2.6.5 Theorem (Existence of Extreme Points)

Let $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ be nonempty, where $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix of rank m and $\mathbf{b}$ is an m-vector. Then S has at least one extreme point.

$\mathbf{x} \in S$ とする．また $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^t$ (ここで $j = 1, \ldots, k$ に対して $x_j > 0$) のように仮定する．もし $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ が線形独立ならば，$k \leq m$ となり，$\mathbf{x}$ は *extreme point* となる．そうでなければ，$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ となるような，少なくとも 1 つは正の値を持つ $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ が存在することとなる．

以下のように $\alpha > 0$ を定義する．

$$\alpha = \underset{1 \leq j \leq k}{\text{minimum}} \left\{ \frac{x_j}{\lambda_j} : \lambda_j > 0 \right\} = \frac{x_i}{\lambda_i}$$

x'_j が以下のように与えられるような $\mathbf{x}'$ について考える．

$$x'_j = \begin{cases} x_j - \alpha\lambda_j & \text{for } j = 1, \ldots, k \\ 0 & \text{for } j = k+1, \ldots, n. \end{cases}$$

この場合，$j = 1, \ldots, k$ の時に $x'_j \geq 0$ となり，$j = k+1, \ldots, n$ の時 $x'_j = 0$ となる．更に $x'_i = 0$,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j x'_j = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \left(x_j - \alpha\lambda_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \lambda_j = \mathbf{b} - \mathbf{0} = \mathbf{b}.$$

となる．こうして，最大で $k - 1$ の正成分を持つ新しい点 $\mathbf{x}'$ を構築した．この作業を正成分が線形独立な列に対応するまで続けると，それは *extreme point* となる．よって S が少なくとも 1 つの *extreme point* を持つことが示された．

Extreme Directions

Let $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\} \neq \varnothing$, where $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix of rank m. By definition, a nonzero vector $\mathbf{d}$ is a direction of S if $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in S$ for each $\mathbf{x} \in S$ and each $\lambda \geq 0$ (図 1). Noting the structure of S, it is clear that $\mathbf{d}$ is a direction of S if and only if

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{d} \geq 0.$$

$\mathbf{d}$ is a direction $\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0},\ \mathbf{d} \geq \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) = \mathbf{b} &\Rightarrow \mathbf{b} + \lambda A\mathbf{d} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \lambda A\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow A\mathbf{d} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

任意の $\mathbf{x} \in S$ に対して $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \geq 0$ となるので，$\lambda\mathbf{d} \geq 0$，よって $\mathbf{d} \geq 0$.

$\mathbf{d}$ is a direction $\Leftarrow \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0},\ \mathbf{d} \geq \mathbf{0}$

$$A(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) = A\mathbf{x} + \lambda A\mathbf{d} = A\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

$\mathbf{x} \in S$, $d \geq 0$ より $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \geq 0$ となる．

In particular, we are interested in the characterization of extreme directions of S.

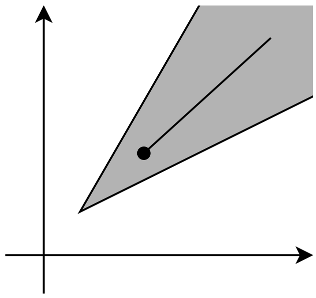

図 1　Direction of convex set

2.6.6 Theorem (Characterization of Extreme Directions)

Let $S = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \neq \varnothing$, where $\mathbf{A}$ is an $m \times n$ matrix of rank m and $\mathbf{b}$ is an m-vector. A vector $\bar{d}$ is an extreme direction of S if and only if A can be decomposed into $[\mathbf{B}, \mathbf{N}]$ such that $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \leq 0$ for some column $\mathbf{a}_j$ of $\mathbf{N}$, and $\overline{\mathbf{d}}$ is a positive multiple of $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}$, where $\mathbf{e}_j$ is an $n-m$ vector of zeros except for a 1 in position j.

もし，$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \leq \mathbf{0}$ ならば $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ となり，更に $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ なので $\mathbf{d}$ は S の *direction* となる．$\mathbf{d}$ が *extreme direction* となることを示す．$\mathbf{d} = \lambda_1\mathbf{d}_1 + \lambda_2\mathbf{d}_2$ と仮定する．$\lambda_1, \lambda_2 > 0$ とし $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ は S の *direction* である．ここで $\mathbf{d}$ の $n-m-1$ 成分は 0 である．そこに対応する $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ の要素も 0 となる．よって以下のように $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ を表すことができる．

$$\mathbf{d}_1 = \alpha_1 \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{11} \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \alpha_2 \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{21} \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}, \quad (\alpha_1, \alpha_2 > 0)$$

$\mathbf{A}\mathbf{d}_1 = \mathbf{A}\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$ であり，$\mathbf{d}_{11} = \mathbf{d}_{21} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ となることを確認できる．これは $\mathbf{d}$ が *extreme direction* であることを意味している．$\overline{\mathbf{d}}$ は $\mathbf{d}$ の正の倍数なので，これも *extreme direction* である．

逆に，$\overline{\mathbf{d}}$ が S の *extreme direction* だと仮定する．一般性を失わないよう以下のようにする．

$$\overline{\mathbf{d}} = \left(\bar{d}_1, \ldots, \bar{d}_k, 0, \ldots, \bar{d}_j, \ldots, 0\right)^t$$

$i = 1, \ldots, k$ と $i = j$ のとき，$\bar{d}_i > 0$ とする．まず $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$ が線形独立であることを示す．

仮に $\mathrm{a}_1, \ldots, \mathrm{a}_k$ が線形独立でなかったとすると，$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ となるような, 全ての要素が 0 ではない $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ が存在することとなる．それを $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, 0, \ldots, 0)^t$ とし，以下の $\mathbf{d}_1$ と $\mathbf{d}_2$ がともに非負になるように $\alpha > 0$ を選ぶ.

$$\mathbf{d}_1 = \overline{\mathbf{d}} + \alpha\lambda, \qquad \mathbf{d}_2 = \overline{\mathbf{d}} - \alpha\lambda$$

ここで,

$$\mathbf{A}\mathbf{d}_1 = \mathbf{A}\overline{\mathbf{d}} + \alpha\mathbf{A}\lambda = 0 + \alpha\sum_{i=1}^{k} \mathbf{a}_i\lambda_i = \mathbf{0}.$$

となり，同様に $\mathbf{A}\mathbf{d}_2 = \mathbf{0}$ となる．$\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2 \geq \mathbf{0}$ より，どちらも S の *direction* となる．また $\overline{\mathbf{d}} = (1/2)\mathbf{d_1} + (1/2)\mathbf{d_2}$ となるが，これは $\overline{\mathbf{d}}$ が *extreme direction* であるという仮定に反する．よって $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ は線形独立である．よって rank $\mathbf{A}$ は m となり，$k \leq m$ は明らか．すると，$\{\mathbf{a}_i : i = k+1, \ldots, n;\ i \neq j\}$ の中から，$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ とともに，m-vector の線形独立集合を形成する $m-k$ 個のベクトルが存在するはずである．それらを $\mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_m$ とする．$[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m]$ を $\mathbf{B}$ で表すこととし，$\mathbf{B}$ は可逆であることに注意する．$\hat{\mathbf{d}}$ を $\overline{\mathbf{d}}$ の最初の m 個の要素とすると，$\mathbf{0} = \mathbf{A}\overline{\mathbf{d}} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{d}} + \mathbf{a}_j\bar{d}_j$ となる．したがって $\hat{\mathbf{d}} = -\bar{d}_j\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$ となり，$\overline{\mathbf{d}} = \bar{d}_j \begin{pmatrix} -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \\ \mathbf{e}_j \end{pmatrix}$ の形となる．$\overline{\mathbf{d}} \geq 0$ と $\bar{d}_j > 0$ に注目すれば $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j \leq 0$ となる．以上で証明が終了した.

Corollary

The number of extreme directions of S is finite.

For each choice of a matrix $\mathbf{B}$ from $\mathbf{A}$, there are $n - m$ possible ways to extract the column $\mathbf{a}_j$ from $\mathbf{N}$. Therefore, the maximum number of extreme directions is bounded by

$$(n-m)\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n \cdot m \cdot 1)!}$$