09114222 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเบื้องต้น (Introduction to Numerical Methods) บทที่ 6 การหาอนุพันธ์และปริพันธ์เชิงตัวเลข (Numerical Differentiation and Numerical Integration)

ผศ.ดร.วงศ์วิศรุต เขื่องสตุ่ง

สาขาวิชาคณิตศาสตร์
ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาการคอมพิวเตอร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลธัญบุรี

October 11, 2023

Outline

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ เป็นวิธีพื้นฐานของการหาค่าปริพันธ์เชิงตัวเลข โดยมีหลักการพื้นฐาน คือการแทนฟังก์ชันที่ซับซ้อนด้วยค่าประมาณของฟังก์ชันที่ง่ายต่อการหาค่าปริพันธ์ และเขียนสมการแทนได้ดังนี้

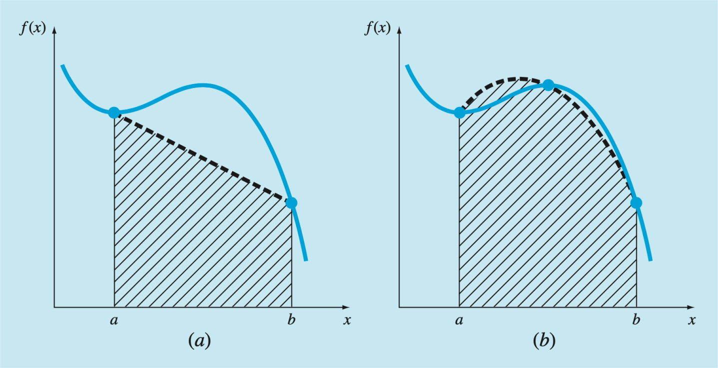
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_n(x)\,dx$$

เมื่อ $f_n(x)$ คือ ฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ที่อยู่ในรูปของสมการ

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

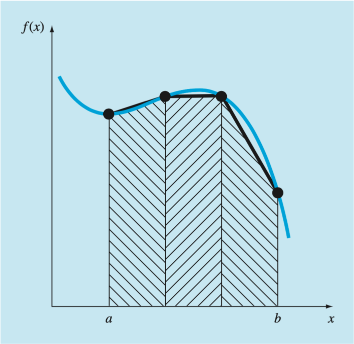
โดยที่ n คือ อันดับของฟังก์ชันพหุนาม

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



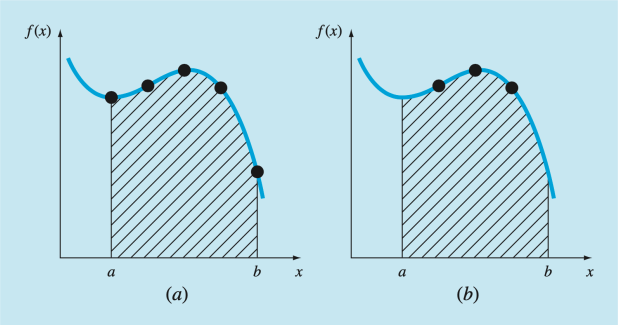
รูปที่ 5: The approximation of an integral by the area under (a) a single straight line and (b) a single parabola.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



รูปที่ 6: The approximation of an integral by the area under three straight-line segments.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ (Newton Cotes Integration)



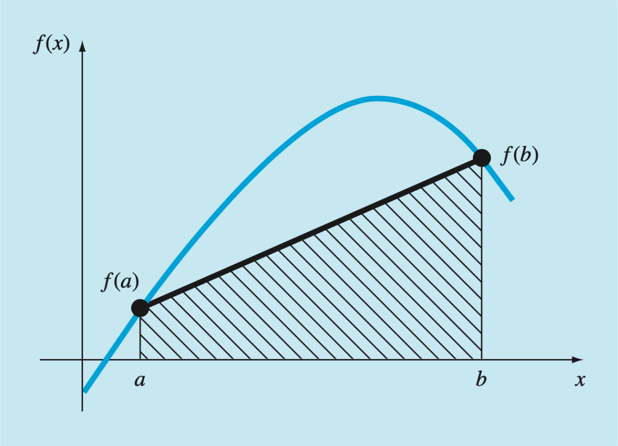
รูปที่ 7: The difference between (a) closed and (b) open integration formulas.

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เป็นวิธีการหาค่าปริพันธ์ด้วยนิวตันโคทส์ ซึ่งเป็นวิธีที่ง่ายที่สุดในการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับหนึ่ง หรือสมการเส้นตรง จะได้

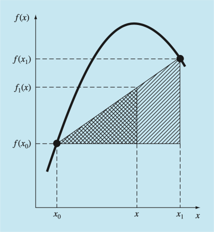
$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_1(x)\,dx \tag{6.22}$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)



รูปที่ 8: Graphical depiction of the trapezoidal rule.

Using Columns



รูปที่ 9

จากรูป พบว่ารูปมีพื้นที่ใต้กราฟที่แรเงาเป็นบริเวณของสี่เหลี่ยมคางหมู จากคุณสมบัติของสามเหลี่ยมคล้าย จะได้

$$\frac{f_1(x) - f(x)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

นั่นคือ

$$f_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a) \tag{6.23}$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

ดังนั้นพื้นที่ใต้เส้นตรงจะเป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน ในช่วง a ถึง b จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_1(x)\,dx \approx \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(a)-f(b)}{b-a}(x-a)\right] dx \quad (6.24)$$

ดังนั้น

$$I = (b-a)\frac{f(b)+f(a)}{2} \quad (6.25)$$

จะเรียกสมการ (6.25) ว่า **trapezoidal rule**

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

Before integration, Eq. (21.2) can be expressed as

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + f(a) - \frac{af(b) - af(a)}{b - a}$$

Grouping the last two terms gives

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(a) - af(b) + af(a)}{b - a}$$

or

$$f_1(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}$$

which can be integrated between $x = a$ and $x = b$ to yield

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{x^2}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} x \Bigg|_a^b$$

This result can be evaluated to give

$$I = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b^2 - a^2)}{2} + \frac{bf(a) - af(b)}{b - a}(b - a)$$

Now, since $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$,

$$I = [f(b) - f(a)] \frac{b + a}{2} + bf(a) - af(b)$$

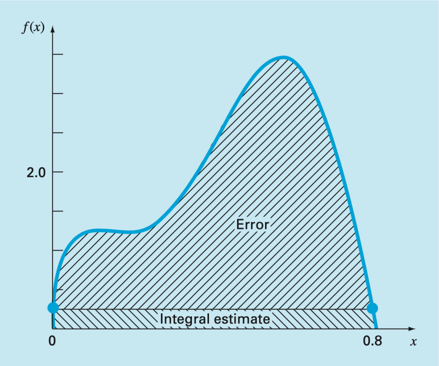
Multiplying and collecting terms yields

$$I = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

which is the formula for the trapezoidal rule.

รูปที่ 10: Derivation of Trapezoidal Rule.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)



รูปที่ 11: Graphical depiction of the use of a single application of the trapezoidal rule to approximate the integral of $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ from $x = 0$ to 0.8.

ค่าคลาดเคลื่อนของวิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยสี่เหลี่ยมคางหมู (Error of Trapezoidal Rule Method)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือ

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

เมื่อ ξ อยู่ระหว่าง a และ b

ในการหาค่า $f''(\xi)$ จะใช้วิธีการหาค่าเฉลี่ย ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bar{f}''(\xi)$ ดังนั้น

$$\bar{f}''(x) = \frac{\int_a^b f''(x)\,dx}{b-a} \tag{6.26}$$

จะได้

$$E_a = -\frac{1}{12} \bar{f}''(\xi)(b-a)^3$$

6.1.1 วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู (Trapezoidal Rule)

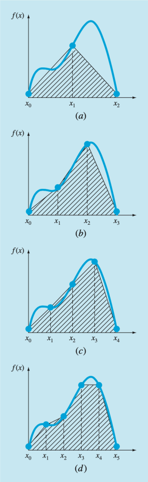
ตัวอย่างที่ 6.4

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมู เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

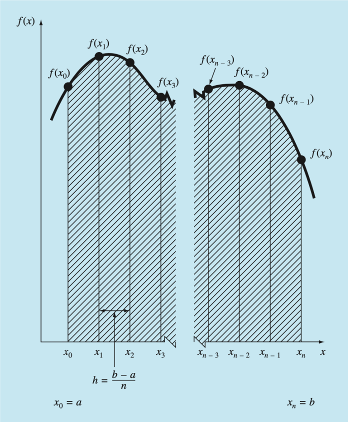
Using Columns



รูปที่ 12

Illustration of the multiple-application trapezoidal rule. (a) Two segments, (b) three segments, (c) four segments, and (d) five segments.

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)



รูปที่ 13: The general format and nomenclature for multiple-application integrals.

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อใช้วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู คือแบ่งช่วงการหาค่าปริพันธ์เป็นหลายๆ ส่วน การหาค่าปริพันธ์ก็คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์แต่ละส่วน ซึ่งสมการนี้เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์การใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application หรือ Composite Integration Formula)**

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

จากรูปที่ 13 แสดงการแบ่งเป็น n ช่วง โดยแต่ละช่วงจะมีช่วงกว้าง h เท่ากัน ซึ่งจะมี $n+1$ จุด คือ $x_0, x_1, ..., x_n$ เมื่อ $h = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx \tag{6.27}$$

แทนค่าสมการด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป จะได้

$$I \approx h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \tag{6.28}$$

หรือ

$$I \approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right] \tag{6.29}$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

เมื่อ $h = \frac{b-a}{2n}$ จะได้

$$I \approx (b-a)\frac{\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]}{2n} \tag{6.30}$$

สมการนี้เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule Method)**

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายที่ได้จากการใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^3}{12n^3}\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)$$

โดยที่ $f''(\xi_i)$ คือ ค่าอนุพันธ์อันดับสอง เมื่อ ξ_i ในแต่ละส่วนที่ i ซึ่งใช้เป็นค่าประมาณของค่าเฉลี่ย หรือค่าเฉลี่ยอนุพันธ์อันดับสอง ของทุกๆ ส่วน

$$\bar{f}'' \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f''(\xi_i)}{n} \tag{6.31}$$

จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

ตัวอย่างที่ 6.5

จงใช้วิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

วิธีประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป (Multiple Application Trapezoidal Rule)

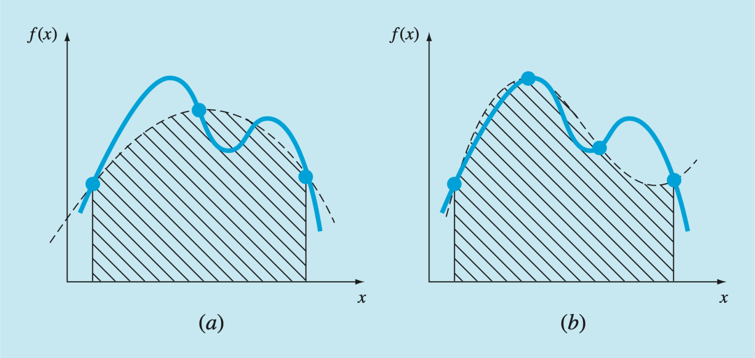
n	h	I	ε_t (%)
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

รูปที่ 14

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)



รูปที่ 15: (a) Graphical depiction of Simpson's 1/3 rule: It consists of taking the area under a parabola connecting three points. (b) Graphical depiction of Simpson's 3/8 rule: It consists of taking the area under a cubic equation connecting four points.

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule)

วิธีซิมสัน (Simpson's Rule) แบ่งออกเป็นสองวิธีดังนี้

1. วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)
2. วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

วิธีซิมสัน 1/3 เป็นการประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน โดยใช้ฟังก์ชันพหุนามอันดับสอง ดังนั้น

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b f_2(x)\,dx \tag{6.32}$$

ถ้า a และ b แทนด้วย x_0 และ x_2 ตามลำดับ และ $f_2(x)$ แทนด้วยฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์ อันดับสอง (Second Order Lagrange Polynomial) จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2) \right] dx$$

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

จากการหาค่าปริพันธ์จะได้

$$I \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] \tag{6.33}$$

โดย $h = (b-a)/2$ สมการ (6.33) เรียกว่า **วิธีซิมสัน 1/3 หรือสูตรซิมสัน1/3 (Simpson's 1/3 Rule)** ซึ่งเป็น Second Newton-Cotes Closed Integration Formula
หรือ

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)}{6} \tag{6.34}$$

ถ้า $a = x_0$, $b = x_2$ และx_1 คือจุดกึ่งกลางระหว่าง a และ b หรือเท่ากับ $(b+a)/2$ และสมการ (6.34) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3**

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

As was done in Box 21.2 for the trapezoidal rule, Simpson's 1/3 rule can be derived by integrating the forward Newton-Gregory interpolating polynomial (Box 18.2):

$$I = \int_{x_0}^{x_2} \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha - 1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] dx$$

Notice that we have written the polynomial up to the fourth-order term rather than the third-order term as would be expected. The reason for this will be apparent shortly. Also notice that the limits of integration are from x_0 to x_2. Therefore, when the simplifying substitutions are made (recall Box 21.2), the integral is from $\alpha =$ 0 to 2:

$$I = h\int_{0}^{2} \left[f(x_0) + \Delta f(x_0)\alpha + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2}\alpha(\alpha - 1) + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)h^4 \right] d\alpha$$

which can be integrated to yield

$$I = h\left[\alpha f(x_0) + \frac{\alpha^2}{2}\Delta f(x_0) + \left(\frac{\alpha^3}{6} - \frac{\alpha^2}{4}\right)\Delta^2 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^4}{24} - \frac{\alpha^3}{6} + \frac{\alpha^2}{6}\right)\Delta^3 f(x_0) + \left(\frac{\alpha^5}{120} - \frac{\alpha^4}{16} + \frac{11\alpha^3}{72} - \frac{\alpha^2}{8}\right) f^{(4)}(\xi)h^4 \right]_0^2$$

and evaluated for the limits to give

$$I = h\left[2f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{3} + (0)\Delta^3 f(x_0) - \frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)h^4 \right] \tag{B21.3.1}$$

Notice the significant result that the coefficient of the third divided difference is zero. Because $\Delta f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$ and $\Delta^2 f(x_0) = f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)$, Eq. (B21.3.1) can be rewritten as

$$I = \underbrace{\frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]}_{\text{Simpson's 1/3}} - \underbrace{\frac{1}{90} f^{(4)}(\xi)h^5}_{\text{Truncation error}}$$

Thus, the first term is Simpson's 1/3 rule and the second is the truncation error. Because the third divided difference dropped out, we obtain the significant result that the formula is third-order accurate.

รูปที่ 16: Derivation and Error Estimate of Simpson's 1/3 Rule

(Error of Multiple Application Trapezoidal Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนตัดปลายของวิธีซิมสัน 1/3 คือ

$$E_t = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

เมื่อ $h = (b-a)/2$ จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

ซึ่ง ξ อยู่ในช่วงระหว่าง a และ b

วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.6

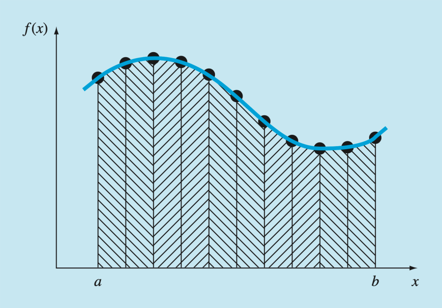
จงใช้วิธีซิมสัน 1/3 (Simpson's 1/3 Rule) เพื่อประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป
(Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าของการหาค่าปริพันธ์ คือผลบวกของการหาค่าปริพันธ์ในแต่ละส่วน แล้วนำค่าที่ได้ในแต่ละส่วนมาบวกกัน แสดงได้ดังรูป



รูปที่ 17: Graphical representation of the multiple application of Simpson's 1y3 rule. Note that the method can be employed only if the number of segments is even.

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

กำหนดให้ $h = \dfrac{b-a}{n}$ จะได้

$$I = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)\,dx$$

แทนค่า Simpson's 1/3 rule แต่ละช่วง จะได้

$$\begin{aligned} I \cong & 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + \frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} \\ & + \frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6} \end{aligned}$$

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ดังนั้น

$$I \approx (b-a)\frac{f(x_0) + 4\sum_{i=1,3,5}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6}^{n-2} f(x_i) + f(x_n)}{3n} \qquad (6.35)$$

สมการ (6.35) เรียกว่า **การประมาณค่าการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีหาค่าปริพันธ์ด้วยซิมสัน 1/3 หลายรูป หรือการหาค่าปริพันธ์ด้วยการประยุกต์ใช้ซิมสัน 1/3 (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)**

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Error of Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป หาได้จากการรวมผลบวกของค่าคลาดเคลื่อนในแต่ละส่วน แล้วหาค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์ จะได้

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$$

เมื่อ $\bar{f}^{(4)}$ คือ ค่าเฉลี่ยของอนุพันธ์อันดับสี่

การหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.7

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป (Multiple Application Simpson's 1/3 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

เมื่อ $n = 4$ ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

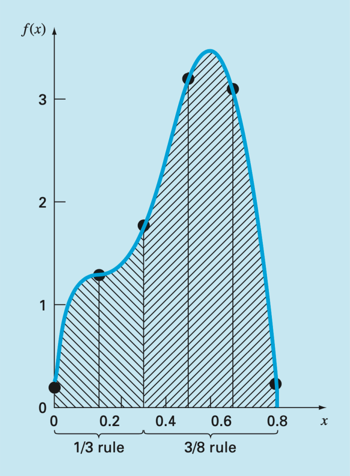
วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

วิธีซิมสัน 3/8 เป็นการหาค่าปริพันธ์ที่มีความคล้ายคลึงกับวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู และวิธีซิมสัน1/3 คือการหาค่าประมาณด้วยการพิจารณาพื้นที่ใต้กราฟ แต่จะใช้ฟังก์ชันพหุนามลากรองจ์อันดับสาม โดยพิจารณาจุด 4 จุด

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)



รูปที่ 18: Illustration of how Simpson's 1/3 and 3/8 rules can be applied in tandem to handle multiple applications with odd numbers of intervals.

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

เพื่อหาค่าปริพันธ์ จะได้

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \cong \int_a^b f_3(x)\,dx$$

นั่นคือ

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

เมื่อ $h = (b-a)/3$ ดังนั้น

$$I = \frac{b-a}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right] \tag{6.36}$$

สมการ (6.36) เรียกว่า **สูตรซิมสัน 3/8 หรือวิธีซิมสัน 3/8**

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Error of Simpson's 3/8 Rule)

ค่าคลาดเคลื่อนของการหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 คือ

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(}4)(\xi)$$

วิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule)

ตัวอย่างที่ 6.8

จงหาค่าปริพันธ์ด้วยวิธีซิมสัน 3/8 (Simpson's 3/8 Rule) ของฟังก์ชัน

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วง $a = 0$ ถึง $b = 0.8$ และประมาณค่าคลาดเคลื่อน เมื่อค่าปริพันธ์จริง คือ 1.64053334

แบบฝึกหัด 6

1. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^4 xe^{2x}dx$
   1. วิธีวิเคราะห์ (analytically)
   2. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
   3. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 4$
   4. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$
   5. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$ หลายรูป เมื่อ $n = 4$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

2. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\displaystyle\int_0^{10}(10+2x-6x^2+5x^4)\,dx$
    1. วิธีวิเคราะห์ (analytically)
    2. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
    3. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n=4$
    4. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3
    5. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน 1/3 หลายรูป เมื่อ $n=4$

    พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

3. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_0^{\pi} (4 + 2\sin x)\,dx$
   1. วิธีวิเคราะห์ (analytically)
   2. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมู
   3. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 5$
   4. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$
   5. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$ หลายรูป เมื่อ $n = 5$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

4. จงหาค่าการหาค่าปริพันธ์ $\int_{-2}^{2}\int_{0}^{4}(x^3 - 3y^2)\,dxdy$

   1. วิธีวิเคราะห์ (analytically)
   2. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีสี่เหลี่ยมคางหมูหลายรูป เมื่อ $n = 2$
   3. วิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีซิมสัน $1/3$

   พร้อมทั้ง หาค่าคลาดเคลื่อนสัมพัทธ์ (ϵ_t)

แบบฝึกหัด 6

5. Evaluate the following integral:

$$\int_{-2}^{4} (1 - x - 4x^3 + 2x^5)\,dx$$

1. analytically
2. single application of the trapezoidal rule;
3. Multiple application trapezoidal rule, with $n = 2, 4$
4. single application of Simpson's 1/3 rule
5. Simpson's 3/8 rule

For each of the numerical estimates (2) through (5) determine the percent relative error based on (1).

Table of Contents