2022/5/2(Mon)

2.2 Closure and Interior of a Set

In this section we develop some topological properties of sets in general and of convex sets in particular. As a preliminary, given a point x in $\mathbb{R}^n$, an ε-neighborhood around it is the set $N_\varepsilon(x) = \{y : \|y - x\| < \varepsilon\}$. Let us first review the definitions of clousure, interior, and boundary of an arbitrary set in $\mathbb{R}^n$, using the concept of an ε-neighborhood.

$\mathbb{R}^n$ 上のノルム $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とは，以下の条件を満たす関数のことである．

- $\|v\| \geq 0,\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|av\| = |a|\|v\|$
- $\forall u,\ v \in R,\ \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

2.2.1 Definition

Let $\mathcal{S}$ be an arbitrary set in $\mathbb{R}^n$. A point x is said to be in the *closure* of $\mathcal{S}$, denoted by cl $\mathcal{S}$, if $\mathcal{S} \cap N_\varepsilon(x) \neq \varnothing$ for every $\varepsilon > 0$. If $\mathcal{S} =$cl $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ is called *closed*.

例　$\mathbb{R}^n$ の元 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ に対し，

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2} \tag{1}$$

と定義し，中心 0 半径 1 の開球を考えると図 1 のようになる．

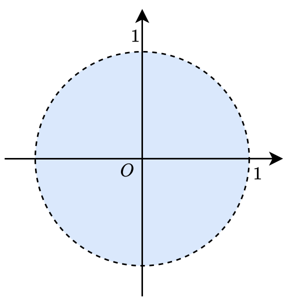

図 1　ε 近傍

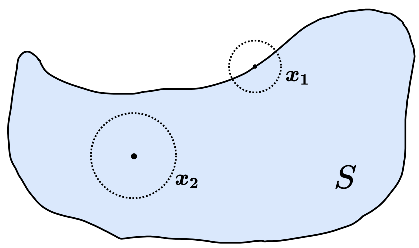

図 2　$\mathbb{R}^2$ での触点の例

触点全体の集合を $\mathcal{S}$ の閉包といい，cl $\mathcal{S}$ と表す．図 2 の $\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_2}$ は触点である．

A point $\mathbf{x}$ is said to be in the interior of S, denoted int S, if $N_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset S$ for some $\varepsilon > 0$. A solid set $S \subseteq R^n$ is one having a nonempty interior. If $S =$ int S, S is called open.

図 2 の $\boldsymbol{x_2}$ は内点 (interior) となるが，$\boldsymbol{x_1}$ は内点とならない．$\mathbb{R}^2$ において，Solid set でない例としては，点や直線が挙げられる．

Finally, $\mathbf{x}$ is said to be in the boundary of S, denoted ∂S, if $N_\varepsilon(\mathbf{x})$ contains at least one point in S and one point not in S for every $\varepsilon > 0$. A set S is bounded if it can be contained in a ball of a sufficiently large radius.

図 2 の $\boldsymbol{x}_1$ は境界点 (Boundary point) である．境界点全体の集合を境界 (Boundary) という．

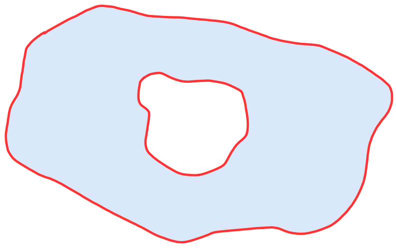

図 3　境界の例

図 3 の赤色部分は水色部分の境界を意味している．

A compact set is one that is both closed and bounded. Note that the complement of an open set is a closed set (and vice versa), and that the boundary points of any set and its complement are the same.

S がコンパクト $\Rightarrow$ S が有界閉集合

まず S が有界になることを示す．任意の $x_0 \in \mathbb{R}^n$ をとる．x_0 を中心とする ε 近傍からなる集合系

$$\mathcal{U} := \{N_\varepsilon(x_0) \mid \varepsilon > 0\}$$

を考えれば，この集合系の和集合は $\mathbb{R}^n$ 全体と一致するので，$\mathcal{U}$ は S の開被覆である．S はコンパクトなので，S は $N_\varepsilon(x_0)$ のうちの有限個によって覆われる．適当に整数 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k$ を取れば，

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{k} N_{\varepsilon i}(x_0)$$

となる．そこで $\max\{\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k\} = \varepsilon$ とおけば，$N_{\varepsilon i}(x_0) \subset N_\varepsilon(x_0)$ となるので，$S \subset N_\varepsilon(x_0)$．よって S は有界である．

S が閉集合であることを示す．S' が開集合になることをいえば良い．任意の $x \in S'$ に対して，$N_\varepsilon(x) \subset S'$ となる $\varepsilon > 0$ の存在を確かめる．任意の $x \in S'$ を取り固定する．任意の $y \in S$ に対して．ここで $t = \frac{1}{3}d(x, y)$ とおけば，

$$N_t(x) \cap N_t(y) = \phi$$

となる．$y \in N_t(y)$ なので，このような $N_t(y)$ の全体は S の開被覆になっている．S はコンパクトなので，$S \subset \bigcup_{i=1}^{n} N_{ti}(y_i)$ となる S の有限個の点 $y_1, \cdots, y_n$ が存在する．ここで，$\varepsilon = \min\{t_1, \cdots, t_n\}$ とし，$A = \bigcup_{i=1}^{n} N_{ti}(y_i)$ とすると，$N_\varepsilon(x) \cap A = \phi$ である．また，$S \subset A$ なので，$N_\varepsilon(x) \cap S = \phi$ である．よって $N_\varepsilon(x) \subset S'$ であり，S' は開集合である．

To illustrate, consider $S = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\right\}$, which represents all points within a circle with center $(0, 0)$ and radius 1. It can easily be verified that S is closed; that is, $S = \mathrm{cl}\, S$. Furthermore, int S consists of all points that lie strictly within the circle; that is, int $S = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\right\}$. Finally, ∂S consists of points on the circle; that is, $\partial S = \left\{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$.

Hence, a set S is closed if and only if it contains all its boundary points (i.e., $\partial S \subseteq S$).

S が閉集合 $\Leftrightarrow \partial S \subseteq S$ ということを示す．

$$\begin{aligned}
S\text{ が閉集合} &\Leftrightarrow S'\text{が開集合}\\
&\Leftrightarrow x \in S'\text{とすると，}N_\varepsilon(x) \subset S'\text{となる }x\text{ の}\varepsilon\text{近傍 }N_\varepsilon(x)\text{ が存在する}\\
&\Leftrightarrow x \in S'\text{とすると，}N_\varepsilon(x) \cap S = \phi\text{となる }x\text{ の}\varepsilon\text{近傍 }N_\varepsilon(x)\text{ が存在する}\\
&\Leftrightarrow x \in S'\text{とすると，}x\text{ は }S\text{ の境界点ではない}\\
&\Leftrightarrow S\text{ の境界点はすべて }S\text{ に含まれる} \Leftrightarrow \partial S \subset S
\end{aligned}$$

Moreover, cl $S \equiv S \cup \partial S$ is the smallest closed set containing S.

cl $S = S \cup \partial S$ が，S を含む最小の閉集合であることを示す．

- cl S が閉集合，つまり (cl $S)'$ が開集合であるということを示す．任意の $x \in$ (cl $S)'$ をとり固定する．x は S の触点でないので，$N_\varepsilon(x) \cap S = \phi$ となるような ε 近傍が存在する．この $N_\varepsilon(x)$ に属する任意の点は，また S の触点とならないので，$N_\varepsilon(x) \subset$ (cl $S)'$ となる．x は任意であったので，(cl $S)'$ は開集合である．
- cl S が S を含む最小の閉集合であることを示す．$S \subset A$ となる閉集合 A が存在するとする．

$$\text{cl } S = S \cup \partial S \subset S \cup \partial A \subset A \cup \partial A = \text{cl } A = A$$

A は cl S を含む．cl S は閉集合なので，cl S は S を含む最小の閉集合である．

Similarly, a set is open if and only if it does not contain any of its boundary points (more precisely, $\partial S \cap S = \phi$).

まず (int $S)' =$ cl S' であることを示す．

$$\begin{aligned}
x \in (\text{int } S)' &\Leftrightarrow x \notin \text{int } S \Leftrightarrow x\text{ は }S\text{ の内点ではない}\\
&\Leftrightarrow x\text{ のどんな近傍 }N_\varepsilon(x)\text{ も }S'\text{と交わる}\\
&\Leftrightarrow x\text{ は }S'\text{の触点} \Leftrightarrow x \in \text{cl } S'
\end{aligned}$$

S が開集合 $\Leftrightarrow$ int $S = S$ を示す．

$$\begin{aligned}
S\text{ が開集合} &\Leftrightarrow S'\text{が閉集合} \Leftrightarrow \text{cl } S' = S' \Leftrightarrow (\text{cl } S')' = (S')'\\
&\Leftrightarrow (\text{int } S)'' = S'' \Leftrightarrow \text{int } S = S
\end{aligned}$$

よって S は境界点を持たない．

Clearly, a set may be neither open nor closed, and the only sets in R^n that are both open and closed are the empty set and R^n itself. Also, note that any point $\mathbf{x} \in S$ must be either an interior or a boundary point of S. However, $S \neq$ int $S \cup \partial S$, since S need not contain its boundary points. But since int $S \subseteq S$, we have int $S = S - \partial S$, while $\partial S \neq S -$ int S necessarily.