รายวิชา 09131201 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขทางด้านคอมพิวเตอร์ (Numerical Methods for Computers) บทที่ 7 การหาผลเฉลยเชิงตัวเลขของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (The Numerical Solution of Ordinary Differential Equation)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

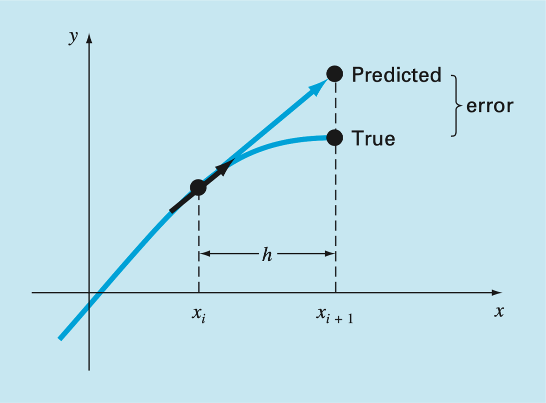
Outline

Table of Contents

Outline

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)



รูปที่ 1: Euler's method.

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูปโดยทั่วไป ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

จากรูปที่ 1 จะสามารถหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณของ y_{i+1} ที่ x_{i+1} จากค่าผลลัพธ์ของ y_i ซึ่งทราบค่าที่ x_i โดยใช้ค่าความชันที่ y_i ดังนี้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

เมื่อ $h = x_{i+1} - x_i$ คือช่วงกว้างที่ใช้ในการคำนวณ ดังนั้น

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i)$$

นั่นคือ

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{1.1}$$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

ตัวอย่างที่ 1.1

จงใช้วิธีของออยเลอร์ เพื่อแก้สมการเชิงอนุพันธ์

$$y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

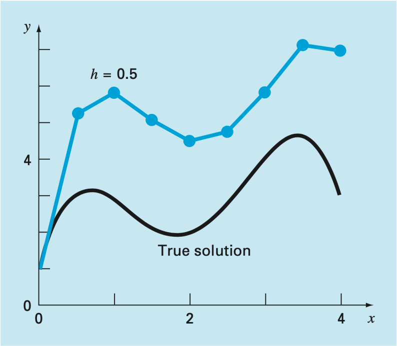
กำหนดให้หาค่า x ในช่วง 0 ถึง 4 เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5 และมีเงื่อนไขเริ่มต้น คือ $y(0) = 1$ ค่าจริงหาได้จากสมการ $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)

x	y_{true}	y_{Euler}	Percent Relative Error	
			Global	Local
0.0	1.00000	1.00000		
0.5	3.21875	5.25000	−63.1	−63.1
1.0	3.00000	5.87500	−95.8	−28.1
1.5	2.21875	5.12500	−131.0	−1.4
2.0	2.00000	4.50000	−125.0	20.3
2.5	2.71875	4.75000	−74.7	17.2
3.0	4.00000	5.87500	−46.9	3.9
3.5	4.71875	7.12500	−51.0	−11.3
4.0	3.00000	7.00000	−133.3	−53.1

รูปที่ 2

วิธีของออยเลอร์ (Euler's Method)



รูปที่ 3: Comparison of the true solution with a numerical solution using Euler's method for the integral of $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ from $x = 0$ to $x = 4$ with a step size of 0.5. The initial condition at $x = 0$ is $y = 1$.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีออยเลอร์ (Error of Euler's Method)

ผลเฉลยของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ สามารถแบ่งค่าคลาดเคลื่อนออกเป็น 2 แบบ

1. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)
2. ค่าคลาดเคลื่อนปัดเศษ (Round-off Error)

1.ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลาย (Truncation Error)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสามารถแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือ
1. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ตำแหน่งนั้น (Local Truncation Error)
เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในขั้นตอนนั้น
2. ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายสะสม (Propagated Truncation Error)
เป็นค่าคลาดเคลื่อนที่มีผลมาจากค่าประมาณในขั้นตอนแรก ทำให้ค่าประมาณในขั้นตอนต่อไปเกิดค่าคลาดเคลื่อนขึ้นด้วย เช่น ค่า y ที่ได้จากค่าประมาณในขั้นตอนแรก เมื่อนำค่า y ไปใช้ในขั้นตอนต่อไป จะทำให้ค่า y ที่ได้ครั้งใหม่ เกิดค่าคลาดเคลื่อนด้วย ผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนทั้ง 2 ส่วน เรียกว่า ค่าคลาดเคลื่อนรวม (Global Truncation Error)

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification and Improvements of Euler's Methods)

วิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification and Improvements of Euler's Methods)

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

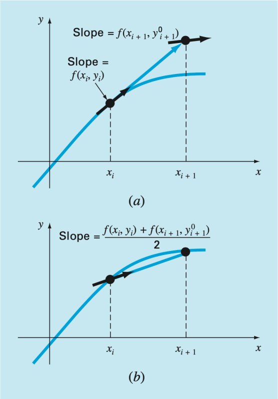
วิธีของฮวนเป็นวิธีที่ดัดแปลงมาจากวิธีของออยเลอร์เพื่อให้ได้ค่าผลลัพธ์ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ให้มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ค่าความชันในวิธีของออยเลอร์ สามารถคำนวณที่จุดเริ่มต้นของช่วงกว้างที่ตำแหน่ง x_i จะได้

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

จากนั้นจะนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์โดยประมาณที่ x_{i+1} ดังนี้

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{1.2}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)



รูปที่ 4: Graphical depiction of Heun's method. (a) Predictor and (b) corrector.

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ถ้านำค่าที่ได้ไปคำนวณหาค่าความชันที่จุดปลายของช่วงกว้างที่ ดังแสดงใน รูปที่ 4 (a) จะได้

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^0_{i+1}) \tag{1.3}$$

หลักการในวิธีของฮวน คือการนำค่าความชันที่จุดเริ่มต้น และจุดปลายของช่วงกว้างมาหาค่าเฉลี่ย ซึ่งจะให้ค่าความชันเฉลี่ยที่ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น ดังแสดงในรูปที่ 4 (b) และถ้าหากใช้ค่าความชันเฉลี่ยในการคำนวณ จะทำให้ได้ค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงมากขึ้นตามไปด้วย
ดังนั้น ค่าความชันเฉลี่ย คือ

$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^0_{i+1})}{2} \tag{1.4}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ดังนั้นคำตอบของค่าผลลัพธ์โดยประมาณที่ตำแหน่ง x_{i+1} คือ

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h \tag{1.5}$$

โดยสรุปวิธีของฮวนจะประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ขั้นตอนแรกเป็นการทำนายค่าโดยประมาณที่ x_{i+1} ดังแสดงในสมการ (1.2) ทำให้เกิดค่าผลลัพธ์ y_{i+1}^0 เรียกว่า **ตัวทำนาย(Predictor)** ค่าผลลัพธ์ที่ได้ สามารถนำไปใช้ในการคำนวณหาค่าความชันที่ x_{i+1} และค่าความชันที่ได้ คือ x_{i+1} จะนำไปใช้หาค่าความชันเฉลี่ยในขั้นตอนที่สอง เพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ y_{i+1} ซึ่งเรียกว่า **ตัวแก้ (Corrector)** ที่มีความเที่ยงตรงสูงขึ้น

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ดังนั้นสามารถกล่าวได้ว่าวิธีของฮวน เป็นวิธีที่ประกอบด้วยการคำนวณตัวทำนาย และตัวแก้ (Predictor Corrector Method) ที่มีขั้นตอน ดังนี้

1. Predictor:

$$y_{i+1}^{0} = y_i + f(x_i, y_i)h \tag{1.6}$$

2. Corrector:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^{0})}{2}h \tag{1.7}$$

และ

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^{j} - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^{j}} \right| 100\% \tag{1.8}$$

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

ตัวอย่างที่ 1.2

Use Heun's method to integrate

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

from $x = 0$ to $x = 4$ with a step size of 1. The initial condition at $x = 0$ is $y = 2$.
(We can use calculus to determine the following analytical solution: $y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x}$)

1. วิธีของฮวน (Heun's Method)

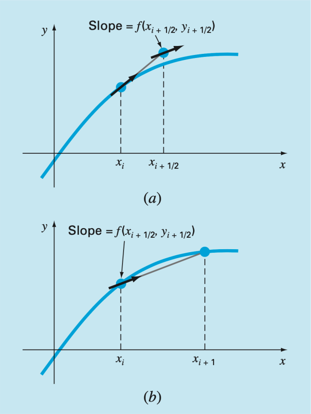
		Iterations of Heun's Method			
		1		15	
x	y_{true}	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

รูปที่ 5

2. วิธีโพลิกอน(Polygon Method or Midpoint Method)

วิธีโพลิกอน เป็นวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุง (Modification Euler's Method) หรือเป็นวิธีที่เกิดจากความเข้าใจในทำนองเดียวกับความเข้าใจในวิธีของฮวน คือค่าผลลัพธ์ที่คำนวณได้ จะมีความเที่ยงตรงมากขึ้น ถ้าสามารถหาค่าความชันที่จะนำมาใช้ในการคำนวณได้แม่นยำมากยิ่งขึ้น ดังนั้นในวิธีของออยเลอร์ที่ปรับปรุงนี้ จะทำให้หาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง h ดังแสดงในรูป

2. วิธีโพลิกอน (Polygon Method or Midpoint Method)



รูปที่ 6: Graphical depiction of the midpoint method.

2. วิธีโพลิกอน (Polygon Method or Midpoint Method)

เราจะเริ่มต้นจากการใช้วิธีของออยเลอร์ ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง ดังนี้

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

จากนั้นจึงจะคำนวณหาค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้าง

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

แล้วจะนำค่าความชันที่จุดกึ่งกลางของช่วงกว้างที่คำนวณได้มาใช้ในการคำนวณหาค่าผลลัพธ์ที่จุดปลายของช่วงกว้างต่อไป

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h$$

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

วิธีรุงเงคุตตา เป็นวิธีที่ได้รับความนิยม และนำไปใช้กันอย่างกว้างขวาง โดยเฉพาะในการคำนวณที่ต้องการค่าผลลัพธ์ที่มีความเที่ยงตรงสูง สมการหลักที่ใช้ในการคำนวณวิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods) คือ

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h$$

โดยที่ $\phi(x_i, y_i, h)$ เรียกว่า ฟังก์ชันส่วนเพิ่ม (Increment Function) ฟังก์ชันส่วนเพิ่มนี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปโดยทั่วไปได้ ดังนี้

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_nk_n$$

เมื่อ a_i เป็นค่าคงที่ $(i = 1, 2, ..., n)$

วิธีรุงเงคุตตา (Runge Kutta Methods)

และ ค่า k_i สามารถคำนวณหาได้จาก

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + p_2 h, y_i + q_{21} k_1 h + q_{22} k_2 h) \\
&\vdots \\
k_n &= f(x_i + p_{n-1} h, y_i + q_{n-1,1} k_1 h + q_{n-1,2} k_2 h + \cdots + q_{n-1,n-1} k_{n-1} h)
\end{aligned}
$$

(ตัวห้อย n บอกถึงอันดับของวิธีรุงเงคุตตาที่เลือกใช้ เช่น เมื่อ $n = 1$ เรียกว่า **วิธีรุงเงคุตตาอันดับหนึ่ง** เมื่อ $n = 2$ เรียกว่า **วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง** และค่า p_i และ q_i เป็นค่าคงที่)

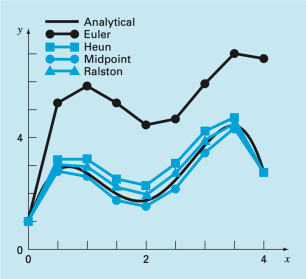
1. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง (Second Order Runge Kutta Method)

สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง (Second Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 2$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + (a_1 k_1 + a_2 k_2)h$$

โดยที่ $k_1 = f(x_i, y_i)$
และ $k_2 = f(x_i + p_1 h, y_i + q_{11} k_1 h)$
เมื่อ $a_1 + a_2 = 1, a_2 p_1 = 1/2, a_2 q_{11} = 1/2$

วิธีรุงเงคุตตาอันดับสอง (Second Order Runge Kutta Method)



รูปที่ 7: Comparison of the true solution with numerical solutions using three second-order RK methods and Euler's method.

2. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสาม (Third Order Runge Kutta Method)

สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสาม (Third Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 3$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3)h$$

โดยที่

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\ k_3 &= f(x_i + h, y_i - k_1 h + 2k_2 h) \end{aligned}$$

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)

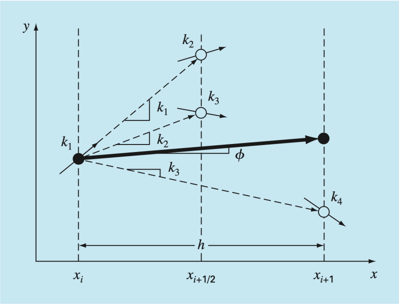
สำหรับวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method) หรือ $n = 4$ มีรูปทั่วไปดังนี้

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i) \\
k_2 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h) \\
k_3 &= f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3 h)
\end{aligned}$$

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)



รูปที่ 8: Graphical depiction of the slope estimates comprising the fourth-order RK method.

3. วิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ (Forth Order Runge Kutta Method)

ตัวอย่างที่ 1.3

จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ เมื่อกำหนดช่วงกว้างเท่ากับ 0.5 และมีเงื่อนเริ่มต้นคือ $x = 0, y = 1, 0 \leq x \leq 4$

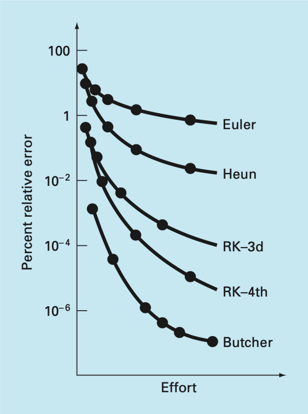
Comparison of Runge-Kutta Methods

Problem Statement. Use first through fifth-order RK methods to solve

$$f(x, y) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

with $y(0) = 2$ from $x = 0$ to $x = 4$ with various step sizes. Compare the accuracy of the various methods for the result at $x = 4$ based on the exact answer of $y(4) = 75.33896$.

Comparison of Runge-Kutta Methods



รูปที่ 9: Comparison of percent relative error versus computational effort for first- through fifth-order RK methods.

ระบบสมการ (System of Equations)

ระบบสมการ (System of Equations)

ระบบสมการที่ประกอบด้วย n สมการย่อยในรูป ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dx} &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\frac{dy_2}{dx} &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
\frac{dy_3}{dx} &= f_3(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
&\vdots \\
\frac{dy_n}{dx} &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1.4

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้โดยวิธีของออยเลอร์

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 4, y_2(0) = 6$ จงหาคำตอบที่ $x = 2$ เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5

Solving Systems of ODEs Using Euler's Method

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3	6.9
1.0	2.25	7.715
1.5	1.6875	8.44525
2.0	1.265625	9.094087

รูปที่ 10

Solving Systems of ODEs Using the Fourth-Order RK Method

ตัวอย่างที่ 1.5

จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่

$$\frac{dy_1}{dx} = -0.5y_1$$
$$\frac{dy_2}{dx} = 4 - 0.3y_2 - 0.1y_1$$

เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y_1(0) = 4, y_2(0) = 6$ จงหาคำตอบที่ $x = 2$ เมื่อช่วงกว้างเท่ากับ 0.5

Solving Systems of ODEs Using the Fourth-Order RK Method

x	y_1	y_2
0	4	6
0.5	3.115234	6.857670
1.0	2.426171	7.632106
1.5	1.889523	8.326886
2.0	1.471577	8.946865

รูปที่ 11

แบบฝึกหัด 7

1. จงหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = yx^2 - y$$

โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่ เมื่อกำหนด $h = 0.5$ และ $y(0) = 1$ ทำซ้ำในสมการตัวแก้ไข เมื่อกำหนด $\epsilon_s = 1$ จงหาคำตอบในช่วง $x = 0$ ถึง $x = 2$

แบบฝึกหัด 7

2. จากโจทย์ข้อ 1 โดยวิธีของออยเลอร์
3. จากโจทย์ข้อ 1 โดยวิธีรุงเงคุตตาอันดับสี่

แบบฝึกหัด 7

4. Solve the following problem over the interval from $x = 0$ to 1 using a step size of 0.25 where $y(0) = 1$. Display all your results on the same graph.

$$\frac{dy}{dt} = (1 + 4t)\sqrt{y}$$

0.1 Analytically.
0.2 Euler's method.
0.3 Heun's method without iteration.
0.4 Fourth-order RK method.

แบบฝึกหัด 7

4. Use (a) Euler's and (b) the fourth-order RK method to solve

$$\frac{dy}{dt} = -2y + 5e^{-t}$$
$$\frac{dz}{dt} = -\frac{yz^2}{2}$$

over the range $t = 0$ to 0.4 using a step size of 0.1 with $y(0) = 2$ and $z(0) = 4$.