

## 4. 도함수 (Differentiation)

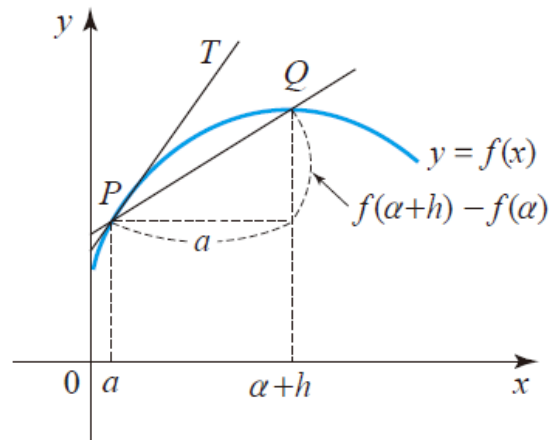
# 평균변화률

## 정의 5.1.1

함수  $f$ 에서  $x$ 의 값이 정의역의 한 점  $a$ 에서  $a + h$ 까지 변할 때,  $f$ 의 **평균변화율**은

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

로 정의된다.



# 미분계수 또는 순간 변화율

## 정의 5.1.2

함수  $f$ 의 정의역에 속하는  $a$ 에 대하여 극한

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

가 존재하면  $f$ 는  $a$ 에서 **미분가능**하다고 하고, 이 극한 값을  $a$ 에서  $f$ 의 **미분계수** 또는 **순간변화율**이라 하고  $f'(a)$ 로 쓴다. 또 함수  $f$ 의 정의역의 모든 점에서 미분가능할 때  $f$ 를 **미분가능한 함수**라 부른다.

**참고**  $a+h=x$ 로 치환하면 다음이 성립함을 안다.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

**예제 5.1.1**  $f(x) = x^2 - 3$ 일 때,  $x = 1$ 에서  $x = 1.5$ 까지 변할 때  $f$ 의 평균변화율을 구하라.

**예제 5.1.2**  $f(x) = x^2 + 1$  위의 점  $P(2, 5)$ 에서 접선의 기울기를 구하고, 곡선에 접하는 접선의 방정식을 구하라.

# 도함수

## 정의 5.1.3

함수  $y = f(x)$ 의 도함수  $f'(x)$ 는  $f$ 의 미분가능한 모든 점  $x$ 를 정의역으로 하여 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

또 주어진 함수의 도함수를 구하는 것을 “미분한다”라고 한다.

**예제 5.1.3**  $f(x) = x^2 + 1$ 의 도함수  $f'(x)$ 를 정의에 의하여 구하고 곡선 위의 점  $(-2, 5)$ 와 점  $(1, 2)$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

**예제 5.1.4** 함수  $f(x) = \sqrt{x}$ 의 도함수를 정의에 의하여 구하고, 함수의 그래프 위의 점 (4, 2)와 점 (1,1) 에서 접선의 기울기를 구하라.

#### 정의 5.1.4

함수  $f(x)$ 의  $x = a$ 에서의 좌도함수  $f'_-(a)$ 와 우도함수  $f'_+(a)$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



### 정의 5.1.5

- (1) 함수  $f$ 가 개구간  $(a, b)$ 의 모든 점에서 미분가능이면 함수  $f$ 는 구간  $(a, b)$ 에서 미분가능이라 한다.
- (2) 함수  $f$ 가 개구간  $(a, b)$ 의 모든 점에서 미분가능하고  $a$ 에서 우도함수와  $b$ 에서 좌도함수가 존재하면  $f$ 는 폐구간  $[a, b]$ 에서 미분가능이라 한다.

예제 5.1.5에서  $f(x) = |x|$ 은  $x = 0$ 에서 연속이지만 미분불능임을 보았다. 다음은 미분가능성은 연속이기 위한 충분조건임을 보여준다.

### 정리 5.1.1

함수  $f(x)$ 가  $x = a$ 에서 미분가능이면  $f(x)$ 는  $a$ 에서 연속이다.

**예제 5.1.6**  $f(x) = x^2 + 1$ 일 때  $f'(x) = 2x$ 임을 이용하여 2계 도함수  $f''(x)$ 를 구하라.

# 미분법

## 정리 5.2.1

$f(x) = k$ ( $k$ 는 상수)이면  $f'(x) = 0$ 이다.

[증명]  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$  ■

예제 5.2.1 다음 함수를 미분하라.

(1)  $f(x) = e$       (2)  $f(x) = 4$       (3)  $f(x) = \pi^3$

### 정리 5.2.2

양의 정수  $n$ 에 대하여  $f(x) = x^n$ 이면  $f'(x) = nx^{n-1}$ 이다.

**예제 5.2.2** 다음 함수를 미분하라.

(1)  $f(x) = x^5$

(2)  $f(x) = x^{20}$

### 정리 5.2.3

$f(x)$ 와  $g(x)$ 가 미분가능한 함수이고  $k$ 가 상수일 때 다음이 성립한다.

$$(1) (kf)'(x) = kf'(x)$$

$$(2) (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(3) (f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$(4) (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(5) \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

**예제 5.2.3** 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1)  $y = 3x^4$

(2)  $y = 5x^4 - 2x^3$

**예제 5.2.4** 주어진 함수의 도함수를 구하라.

(1)  $y = (4x^3 - 1)(x^2 + 3x)$

(2)  $y = \frac{x^2 + 1}{3x - 2}$

#### 정리 5.2.4

$n$ 이 임의의 정수일 때 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$



**예제 5.2.5** 다음에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

(1)  $y = x^{-7}$

(2)  $y = \frac{1}{x^4}$

# 연쇄법칙

## 정리 5.3.1 합성함수의 미분법(연쇄법칙)

함수  $g(x)$ 가 미분가능하고  $f(x)$ 가  $g(x)$ 의 치역을 포함하는 영역에서 미분가능하면 합성함수  $y = (f \circ g)(x)$ 도 미분가능하고,  $y = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서  $u = g(x)$ 라 놓으면

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

또는

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

이다.

**예제 5.3.1**  $y = (x^2 - 5x + 10)^{30}$ 의 도함수를 구하라.

**예제 5.3.2**  $f(x) = \frac{1}{3x^4 + x^2 - 4}$ 일 때  $f'(x)$ 를 구하라.

# 음함수 (Implicit function) 의 미분

## 정리 5.3.2

음함수  $F(x, y) = 0$ 에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구할 때는  $y$ 를  $x$ 의 함수로 보고 양변을  $x$ 에 관하여 미분한 다음  $\frac{dy}{dx}$ 를 좌변으로 분리하면 된다.

**예제 5.3.4** 방정식  $y^3 + 2y - x^2 = 0$ 에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

**예제 5.3.4** 원  $x^2 + y^2 = 25$  위의 점  $(3, 4)$ 에서 접선의 기울기와 접선의 방정식을 구하라.

**예제 5.3.5**  $x^2 - xy + y^2 = 1$ 에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

# 역함수 (Inverse function)의 미분

## 정리 5.3.3 역함수의 미분법

미분가능한 함수  $y=f(x)$ 의 역함수  $x=f^{-1}(y)$ 가 존재하고  $f'(x) \neq 0$ 이면,  $x=f^{-1}(y)$ 도 미분가능이고 다음이 성립한다.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad \text{즉 } (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \quad (\text{단 } y=f(x))$$

**예제 5.3.6** 다음에 답하라.

(1)  $y = x^3 - 2$ 에서  $\frac{dx}{dy}$ 를 구하라.

(2) 함수  $f(x) = x^2 + 3x + 1$ 에 대하여  $(f^{-1})'(5)$ 의 값을 구하라.

# 매개변수함수의 미분

## 정리 5.3.4 매개변수 함수의 미분법

$x = f(t)$ 와  $y = g(t)$ 가  $t$ 에 관하여 미분가능이고  $f'(t) \neq 0$ 이면,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.



**예제 5.3.7**  $x = \sqrt{t+1}$ ,  $y = t^2 - 3t + 2$ 일 때,  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하고  $t = 3$ 에서 접선의 기울기를 구하라.

정리 5.3.5

$r$ 이 유리수이고  $y = x^r$ 일 때

$$\frac{dy}{dx} = rx^{r-1}$$

이다.

**예제 5.3.8**  $y = \sqrt{x^2 - x + 4}$ 에서  $y'$ 를 구하라.

**예제 5.3.9**  $y = \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ 에서  $y'$ 를 구하라.

# 삼각함수의 미분

## 정리 5.4.1

$$(1) \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \cos h = 1$$

$$(3) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

$$(4) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

## 정리 5.4.2

$$(1) (\sin x)' = \cos x$$

$$(2) (\cos x)' = -\sin x$$

$$(3) (\tan x)' = \sec^2 x$$

$$(4) (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(5) (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$(6) (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

**예제 5.4.1** 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1)  $y = \sin 4x$

(2)  $y = \sin(\sqrt{x} + x)$

**예제 5.4.2**  $y = \cos^3 2x$ 의 도함수를 구하라.

**예제 5.4.3** 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1)  $y = \tan \sqrt{x}$

(2)  $y = \cot x^2$

(3)  $y = \sec(x^2 + x)$

(4)  $y = \csc \sqrt{x}$

### 정리 5.4.3

역삼각함수의 도함수에 대하여 다음이 성립한다.

$$(1) (\sin^{-1}x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (|x| < 1)$$

$$(2) (\cos^{-1}x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (x < 1)$$

$$(3) (\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}, (-\infty < x < \infty)$$

$$(4) (\cot^{-1}x)' = -\frac{1}{1+x^2}, (-\infty < x < \infty)$$

$$(5) (\sec^{-1}x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, (x > 1)$$

$$(6) (\csc^{-1}x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, (x > 1)$$

**예제 5.4.4** 다음 함수의 도함수를 구하라.

(1)  $y = \sin^{-1}(1 - x)$

(2)  $y = \cos^{-1}(x^2)$

(3)  $y = \tan^{-1}(\sqrt{x})$

(4)  $y = \sec^{-1}(-2x)$



# 로그함수의 도함수

## 정리 5.5.1

$$(1) (\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

$$(2) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

**예제 5.5.1**  $y = \log_2 (x^3 - 2x + 4)$ 일 때  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

### 정리 5.5.2

$$(1) \frac{d}{dx} \{\log_a f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)} \log_a e$$

$$(2) \frac{d}{dx} \{\ln f(x)\} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

**예제 5.5.2** 다음에서  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) y = \ln(x^2 + 4)$$

$$(2) \log_3 \sin x$$

$$(1) y = \ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

$$(2) y = \ln\left(x^2 \sqrt{\frac{x+3}{x+1}}\right)$$

**예제 5.5.4** 다음 함수의 도함수를 구하라.

$$(1) \ y = \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2(x-1)}$$

$$(2) \ y = x^2 \sqrt{x+3}$$

**예제 5.5.5** 실수  $a$ 에 대하여  $y = x^a$ 일 때,  $y' = ax^{a-1}$ 임을 보여라.

# 지수함수의 미분

## 정리 5.5.2

$$(1) (a^x)' = a^x \ln a$$

$$(2) (e^x)' = e^x$$

**예제 5.5.6** 다음에서 도함수  $\frac{dy}{dx}$ 를 구하라.

$$(1) y = \pi^{\sin x}$$

$$(2) y = e^{\cos 2x}$$

### 정리 5.5.3

$$(1) \frac{d}{dx}\{a^{f(x)}\} = a^{f(x)}f'(x)\ln a$$

$$(2) \frac{d}{dx}\{e^{f(x)}\} = e^{f(x)}f'(x)$$

**예제 5.5.7**  $y = e^{-3x} \ln x$ 일 때,  $y'$ 를 구하라.

**예제 5.5.8**  $y = x^x$ 일 때  $y'$ 을 구하라.