (1.42) \end{aligned}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method)

ตัวอย่างที่ 1.6

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Gauss Elimination Method)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - x_3 &= 40\\ x_1 - 6x_2 + 2x_3 &= -28\\ x_1 - 2x_2 + 12x_3 &= -86 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1\\ 1 & -6 & 2\\ 1 & -2 & 12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40\\ -28\\ -86 \end{bmatrix}$$

ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์

1. **ปัญหาที่เกิดจากการหารด้วยศูนย์ (Division by Zero)**
   ปัญหานี้เกิดขึ้นเมื่อสัมประสิทธิ์เข้าใกล้ศูนย์ หรือเป็นศูนย์ เช่น

$$\begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 &= 5 \end{aligned}$$

2. **ปัญหาค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ (Round-off Errors)**
   ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษจะมีผลอย่างมาก เมื่อระบบสมการมีหลายสมการ เพราะว่าคำตอบของตัวแปร จะขึ้นอยู่กับค่าตัวแปรก่อนหน้า
3. **ปัญหาระบบสมการในสภาวะไม่เหมาะสม (ill-Conditioned System)**
   เมื่อเปลี่ยนแปลงสัมประสิทธิ์ไปไม่มาก แต่ทำให้คำตอบที่ได้เปลี่ยนแปลงไปมาก

ปัญหาที่อาจเกิดขึ้นจากวิธีการกำจัดแบบเกาส์

ตัวอย่างที่ 1.7

การหาคำตอบของระบบสมการในสภาวะไม่เหมาะสม

$$x_1 + 2x_2 = 10 \quad (1.43)$$
$$1.1x_1 + 2.2x_2 = 10.4 \quad (1.44)$$

วิธีทำ นำ (1.43) $\times 1.1$ จะได้

$$1.1x_1 + 2.2x_2 = 11 \quad (1.45)$$

นำสมการ (1.45)−(1.44) จะได้ $0 = 0.6$ ซึ่งไม่เป็นจริง
ดังนั้น จึงปรับสัมประสิทธิ์หน้า x_1 ของสมการ (1.44) จาก 1.1 เป็น 1.05 โดยใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ จะได้ $x_1 = 8, x_2 = 1$

วิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน (Gauss Elimination Method with Partial Pivoting Method)

เราสามารถสรุปได้ว่าปัญหาในภาพรวมนั้นเกิดจากค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ และการหารด้วยศูนย์ ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษสามารถแก้ไขให้ลดน้อยลงได้ โดยการใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ที่สามารถเก็บตัวเลขนัยสำคัญได้มากขึ้น ส่วนการหารด้วยศูนย์นั้นสามารถแก้ไขได้ด้วยการเลือกตัวหลัก (pivoting) และ/หรือ การจัดสเกล (scaling) ดังนั้น **ระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน (Gauss Elimination Method with Partial Pivoting Method)** เป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นมาเพื่อแก้ปัญหาการหารด้วยศูนย์ ด้วยการสลับสมการที่อยู่ในแถวนอนเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่างที่ 1.8

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน (Gauss Elimination Method with Partial Pivoting Method)

$$0.0003x_1 + 3.0000x_2 = 2.0001 \quad (1.46)$$

$$1.0000x_1 + 1.0000x_2 = 1.0000 \quad (1.47)$$

กำหนดให้ใช้ทศนิยม 3 ตำแหน่ง และค่าจริง คือ $x_1 = \frac{1}{3}$ และ $x_2 = \frac{2}{3}$

เลขนัยสำคัญ	x_2	x_1	$\varepsilon_t(x_1)$
3	0.667	-3.33	1099
4	0.6667	0.0000	100
5	0.66667	0.3000	10
6	0.666667	0.330000	1
7	0.6666667	0.3330000	0.1

ตาราง 1: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.8 ด้วยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา

เลขนัยสำคัญ	x_2	x_1	$\varepsilon_t(x_1)$
3	0.667	0.333	0.1
4	0.6667	0.3333	0.01
5	0.66667	0.33333	0.001
6	0.666667	0.333333	0.0001
7	0.6666667	0.3333333	0.00001

ตาราง 2: แสดงค่าจากการคำนวณของตัวอย่างที่ 1.8 ด้วยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน

ตัวอย่างที่ 1.9

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์แบบธรรมดา (Naïve Gauss Elimination Method) และวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน (Gauss Elimination Method with Partial Pivoting Method) พร้อมเปรียบเทียบคำตอบกับผลเฉลยแม่นตรง(ค่าจริง)

$$\begin{aligned}
0.729x_1 + 0.81x_2 + 0.9x_3 &= 0.6867 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 0.8338 \\
1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000
\end{aligned}$$

กำหนดให้ใช้ทศนิยม 4 ตำแหน่ง และค่าจริง คือ $x_1 = 0.2245$, $x_2 = 0.2814$ และ $x_3 = 0.3279$

วิธีกำจัดแบบเกาส์-ชอร์ดอง (Gauss-Jordan method)

วิธีกำจัดแบบเกาส์-ชอร์ดอง (Gauss-Jordan method)

พิจารณาระบบสมการทั่วไปอยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{1.48}$$

จากนั้นทำการกำจัดไปข้างหน้า ในทำนองเดียวกับที่ใช้วิธีการกำจัดแบบเกาส์ จะได้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} \tag{1.49}$$

ดังนั้น จะได้

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} \tag{1.50}$$

วิธีกำจัดแบบเกาส์-ซอร์ดอง (Gauss-Jordan method)

ตัวอย่างที่ 1.10

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีกำจัดแบบเกาส์-ซอร์ดอง (Gauss-Jordan method)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\ 0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 &= -19.3 \\ 0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 &= 71.4 \end{aligned}$$

วิธีทำ

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -0.1 & -0.2 & : & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & : & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & : & 71.4 \end{array}\right] \begin{array}{l} \Leftarrow R_1 \\ \Leftarrow R_2 \\ \Leftarrow R_3 \end{array}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= -12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

   1. โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์
   2. โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์ซอร์ดอง

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -2 \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 14 \end{aligned}$$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์โดยเลือกสมการตัวหลักบางส่วน

$$\begin{aligned} 1.2x_1 + 2.1x_2 - 1.1x_3 &= 1.8776 \\ -1.1x_1 + 2.0x_2 + 3.1x_3 &= -0.1159 \\ -2.1x_1 - 2.2x_2 + 3.7x_3 &= -4.2882 \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1.
   1. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
   2. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
2. $x_4 = 2, x_3 = -1, x_2 = 0, x_1 = 1$
3. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$
4. $x_1 = -2.1557, x_2 = 1.2746, x_3 = -1.6246$

วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ซึ่ง $AB = BA = I$ เราเรียก B ว่าเมทริกซ์ผกผัน (inverse matrix) ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1} นั่นคือ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

ข้อสังเกต 1.1

- ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้วเมทริกซ์ผกผันจะมีเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น
- เราจะเรียกเมทริกซ์ที่ไม่มีเมทริกซ์ผกผันว่า **เมทริกซ์เอกฐาน (singular matrix)**
- เราจะเรียกเมทริกซ์ที่มีเมทริกซ์ผกผันว่า **เมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix)**
- A มีเมทริกซ์ผกผัน ก็ต่อเมื่อ $det(A) \neq 0$

การหาค่ารากของระบบสมการทั่วไปที่อยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ด้วยการดำเนินการของเมทริกซ์ กระทำได้โดยนำเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ A^{-1} คูณเข้าทางซ้ายตลอดสมการดังนี้

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

เมื่อ $A^{-1}A = I$ โดยที่ I คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix)
ดังนั้น

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{1.51}$$

- **การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด** 2×2
  ถ้า $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ และ $det(A) \neq 0$ จะได้

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก ถ้า $AA^{-1} = I$ แล้ว A^{-1} เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A
สำหรับการหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 จาก $AA^{-1} = I$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} \\ a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (1.52)$$

จะเห็นได้ว่า สมการ (1.52) สมมูลกับสมการสามสมการต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{11} \\ a^*_{21} \\ a^*_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.53)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{12} \\ a^*_{22} \\ a^*_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (1.54)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^*_{13} \\ a^*_{23} \\ a^*_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (1.55)$$

1. **การคำนวณเมทริกซ์ผกผันโดยใช้วิธีจำกัดแบบเกาส์ (Finding inverse of a matrix using Gauss Method)**
   โดยใช้วิธีจำกัดแบบเกาส์กับระบบสมการ (1.53) (1.54)และ (1.55) ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้ในแต่ละระบบสมการจะสอดคล้องกับคอลัมน์ของเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} เนื่องจากทั้งสามระบบสมการ ((1.53) (1.54) (1.55)) มีเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ที่มีค่าเท่ากัน ดังนั้นเราสามารถหาผลเฉลยทั้งสามระบบสมการ ((1.53) (1.54) (1.55)) พร้อมกันได้ โดยเริ่มจากเขียนทั้งสามระบบสมการอยู่รูปเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยวิธีกำจัดแบบเกาส์ (ขั้นตอนที่ 1 การกำจัดไปข้างหน้า) จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & -a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & : & -a_{31}/a_{11} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & \alpha_{21} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & : & \alpha_{31} & \alpha_{32} & 1 \end{bmatrix} \tag{1.56}$$

เมื่อ

$$\alpha_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \alpha_{31} = \frac{a_{21}}{a_{11}}\frac{a'_{32}}{a'_{22}} - \frac{a_{31}}{a_{11}}, \alpha_{32} = -\frac{a'_{32}}{a'_{22}}$$

จากสมการ (1.56) จะได้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & \alpha_{21} \\ 0 & 0 & a'_{33} & : & \alpha_{31} \end{bmatrix} \tag{1.57}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & 1 \\ 0 & 0 & a'_{33} & : & \alpha_{32} \end{bmatrix} \tag{1.58}$$

และ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 0 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & : & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} & : & 1 \end{bmatrix} \tag{1.59}$$

จากสมการ (1.57), (1.58) และ (1.59) โดยการการแทนค่าย้อนกลับ (Back Substitution) ทำให้ได้สามคอลัมน์ของเมทริกซ์ผกผัน นั่นคือ

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13} \\ a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23} \\ a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.11

กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A

วิธีทำ จากโจทย์เขียนให้รูปเมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 9 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

โดยวิธีกำจัดแบบเกาส์ หลังจากขั้นตอนแรก จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & : & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 7/2 & 17/2 & : & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

และหลังจากขั้นตอนที่สอง จะได้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & : & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & : & 10 & -7 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.60}$$

ตัวอย่างที่ 1.12

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

$$\begin{aligned}2x_1 + x_2 + x_3 &= 10\\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 18\\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 16\end{aligned}$$

วิธีทำ จากโจทย์ระบบสมการทั่วไปอยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ จะได้

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\ 18\\ 16\end{bmatrix} \tag{1.61}$$

2. **การคำนวณเมทริกซ์ผกผันโดยใช้วิธีกำจัดแบบเกาส์-ชอร์ดอง (Finding inverse of a matrix using Gauss-Jordan Method)**
ตัวอย่างเช่น สมมติว่ามีเมทริกซ์ A ขนาด 3×3 สำหรับการหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} จะใช้การดำเนินการตามแถวกับเมทริกซ์ในสมการต่อไปนี้

$$[A|I] = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & : & 1 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & : & 0 & 1 & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & : & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

ให้อยู่ในรูปแบบ

$$[I|A^{-1}] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & : & a^*_{11} & a^*_{12} & a^*_{13}\\ 0 & 1 & 0 & : & a^*_{21} & a^*_{22} & a^*_{23}\\ 0 & 0 & 1 & : & a^*_{31} & a^*_{32} & a^*_{33}\end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1.13

จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

$$\begin{aligned} 4x_1 - 4x_2 &= 400 \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= 400 \\ -2x_2 + 4x_3 &= 400 \end{aligned}$$

วิธีทำ จากโจทย์ระบบสมการทั่วไปอยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ จะได้

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ผกผันด้านเดียว (One-sided inverses)

- ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เราจะกล่าวว่า F เป็น**เมทริกซ์ผกผันทางขวา (right inverse)** ถ้า $AF = I_m$
- ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ เราจะกล่าวว่า G เป็น**เมทริกซ์ผกผันทางซ้าย (left inverse)** ถ้า $GA = I_n$

เมื่อ

- F และ G เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$
- I_m เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $m \times m$
- I_n เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$

วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

สำหรับการหาค่ารากของระบบสมการทั่วไปที่อยู่ในรูป $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ โดยใช้เมทริกซ์ผกผันด้านเดียว
ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันทางขวา F แล้วระบบสมการจะต้องมีผลเฉลยอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลย นั่นคือ $X = F\mathbf{b}$ จะเห็นได้ว่า

$$A\mathbf{x} = A(F\mathbf{x}) = (AF)\mathbf{b} = I\mathbf{b} = \mathbf{b}$$

วิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน (Matrix Inversion)

ตัวอย่างที่ 1.14

- กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

แล้ว เมทริกซ์ผกผันทางขวาของเมทริกซ์ A คือ

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

เพราะว่า

$$AD = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$
จงหาเมทริกซ์ผกผันของ A โดยระเบียบวิธีกำจัดแบบเกาส์
2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน
$$\begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= -24 \\ -x_1 + 6x_2 &= 34 \end{aligned}$$
3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน
$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= -12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 &= 13 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$
4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการต่อไปนี้ ด้วยระเบียบวิธีการทำเมทริกซ์ผกผัน
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 14 \end{aligned}$$

เฉลยแบบฝึกหัด

1. $$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1.2 & -0.4 & 0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 0.3 \\ -0.4 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$
2. $x_1 = 8, x_2 = 7$
3. $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$
4. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$