

# Data Structure

**<http://smartlead.hallym.ac.kr>**

**Instructor: Jin Kim**  
**010-6267-8189(033-248-2318)**  
**[jinkim@hallym.ac.kr](mailto:jinkim@hallym.ac.kr)**

**Office Hours:**

# Non Linear Data Structure

◆ Data structure we will consider this semester:

◆ Tree

◆ Binary Search Tree

◆ Graph



◆ Weighted Graph

◆ Sorting

◆ Balanced Search Tree

# Non Linear Data Structure

◆ Data structure we will consider this semester:

◆ Tree

◆ Binary Search Tree

◆ Graph



◆ Weighted Graph

◆ Sorting

◆ Balanced Search Tree

## 10장 가중치 그래프

# Shortest Path(최 단 경로)

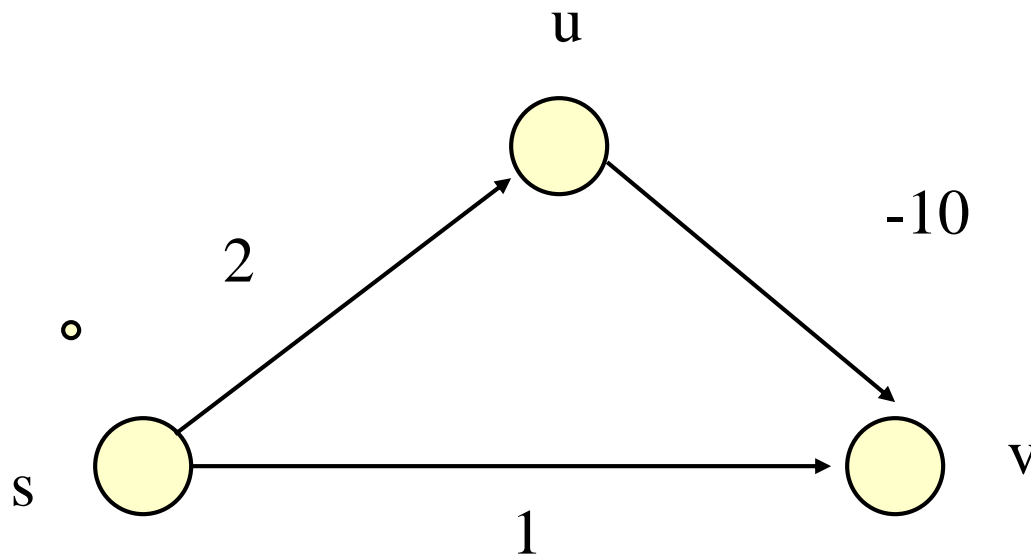
- ◆ Shortest-path problems
- ◆ **Single-source** shortest path algorithms
  - ▶ Bellman-Ford algorithm
  - ▶ Dijkstra algorithm
- ◆ All-Pair shortest path algorithms
  - ▶ Floyd-Warshall algorithm

# Bellman-Ford Algorithm for Single Source Shortest Paths

- More general than Dijkstra's algorithm: (다익스트라 알고리즘보다 일반적. 음의 가중치를 허용)
- Bellman-Ford algorithm works when there are negative edges for single source(음의 가중치를 허용하며, 한 정점에서 다른 모든 정점까지의 최단거리계산가능)

# Dijkstra's algorithm

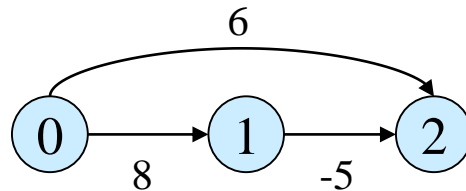
The algorithm does not work if there are negative weight edges in the graph



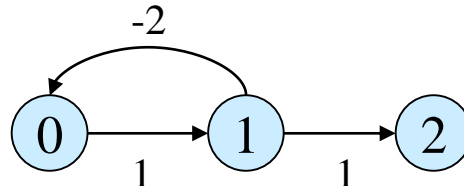
$s \rightarrow v$  is shorter than  $s \rightarrow u$ , but it is longer than  $s \rightarrow u \rightarrow v$ .

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(1)

- ◆ 음의 가중치를 가진 방향 그래프
  - ◆ Dijkstra 알고리즘으로 최단 경로를 구할 수 없음
  - ◆ 음의 길이값을 갖는 사이클은 허용하지 않음(어떤 알고리즘도 해결할 수 없음)
  - ◆ 사이클이 없는 최단 경로가 가질 수 있는 최대 간선 수  $(n-1)$ 를 이용하여 알고리즘 작성



음의 가중치를 가진 방향 그래프  
(Dijkstra의 최단경로 알고리즘에 적합치 않음)



길이가 음인 사이클을 가진 방향 그래프



# Review: Bellman-Ford Algorithm

Bellman-Ford( $G, w, s$ )

1. Initialize-Single-Source( $G, s$ )  $\longrightarrow O(|V|)$
2. **for**  $i := 1$  to  $|V| - 1$  **do**
3.     **for** each edge  $(u, v) \in E$  **do**  
        **if**  $d[v] > d[u] + w(u, v)$   $\longrightarrow O(|V||E|)$   
            **then**  $d[v] := d[u] + w(u, v)$

Time complexity:  $O(|V||E|)$

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(2)

## ♦ Bellman and Ford 알고리즘의 원리

- ♦  $\text{Dist}^k[u]$  : 시작점  $v$ 에서 정점  $u$ 까지 최대  $k$ 개의 아크를 갖는 최단 경로의 길이
- ♦  $\text{Dist}^1[u] = \text{weight}[v, u]$
- ♦  $\text{Dist}^{n-1}[u]$  : 시작점  $v$ 에서 정점  $u$ 까지의 최단 경로의 길이
- ♦ 만일 시작점  $v$ 에서 어떤 정점  $u$ 까지의 최단 경로가 최대  $k$ 개 ( $k > 1$ )의 간선을 포함할 수 있는 경우에서
  - $k-1$ 개 이하의 간선만 포함 :  $\text{Dist}^k[u] = \text{Dist}^{k-1}[u]$
  - $k$ 개 간선을 포함 : 시작점  $v$ 에서 정점  $u$ 에 인접한 어떤 정점  $i$ 까지의 최단 경로를 포함하므로,  $\text{Dist}^k[u] = \min\{\text{Dist}^{k-1}[i] + \text{weight}[i, u]\}$
- ♦  $\text{Dist}^k[u] \leftarrow \min\{\text{Dist}^{k-1}[u], \min\{\text{Dist}^{k-1}[i] + \text{weight}[i, u]\}\}$   
( $k = 2, 3, \dots, n-1$ )

K-1개의 간선을 사용할때 최소거리, k개의 간선을 사용할때 최소거리 중 작은 것을 선택

# Idea(아이디어)

그래프 내의 정점의 개수가  $n$ 이면  
최단경로는

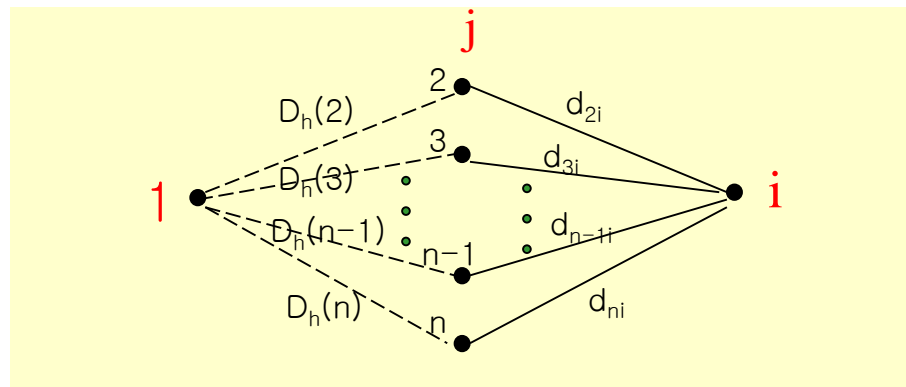
1개로 이루어진 경로

2개로 이루어진 경로

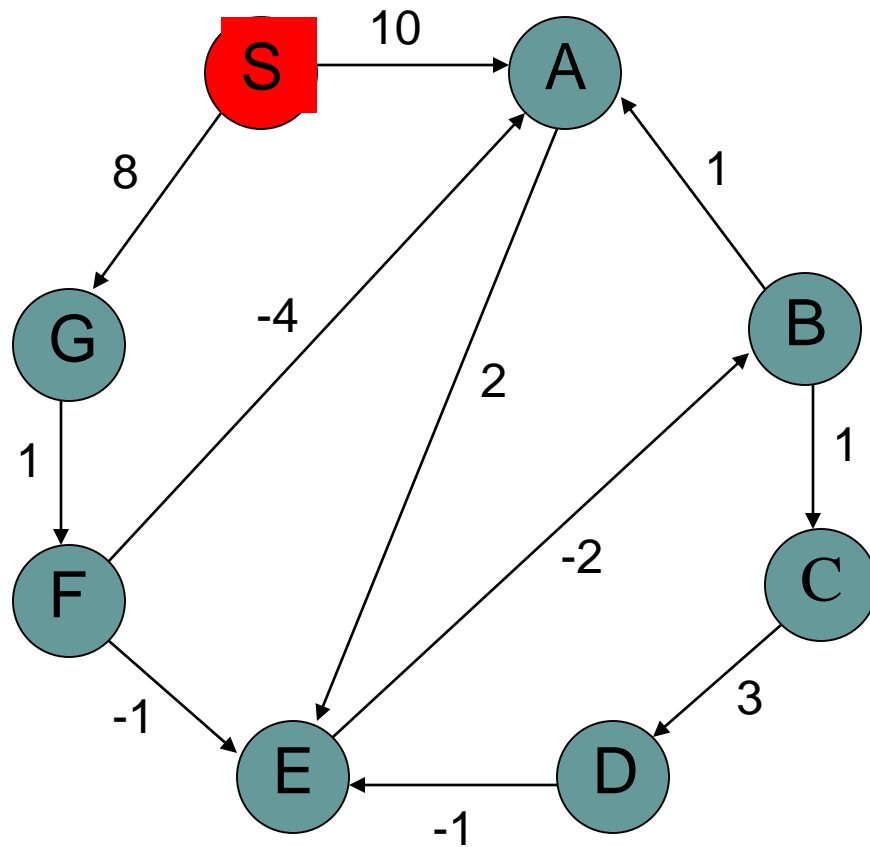
....

$n-1$ 개로 이루어진 경로 중 가장 작은 경로이다

$n$  개로 이루어진 경로는 사이클을 필수적으로 포함하는 답이 될 수 없는 경로이다.



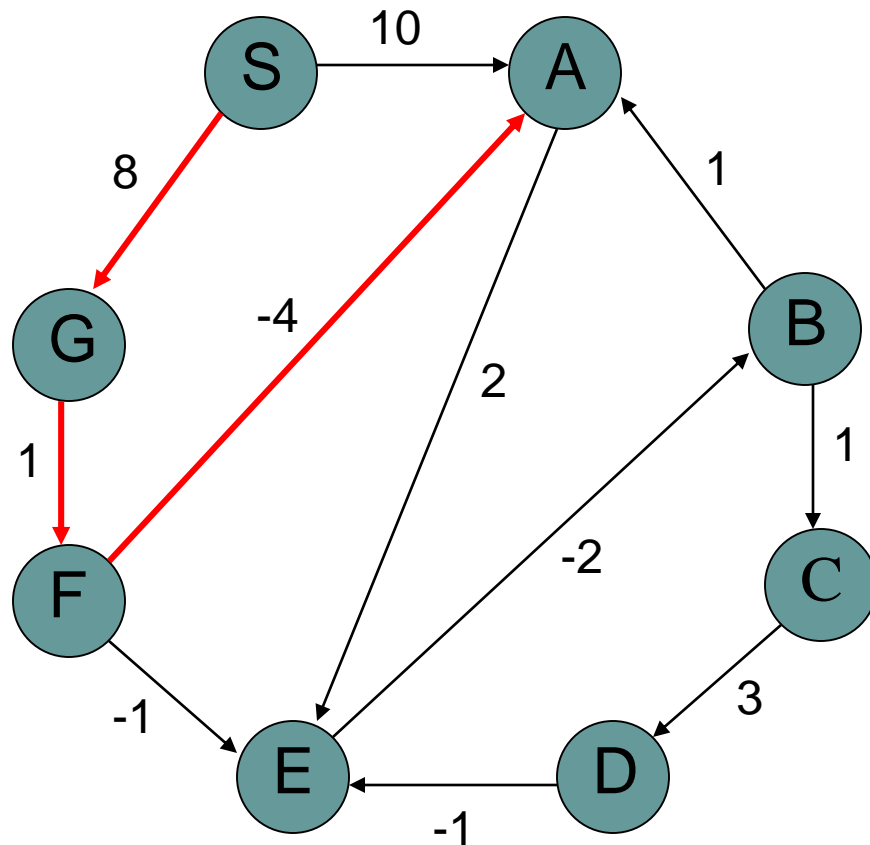
# Bellman-Ford algorithm



How many edges is the shortest path from s to:

A:

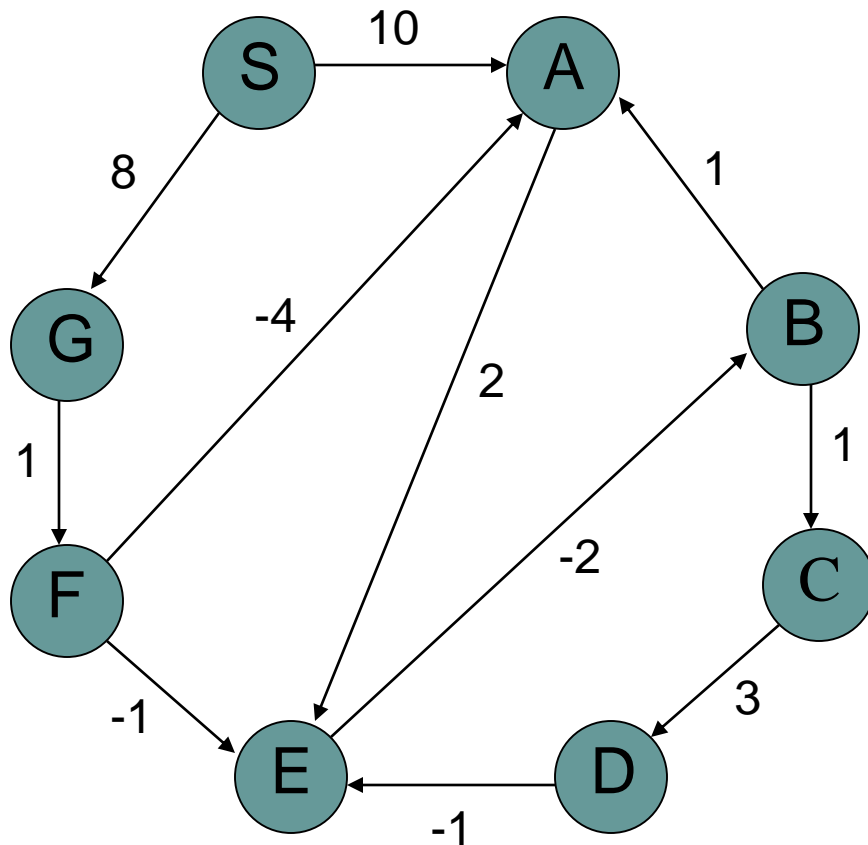
# Bellman-Ford algorithm



How many edges is  
the shortest path  
from s to:

A: 3

# Bellman-Ford algorithm

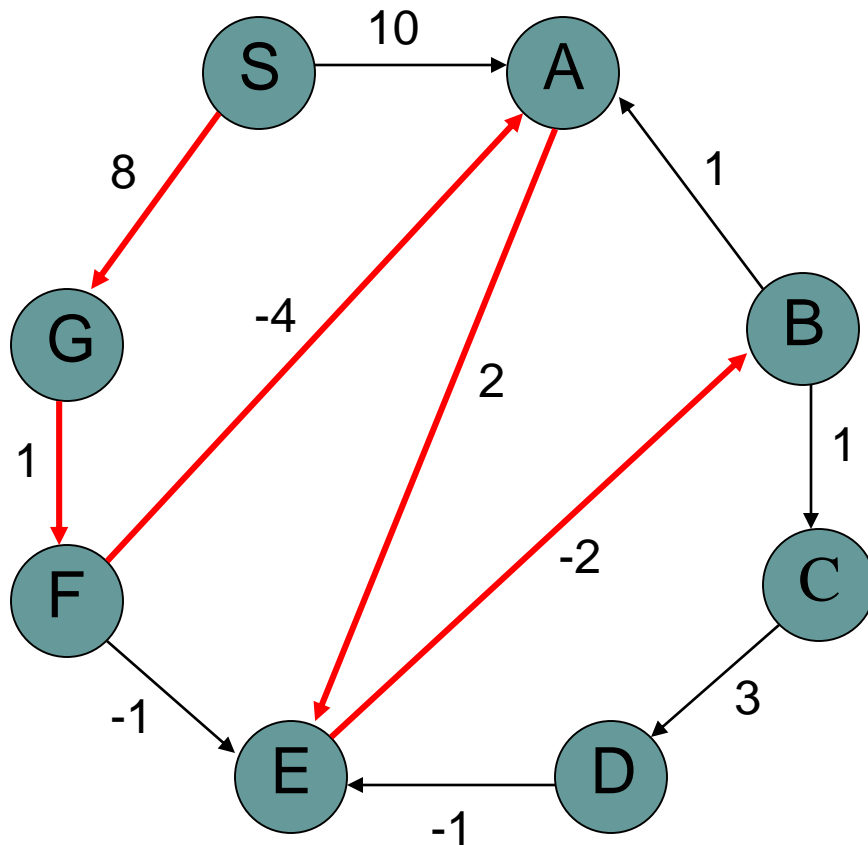


How many edges is  
the shortest path  
from s to:

A: 3

B:

# Bellman-Ford algorithm

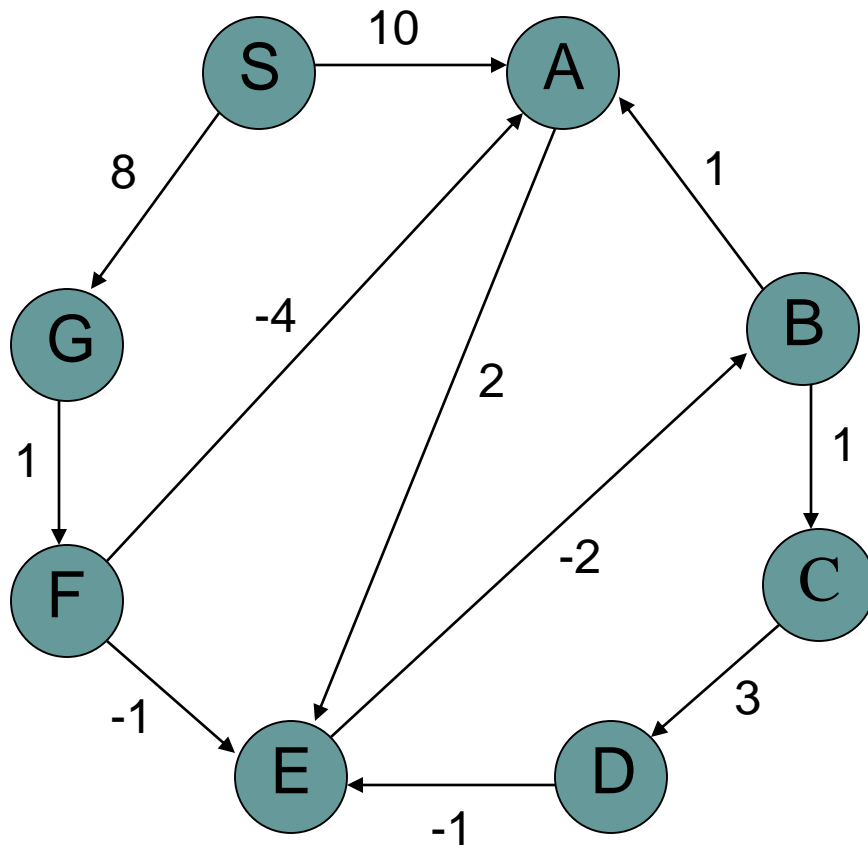


How many edges is  
the shortest path  
from s to:

A: 3

B: 5

# Bellman-Ford algorithm



How many edges is the shortest path from s to:

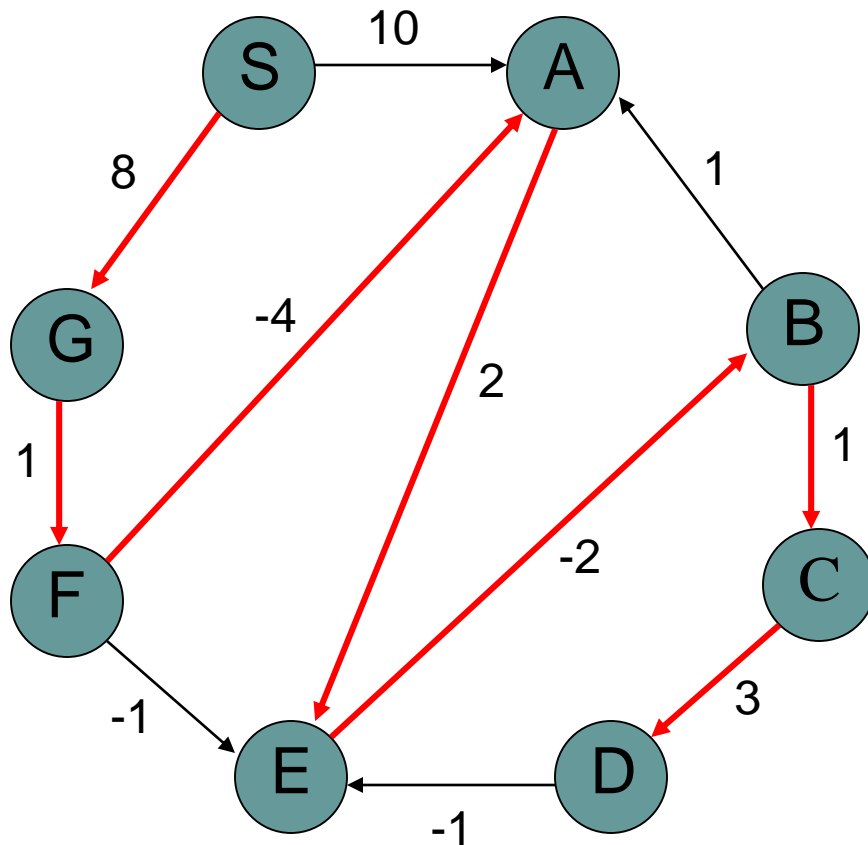
A: 3

B: 5

D:



# Bellman-Ford algorithm



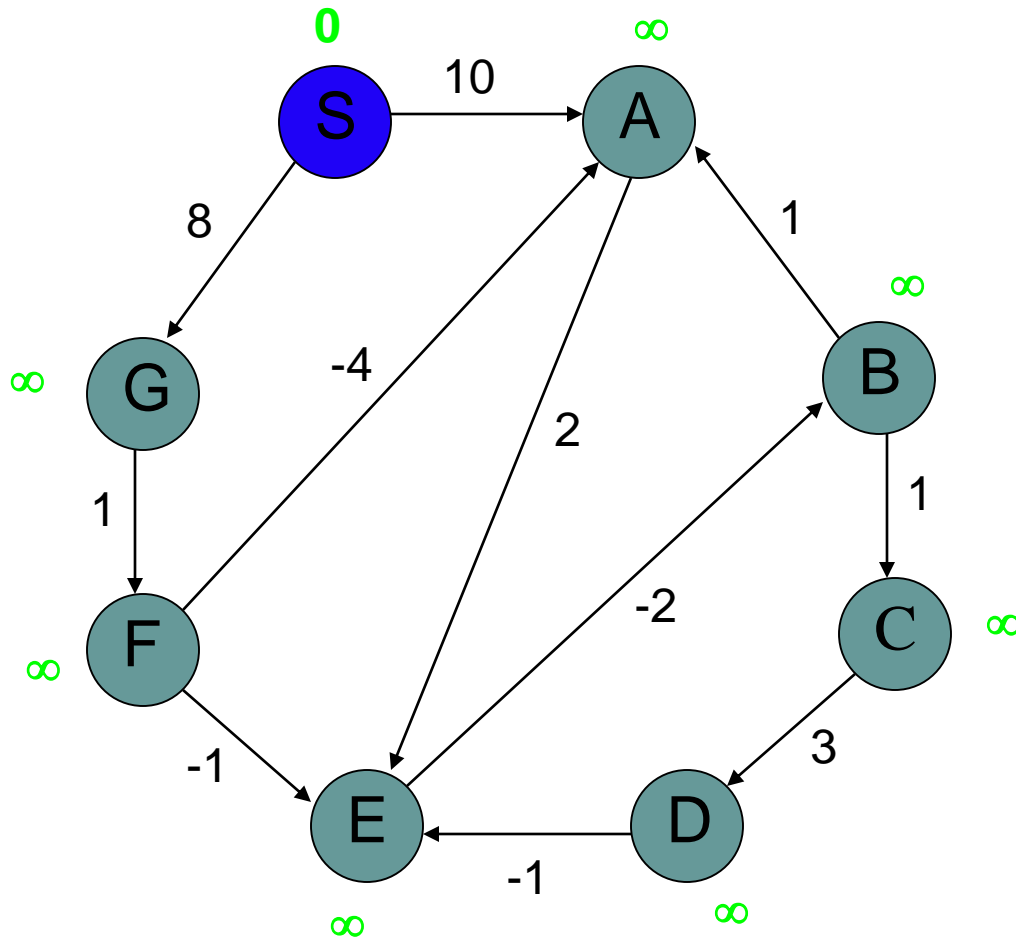
How many edges is the shortest path from s to:

A: 3

B: 5

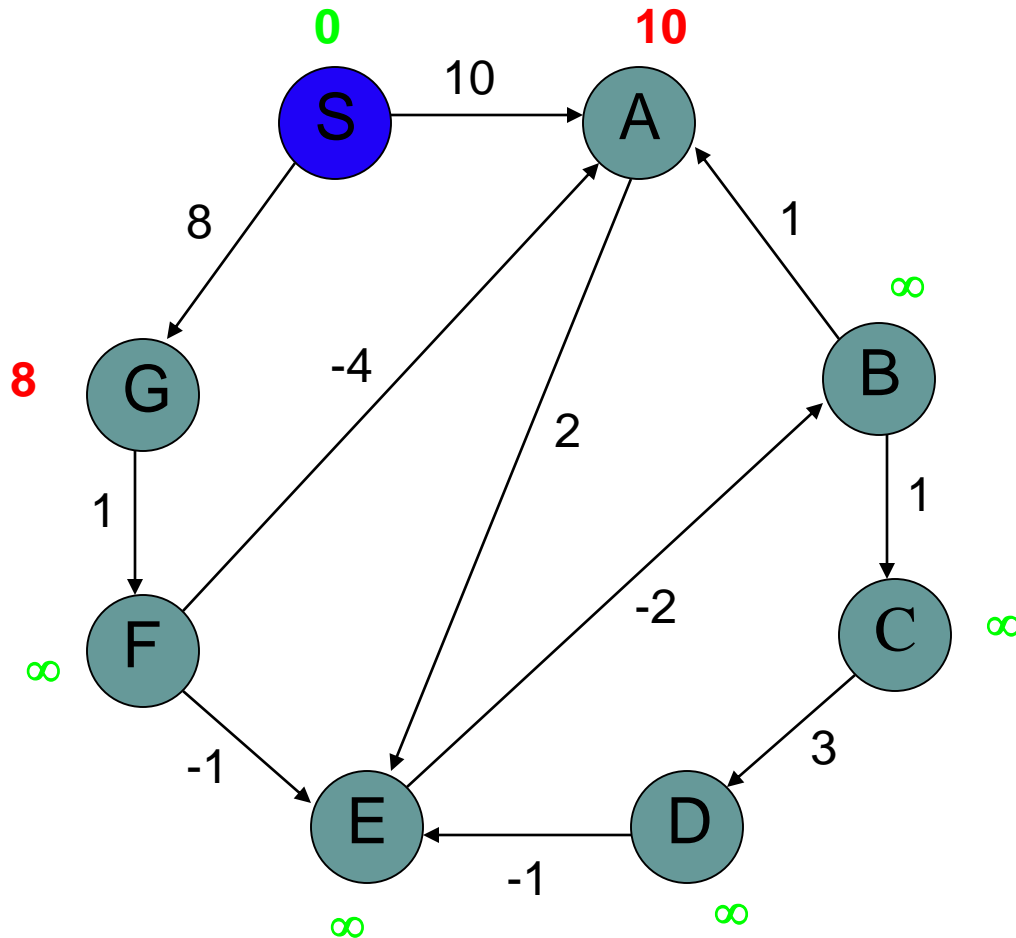
D: 7

# Bellman-Ford algorithm



Iteration: 0

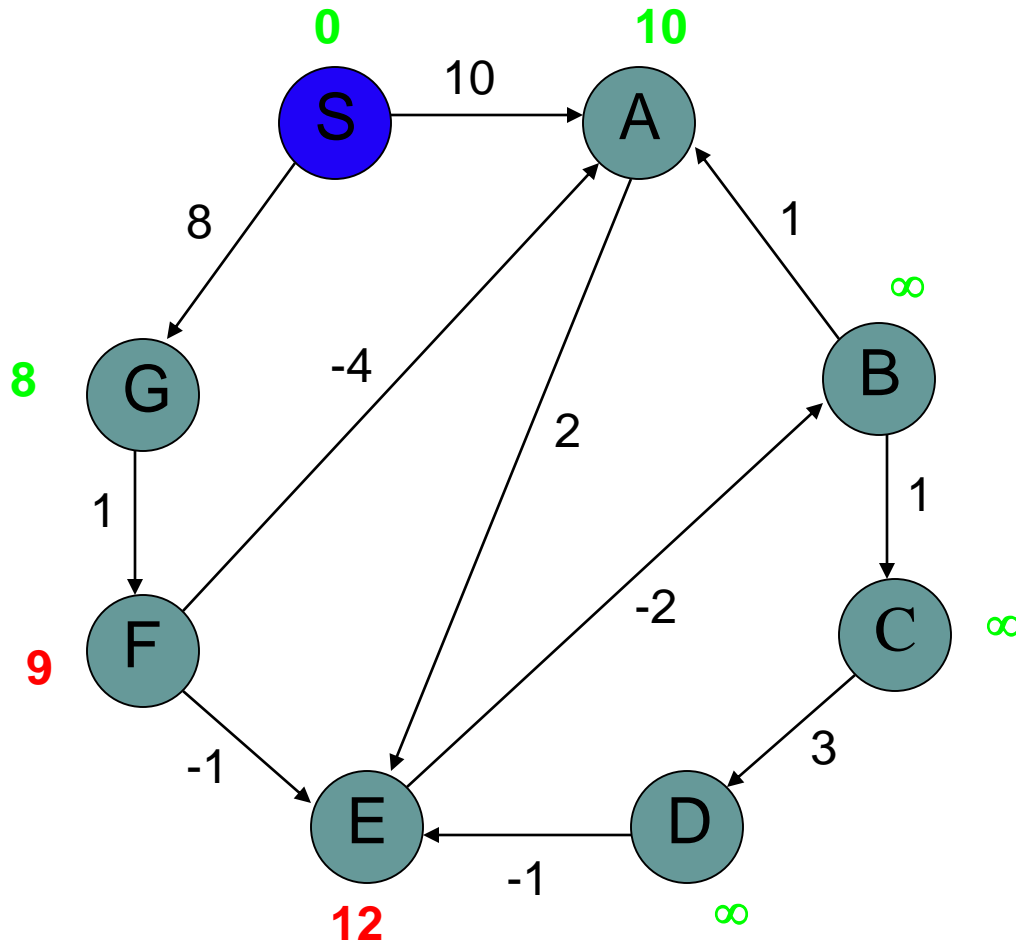
# Bellman-Ford algorithm



Iteration: 1

간선하나사용

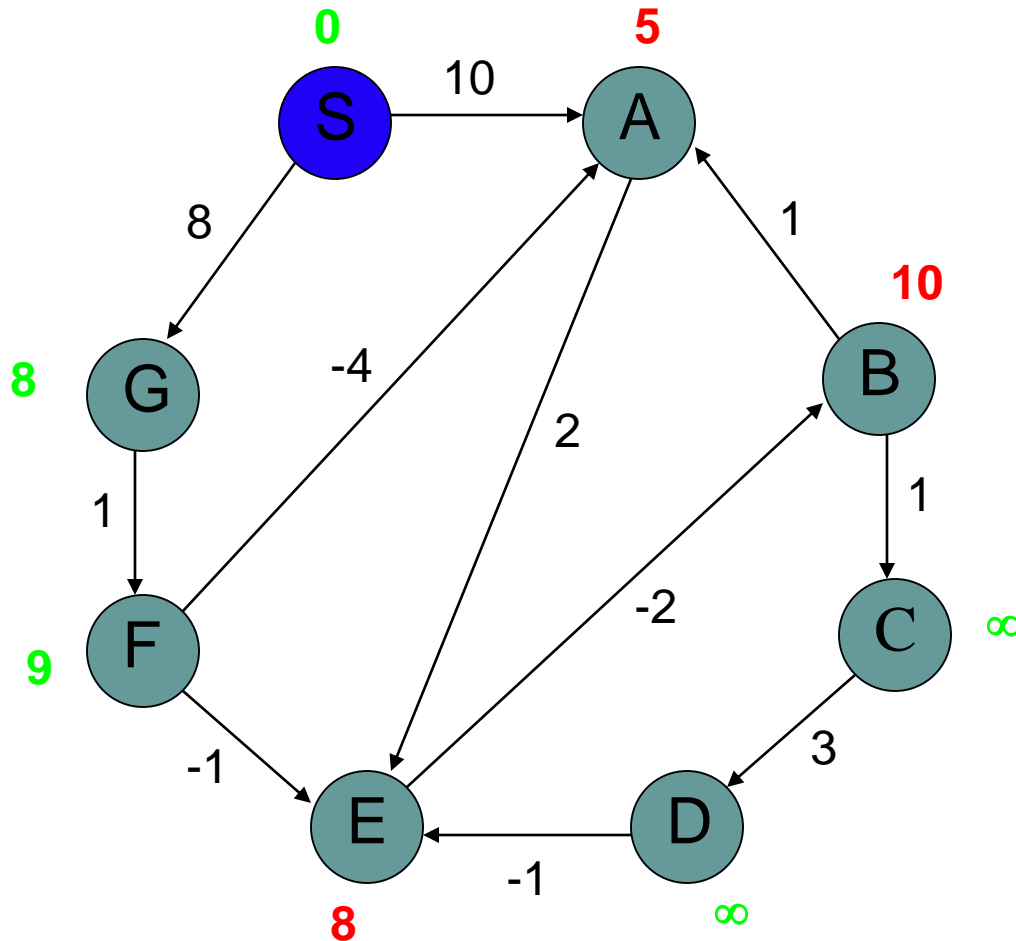
# Bellman-Ford algorithm



Iteration: 2

간선2개 사용

# Bellman-Ford algorithm



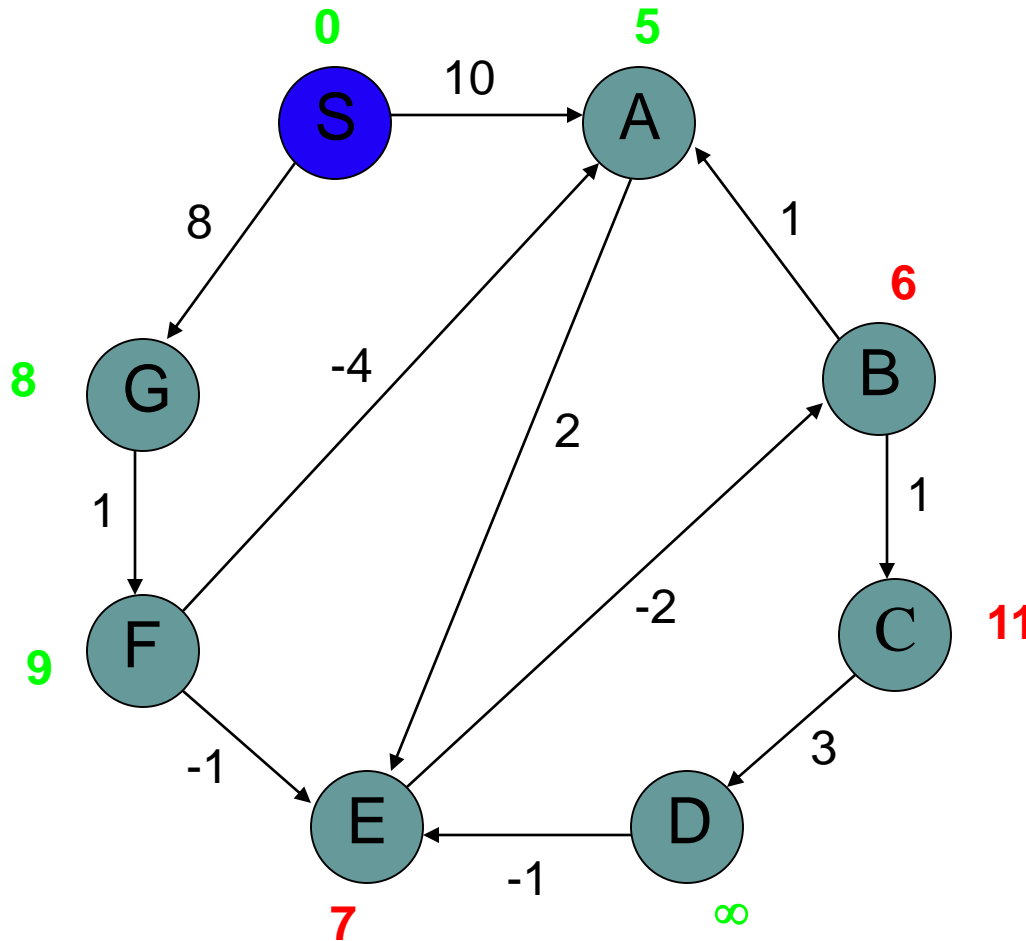
Iteration: 3

A has the correct  
distance and path

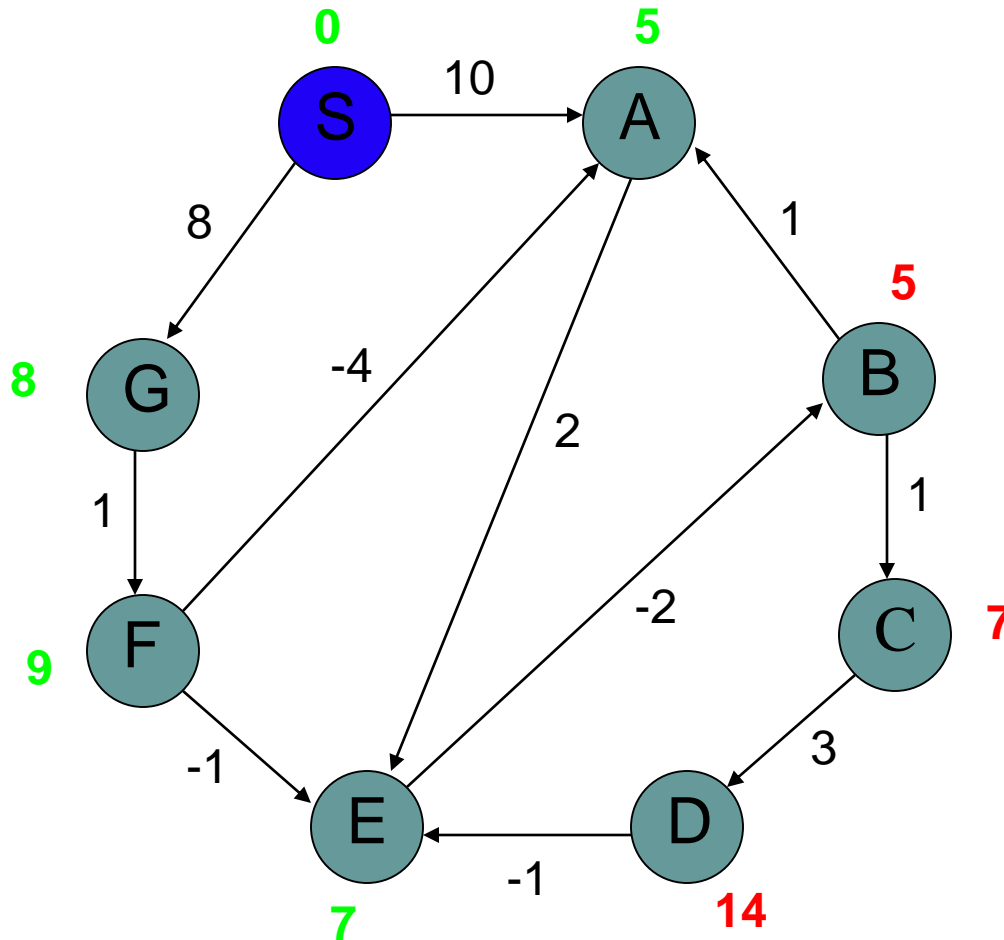
간선3개사용

# Bellman-Ford algorithm

Iteration: 4



# Bellman-Ford algorithm

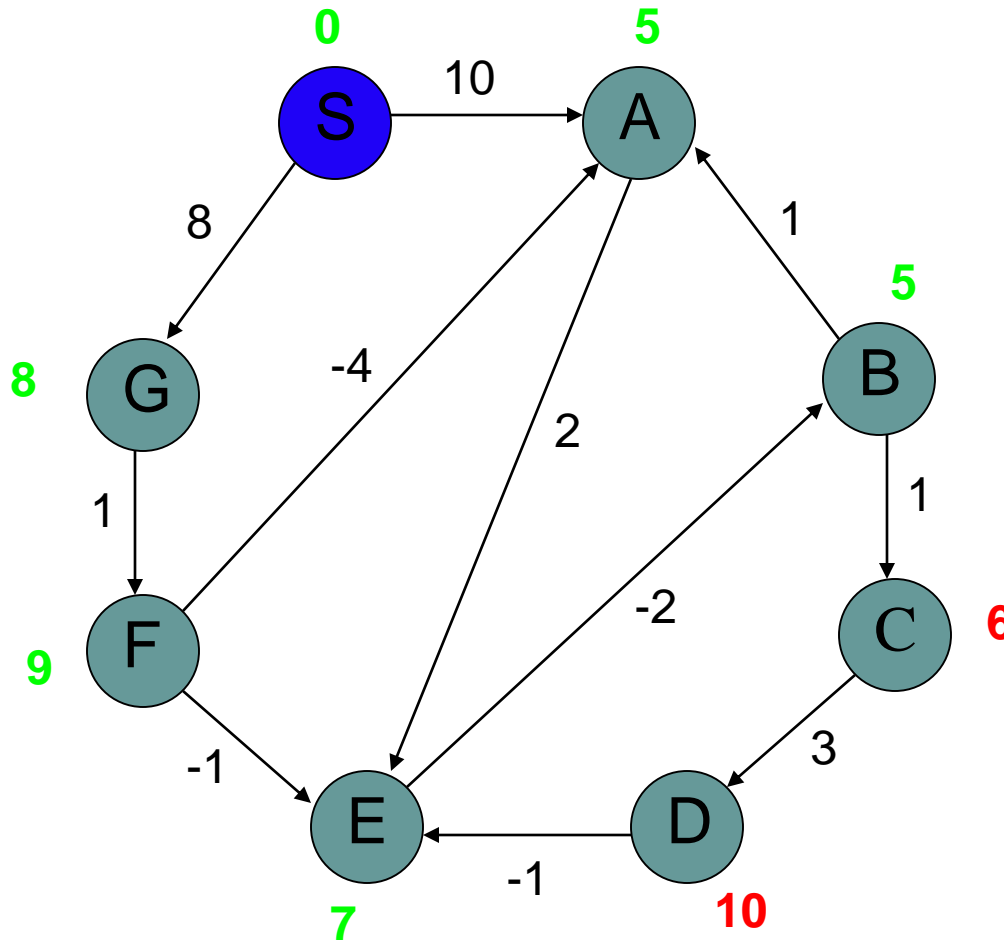


Iteration: 5

B has the correct distance and path

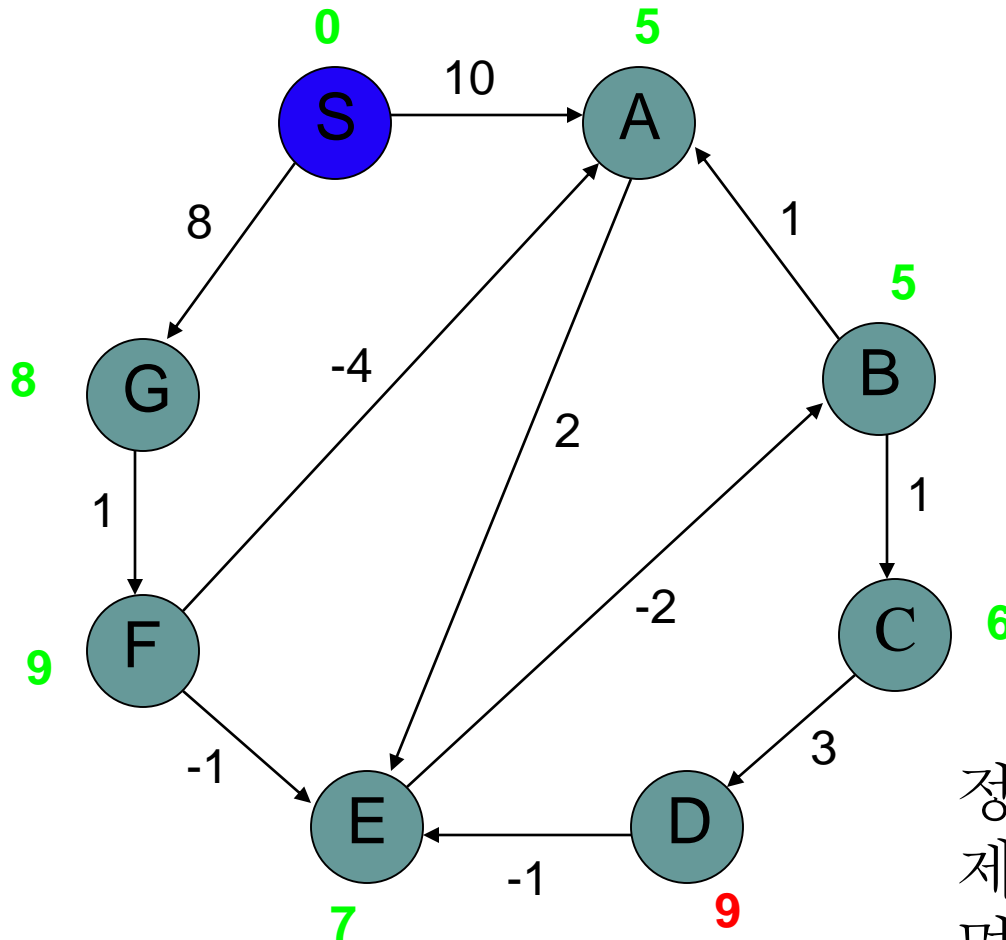
# Bellman-Ford algorithm

Iteration: 6





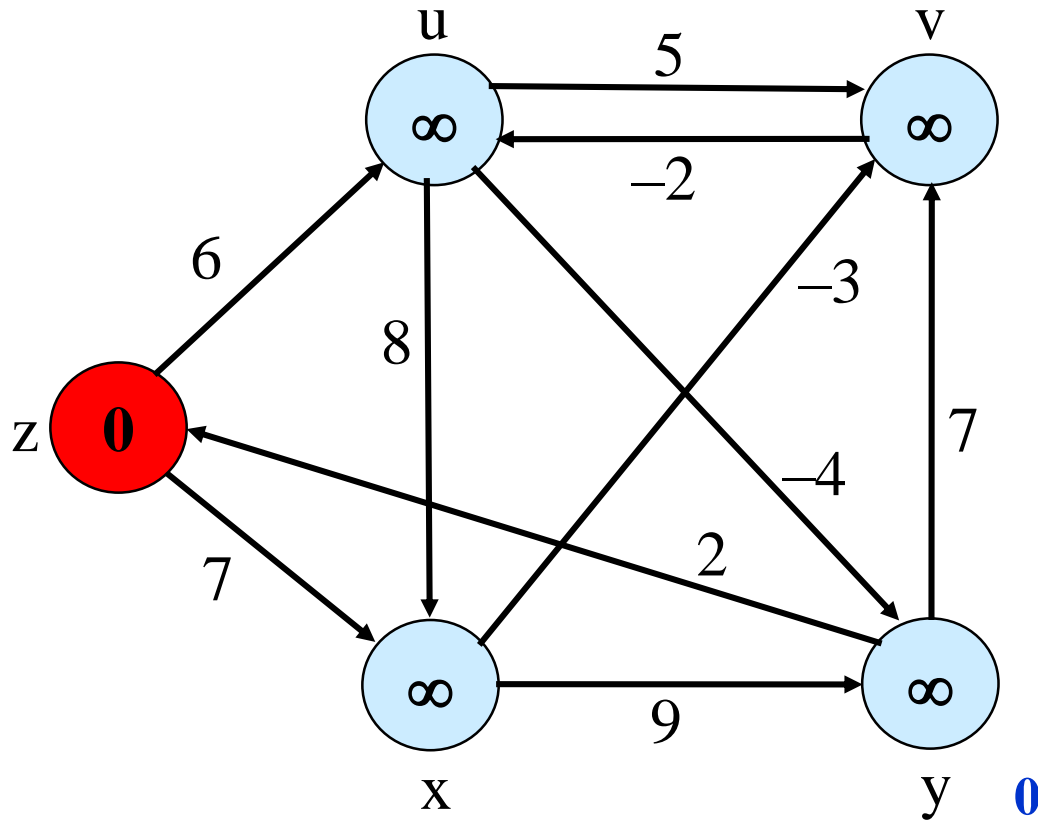
# Bellman-Ford algorithm



정점의 개수가 출발점을 제외하고 7이므로 여기서 멈춤. 간선 7개를 고려함.

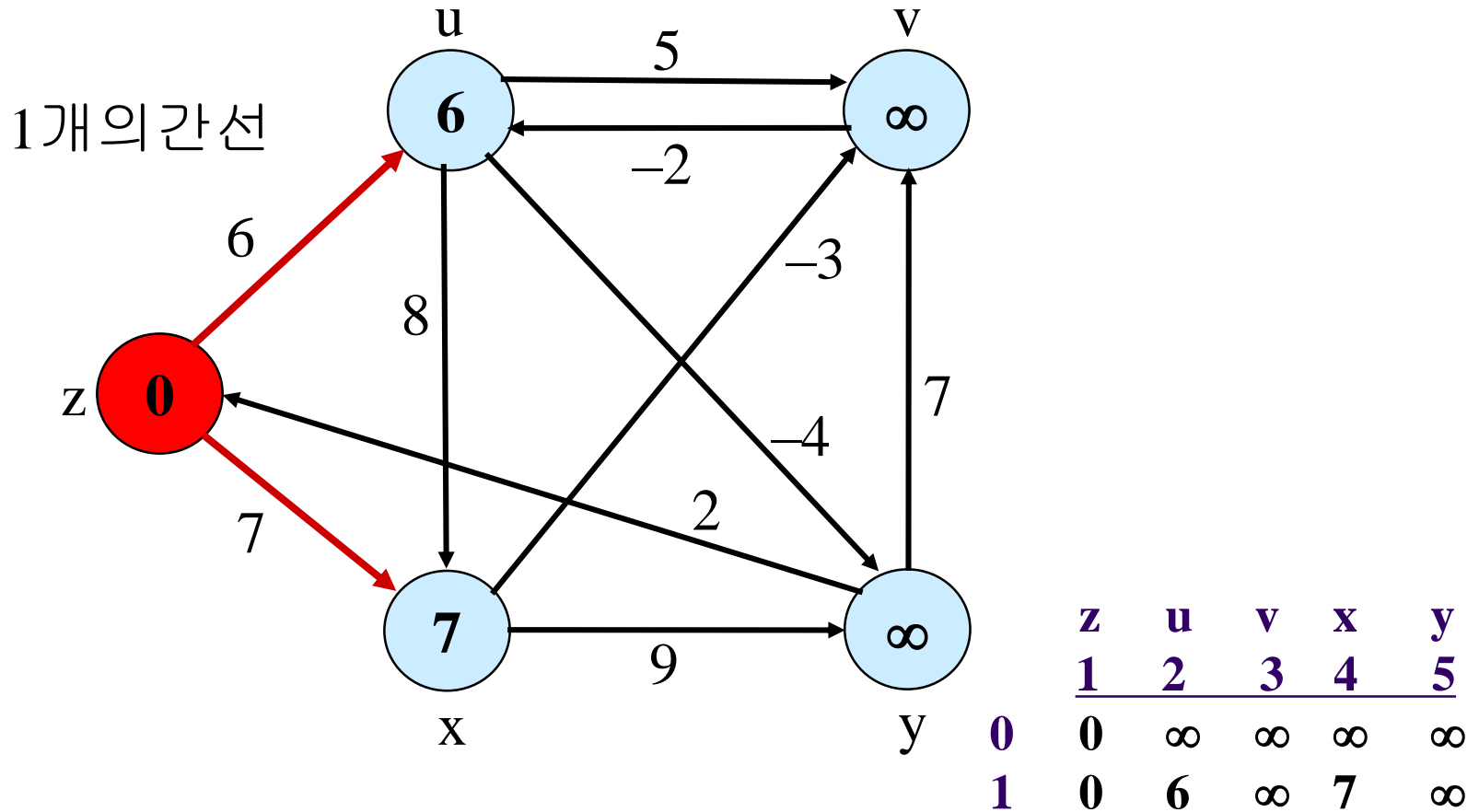
# Example 1

# Example

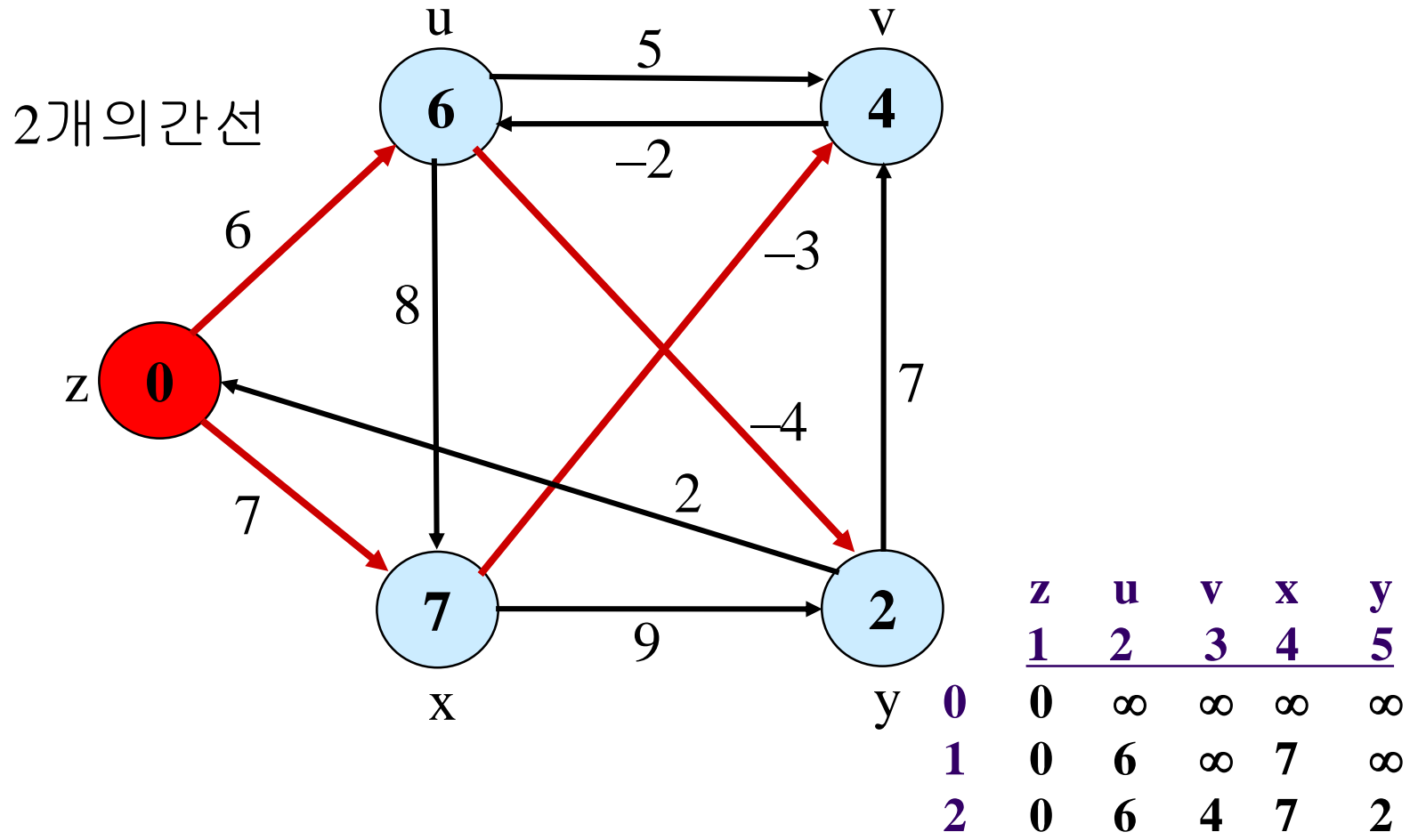


<b>z</b>	<b>u</b>	<b>v</b>	<b>x</b>	<b>y</b>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>0</b>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

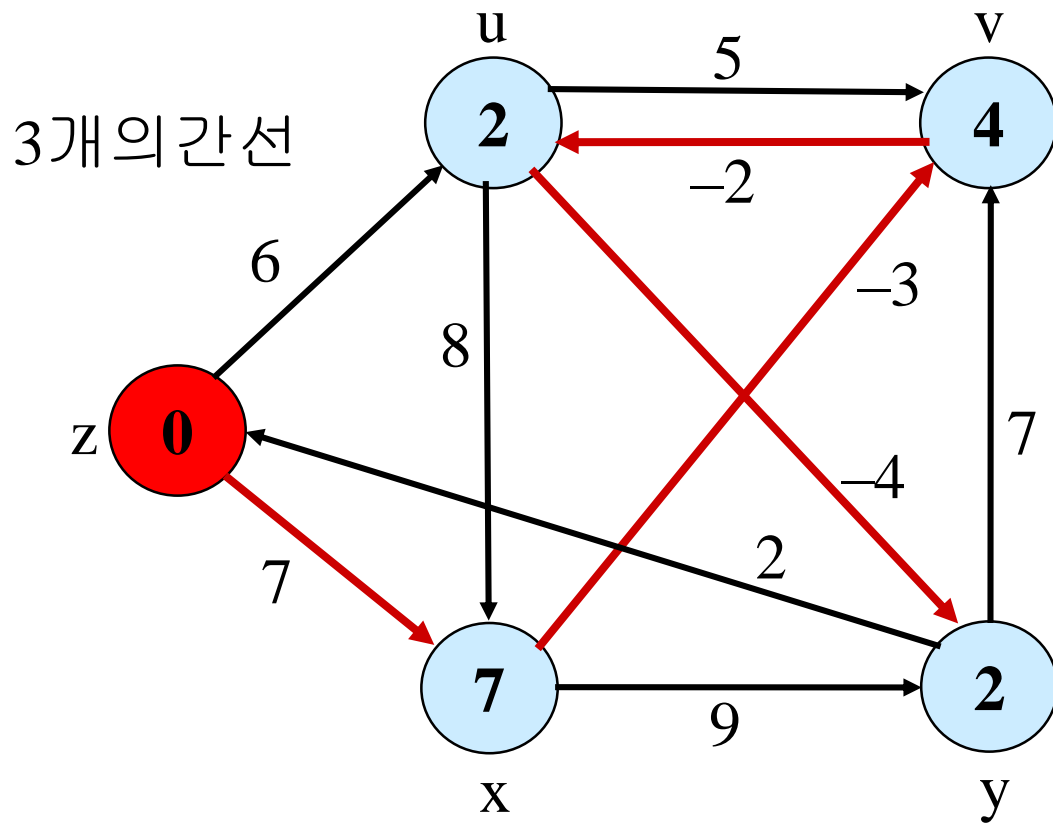
# Example



# Example

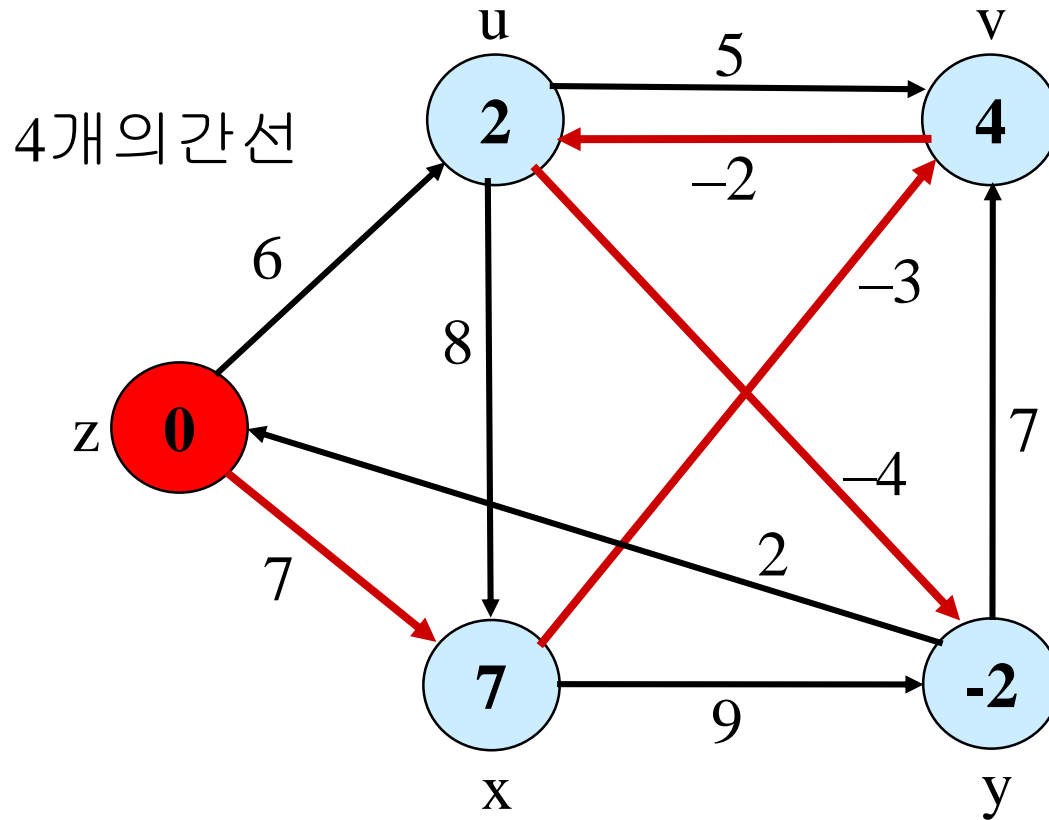


# Example



	z	u	v	x	y
1	2	3	4	5	
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	6	$\infty$	7	$\infty$
2	0	6	4	7	2
3	0	2	4	7	2

# Example

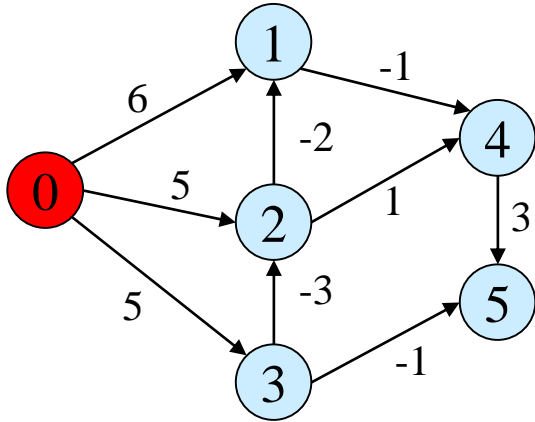


	z	u	v	x	y
1	2	3	4	5	
0	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
1	0	6	$\infty$	7	$\infty$
2	0	6	4	7	2
3	0	2	4	7	2
4	0	2	4	7	-2

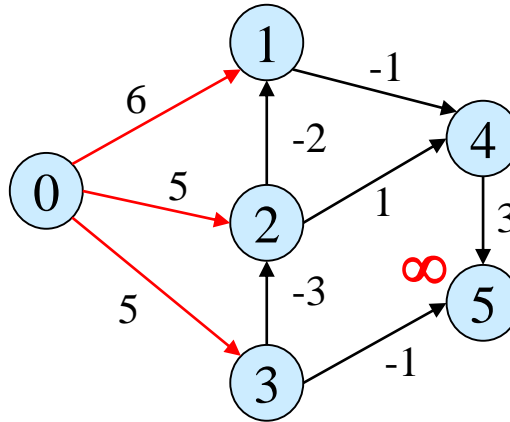
## Example 2



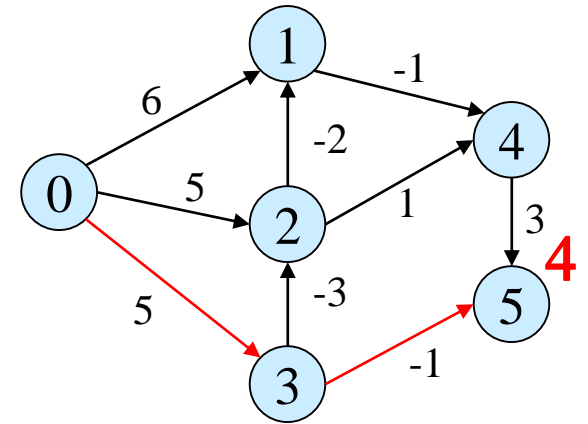
# 정점 0에서 5까지 최단거리



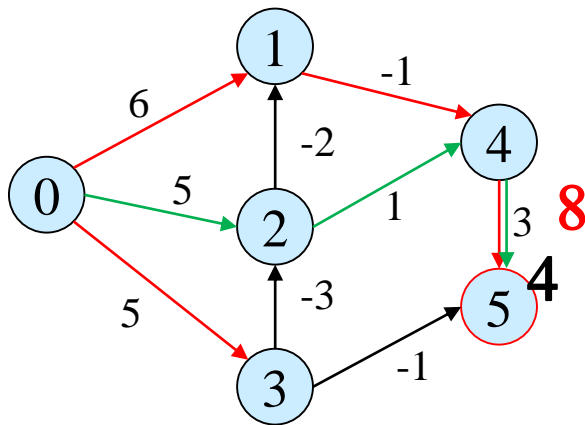
(a) 방향 그래프(시작점 0)



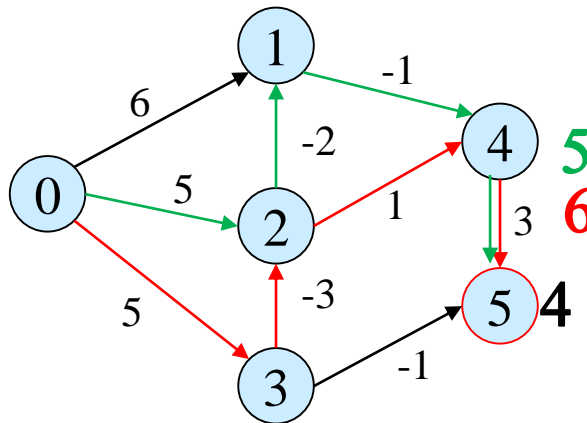
(b) 간선 하나 사용( $\text{Dist}^1$ )



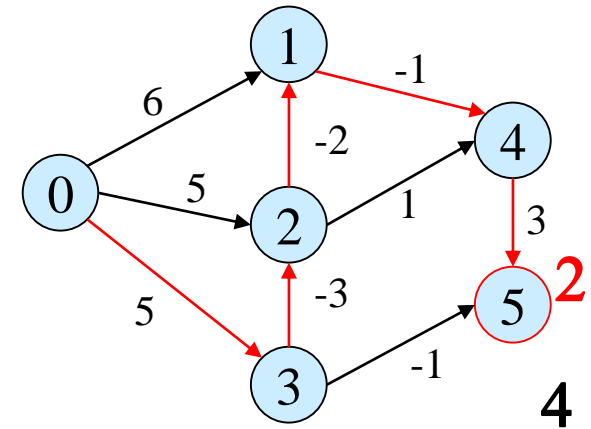
(c) 간선 두 개 사용( $\text{Dist}^2$ )



(d) 간선 세 개 사용( $\text{Dist}^3$ )

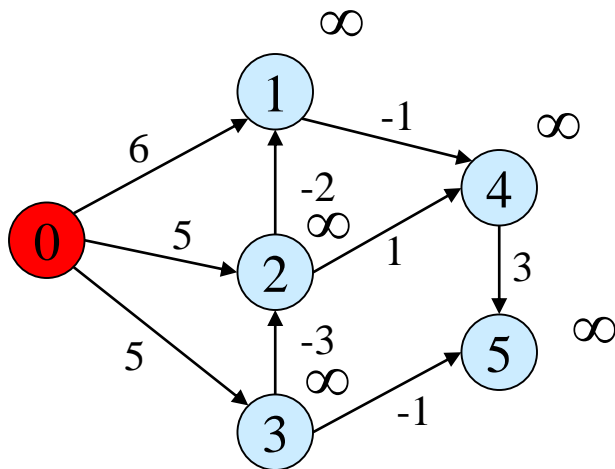


(e) 간선 네 개 사용( $\text{Dist}^4$ )



(f) 간선 다섯 개 사용( $\text{Dist}^5$ )

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	∞	∞
[1]	∞	0	∞	∞	-1	∞
[2]	∞	-2	0	∞	1	∞
[3]	∞	∞	-3	0	∞	-1
[4]	∞	∞	∞	∞	0	3
[5]	∞	∞	∞	∞	∞	0

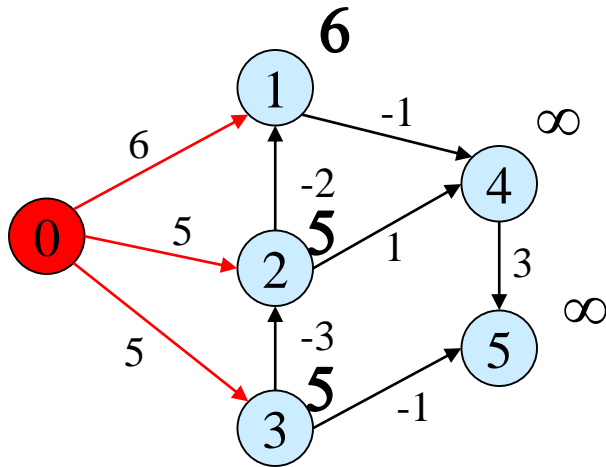
(b) weight[6, 6]

Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	∞	∞	∞	∞	∞
Dist <sup>2</sup>						
Dist <sup>3</sup>						
Dist <sup>4</sup>						
Dist <sup>5</sup>						

(c) Dist<sup>1</sup> 계산 단계(간선 하나만을 사용)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

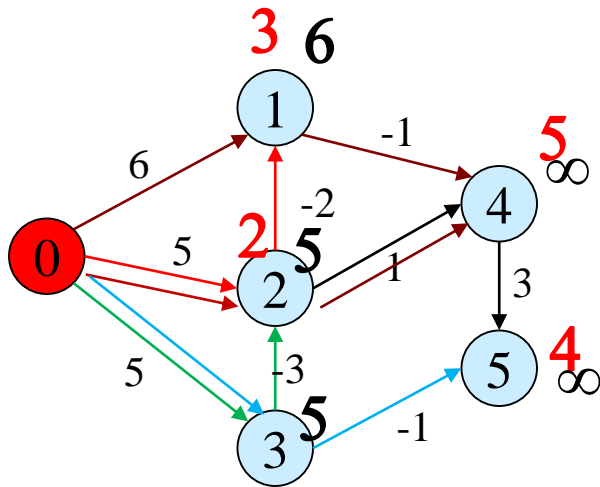
간선하나사용 →

Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>						
Dist <sup>3</sup>						
Dist <sup>4</sup>						
Dist <sup>5</sup>						

(c) Dist<sup>1</sup> 계산 단계(간선 하나만을 사용)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

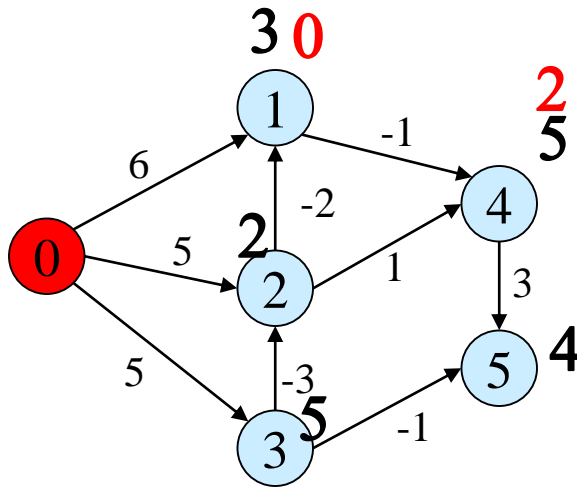
간선두개까지사용 →

Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>		3	2	5	5	4
Dist <sup>3</sup>						
Dist <sup>4</sup>						
Dist <sup>5</sup>						

(c) Dist<sup>2</sup> 계산 단계(간선 두 개까지 고려)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

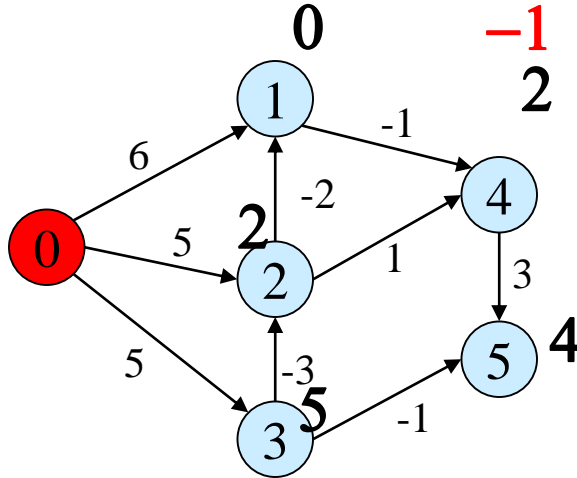
Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>		3	2	5	5	4
Dist <sup>3</sup>		0	2	5	2	4
Dist <sup>4</sup>						
Dist <sup>5</sup>						

간선세개까지사용 →

(c) Dist<sup>3</sup> 계산 단계(간선 세개까지 고려)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

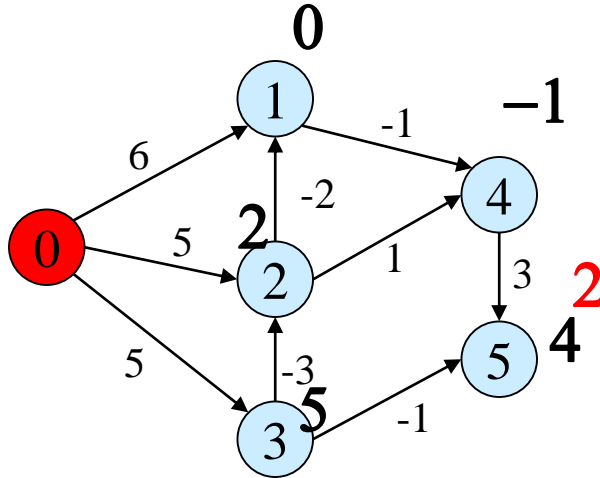
Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>		3	2	5	5	4
Dist <sup>3</sup>		0	2	5	2	4
Dist <sup>4</sup>		0	2	5	-1	4
Dist <sup>5</sup>						

간선 네 개까지 사용 →

(c) Dist<sup>4</sup> 계산 단계(간선 네 개까지 고려)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

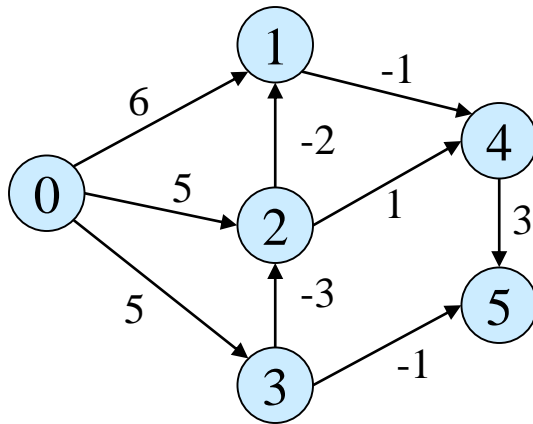
Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>		3	2	5	5	4
Dist <sup>3</sup>		0	2	5	2	4
Dist <sup>4</sup>		0	2	5	-1	4
Dist <sup>5</sup>		0	2	5	-1	2

간선 다섯 개까지 사용 →

(c) Dist<sup>5</sup> 계산 단계(간선 다섯 개까지 고려)

음의 가중치가 허용된 최단 경로

# 음의 가중치가 허용된 최단 경로(3)



(a) 방향 그래프(시작점 0)

	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
[0]	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
[1]	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	-1	$\infty$
[2]	$\infty$	-2	0	$\infty$	1	$\infty$
[3]	$\infty$	$\infty$	-3	0	$\infty$	-1
[4]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	3
[5]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0

(b) weight[6, 6]

Dist <sup>k</sup>	Dist[6]					
	[0]	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Dist <sup>1</sup>	0	6	5	5	$\infty$	$\infty$
Dist <sup>2</sup>	0	3	2	5	5	4
Dist <sup>3</sup>	0	0	2	5	2	4
Dist <sup>4</sup>	0	0	2	5	-1	4
Dist <sup>5</sup>	0	0	2	5	-1	2

(c) Dist<sup>5</sup> 계산 단계

음의 가중치가 허용된 최단 경로







감사합니다.