Theorem 1.5.9.

If E_1 is a normed space and E_2 is a Banach space, then $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ is a Banach space.

Proof: We only need to show that $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ is complete. Let (L_n) be a Cauchy sequence in $\mathcal{B}(E_1, E_2)$ and let x be an arbitrary element of E_1. Then

$$\|L_m x - L_n x\| \leq \|L_m - L_n\| \|x\| \to 0 \quad \text{as } m, n \to \infty$$

which shows that $(L_n x)$ is a Cauchy sequence in E_2. By completeness of E_2, there is a unique element $y \in E_2$ such that $L_n x \to y$. Since x is an arbitrary element of E_1, this defines a mapping L from E_1 into E_2 :

$$Lx = \lim_{n\to\infty} L_n x$$

We will show that $L \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ and $\|L_n - L\| \to 0$.

Clearly, L is a linear mapping. Since Cauchy sequences are bounded, there exists a constant α such that $\|L_n\| \leq \alpha$ for all $n \in \mathbb{N}$. Consequently,

$$\|Lx\| = \left\| \lim_{n\to\infty} L_n x \right\| = \lim_{n\to\infty} \|L_n x\| \leq \alpha \|x\|$$

Therefore L is bounded and thus $L \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$. It remains to prove that $\|L_n - L\| \to 0$. Let $\varepsilon > 0$, and let k be such that $\|L_m - L_n\| < \varepsilon$ for every $m, n \geq k$. If $\|x\| = 1$ and $m, n \geq k$, then

$$\|L_m x - L_n x\| \leq \|L_m - L_n\| < \varepsilon$$

By letting $n \to \infty$, (m remains fixed), we obtain $\|L_m x - Lx\| \leq \varepsilon$ for every $m \geq k$ and every $x \in E_1$ with $\|x\| = 1$. This means that $\|L_m - L\| \leq \varepsilon$ for all $m > k$, which completes the proof. □

■メモ　E_1 をノルム空間，E_2 をバナッハ空間とすると，$\mathcal{B}(E_1, E_2)$ もバナッハ空間となる．

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(E_1, E_2)$ を $\|\cdot\|$ における *Cauchy* 列とする．つまり (1) 式が成り立つ．

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N : \|T_n - T_m\| < \varepsilon \tag{1}$$

目標: 適当な $T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ になることを示せれば良い．

(1) 式より，任意の $x \in E_1$ に対して，

$$\|T_n x - T_m x\| \,(\leq \|T_m - T_n\| \|x\|) < \varepsilon \|x\| \tag{2}$$

(2) 式はより，$(T_n x)$ が E_2 における *Cauchy* 点列であることが示された．定義より E_2 はバナッハ空間であり，完備なので，各 $x \in E_1$ に対して $(T_n x)$ は収束する．

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \tag{3}$$

(3) 式のように作用素を定義すると，T は E_1 から E_2 への線形作用素で，

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq (\lim_{n\to\infty} \|T_n\|)\|x\| \tag{4}$$

(4) 式は有界線形作用素であるので，$T \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ である．(2) 式において $m \to \infty$ とすれば，$n \geq N$ のとき，

$$\|T_n x - Tx\| < \varepsilon \|x\| \quad (x \in E_1)$$

となり，しっかり整理すると，(5) 式のようになる．

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : \|T_n - T\| < \varepsilon \tag{5}$$

(5) 式は $\|T_n - T\| \to 0\ (n \to \infty)$ を意味しており，目標が示せた． □

Theorem 1.5.10.

If L is a continuous linear mapping from a subspace of a normed space E_1 into a Banach space E_2, then L has a unique extension to a continuous linear mapping defined on the closure of the domain $\mathcal{D}(L)$. In particular, if $\mathcal{D}(L)$ is dense in E_1, then L has a unique extension to a continuous linear mapping defined on the whole space E_1.

Proof: If $x \in \mathrm{cl}\mathcal{D}(L)$, then there exists a sequence (x_n) in $\mathcal{D}(L)$ convergent to x. Since (x_n) is a Cauchy sequence,

$$\|Lx_m - Lx_n\| = \|L(x_m - x_n)\| \leq \|L\|\,\|x_m - x_n\| \to 0, \quad \text{as } m, n \to \infty$$

Thus, (Lx_n) is a Cauchy sequence in E_2. Since E_2 is complete, there is a $z \in E_2$ such that $Lx_n \to z$. We want to define the value of the extension $\tilde{L}$ at x as $\tilde{L}x = z$, that is,

$$\tilde{L}x = \lim_{n\to\infty} Lx_n, \quad x_n \in \mathcal{D}(L) \text{ and } x_n \to x.$$

This definition will be correct only if we can show that the limit z is the same for all sequences in $\mathcal{D}(L)$ convergent to x. Indeed, if $y_n \in \mathcal{D}(L)$ and $y_n \to x$, then

$$Ly_n = Ly_n - Lx_n + Lx_n = L(y_n - x_n) + Lx_n \to z$$

because $y_n - x_n \to 0$, and hence also $L(y_n - x_n) \to 0$. Clearly, $\tilde{L}$ is a linear mapping and $\tilde{L}x = Lx$ whenever $x \in \mathcal{D}(L)$. It remains to show that $\tilde{L}$ is continuous. Let $x \in \mathrm{cl}\mathcal{D}(L)$, $\|x\| = 1$. There exist $x_1, x_2, \ldots \in \mathcal{D}(L)$ such that $x_n \to x$. Then $\|x_n\| \to \|x\| = 1$ and

$$\|\tilde{L}x\| = \lim_{n\to\infty} \|Lx_n\| \leq \|L\|.$$

Thus, $\tilde{L}$ is bounded, hence continuous, and $\|\tilde{L}\| = \|L\|$. □

■メモ　とりあえず上にテキストをそのまま示したが，定理がややこしいと感じた．元の定理 1.5.10. をもう少し簡単に変形できないか考えてみる．

“*L is a continuous linear mapping*”とあるが，これは `Theorem 1.5.7.`(線形作用素が連続であることと有界であることは同値) より，L は有界線形作用素と言い換えられる．また $X_0 = \mathrm{cl}\mathcal{D}(L) \subset E_1$ となるような部分空間を X_0 とれば，X_0 はノルム空間 E_1 の稠密な線形部分空間となる．

つまり，

“X_0 をノルム空間 E_1 の稠密な線形部分空間とし，L を X_0 から Banach 空間 E_2 への有界線形作用素とすれば，$\|\overline{T}\| = \|T\|\ (= \sup_{\|x\|\leq 1\ x\in X_0} \|Tx\|)$ を満たすような線形作用素 $\overline{T}$ が唯一つ存在する”

と言い換えられる？

関数解析 (ちくま学芸文庫) P51 から引用

定理 3.3. X_0 をノルム空間 X の稠密な線形部分空間とし，T を X_0 から Banach 空間 Y への有界線形作用素とする．このとき，次の条件を満たす X から Y への有界

線形作用素 $\overline{T}$ がただ 1 つ存在する．

$$\overline{T}x = Tx \ (x \in X_0),\ \|\overline{T}\| = \|T\| \ (= \sup_{\substack{\|x\| \leqq 1 \\ x \in X_0}} \|Tx\|)$$

証明 $x \in X$ に対して $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ となる点列 $\{x_n\}$，$x_n \in X_0$ が存在する．$\|Tx_n - Tx_m\| \leqq \|T\|\|x_n - x_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$，即ち $\{Tx_n\}$ は Y における Cauchy 点列である．Y は Banach 空間のゆえ，$\{Tx_n\}$ は収束する；そしてその極限は $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ となる点列 $\{x_n\}$，$x_n \in X_0$ の選び方に依存しないことに注意する．いま

$$\overline{T}x = \lim_{n \to \infty} Tx_n$$

とおくと，明らかに $\overline{T}$ は X から Y への線形作用素で，$\overline{T}x = Tx$ $(x \in X_0)$ となる．$\|Tx_n\| \leqq \|T\|\|x_n\|$ から $\|\overline{T}x\| = \lim_{n \to \infty} \|Tx_n\| \leqq \|T\|\|x\|$，即ち $\|\overline{T}x\| \leqq \|T\|\|x\|$ $(x \in X)$ となり $\overline{T}$ は有界線形作用素である，かつ $\|\overline{T}\| \leqq \|T\|$．一方，$\|Tx\| = \|\overline{T}x\| \leqq \|\overline{T}\|\|x\|$ $(x \in X_0)$ から $\|T\| \leqq \|\overline{T}\|$．ゆえに $\|\overline{T}\| = \|T\|$．最後に，$\widetilde{T}x = Tx (= \overline{T}x)$ $(x \in X_0)$ で，$\widetilde{T}$ が X から Y への有界線形作用素ならば

$$\widetilde{T}x = \overline{T}x \ (x \in X)$$

となり，$\overline{T}$ の一意性が示された．（証終）

図 1　関数解析 (ちくま学芸文庫) P51

Theorem 1.5.12.

If L is a continuous linear mapping from a subspace of a normed space E_1 into a Banach space E_2, then L has a unique extension to a continuous linear mapping defined on the closure of the domain $\mathcal{D}(L)$. In particular, if $\mathcal{D}(L)$ is dense in E_1, then L has a unique extension to a continuous linear mapping defined on the whole space E_1.